



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Anschauliche analytische Geometrie**

**Barth, Elisabeth**

**München, 2000**

VI. Der abstrakte Vektorraum

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83392](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83392)

## \*VI. Der abstrakte Vektorraum



*Hermann Günther Graßmann (1809 bis 1877)*

GRABMANN und HAMILTON haben die Vektorrechnung geschaffen, um ein anschauliches Werkzeug zur Lösung geometrischer Probleme zu haben. Bei längerem Umgang mit Vektoren entdeckte man in der Folgezeit Strukturen, die auch in anderen Bereichen der Mathematik eine Rolle spielten. In ihrem Drang zur Abstraktion ließen die Mathematiker die geometrische Einkleidung fallen und schufen so den **abstrakten Vektorraum**. Seine Definition entwickelte sich allmählich und war erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts abgeschlossen. Seitdem versteht man unter einem Vektorraum eine nicht leere Menge  $V$ , deren Elemente (genannt Vektoren) folgende Eigenschaften haben:

### Definition

**I** Je zwei Elemente  $a, b \in V$  kann man verknüpfen und man bekommt als Ergebnis wieder ein Element aus  $V$ ; dieses bezeichnet man mit  $a+b$ . Die Verknüpfung heißt **Addition**, sie soll denselben Axiomen genügen wie die Zahlenaddition:

**K**  $a + b = b + a$                       Kommutativgesetz

**A**  $a + (b + c) = (a + b) + c$       Assoziativgesetz

**N** Es gibt ein Element  $0$  in  $V$ , so daß für alle  $a$  gilt  $a + 0 = a$   
 $0$  heißt **neutrales Element der Addition** oder **Nullvektor**.

**I** Zu jedem  $a$  gibt es ein Element  $\bar{a} \in V$ , so daß gilt  $a + \bar{a} = 0$   
 $\bar{a}$  heißt **inverses Element** zu  $a$ . Statt  $\bar{a}$  schreibt man auch  $-a$ .

**II** Es gibt eine Verknüpfung von Zahlen aus  $\mathbb{R}$  und Elementen aus  $V$ , die jedem  $\rho \in \mathbb{R}$  und  $a \in V$  ein Element aus  $V$  zuordnet; dieses bezeichnet man mit  $\rho \cdot a$ . Die Verknüpfung heißt **S-Multiplikation**, sie soll denselben Axiomen genügen wie die S-Multiplikation geometrischer Vektoren:

**D<sub>s</sub>**  $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$       Distributivgesetz für Zahlen (Skalare)

**D<sub>v</sub>**  $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$       Distributivgesetz für Vektoren

**A<sub>s</sub>**  $(\alpha\beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$               Assoziativgesetz für Zahlen

**N<sub>s</sub>**  $1 \cdot a = a$                               1 heißt **neutrales Element der S-Multiplikation**.

Ein Vektor im abstrakten Sinn ist also nichts anderes als ein Element eines so festgelegten Vektorraums.

### Modelle

Betrachten wir dazu einige Beispiele, »Modelle« des Axiomensystems, wie die Mathematiker gern sagen:

#### **V<sub>1</sub> Menge der geometrischen Vektoren des Raums**

Sie war unser Prototyp fürs Axiomensystem.

## V<sub>2</sub> Arithmetischer Vektorraum

Die Elemente sind n-Tupel reeller Zahlen, man schreibt sie als

Zeilen  $(a_1 | a_2 | \dots | a_n)$  oder Spalten  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ .

Man addiert Stelle für Stelle:

$$(a_1 | a_2 | \dots | a_n) + (b_1 | b_2 | \dots | b_n) = (a_1 + b_1 | a_2 + b_2 | \dots | a_n + b_n).$$

Die S-Multiplikation verteilt den Skalar  $\alpha \in \mathbb{R}$  auf alle Stellen:

$$\alpha \cdot (a_1 | a_2 | \dots | a_n) = (\alpha a_1 | \alpha a_2 | \dots | \alpha a_n).$$

Der Nullvektor ist  $(0 | 0 | \dots | 0)$ .

Der zu  $(a_1 | a_2 | \dots | a_n)$  inverse Vektor ist  $(-a_1 | -a_2 | \dots | -a_n)$ .

Den Vektorraum der n-Tupel reeller Zahlen nennt man auch  $\mathbb{R}^n$ .

## V<sub>3</sub> Vektorraum der Polynome bis zum Grad n

Nehmen wir  $n = 3$ . Dann sind die Elemente des Vektorraums Polynome der Form  $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  mit  $a_i \in \mathbb{R}$ .

