Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

VII. Geraden im Raum

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

VII. Geraden im Raum

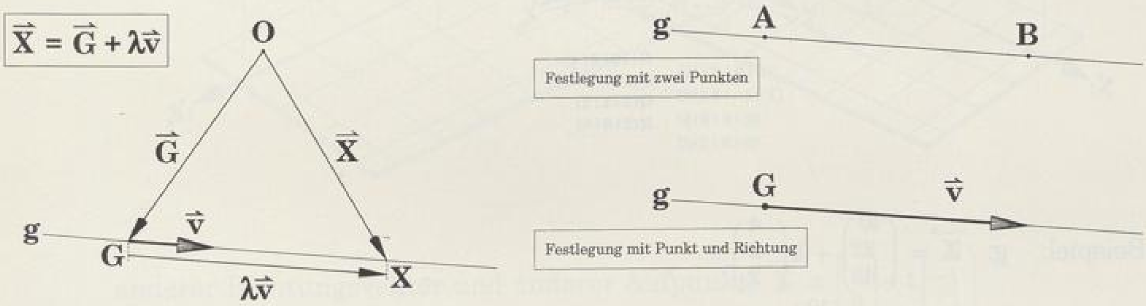
1. Geradengleichung

In der Analytischen Geometrie löst man geometrische Probleme durch Rechnung. Deshalb muß man die geometrischen Figuren wie Geraden und Ebenen mit Gleichungen beschreiben. Zur Aufstellung einer Geradengleichung braucht man die **Bestimmungsstücke** der Gerade:

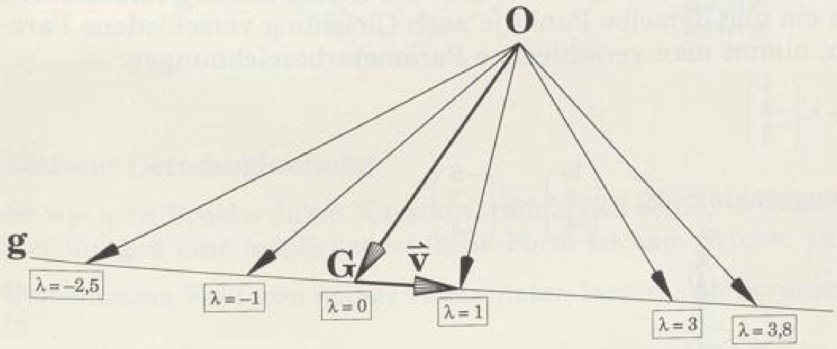
– zwei Punkte A und B

oder

– einen Punkt G und einen Vektor $\vec{v}$ in Richtung der Gerade.



Eine Geradengleichung beschreibt die Ortsvektoren $\vec{X}$ aller Geradenpunkte. Für diese Beschreibung eignet sich die Festlegung durch Punkt und Richtung am besten: Man wählt einen Punkt G der Gerade g als **Aufpunkt** und einen Vektor $\vec{v}$ in Richtung von g als **Richtungsvektor**. Der Ortsvektor $\vec{X}$ eines beliebigen Geradenpunkts X läßt sich dann darstellen als Summe von $\vec{G}$ und einem Vielfachen von $\vec{v}$: $\vec{X} = \vec{G} + \lambda\vec{v}$. Der Faktor λ heißt **Parameter** des Punkts X. Durchläuft der Parameter λ alle reellen Zahlen, so beschreibt die Gleichung alle Punkte der Gerade; bildlich gesehen tastet dann die Spitze des Ortsvektors $\vec{X}$ alle Geradenpunkte ab.



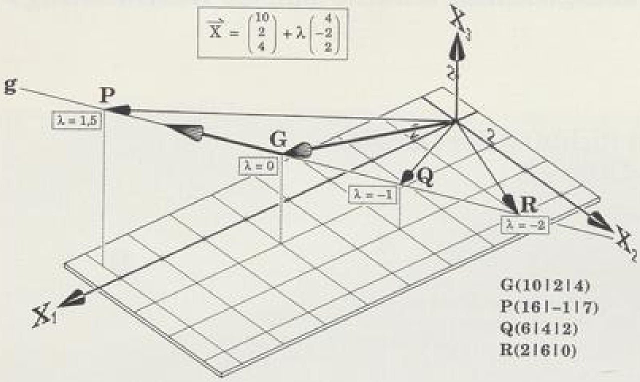
Zusammenfassung

Ist G ein beliebiger Punkt der Gerade g und $\vec{v}$ ein Vektor in Richtung g,

dann nennt man $\mathbf{g}: \ \vec{X} = \vec{G} + \lambda\vec{v}, \ \lambda \in \mathbb{R}$ eine Gleichung von g.

G heißt Aufpunkt, $\vec{v}$ Richtungsvektor und λ Parameter der Geradengleichung.

Man nennt eine solche Geradengleichung auch Parameterform oder Punkt-Richtungs-Form. Sie ist freilich nur sinnvoll, solange $\overrightarrow{v}$ nicht der Nullvektor ist. Die Bedingung $\lambda \in \mathbb{R}$ läßt man aus Bequemlichkeit meist weg.



Beispiel: g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}10\\2\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$

$\lambda = 0: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}10\\2\\4\end{pmatrix}$, G(10 | 2 | 4) liegt auf g (klar!)

$\lambda = 1{,}5: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}16\\-1\\7\end{pmatrix}$, P(16 | −1 | 7) liegt auf g

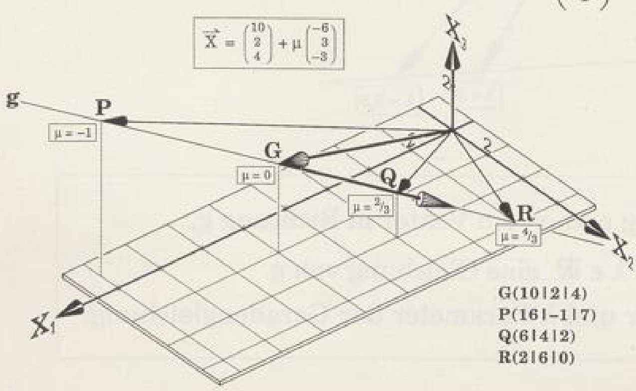
$\lambda = -1: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}6\\4\\2\end{pmatrix}$, Q(6 | 4 | 2) liegt auf g

$\lambda = -2: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}$, R(2 | 6 | 0) liegt auf g.

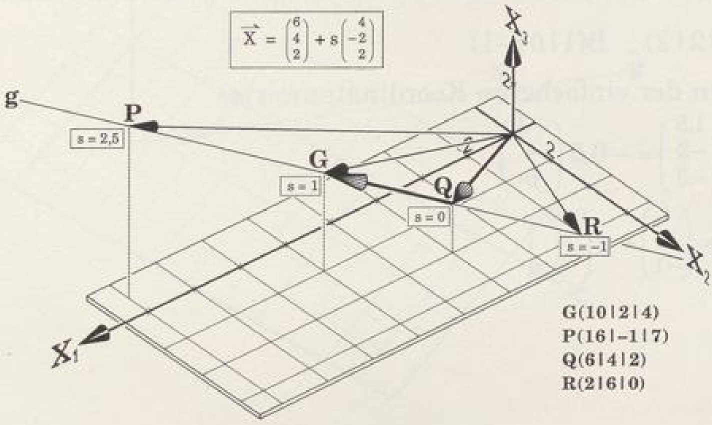
Je nach Wahl von Aufpunkt und Richtungsvektor gibt es für eine Gerade verschiedene Gleichungen. Weil dann ein und derselbe Punkt je nach Gleichung verschiedene Parameterwerte haben kann, nimmt man verschiedene Parameterbezeichnungen:

Beispiel: g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}10\\2\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$

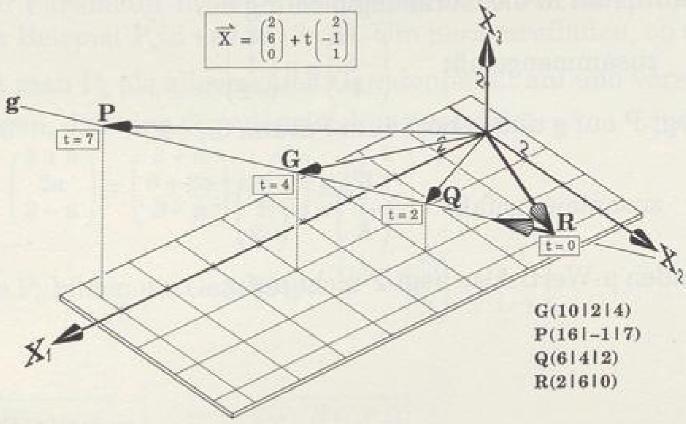
anderer Richtungsvektor: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}10\\2\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-6\\3\\-3\end{pmatrix}$



anderer Aufpunkt: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$



anderer Richtungsvektor und anderer Aufpunkt: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Einfache Geradengleichung

So wie man Brüche durch Kürzen vereinfachen sollte, so sollte man auch bei Geradengleichungen eine möglichst einfache Form suchen. Schaue auf den Richtungsvektor!

Gemeinsame Faktoren seiner Koordinaten lassen sich herausziehen, zum Beispiel −3 in

$$g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{einfacher} \qquad g\colon \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geometrisch bedeutet das den Übergang zu einem kollinearen Richtungsvektor. Beim Ortsvektor des Aufpunkts ist dieses Verfahren im allgemeinen verboten! Man würde dadurch die Gerade ja parallel verschieben.

Gerade durch zwei Punkte

Sind von der Gerade h zwei Punkte A und B bekannt, so wählt man einen davon als Aufpunkt. Als Richtungsvektor nimmt man $\overrightarrow{AB}$ oder einen dazu kollinearen Vektor:

Gegeben: $A(-0{,}5 \mid 2 \mid 2)$, $B(1 \mid 0 \mid -1)$

Aufpunkt: B (wegen der einfacheren Koordinatenwerte)

Richtung: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = -0{,}5 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Gleichung: $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Punkt auf Gerade ?

Liegen die Punkte $P(-6 \mid -5 \mid 5)$ und $Q(14 \mid 0 \mid 7)$ auf der Gerade $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$?

Wir setzen die Punktkoordinaten in die Geradengleichung ein

$P: \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, zusammengefaßt $\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\mu = -2$, paßt! Also liegt P auf g und gehört zum Parameter -2.

$Q: \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, zusammengefaßt $\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

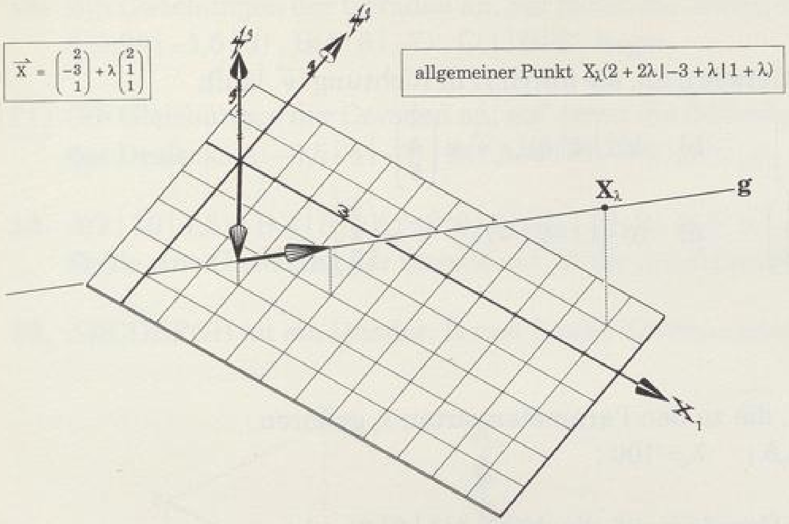
Es gibt keinen passenden μ-Wert. Also liegt P nicht auf g.

