Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

1. Bezeichnungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

1. Bezeichnungen

Ein einfacher Fall eines linearen Gleichungssystems sind zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x - 3y = 21 \\ \text{II} & 3x + 4y = 6 \end{array}$$

Linear heißt ein Gleichungssystem, wenn in allen Gleichungen die Unbekannten höchstens in der ersten Potenz vorkommen. Weil wir künftig auch mit mehr als zwei Unbekannten arbeiten werden, numerieren wir sie und schreiben statt x, y, z, (?)... nun $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$. Das Gleichungssystem schaut dann so aus

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 - 3x_2 = 21 \\ \text{II} & 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{array}$$

Eine Lösung ist ein **Zahlenpaar**; man schreibt $x_1 = 6$, $x_2 = -3$ oder kürzer $(6 \mid -3)$ oder das ganze untereinander $\binom{6}{-3}$.

Ein allgemeines lineares Gleichungssystem besteht aus **m Gleichungen** mit **n Unbekannten**. Man bezeichnet es auch als **m, n-System**.

Eine Lösung ist ein **n-Tupel** von Zahlen $(x_1 \mid x_2 \mid \dots \mid x_n)$ beziehungsweise $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Beispiel für ein 2,3-System:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ \text{II} & x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{array}$$

Eine Lösung ist das 3-Tupel $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, eine andere $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Statt 3-Tupel sagt man auch Tripel.

Normalerweise schreibt man die Gleichungen so, daß alle Unbekannten auf der linken Seite und die konstanten Summanden auf der rechten Seite stehen. Haben alle Konstanten den Wert null, dann nennt man das Gleichungssystem **homogen**, sonst heißt das Gleichungssystem **inhomogen**.

Beispiel für ein homogenes 3, 3-System:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ \text{II} & x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \text{III} & 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{array}$$

Die Faktoren bei den Unbekannten und die Konstanten heißen **Koeffizienten** des Systems. Dank einer raffinierten Kennzeichnung sieht man sofort, an welche Stelle im System der Koeffizient hingehört:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \text{II} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots & \dots \\ \text{(m)} & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

a_{32} ist zum Beispiel der Koeffizient in der 3.Gleichung bei der Unbekannten x_2.
b_3 ist die Konstante der 3.Gleichung.

Ziel unsrer Untersuchungen wird es sein, bei einem m,n-System herauszufinden:

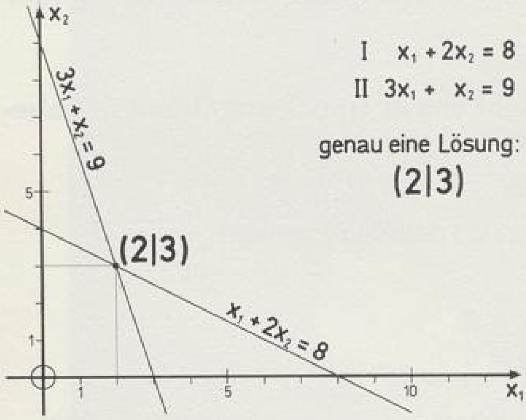
- wann ist das System überhaupt lösbar ?
- wann hat das System genau eine Lösung ?
- wie findet man die Lösung(en) ?
- wie stellt man die Lösungsmenge übersichtlich dar ?

Erstaunlicherweise treten alle möglichen Fälle von Lösungsmengen schon bei 2,2-Systemen auf und sind durch geometrische Überlegungen sogar leicht verständlich. Man deutet die beiden Zeilen des Systems als Gleichungen von Geraden:

genau eine Lösung:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 = 8 \\ \text{II} & 3x_1 + x_2 = 9 \end{array} \qquad \text{Lösung } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

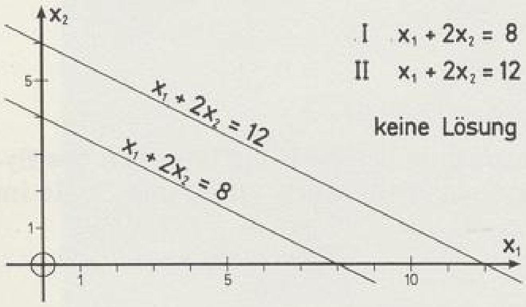
Deutung: Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt (2 | 3).

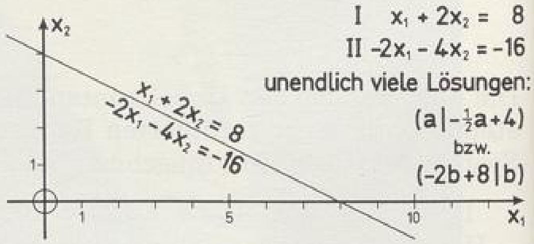


keine Lösung:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 = 8 \\ \text{II} & x_1 + 2x_2 = 12 \end{array}$$

Deutung: Die beiden Geraden sind parallel, fallen aber nicht zusammen.





unendlich viele Lösungen:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + 2x_2 = 8 \\ \text{II} & -2x_1 - 4x_2 = -16 \end{array} \qquad \text{Lösung } \begin{pmatrix} -2b + 8 \\ b \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge kann man mit einem Parameter b darstellen. Für jeden Wert $b \in \mathbb{R}$ ergibt sich eine andre Lösung. Deutung: Die beiden Geraden sind identisch. Die Lösungen sind die Punkte der Gerade. Der Parameter numeriert sie durch.

Aufgaben

1. Bestimme die Lösungen und zeichne die zugehörigen Geraden:

a) I $x_1 + x_2 = 1$; II $2x_1 - x_2 = 8$

b) I $-4x_1 + 2x_2 = -6$; II $6x_1 - 3x_2 = 9$

c) I $x_1 - x_2 = 0$; II $x_1 + x_2 = 0$

d) I $6x_1 - 9x_2 = 1$; II $4x_1 - 6x_2 = 0$

e) I $3x_1 - 0{,}5x_2 = 0$; II $-6x_1 + x_2 = 0$

f) I $x_1 = 1$; II $x_2 = 2$

2. Gib ein 2,2-System an, das die Lösung $\binom{2}{-4}$ hat und

a) keine weitere Lösung hat

b) auch noch die Lösung $\binom{1}{1}$ hat c) homogen ist.

3. Ein m,2-System hat die Lösung $\binom{2}{3}$. Gib ein Beispiel an für $m = 1, 2, 3$.

Kann man es so einrichten, daß $\binom{2}{3}$ jeweils die einzige Lösung ist?

4. I $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$
II $2x_1 + 2x_2 = 0$ Gib die Koeffizienten an: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{23}$ und b_1.

5. Gib ein 3,2-System an, für das gilt:

a) $a_{11} = a_{21} = 1$, $b_1 = -b_2 = 2$ $a_{12} = b_3 = 0$, $a_{31} = 2a_{32} = -a_{22} = 6$

b) $a_{i1} = 1$, $a_{k2} = -1$, $b_j = j$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$

c) $a_{ik} = i + k$, $b_j = 0$ $(i, j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2)$

6. In einem homogenen 3,3-System gilt $a_{21} = -1$, $a_{13} = a_{23} = 2$ und $a_{ik} = -a_{ki}$ $(i,k = 1, 2, 3)$. Schreib das Gleichungssystem hin.