Addition und S-Multiplikation erledigen wir wie in der Algebra üblich:

$$(4x^3 - 5x^2 + 12x - 7) + (2x^3 + 6x^2 + 10) = 6x^3 + x^2 + 12x + 3$$

$$4 \cdot (4x^3 - 5x^2 + 12x - 7) = 16x^3 - 20x^2 + 48x - 28.$$

Der Nullvektor ist das Polynom  $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ .

Der zu  $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  inverse Vektor ist  $-a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0$ .

## V<sub>4</sub> Vektorraum der Funktionen mit gleicher Definitionsmenge D

Addition und Subtraktion geschehen wie gewohnt:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\rho \cdot f)(x) = \rho \cdot f(x)$$

Der Nullvektor ist die Funktion mit dem Term  $f(x) = 0$ .

Die Funktion  $-f$  ist die Inverse von  $f$ .

### Basis und Dimension

Wie beim geometrischen Vektorraum definiert man auch beim abstrakten Vektorraum die lineare Unabhängigkeit:

#### Definition

Eine Menge von Vektoren  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , heißt **linear abhängig**, wenn sich mit ihren Vektoren eine nichttriviale Nullsumme bilden läßt. Andernfalls heißt die Menge **linear unabhängig**.

Im Vektorraum der Polynome bis zum Grad 3 sind zum Beispiel die Vektoren  $p_1(x) = 1$ ,  $p_2(x) = x$ ,  $p_3(x) = x^2$  und  $p_4(x) = x^3$  linear unabhängig.

Nullsumme:  $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 + \lambda_4 \cdot x^3 = 0$ .

Weil diese Gleichung für alle  $x$  gelten muß, folgt  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ . Es gibt somit nur die triviale Nullsumme.

### Definition

Eine Menge von Vektoren  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , heißt **Basis des Vektorraums V**, wenn sie linear unabhängig ist und wenn jeder Vektor  $a \in V$  als Linearkombination von  $b_1, b_2, \dots, b_n$  darstellbar ist. Die Anzahl  $n$  heißt **Länge der Basis**.

Zu jedem Vektorraum gibt es viele verschiedene Basen. Man kann beweisen, daß alle Basen gleich viele Vektoren enthalten, also dieselbe Länge haben. Diese Länge nennt man **Dimension des Vektorraums**.

Im Vektorraum der Polynome bis zum Grad 3 sind zum Beispiel  $\{1, x, x^2, x^3\}$  und  $\{1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3\}$  zwei verschiedene Basen. Dieser Vektorraum hat also die Dimension 4.

Im geometrischen Vektorraum haben wir die Vektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$  in Richtung der drei Achsen als Basisvektoren verwendet. Der anschauliche Raum ist dreidimensional.

Der arithmetische Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  hat die Dimension  $n$ .

Eine mögliche Basis ist  $\{(1|0|\dots|0), (0|1|\dots|0), \dots, (0|0|\dots|1)\}$ .

Es gibt sogar Vektorräume mit unendlich vielen Basisvektoren; ihnen schreibt man die Dimension unendlich zu. Ein Beispiel ist der Vektorraum aller Polynome mit der Basis  $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$ .

Beispiel für Basiswechsel

Im Vektorraum der Polynome bis zum Grad 3 ist das Polynom  $p(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{13}{3}x - \frac{10}{9}$  in der Basis  $\{1, x, x^2, x^3\}$  dargestellt. Wählt man die Basis  $\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ , dann findet man die neuen Koordinaten durch Koeffizientenvergleich in der Gleichung

$$\frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{13}{3}x - \frac{10}{9} = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$$