Allgemeiner Geradenpunkt

Manchmal ist es nützlich, mit dem »**allgemeinen Geradenpunkt**« zu arbeiten. Sein Ortsvektor ergibt sich, wenn man die rechte Seite der Geradengleichung zusammenfaßt. So hat von

$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ der allgemeine Punkt X_λ den Ortsvektor $\overrightarrow{X_\lambda} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda \\ -3+\lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix}$

Mit dem allgemeinen Punkt findet man zum Beispiel bequem den Punkt P auf g, der 5 Einheiten über der x_1x_2-Ebene liegt. Für ihn gilt $x_3 = 5$, also $1 + \lambda = 5$. Der Punkt hat den Parameterwert $\lambda = 4$; eingesetzt in $\overrightarrow{X_\lambda}$ ergibt sich $\overrightarrow{X_4} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ergebnis: $P(10 \mid 1 \mid 5)$

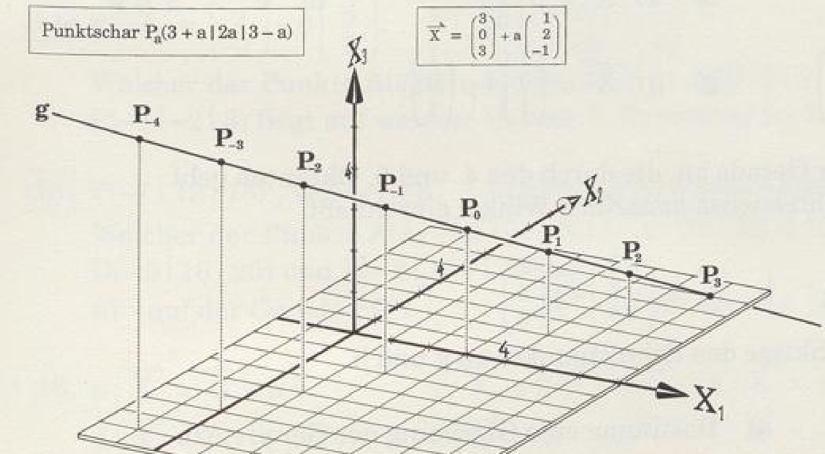


Punktschar

Kommt ein Parameter in den Punktkoordinaten vor, so spricht man von einer Punktschar, zum Beispiel $P_a(3+a \mid 2a \mid 3-a)$. Um herauszufinden, ob die Schar P_a eine Gerade bildet, faßt man P_a als allgemeinen Geradenpunkt auf und versucht, den Ortsvektor $\overrightarrow{P_a}$ so zu zerlegen, daß eine Geradengleichung entsteht:

$$\overrightarrow{P_a} = \begin{pmatrix} 3+a \\ 2a \\ 3-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+a \\ 0+2a \\ 3-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Punkte P_a bilden die Gerade g : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$



Aufgaben

$\boxed{1.}$ Gib eine Gleichung der Gerade g an, die durch A in Richtung $\vec{v}$ läuft:

a) $A(0|3|1)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $A(2|4|6)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $A(0|0|0)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ d) $A(-1|-2|-7)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\boxed{2.}$ g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechne die Punkte P_i, die zu den Parameterwerten λ_i gehören

$\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = -1{,}5$; $\lambda_4 = 100$;

$\boxed{3.}$ Stelle die Gleichung der Gerade g auf, die durch $A(1|2|3)$ geht und parallel ist zur

a) x_1-Achse b) x_3-Achse c) Gerade h : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

4. Gib Gleichungen der drei Koordinatenachsen an.

5. Gib Gleichungen der Geraden an, die die Winkel zwischen x_1-Achse und x_3-Achse halbieren.

$\boxed{6.}$ Beschreibe die besondere Lage der Geraden im Koordinatensystem. Zeichnung im Koordinatensystem für **a)** bis **d)** !

a) a: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) b: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) c: $\vec{X} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) d: $\vec{X} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) e: $\vec{X} = \sigma \vec{W}$

f) f: $\vec{X} = \vec{F} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ g) g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. Gib eine Gleichung der Gerade an, die durch den 4. und 6. Oktanten geht und mit jeder Koordinatenachse denselben Winkel einschließt.

8. g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$, h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Überlege dir an einer Skizze den Schnittpunkt von g und h.

$\boxed{9.}$ $A(1|2|3)$, $B(5|6|7)$

a) Bestimme eine Gleichung der Gerade AB.

b) Bestimme eine Gleichung der Halbgerade [AB.

c) Bestimme eine Gleichung der Halbgerade AB].

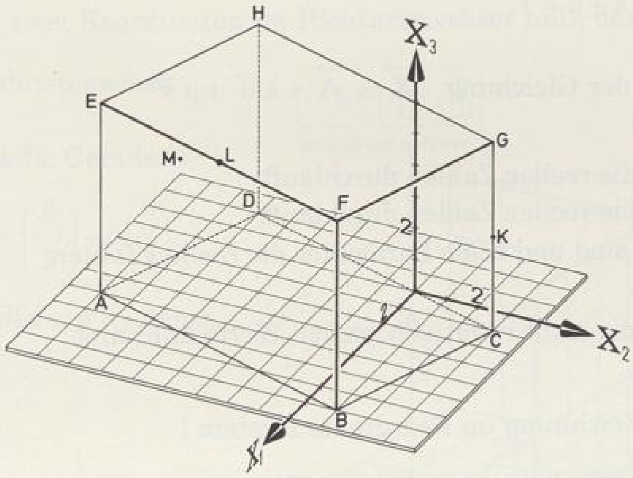
d) Bestimme eine Gleichung der Strecke [AB].

10. Gib Gleichungen der Geraden an, auf denen die Seiten des Dreiecks $A(0{,}25 \mid -1{,}5 \mid 3)$, $B(4 \mid 6 \mid -7)$, $C(1 \mid 0 \mid 2)$ liegen.

$\boxed{11.}$ Gib Gleichungen der Geraden an, auf denen die Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c des Dreiecks $A(-5{,}5 \mid 4 \mid -3)$, $B(7{,}5 \mid 0 \mid 9)$, $C(11{,}5 \mid 2 \mid 9)$ liegen.

12. $A(2 \mid 10 \mid 1{,}5)$, $B(4 \mid 8 \mid 0{,}5)$, $C(6 \mid 6 \mid -2)$, $D(-8 \mid 4 \mid 0)$ ist ein Tetraeder.
Stelle eine Gleichung der Gerade auf, in der die Schwerlinie liegt, die durch D geht.

13. ABCDEFGH ist ein Quader; K und L sind Kantenmitten, M ist Flächenmitte.



Lies die Koordinaten aus dem Bild ab und gib Gleichungen der Geraden an:

a) EF und FG **b)** BE und BG **c)** DF und AG
d) CM und BM **e)** KL und LM

$\boxed{14.}$ $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$, $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$
Welcher der Punkte $A(3 \mid 2 \mid -5)$, $B(-1 \mid 2 \mid 3)$, $C(2 \mid 0 \mid 5)$, $D(1 \mid 1 \mid 1)$ und $E(-1 \mid -2 \mid 3)$ liegt auf welcher Gerade ? Zeichnung im Koordinatensystem !

$\boxed{15.}$ $P(-7 \mid 12 \mid 18)$, $Q(3 \mid -8 \mid 8)$ Zeichnung im Koordinatensystem !
Welcher der Punkte $A(4 \mid -10 \mid 7)$, $B(1 \mid -4 \mid 10)$, $C(-1 \mid 0 \mid -12)$, $D(-9 \mid 16 \mid 20)$ und $E(-6 \mid 10 \mid 17)$ liegt

a) auf der Gerade PQ ? **b)** auf der Strecke [PQ] ?

• **16.** $a: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{G} + \mu\overrightarrow{v}$ $b: \overrightarrow{X} = 2\overrightarrow{G} + \mu\overrightarrow{v}$ $c: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{G} + \mu\cdot 2\overrightarrow{v}$
$d: \overrightarrow{X} = 2\overrightarrow{G} + \mu\cdot 2\overrightarrow{v}$ $e: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{G} - \mu\overrightarrow{v}$ $f: \overrightarrow{X} = -\overrightarrow{G} + \mu\overrightarrow{v}$
$g: \overrightarrow{X} = -\overrightarrow{G} - \mu\overrightarrow{v}$ Welche Geraden sind identisch im Fall

a) $G \neq O$, $\overrightarrow{G}, \overrightarrow{v}$ nicht parallel **b)** $G \neq O$, $\overrightarrow{G}$ parallel $\overrightarrow{v}$

17. $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-4\\7\\-4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-6\\6\\-4\end{pmatrix}$ beschreiben dieselbe Gerade.

a) Welchen μ-Wert hat der Punkt für $\lambda = 1$?

b) Welchen λ-Wert hat der Punkt für $\mu = -2$?

c) Welche Beziehung besteht zwischen λ und μ eines Geradenpunkts ?

• **18.** Wie bewegt sich der Punkt X mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{X} = \dfrac{\overrightarrow{A} + \mu\overrightarrow{B}}{1+\mu}$, wenn μ alle erlaubten reellen Zahlen durchläuft ?

19. Zeige: Ein Punkt P mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{P} = \lambda\overrightarrow{A} + \mu\overrightarrow{B}$ liegt genau dann auf der Gerade AB, wenn gilt: $\lambda + \mu = 1$.

• **20.** Welche Punktmenge wird von der Gleichung $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ ($\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{o}$) beschrieben, wenn

a) λ konstant ist, während μ die reellen Zahlen durchläuft

b) μ konstant ist, während λ die reellen Zahlen durchläuft

c) $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ linear abhängig sind und beide Parameter die reellen Zahlen durchlaufen

d) λ konstant ist, während μ die nicht negativen reellen Werte annimmt.

21. g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ Zeichnung im Koordinatensystem !

a) Welcher Punkt von g liegt 2 Einheiten vor der x_2x_3-Ebene ?

b) Welche Punkte von g haben von der x_1x_3-Ebene den Abstand 8 ?

c) Welche Punkte von g liegen 1 Einheit unter der x_1x_2-Ebene ?

22. Auf der Gerade durch A(12 | 24 | 36) und B(12 | 42 | 63) liegen die Mittelpunkte von Kugeln mit Radius 12.

a) Zwei Kugeln berühren die x_1x_3-Ebene.
Berechne die Mittelpunkte und die Berührpunkte.

b) Wo berühren die Kugeln die x_2x_3-Ebene ?

23. Kugeln mit Radius 23 rollen auf der Gerade r auf der x_2x_3-Ebene; r geht durch P(0 | 5 | 6) und Q(0 | 6 | 5) . Wo liegen die Kugelmittelpunkte ?

24. g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-7\\5\\-4\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}$

$A(a_1 \mid a_2 \mid 8)$, $B(-12 \mid k \mid -k)$, $C(c \mid 1 \mid 1)$, $D(2k \mid -3k \mid k)$, $E(4k-3 \mid 1 \mid 2k)$

Berechne die fehlenden Koordinaten in A bis E so, daß diese Punkte auf g liegen.

25. Liegen die Punkte P_a auf einer Gerade ? Stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Gerade auf.

a) $P_a(1+2a \mid 2-7a \mid -1-2a)$ **b)** $P_a(3a-2 \mid 4 \mid -6a)$

c) $P_a(a \mid 1 \mid 0)$ **d)** $P_a(1+a \mid 1-a \mid a+1)$

e) $P_a(a^2 \mid a \mid a+1)$ **f)** $P_a(\frac{2}{a} \mid 0 \mid \frac{1}{a})$

2. Lage im Koordinatensystem

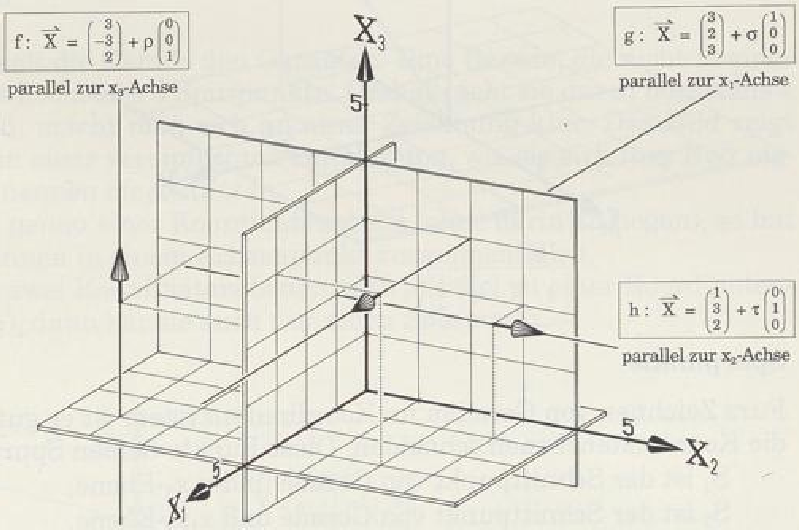
Parallel zu einer Koordinatenachse

Sind zwei Koordinaten im Richtungsvektor null, dann ist die Gerade parallel zu einer Koordinatenachse.