$$x^3: \frac{1}{9} = d$$

$$x^2: -\frac{4}{3} = c - 3d, \quad \Rightarrow c = -1$$

$$x: \frac{13}{3} = b - 2c + 3d, \quad \Rightarrow b = 2$$

$$1: -\frac{10}{9} = a - b + c - d, \quad \Rightarrow a = 2$$

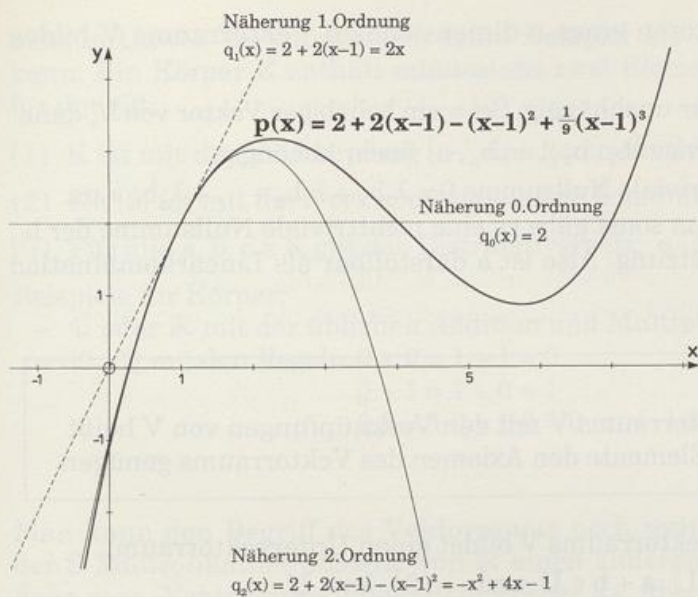
Also gilt  $p(x) = 2 \cdot 1 + 2(x-1) - 1 \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{9}(x-1)^3$ . Diese Darstellung heißt auch Taylor-Entwicklung des Polynoms  $p(x)$  an der Stelle  $x = 1$ .

Nahe bei  $x = 1$  sind die Terme  $(x-1)^k$  umso kleiner, je größer  $k$  ist. Läßt man jeweils die kleinsten Summanden der Taylor-Entwicklung weg, dann bleiben Näherungspolynome  $q_k(x)$  übrig, deren Graphen sich bei  $x = 1$  dem Graphen von  $p$  anschmiegen:

$$q_2(x) = 2 + 2(x-1) - (x-1)^2 = -x^2 + 4x - 1, \quad \text{Näherung 2.Ordnung, Schmiegeparabel bei } x = 1$$

$$q_1(x) = 2 + 2(x-1) = 2x, \quad \text{Näherung 1.Ordnung, Tangente bei } x = 1$$

$$q_0(x) = 2, \quad \text{Näherung 0.Ordnung, Parallele zur } x\text{-Achse}$$



### Sätze

Vieles, was wir im geometrischen Vektorraum kennengelernt haben, gilt in allgemeiner Form auch in beliebigen Vektorräumen. Beispiele:

- 1** Ist  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  eine Basis eines Vektorraums  $V$ , dann läßt sich jeder Vektor  $a \in V$  *eindeutig* als Linearkombination aus  $b_1, b_2, \dots, b_n$  darstellen. Die Koeffizienten  $\lambda_i$  der Darstellung  $a = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$  heißen **Koordinaten** von  $a$  bezüglich der verwendeten Basis.

Beweis: Annahme  $a = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$

$$a = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$$

Subtraktion ergibt:  $0 = (\lambda_1 - \mu_1)b_1 + (\lambda_2 - \mu_2)b_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)b_n$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

ist die Nullsumme trivial, das heißt  $\lambda_i = \mu_i$ .

- 2** In einem Vektorraum  $V$  der Dimension  $n$  sind je  $n+1$  Vektoren linear abhängig.

Beweis:  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  sei eine Basis eines Vektorraums  $V$  und  $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$  eine Teilmenge von  $V$ . Bildet man mit den Vektoren  $a_i$  eine Nullsumme  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1} = 0$  und ersetzt alle  $a_i$  durch ihre Basisdarstellungen, dann ergibt sich wegen der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren ein homogenes System von  $n$  Gleichungen mit den  $n+1$  Unbekannten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ . Ein solches System hat unendlich viele, also auch nichttriviale Lösungen.

- 3** Alle Basen eines Vektorraums  $V$  sind gleich lang.

Beweis:  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  sei die kürzeste Basis. Dann sind nach Satz **2** je  $n+1$  Vektoren von  $V$  linear abhängig. Also kann es keine längere Basis geben.

- 4 Je  $n$  linear unabhängige Vektoren eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums  $V$  bilden eine Basis.

Beweis:  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  sei linear unabhängig. Sei  $a$  ein beliebiger Vektor von  $V$ , dann ist nach Satz 2 die Menge  $\{b_1, b_2, \dots, b_n, a\}$  linear abhängig.

Es gibt also eine nichttriviale Nullsumme  $0 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n + \mu a$ .  $\mu$  ist sicher nicht 0, denn sonst gäbe es eine nichttriviale Nullsumme der  $b_i$ , entgegen der Voraussetzung. Also ist  $a$  darstellbar als Linearkombination der  $b_i$ .