So ist die Gerade f :

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

parallel zur x_3-Achse.



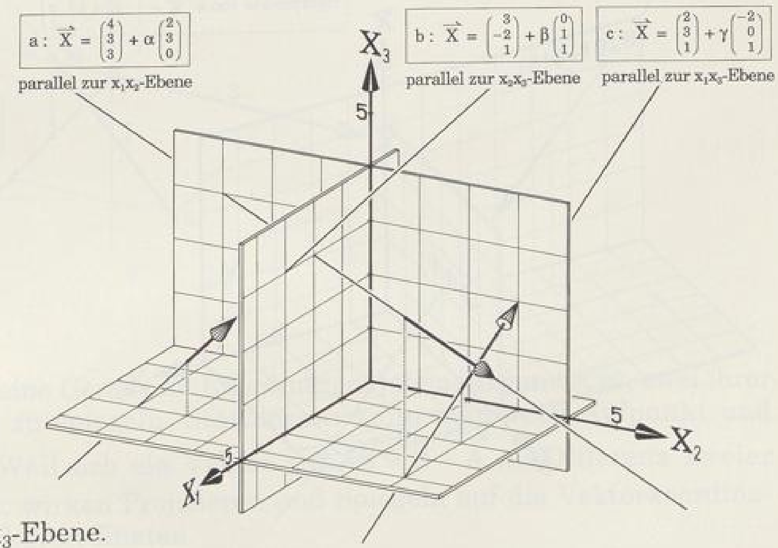
Parallel zu einer Koordinatenebene

Ist eine Koordinate im Richtungsvektor null, dann ist die Gerade parallel zu einer Koordinatenebene.

Die Gerade c :

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist parallel zur x_1x_3-Ebene.



Die Gerade f :

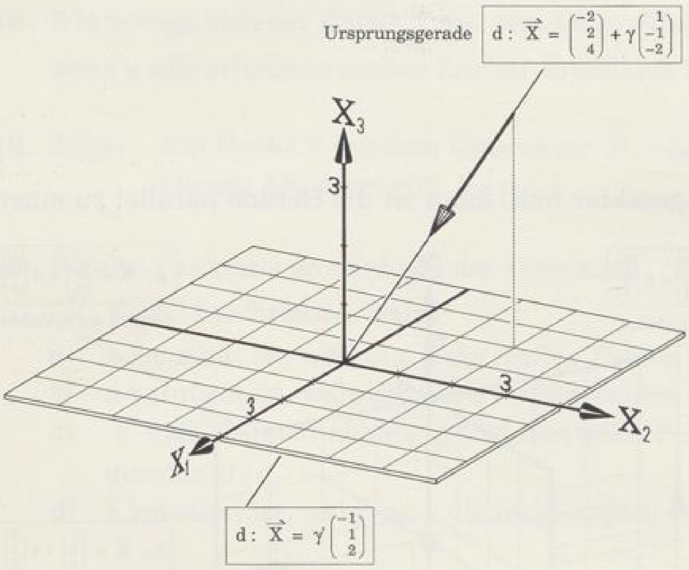
$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist parallel zur x_2x_3- und x_1x_3-Ebene.

Ursprungsgerade

Ist der Ortsvektor des Aufpunkts ein Vielfaches des Richtungsvektors, dann geht die Gerade durch den Ursprung, zum Beispiel

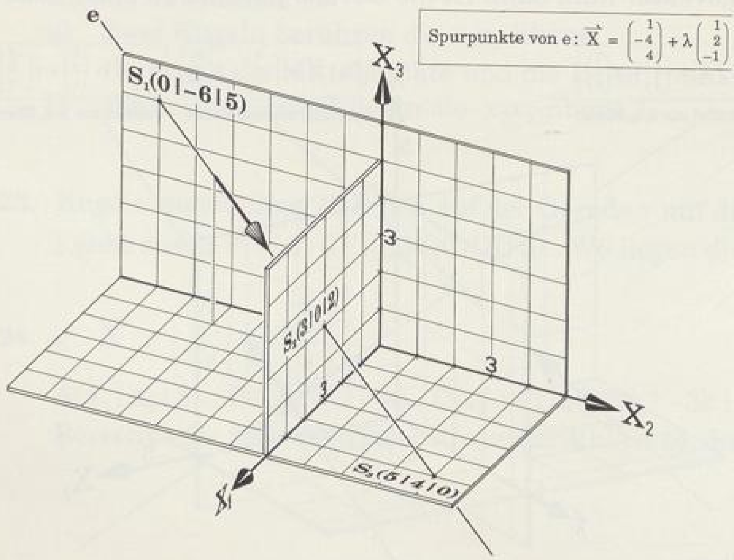
$$d: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ einfachere Gleichung } d: \overrightarrow{X} = \gamma' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Spurpunkte

Fürs Zeichnen von Geraden im Koordinatensystem ist es gut zu wissen, wo die Geraden die Koordinatenebenen schneiden. Diese Punkte heißen Spurpunkte S_i:

S_1 ist der Schnittpunkt von Gerade und x_2x_3-Ebene,
S_2 ist der Schnittpunkt von Gerade und x_1x_3-Ebene,
S_3 ist der Schnittpunkt von Gerade und x_1x_2-Ebene,



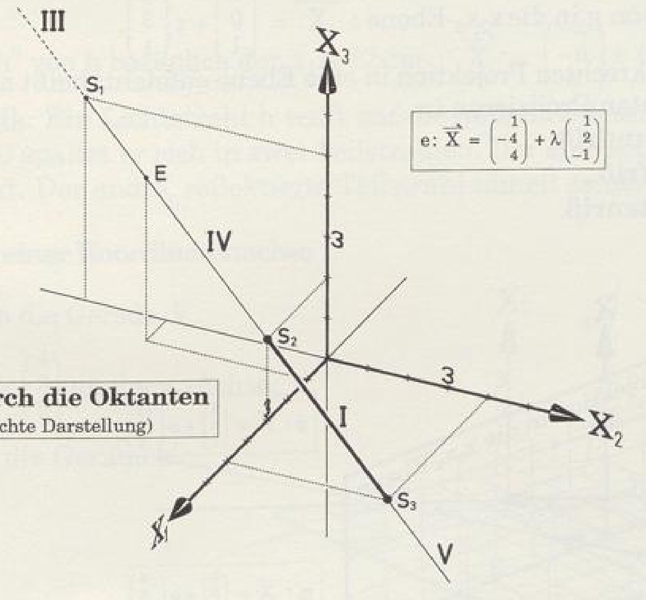
Die Berechnung der Spurpunkte S_i ist recht einfach:
Setze die i-te Koordinate im allgemeinen Geradenpunkt gleich null und berechne den zugehörigen Parameterwert. Beispiel

$$e: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ allgemeiner Geradenpunkt } \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1+\mu \\ -4+2\mu \\ 4-\mu \end{pmatrix}$$

$S_1(0\,\vert\,?\,\vert\,?)$	$S_2(?\,\vert\,0\,\vert\,?)$	$S_3(?\,\vert\,?\,\vert\,0)$
$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 0$
$1 + \mu = 0$	$-4 + 2\mu = 0$	$4 - \mu = 0$
$\mu = -1$	$\mu = 2$	$\mu = 4$
$S_1(0\,\vert\,-6\,\vert\,5)$	$S_2(3\,\vert\,0\,\vert\,2)$	$S_3(5\,\vert\,4\,\vert\,0)$

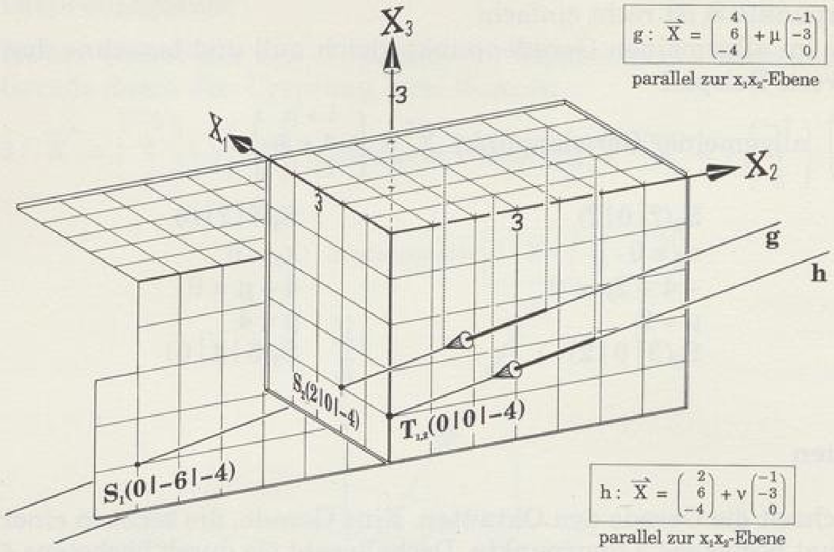
Verlauf durch die Oktanten

An jedem Spurpunkt wechselt die Gerade den Oktanten. Eine Gerade, die nicht in einer Koordinatenebene liegt, hat höchstens 3 Spurpunkte. Deshalb geht sie durch höchstens 4 Oktanten. Welche das sind, macht man sich an einer Zeichnung klar. Das Bild zeigt wieder die Gerade e, aber in einer vereinfachten Darstellung, wie sie sich fürs Heft eignet. Die römischen Ziffern nennen die Oktanten.
Ist eine Gerade parallel zu genau einer Koordinatenebene (ohne darin zu liegen), so hat sie 2 Spurpunkte. Diese können in einem Achsenpunkt zusammenfallen.
Ist eine Gerade parallel zu zwei Koordinatenebenen, also parallel zu einer Koordinatenachse (ohne darin zu liegen), dann hat sie auch nur einen Spurpunkt.



Verlauf durch die Oktanten
(vereinfachte Darstellung)

Projiziert oder spiegelt man eine Gerade im Koordinatensystem, so genügt es, zwei ihrer Punkte zu projizieren oder zu spiegeln. Stattdessen kann man auch Aufpunkt und Richtungsvektor nehmen. Weil sich ein Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{A}$ als Differenz zweier Ortsvektoren schreiben läßt, wirken Projizieren und Spiegeln auf die Vektorkoordinaten genau so wie auf die Punktkoordinaten.



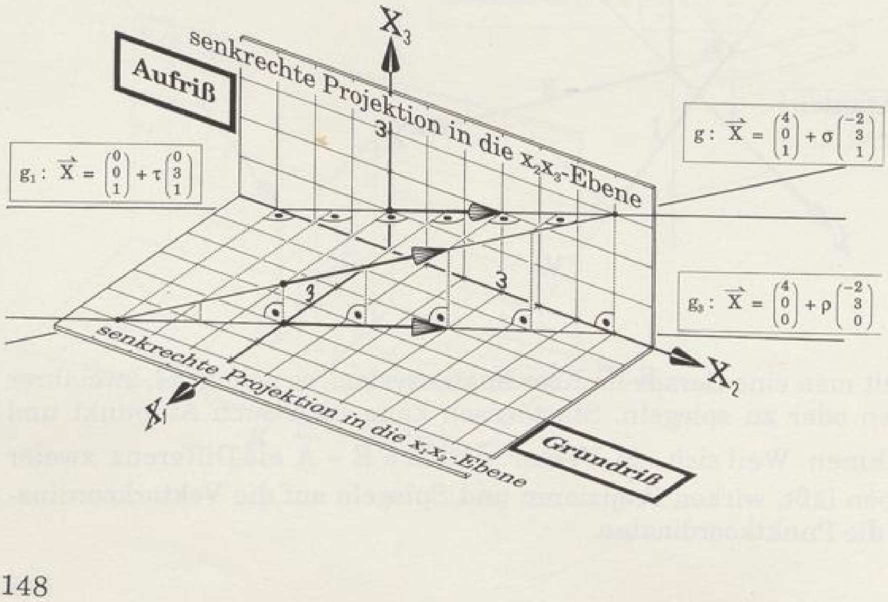
Senkrechte Projektion in eine Koordinatenebene

Projiziert man die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ senkrecht in die x_2x_3-Ebene,
so entsteht die Gerade g_1; die Bestimmung ihrer Gleichung ist recht einfach:
Setze die 1. Koordinate im Aufpunkt und im Richtungvektor gleich null.

Senkrechte Projektion g_1 von g in die x_2x_3-Ebene : $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$.

Das Bild, das bei einer senkrechten Projektion in eine Ebene entsteht, heißt auch **Riß**.
So entsteht beim senkrechten Projizieren in

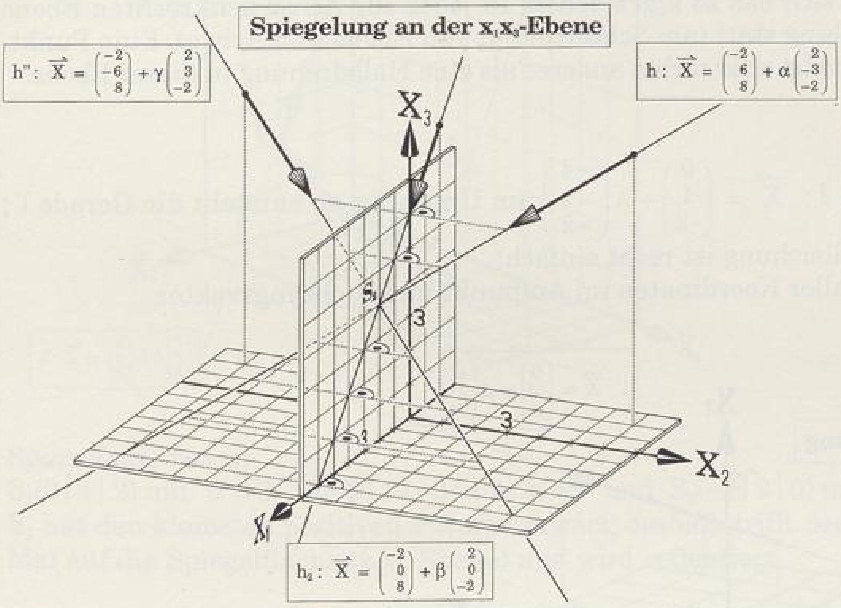
die x_1x_2-Ebene der **Grundriß**,
die x_2x_3-Ebene der **Aufriß** ,
die x_1x_3-Ebene der **Seitenriß**.



Spiegeln an einer Koordinatenebene

Spiegelt man die Gerade $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}2\\-3\\-2\end{pmatrix}$ an der x_1x_3-Ebene,

so entsteht die Gerade h'' ; die Bestimmung ihrer Gleichung ist recht einfach:
Ändere das Vorzeichen der 2. Koordinate im Aufpunkt und Richtungsvektor.



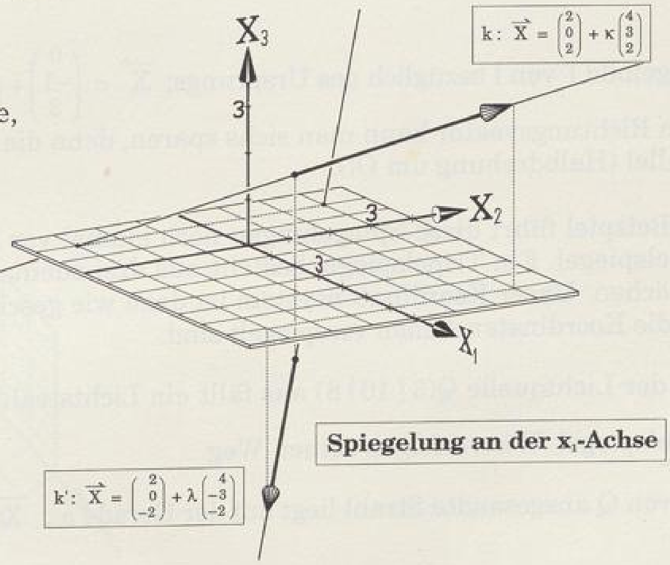
Spiegelbild h'' von h bezüglich der x_1x_3-Ebene : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\-6\\8\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$. Das erinnert an die Strahlenoptik: Ein Lichtstrahl h trifft auf die halbdurchlässige Fläche der x_1x_3-Ebene. In $S_2(2\,|\,0\,|\,4)$ spaltet er sich in zwei Teilstrahlen. Der eine setzt seinen Weg in der alten Richtung fort. Der andre, reflektierte Teilstrahl nimmt seinen Weg auf h''.

Spiegeln an einer Koordinatenachse

Spiegelt man die Gerade k :

$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \kappa\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$ an der x_1-Achse,

so entsteht die Gerade k' ;



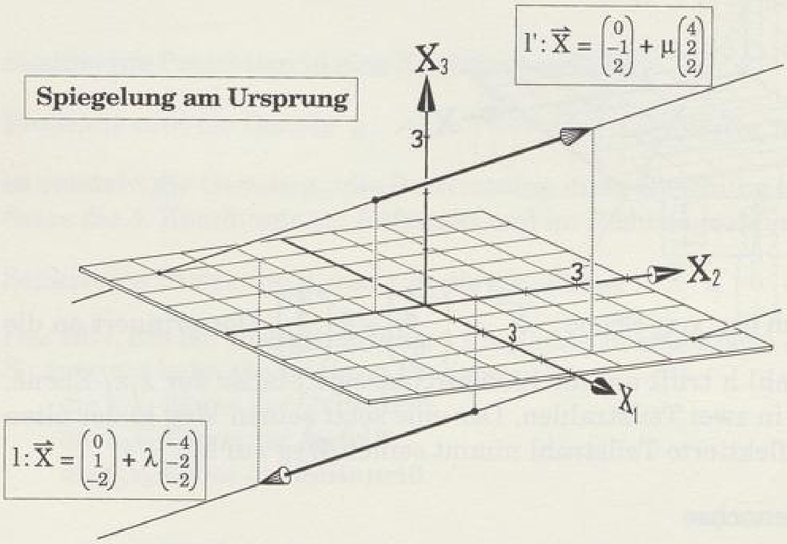
die Bestimmung ihrer Gleichung ist recht einfach:
Ändere die Vorzeichen der 2. und 3. Koordinate im Aufpunkt und Richtungsvektor.

Spiegelbild k' von k bezüglich der x_1-Achse : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die Spiegelung an einer Achse im Raum ist gleichbedeutend mit einer Halbdrehung um diese Achse. Man kann sich das so klarmachen: In jeder zur Achse senkrechten Ebene findet eine Punktspiegelung statt (am Schnittpunkt von Ebene und Achse). Eine Punktspiegelung in einer Ebene ist aber nichts anderes als eine Halbdrehung in dieser Ebene.

Spiegeln am Ursprung

Spiegelt man die Gerade $1: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ am Ursprung, so entsteht die Gerade l' ;
die Bestimmung ihrer Gleichung ist recht einfach:
Ändere die Vorzeichen aller Koordinaten im Aufpunkt und Richtungsvektor.



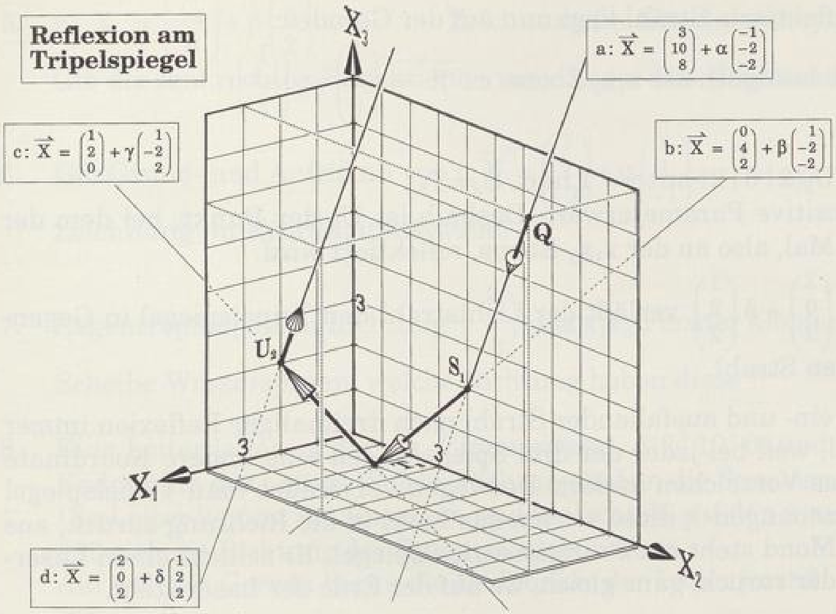
Spiegelbild l' von l bezüglich des Ursprungs: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Beim Richtungsvektor kann man sichs sparen, denn die Gerade und ihr Spiegelbild sind parallel (Halbdrehung um O!).

Ein Beispiel führt diese Spiegelungen noch einmal vor Augen: Reflexion des Lichts am Tripelspiegel. Ein Tripelspiegel besteht aus drei zueinander senkrechten, ebenen Spiegelflächen. Unser Koordinatensystem ist dazu wie geschaffen, wenn wir uns vorstellen, daß die Koordinatenebenen verspiegelt sind.

Von der Lichtquelle Q(3 | 10 | 8) aus fällt ein Lichtstrahl in Richtung $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf den Tripelspiegel. Wir verfolgen seinen Weg.

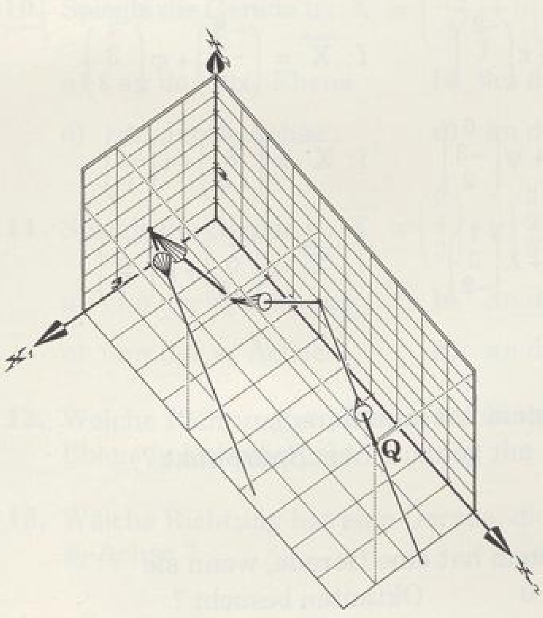
Der von Q ausgesandte Strahl liegt auf der Gerade a : $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.



Spurpunkte von a:
$S_1(0\,|\,4\,|\,2)$ mit $\alpha = 3$, $S_2(-2\,|\,0\,|\,-2)$ mit $\alpha = 5$ und $S_3(-1\,|\,2\,|\,0)$ mit $\alpha = 4$.
S_1 hat den kleinsten positiven Parameterwert; deshalb trifft der Strahl dort zum ersten Mal auf die Spiegelfläche (x_2x_3-Ebene) und wird reflektiert.

Der reflektierte Strahl liegt auf der Gerade b. b ist das Spiegelbild von a bezüglich der x_2x_3-Ebene. Als Aufpunkt von b nehmen wir S_1, b: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

Spurpunkte von b:
$T_1(0\,|\,4\,|\,2)$ mit $\beta = 0$, $T_2(2\,|\,0\,|\,-2)$ mit $\beta = 2$ und $T_3(1\,|\,2\,|\,0)$ mit $\beta = 1$. T_3 liegt T_1 am nächsten, deshalb wird der Strahl bei T_3 gespiegelt (jetzt an der x_1x_2-Ebene).



Der zum zweiten Mal reflektierte Strahl liegt nun auf der Gerade c.

c ist das Spiegelbild von b bezüglich der x_1x_2-Ebene. $c: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Spurpunkte von c:

$U_1(0|4|-2)$ mit $\gamma = -1$, $U_2(2|0|2)$ mit $\gamma = 1$ und $U_3 = T_3$.
$\gamma = 1$ ist der kleinste positive Parameterwert. Deshalb ist U_2 der Punkt, bei dem der Lichtstrahl zum dritten Mal, also an der x_1x_3-Ebene, reflektiert wird.

Auf der Gerade $d: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ verläßt der Lichtstrahl den Tripelspiegel in Gegenrichtung zum einfallenden Strahl.

Beim Tripelspiegel sind ein- und ausfallender Strahl nach dreimaliger Reflexion immer entgegengesetzt parallel, weil bei jeder der drei Spiegelungen eine andere Koordinate des Richtungsvektors das Vorzeichen ändert. Deswegen verwendet man Tripelspiegel bei Rückstrahlern (»Katzenaugen«); diese werfen das Licht in die Richtung zurück, aus der es kommt. Auf dem Mond steht ein Präzisionstripelspiegel. Er schickt einen Laserblitz jedem seiner Absender zurück, ganz gleich, wo auf der Erde der Laser steht.

Aufgaben

1. Gib eine Gleichung der Gerade g durch $P(1|-2|3)$ an, für die gilt:

a) g ist parallel zur x_2-Achse **b)** g ist parallel zur x_1x_2-Ebene
c) g ist parallel zur x_2x_3-Ebene **d)** g geht durch den Ursprung.

Zeichnung im Koordinatensystem !

2. Bestimme die Spurpunkte und den Oktantenverlauf der Geraden a bis l:

$a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-4\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ $b: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}9\\-2\\8\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$ $c: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\-3\\2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$

$d: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-4\\-5\\-7\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $e: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\3\\9\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ $f: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-8\\-3\\9\end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}$

$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}$ $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}6\\-6\\8\end{pmatrix} + \psi\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$ $i: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-4\\8\\-4\end{pmatrix} + \iota\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$j: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} + \kappa\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ $k: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-7\\-21\\14\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ $l: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Zeichnung im Koordinatensystem !

3. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat eine Gerade

a) mit genau zwei Spurpunkten ? **b)** mit genau einem Spurpunkt ?
c) mit keinem Spurpunkt ?

4. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat eine Gerade, wenn sie

a) 3 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 Oktanten besucht ?

$\boxed{5.}$ $r: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Zeichnung im Koordinatensystem !
Gib die senkrechten Projektionen von r in die drei Koordinatenebenen an.

6. Gib Grund- und Aufriß an von s: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Zeichnung im Koordinatensystem!

7. Regentropfen, die in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ans x_1x_3-Fenster klopfen, hinterlassen auf der Scheibe Wasserspuren; welche Richtung haben diese ?

8. Eine Leiter lehnt an der x_2x_3-Zimmerwand, A(2 | 10 | 0) und B(0 | 10 | 10) sind die Endpunkte der Leiter. Welche Richtung haben die Sprossen ?
Die Leiter kommt ins Rutschen und klatscht so auf den x_1x_2-Fußboden, daß sich die Richtung der Sprossen nicht ändert.
Auf welcher Gerade liegen die Endpunkte der Leiter jetzt ?

9. t_3 ist Grundriß, t_1 ist Aufriß der Gerade t. Gib eine Gleichung von t an:

a) $t_1: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t_3: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• **b)** $t_3: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t_1: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zeichnung im Koordinatensystem !

In der Darstellenden Geometrie sind Geraden gewöhnlich in Grund- und Aufriß (als Zeichnung) gegeben.

$\boxed{10.}$ Spiegle die Gerade $u: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \upsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Zeichnung im Koordinatensystem !

a) an der x_1x_3-Ebene **b)** an der x_1x_2-Ebene
c) an der x_3-Achse **d)** an der x_1-Achse **e)** am Ursprung.

11. Spiegle die Gerade $v: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \chi \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Zeichnung im Koordinatensystem !

a) an der x_1x_3-Ebene **b)** an der x_1x_2-Ebene
c) an der x_3-Achse **d)** an der x_1-Achse **e)** am Ursprung.

12. Welche Richtung(en) kann eine Gerade haben, wenn sie bei Spiegelung an der x_1x_2-Ebene in sich übergeht ?

13. Welche Richtung hat eine Gerade, die parallel ist zu ihrem Spiegelbild bezüglich der x_2-Achse ?

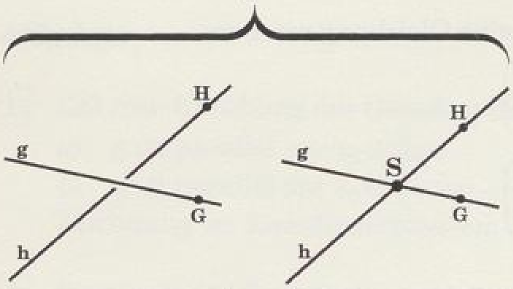
• **14.** Die x_1x_3-Ebene und die x_2x_3-Ebene seien Spiegelebenen, die x_1x_2-Ebene sei durchsichtig, also keine Spiegelebene. Auf welcher Gerade verläßt ein Lichtstrahl diesen Winkelspiegel, wenn er von $Q(9\,|\,4\,|\,3)$ in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ einfällt?

⁝ 15. Das Koordinatensystem sei ein Tripelspiegel.
Von $Q(4\,|\,5\,|\,2)$ fällt ein Lichtstrahl in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein.
Berechne eine Gleichung der Gerade, auf der er den Spiegel verläßt.
Zeichnung im Koordinatensystem !

3. Lage zweier Geraden

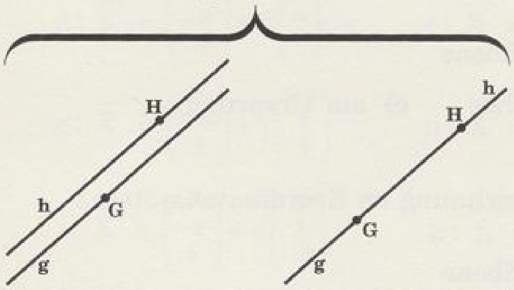
Für die Lage zweier Geraden im Raum gibt es vier typische Fälle:

nicht parallel



g und h sind windschief | g und h schneiden sich

parallel



g und h sind echt parallel | g und h sind identisch

Welcher Fall vorliegt, kann man anhand der Geradengleichungen entscheiden. Zuerst schaut man auf die Richtungsvektoren.

$$g: \vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{u} \qquad h: \vec{X} = \vec{H} + \mu \vec{v}$$

Parallel

Sind die Richtungsvektoren kollinear, dann sind die Geraden parallel oder sogar identisch. Liegt G auf h (beziehungsweise H auf g), so sind g und h identisch, andernfalls echt parallel.

Man kann auch den Verbindungsvektor $\overrightarrow{GH}$ der Aufpunkte berechnen und mit den Richtungsvektoren der Geraden vergleichen. Ist er dazu kollinear, so sind g und h identisch, andernfalls echt parallel.

Nicht parallel

Sind die Richtungsvektoren nicht kollinear, dann schneiden sich die Geraden oder sie sind windschief. Für den Schnittpunkt S gilt

$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{G} + \lambda_s \overrightarrow{u} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{S} = \overrightarrow{H} + \mu_s \overrightarrow{v}$$

also $\overrightarrow{G} + \lambda_s \overrightarrow{u} = \overrightarrow{H} + \mu_s \overrightarrow{v}$, »Gleichsetzen der Geraden«

λ_s und μ_s sind die Lösungen des 3,2-Gleichungssystems

$$\overrightarrow{G} + \lambda \overrightarrow{u} = \overrightarrow{H} + \mu \overrightarrow{v}$$

(den Index s lassen wir einfachheitshalber weg)

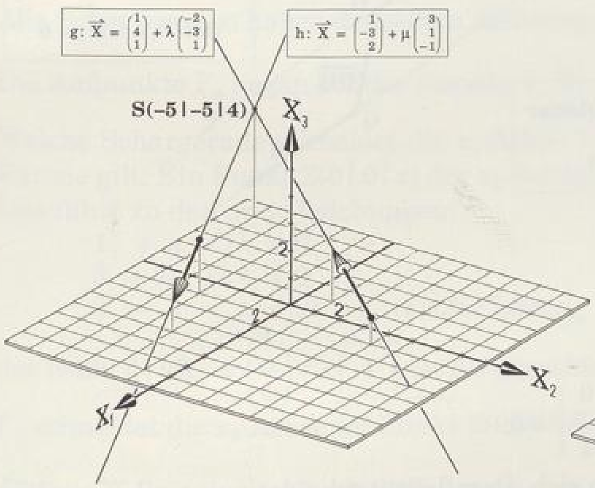
Sind g und h windschief, so ergibt sich ein Widerspruch beim Lösen des Gleichungssystems.

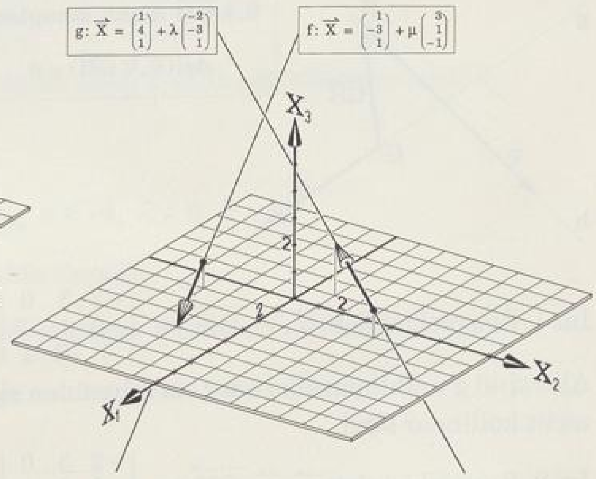
1. Beispiel: $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen
$$\begin{array}{rl} \text{I} & 1 - 2\lambda = 1 + 3\mu \\ \text{II} & 4 - 3\lambda = -3 + \mu \\ \text{III} & 1 + \lambda = 2 - \mu \end{array}$$

und Auflösen ergibt $\lambda = 3$, $\mu = -2$.

S berechnet man, indem man λ in die Gleichung für g oder μ in die Gleichung für h einsetzt: $S(-5 \mid -5 \mid 4)$





2. Beispiel: $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$, $f: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$

Gleichsetzen

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 1 - 2\lambda = 1 + 3\mu \\ \text{II} & 4 - 3\lambda = -3 + \mu \\ \text{III} & 1 + \lambda = 1 - \mu \end{array}$$

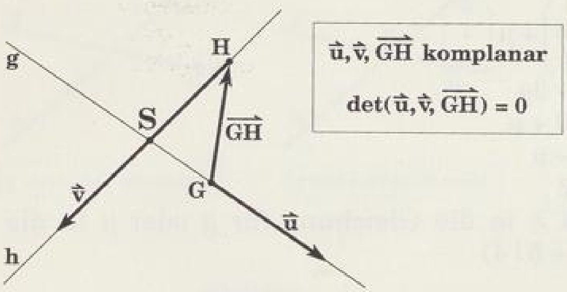
und Auflösen ergibt einen Widerspruch. Das System hat keine Lösung, das heißt, es gibt keinen Schnittpunkt S: Die Geraden sind windschief.

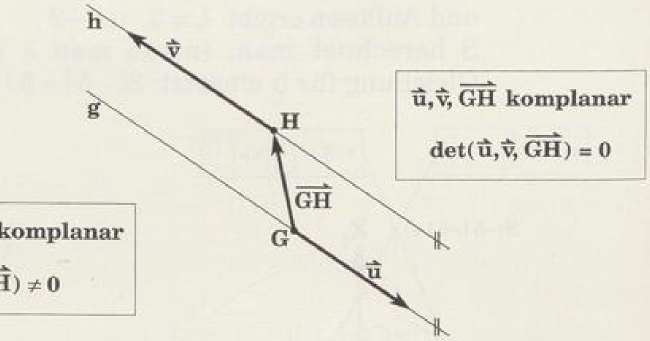
Falls man das Verfahren »Gleichsetzen der Geraden« auf parallele Geraden anwendet, ergibt sich beim Lösen des Gleichungssystems auch ein Widerspruch. Wendet man es auf identische Geraden an, so ergeben sich ∞^1 Lösungen.

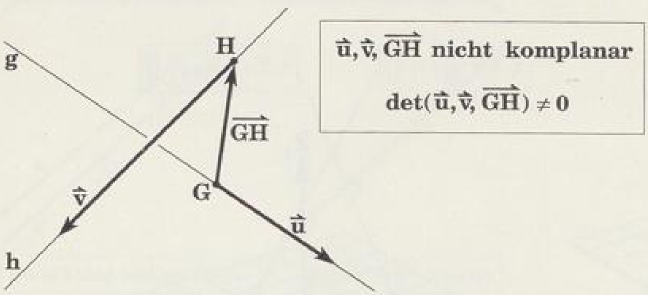
Determinanten-Verfahren

Zwei Geraden sind genau dann windschief, wenn sie nicht in einer Ebene liegen. Gleichbedeutend damit ist, daß ihre Richtungsvektoren und der Aufpunkt-Verbindungsvektor nicht komplanar sind. Darüber gibt die Determinante schnell Auskunft:

g und h sind windschief	$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{GH}) \neq 0$
g und h schneiden sich g und h sind echt parallel g und h sind identisch	$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{GH}) = 0$







Im 1. Beispiel ist $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{GH}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Also sind g und h parallel oder sie schneiden sich. Parallelität scheidet aus, weil $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ nicht kollinear sind.

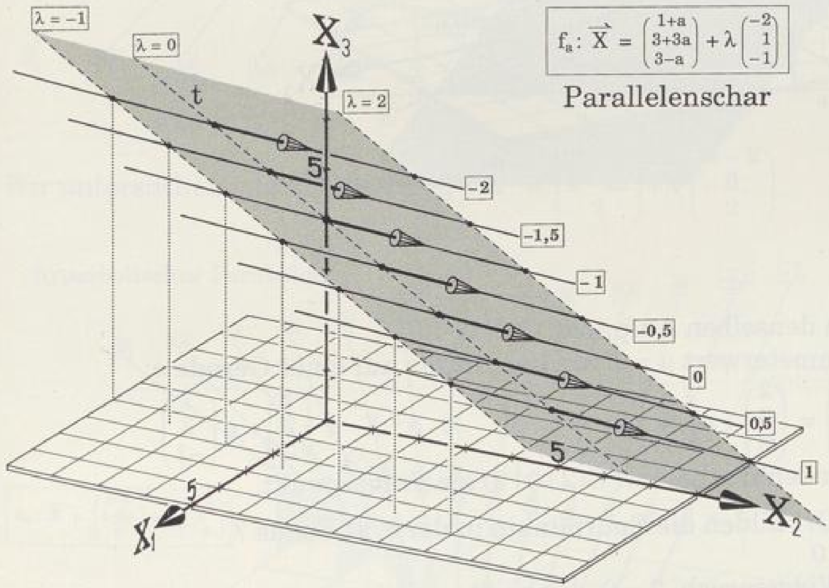
Im 2. Beispiel ist $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{GH}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$. g und h sind windschief !

Geradenscharen

Kommt in einer Geradengleichung außer dem Geradenparameter (zum Beispiel λ) noch ein Parameter (zum Beispiel a) vor, dann beschreibt die Gleichung eine Geradenschar. Zu jedem **Scharparameter a** gehört eine Gerade der Schar. Man kann nun bei einer Schar Wünsche äußern, sich zum Beispiel Geraden mit bestimmten Eigenschaften herauspicken oder den Ort von Punkten mit bestimmten Eigenschaften bestimmen. Wir behandeln die einfachen Fälle: a tritt nur linear auf.

- Scharparameter nur im Aufpunkt

$$f_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 3+3a \\ 3-a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Alle Schargeraden haben denselben Richtungsvektor: f_a ist eine Parallelenschar.

Die Aufpunkte F_a liegen auf der Gerade: $t : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Welche Schargerade schneidet die x_3-Achse ?
Für sie gilt: Ein Punkt $Z(0\,|\,0\,|\,z)$ der x_3-Achse ist auch Punkt einer Schargerade f_a.
Das führt zu den drei Gleichungen:

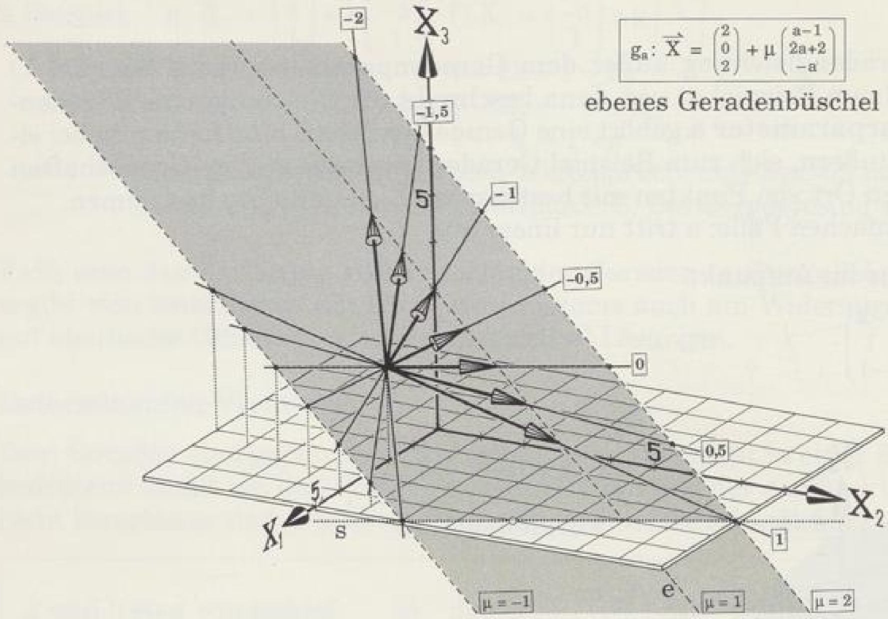
$$\begin{aligned} 1 + a - 2\lambda &= 0 \\ 3 + 3a + \lambda &= 0 \\ 3 - a - \lambda &= z \end{aligned} \qquad \text{mit der Lösung } a = -1,\ \lambda = 0,\ z = 4,$$

das heißt $f_{-1} : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist die gesuchte Gerade,

f_{-1} schneidet die x_3-Achse im Punkt $Z(0\,|\,0\,|\,4)$ mit dem Parameterwert $\lambda = 0$.

- Scharparameter nur im Richtungsvektor

$$g_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a-1 \\ 2a+2 \\ -a \end{pmatrix}$$



Alle Schargeraden haben denselben Aufpunkt G(2 | 0 | 2).

Die Punkte, die zum Parameterwert $\mu = 1$ gehören, liegen auf einer Gerade e:

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}a-1\\2a+2\\-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \qquad e: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

g_a ist also ein ebenes Geradenbüschel mit G(2 | 0 | 2) als Trägerpunkt.

Welchen geometrischen Ort bilden die Spurpunkte in der x_1x_2-Ebene ?

Aus $x_3 = 0$ folgt $2 - \mu a = 0$

$a = 0$: es ergibt sich der Widerspruch $2 = 0$, das heißt,
g_0 hat keinen Spurpunkt in der x_1x_2-Ebene,
g_0 ist also echt parallel zur x_1x_2-Ebene.

$a \neq 0$: $\mu = \frac{2}{a}$ eingesetzt in g_a liefert den geometrischen Ort der

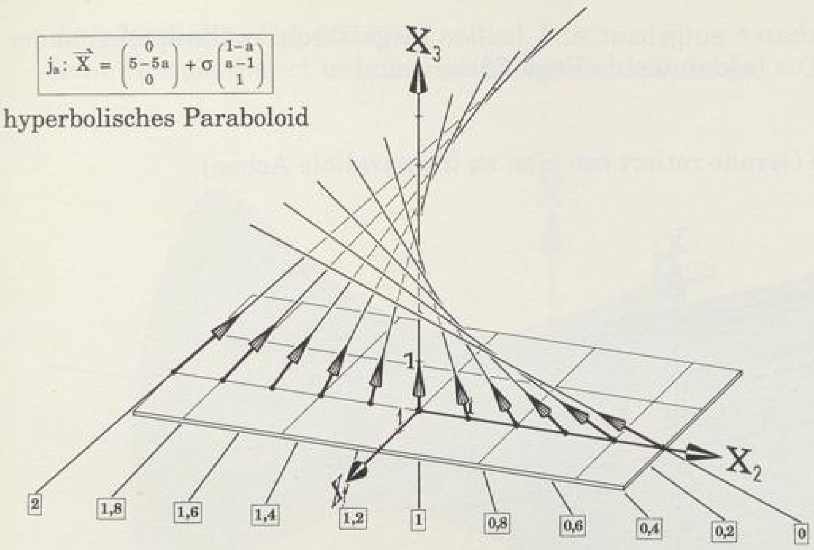
Spurpunkte $\overrightarrow{S_{3_a}} = \begin{pmatrix}4-2/a\\4+4/a\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{a}\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$, $a \neq 0$

Der geometrische Ort ist die »Gerade« s mit der Gleichung

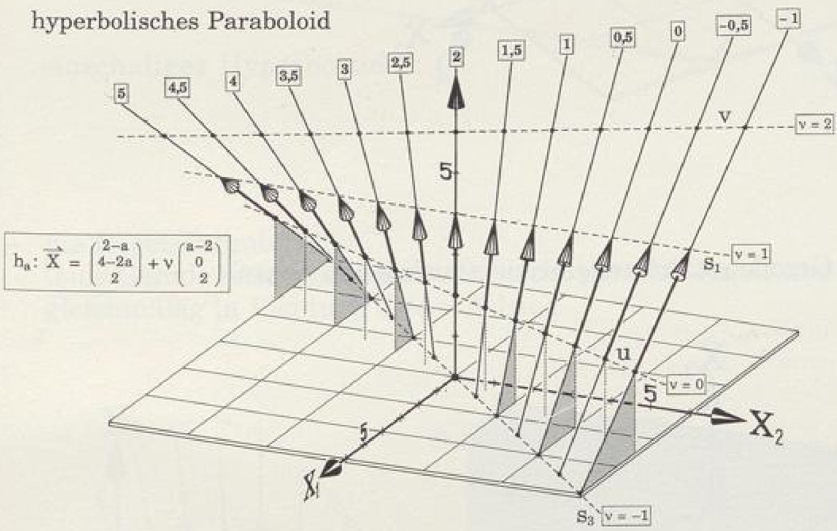
s: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ ohne den Aufpunkt (4 | 4 | 0), weil $\alpha = \frac{1}{a}$ nicht null sein kann.

- Scharparameter im Aufpunkt und im Richtungsvektor

Auch solche Scharen bilden meist eine Fläche im Raum. Sie sind allerdings nicht mehr eben, sondern wie ein Sattel in zwei Richtungen gekrümmt, zum Beispiel die Schar j_a (siehe Bild, Aufgabe **23.**). Die Mathematiker haben solchen Flächen den exotischen Namen *hyperbolisches Paraboloid* gegeben.



Wir untersuchen jetzt die Schar h_a : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 4-2a \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$



Alle Schargeraden h_a sind parallel zur x_1x_3-Ebene, denn bei allen Richtungsvektoren ist die 2. Koordinate gleich null (graue Steigungsdreiecke im Bild!). Das Bild erweckt den Eindruck, als ob die Punkte mit gleichem Parameterwert ν auf anderen Geraden lägen, die selber wieder eine Schar bildeten. Um diese zu finden, halten wir ν als Scharparameter fest und lassen a als Geradenparameter laufen. Wir nehmen den allgemeinen Geradenpunkt und sortieren um

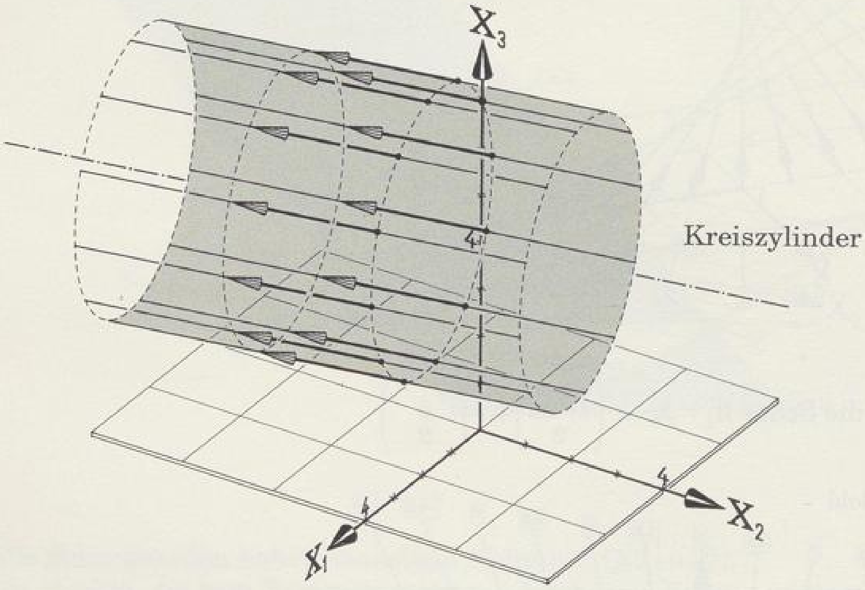
$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 4-2a \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a+a\nu-2\nu \\ 4-2a \\ 2+2\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\nu \\ 4 \\ 2+2\nu \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \nu-1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und bekommen die Schar q_ν : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2-2\nu \\ 4 \\ 2+2\nu \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \nu-1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

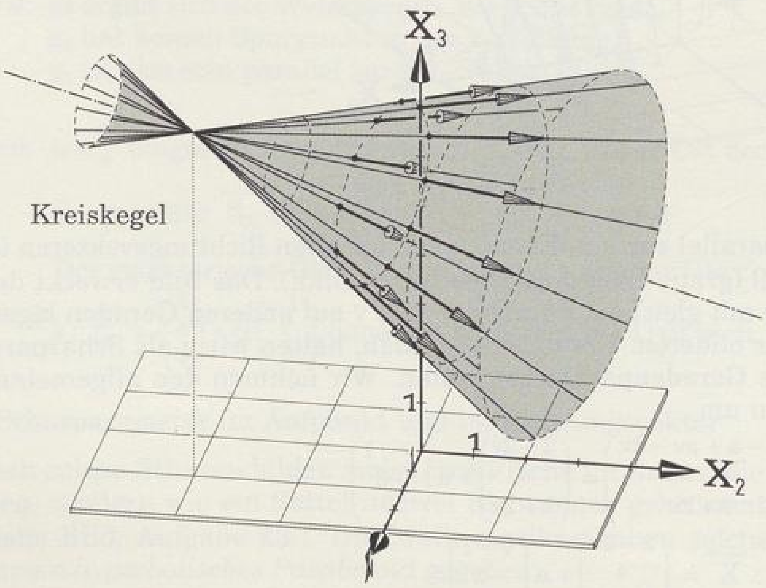
Flächen, die aus Geradenscharen aufgebaut sind, heißen **Regelflächen**. Sie spielen in der Technik eine große Rolle. Die bekanntesten Regelflächen sind

– die Ebene

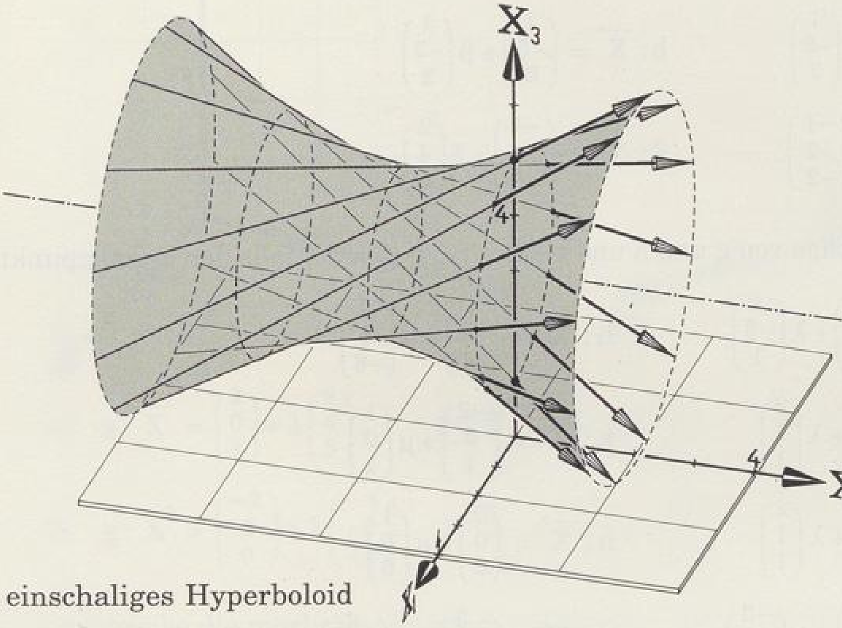
– der Kreiszylinder (eine Gerade rotiert um eine zu ihr parallele Achse)



– der Kreiskegel (eine Gerade rotiert um eine sie schneidende Achse)

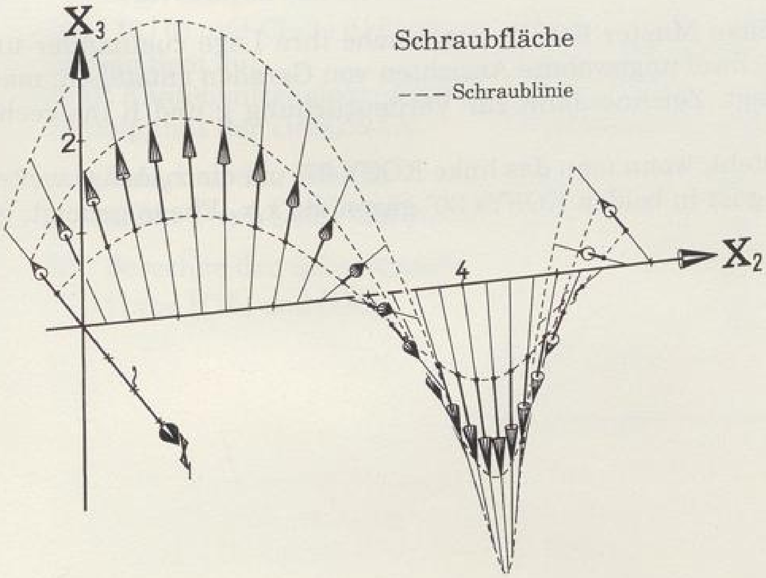


– das einschalige Hyperboloid
(eine Gerade rotiert um eine zu ihr windschiefe Achse)



einschaliges Hyperboloid

– die Regelschraubfläche
(eine Gerade rotiert um eine zu ihr nicht parallele Achse und verschiebt sich dabei gleichmäßig in Richtung dieser Achse).



Aufgaben

$\boxed{1.}$ $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ Welche Lage hat g zu

$a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ $b: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-5\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

$c: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-5\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ $d: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$

$\boxed{2.}$ Untersuche die Lage von g und h und bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt:

a) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-7\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-8\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix}$

b) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

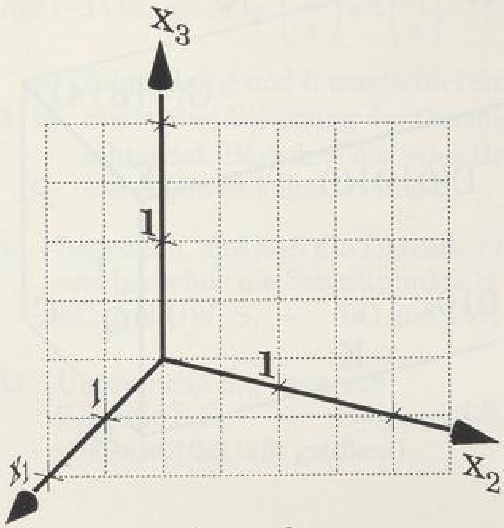
c) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

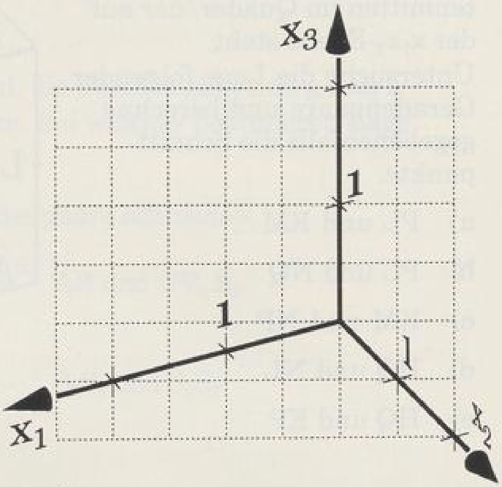
d) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}$ $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}6\\-10\\-2\end{pmatrix}$

e) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\1\\-13\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-6\\0\\10\end{pmatrix}$

$\boxed{3.}$ A(−5 | 4 | −2) , B(6 | −3 | 4) , C(10 | −6 | 18) , D(0 | 0 | 22). Zeige durch Berechnung des Diagonalschnittpunkts, daß ABCD ein ebenes Viereck ist.

4. Zeichne g und h ins linke Muster-KOSY, untersuche ihre Lage zueinander und ihre Lage zur x_3-Achse. Zwei ungewohnte Ansichten von Geraden entstehen; mach dir klar, woran das liegt. Zeichne dann zur Verdeutlichung g und h ins rechte KOSY.
(Das rechte KOSY entsteht, wenn man das linke KOSY 37° um die x_3-Achse weiterdreht, die Blickrichtung ist in beiden KOSYs 30° gegen die x_1x_2-Ebene geneigt, geneigter Leser!)





a) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

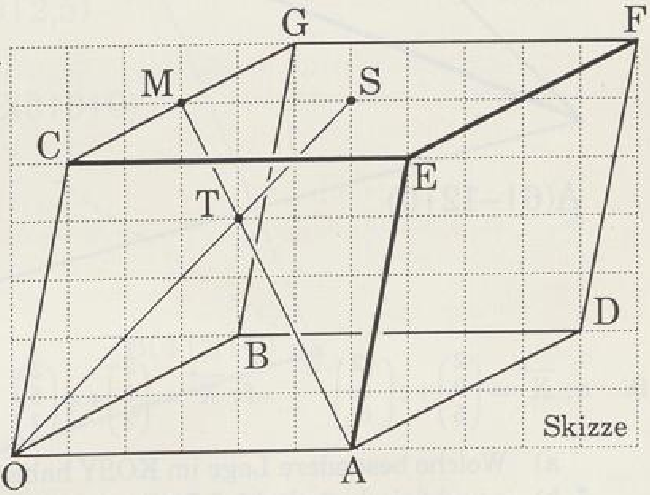
b) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. Beschreibe die möglichen Lagen der Geraden v und w im Raum, die bei bestimmter Blickrichtung so ausschauen:

6. Die Ortsvektoren von A(6 | 0 | 3), B(6 | 12 | 0) und C(–3 | 0 | 6) spannen ein Spat auf.
M ist Kantenmittelpunkt, S ist Mittelpunkt der Deckfläche.

a) Berechne den Schnittpunkt T von [AM] und [OS].

b) Berechne den Schnittpunkt U von [CT] und [OD].



7. K, L, M, N, P und Q seien Kantenmitten im Quader, der auf der x_1x_2-Ebene steht. Untersuche die Lage folgender Geradenpaare und berechne gegebenenfalls die Schnittpunkte.

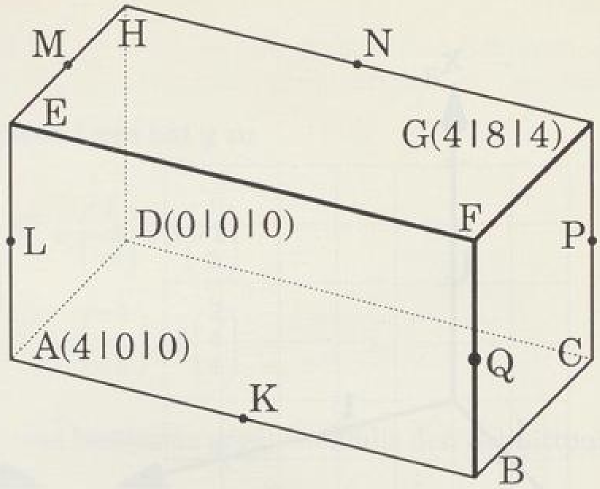
a) PL und KM

b) PL und NQ

c) KM und NP

d) HQ und NL

e) HQ und KP

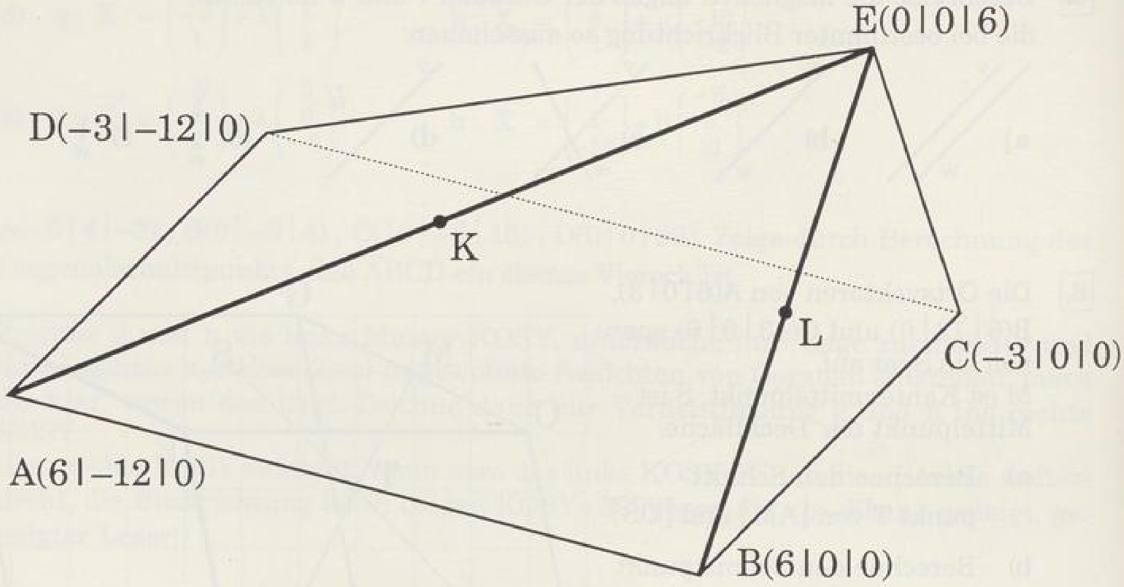


8. K und L sind Kantenmitten der vierseitigen Pyramide ABCDE.

a) Zeige, daß sich CK und DL schneiden, und berechne den Schnittpunkt S.

b) Untersuche die Lage von AC und ES. Schnittpunkt T?

c) Untersuche die Lage von DK und CL. Schnittpunkt U?



9. $e: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix}$ $\quad f: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ $\quad g: \overrightarrow{X} = \gamma\begin{pmatrix}10\\5\\1\end{pmatrix}$

a) Welche besondere Lage im KOSY haben e und g?

: b) e und f sind windschief. Stelle eine Gleichung der Gerade h auf, die parallel zu g ist und e und f schneidet. Berechne die Schnittpunkte. Bei welcher besonderen Lage von g gibt es keine Lösung?

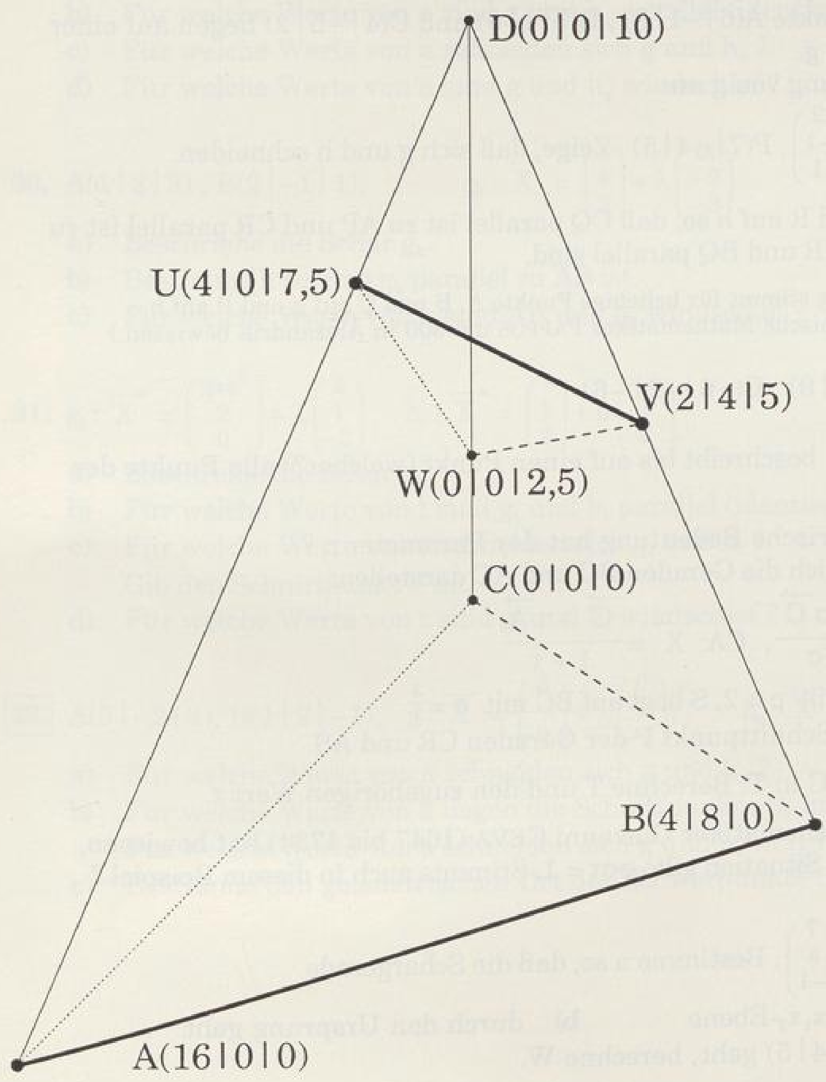
10. $A(2 \mid -1 \mid 0)$, $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) Zeige, daß g und h windschief sind.

: b) Stelle eine Gleichung der Gerade k auf, die durch A geht und g und h schneidet. Berechne die Schnittpunkte. Bei welcher besonderen Lage von A gibt es keine Lösung ?

11. a) Begründe, daß sich die folgenden Geradenpaare schneiden, und berechne die Schnittpunkte S_i:
AC und UW, S_1 – BC und VW, S_2 – AB und UV, S_3

b) Untersuche die Lage von
S_1S_2 und S_2S_3 – S_2S_3 und S_3S_1 – S_3S_1 und S_1S_2
(DESARGUES läßt grüßen!)



12. $A(1 \mid -3 \mid 3)$, $B(3 \mid 1 \mid -3)$, $C(1 \mid -1 \mid 3)$ und $D(1 \mid 3 \mid 3)$ bilden ein Tetraeder.
Zeige durch Rechnung: Die Strecken, die die Mitten zweier windschiefer Kanten verbinden, schneiden sich alle in einem Punkt S.
In welchem Verhältnis teilt S diese Verbindungsstrecken?
(Diese Eigenschaften hat jedes Tetraeder!)

• **13.** $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \\ -9 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b: \vec{X} = \begin{pmatrix} 31 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

a) Untersuche die Lage von a und b.

b) Bestimme eine Gleichung der Mittelparallele m von a und b.

c) a' entsteht, wenn a eine Halbdrehung um b macht.
Bestimme eine Gleichung von a'.

d) b' entsteht, wenn man b an a spiegelt.
Bestimme eine Gleichung von b'.

• **14.** **a)** Zeige: Die Punkte $A(6 \mid -1 \mid 6)$, $B(7 \mid 1 \mid 8)$ und $C(4 \mid -5 \mid 2)$ liegen auf einer Gerade g.
Gib eine Gleichung von g an.

b) $h: \vec{X} = \vec{P} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P(7 \mid -4 \mid 5)$. Zeige, daß sich g und h schneiden.

c) Bestimme Q und R auf h so, daß CQ parallel ist zu AP und CR parallel ist zu BP. Zeige, daß AR und BQ parallel sind.

(Diese Behauptung stimmt für beliebige Punkte A, B und C auf g und P auf h. Das hat der griechische Mathematiker PAPPOS um 300 in Alexandria bewiesen.)

• **15.** $A(6 \mid -2 \mid 0)$, $B(6 \mid 4 \mid 9)$, $C(-6 \mid -2 \mid -6)$

a) $\vec{X} = \dfrac{\vec{A} + \rho \vec{B}}{1 + \rho}$ beschreibt bis auf einen Punkt (welcher?) alle Punkte der Gerade AB.
Welche geometrische Bedeutung hat der Parameter ρ?
Ebenso lassen sich die Geraden BC und AC darstellen:
BC: $\vec{X} = \dfrac{\vec{B} + \sigma \vec{C}}{1 + \sigma}$, CA: $\vec{X} = \dfrac{\vec{C} + \tau \vec{A}}{1 + \tau}$

b) R liegt auf AB mit $\rho = 2$, S liegt auf BC mit $\sigma = \frac{3}{2}$.
Bestimme den Schnittpunkt P der Geraden CR und AS.

c) BP schneidet AC in T. Berechne T und den zugehörigen Wert τ.

Der italienische Mathematiker Giovanni CEVA (1647 bis 1734) hat bewiesen, daß in einer solchen Situation gilt: $\rho\sigma\tau = 1$. Stimmts auch in diesem Beispiel?

$\boxed{16.}$ $g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} -14 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimme a so, daß die Schargerade

a) parallel ist zur x_1x_3-Ebene **b)** durch den Ursprung geht

c) durch $W(w_1 \mid -4 \mid 5)$ geht, berechne W.

17. $h_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4a \\ 4 \\ 13-6a \end{pmatrix}$. Bestimme a so, daß die Schargerade

a) parallel ist zur x_1x_2-Ebene **b)** die x_2x_3-Ebene nicht schneidet

c) durch den Ursprung geht

d) die x_3-Achse schneidet, berechne den Schnittpunkt.

18. $A(a\,|\,-2\,|\,3)$ und $B(a+4\,|\,0\,|\,5)$ legen die Schar k_a fest. Welche Schargeraden schneiden die Koordinatenachsen ? Berechne die Schnittpunkte.

*Für die Aufgaben **19.** bis **22.** empfiehlt sich das Determinantenverfahren.*

$\boxed{\textbf{19.}}$ $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad h_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ -a \end{pmatrix}$

a) Beschreibe die Schar h_a.

b) Für welche Werte von a sind g und h_a parallel (identisch) ?

c) Für welche Werte von a schneiden sich g und h_a ?

d) Für welche Werte von a sind g und h_a windschief ?

20. $A(1\,|\,2\,|\,2)$, $B(2\,|\,-1\,|\,1)$ $\qquad g_k: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2k \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$

a) Beschreibe die Schar g_k.

b) Bestimme k so, daß g_k parallel zu AB ist.

c) Für welche Werte von k sind AB und g_k windschief ?

21. $g_t: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2+t^2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad h_t: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Beschreibe die Schar g_t.

b) Für welche Werte von t sind g_t und h_t parallel (identisch) ?

c) Für welche Werte von t schneiden sich g_t und h_t ?
Gib den Schnittpunkt S an.

d) Für welche Werte von t sind g_t und h_t windschief ?

$\boxed{\textbf{22.}}$ $A(3\,|\,-2\,|\,2)$, $B(1\,|\,2\,|\,-1)$, $\quad g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\qquad h_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2-a \\ 1+a \end{pmatrix}$

a) Für welche Werte von a schneiden sich g und h_a ?

b) Für welche Werte von a liegen die Schnittpunkte S_a im IV.Oktanten ?
Für welche Werte von a schneiden sich g und h_a in A ?

c) Bestimme den geometrischen Ort der Schwerpunkte der Dreiecke ABS_a.

• **23.** $j_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Welche Schargerade geht durch $P(-45 \mid 0 \mid 5)$?

b) Welche Schargeraden sind parallel zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

c) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die zum Parameterwert $\mu = 2$ gehören.

d) Bestimme den geometrischen Ort der Spurpunkte in der x_1x_3-Ebene.

e) Zeige, daß je zwei Schargeraden windschief sind.

• **24.** $k_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5a \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1+a \\ 2-3a \\ 0 \end{pmatrix}$. Stelle eine Gleichung für die Schar der Geraden auf, auf denen die Punkte mit jeweils gleichem Parameterwert τ liegen.

⁝ **25.** $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Stelle eine Gleichung für die Schar der Geraden auf, die g und h treffen und zur x_1x_3-Ebene parallel sind.

∷ **26.** $a: \overrightarrow{X} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Stelle eine Gleichung für die Schar der Geraden auf, die a, b und c schneiden.