#### Definition

Eine Teilmenge  $U \neq \{\}$  eines Vektorraums  $V$  mit den Verknüpfungen von  $V$  heißt **Untervektorraum**, wenn seine Elemente den Axiomen des Vektorraums genügen.

- 5 Eine Teilmenge  $U \neq \{\}$  eines Vektorraums  $V$  bildet einen Untervektorraum, wenn für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $a, b \in U$  gilt (1)  $a + b \in U$  und (2)  $\lambda a \in U$

Beweis: Die Axiome  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{D}_s$ ,  $\mathbf{D}_v$ ,  $\mathbf{A}_s$  und  $\mathbf{N}_s$  gelten in  $U$  automatisch, weil sie in  $V$  gelten.

Für  $\lambda = 0$  beziehungsweise  $\lambda = -1$  ergibt sich der Nullvektor beziehungsweise das Inverse von  $a$  in  $U$ .

Beispiel: Ist  $0 \neq a \in V$ , dann bildet die Menge aller Vielfachen von  $a$  einen Untervektorraum von  $V$ .

Beweis: (1)  $\mu_1 a + \mu_2 a = (\mu_1 + \mu_2) a \in V$   
 (2) ist nach Definition erfüllt.

#### Gruppe und Körper

Mit zunehmender Abstrahierung ist nicht nur der Vektor-Begriff, sondern auch der Zahl-Begriff verallgemeinert worden. In seiner »Linealen Ausdehnungslehre« beschreibt GRABMANN 1844 zum ersten Mal eine abstrakte Struktur, die man heute **kommutative Gruppe** nennt. GRABMANN versteht darunter eine nichtleere Menge  $G$ , für deren Elemente eine Verknüpfung (zum Beispiel als »+« geschrieben) definiert ist. Für diese Verknüpfung müssen die Axiome  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{I}$  gelten.

Beispiele für kommutative Gruppen:

- $\mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{R}$  mit der üblichen Addition als Verknüpfung
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit der üblichen Multiplikation als Verknüpfung
- geometrischer Vektorraum mit der Vektoraddition als Verknüpfung
- Menge der zentrischen Streckungen mit gleichem Zentrum und der Nacheinanderausführung als Verknüpfung
- Menge der Kongruenzabbildungen, die ein Quadrat auf dieses Quadrat abbilden mit der Nacheinanderausführung als Verknüpfung

1879 hat Richard DEDEKIND (Braunschweig 1831 bis 1916 Braunschweig) den Begriff **Körper** eingeführt als Verallgemeinerung von Zahlbereichen wie  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{R}$ , in denen

man mit zwei Verknüpfungen (zum Beispiel als »+« und »·« geschrieben) arbeiten kann. Ein Körper  $K$  enthält mindestens zwei Elemente, meist mit 0 und 1 bezeichnet, für ihn gilt:

- (1)  $K$  ist mit der Verknüpfung »+« eine kommutative Gruppe (neutrales Element 0)
- (2)  $K \setminus \{0\}$  ist mit der Verknüpfung »·« eine kommutative Gruppe (neutrales Element 1)
- (3) Für alle  $a, b, c \in K$  gilt das Distributivgesetz:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beispiele für Körper:

- $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{R}$  mit der üblichen Addition und Multiplikation als Verknüpfungen
- $\{0, 1\}$  mit den Regeln  $0 + 0 = 1 + 1 = 0$   
 $0 + 1 = 1 + 0 = 1$   
 $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$  und  $1 \cdot 1 = 1$

Man kann den Begriff des Vektorraums noch weiter verallgemeinern, wenn man bei der  $S$ -Multiplikation anstelle von  $\mathbb{R}$  einen anderen Körper  $K$  verwendet. Man spricht dann vom »Vektorraum  $V$  über dem Körper  $K$ «. Aber davon lassen wir besser die Finger!

## Aufgaben

### Modelle

1. Zeige: Für alle  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $a \in V$  gilt  
**a)**  $(-\mu) \cdot a = -(\mu \cdot a)$     **b)**  $\mu \cdot (-a) = -(\mu \cdot a)$     **c)**  $(-\mu) \cdot (-a) = \mu \cdot a$
2. Zeige: Für alle  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $a, b \in V$  gilt  $\mu \cdot (a - b) = \mu \cdot a - \mu \cdot b$
3. Warum ist die Menge aller Polynome von genau zweitem Grad (Koeffizient  $a_2 \neq 0$ ) kein Vektorraum mit den Verknüpfungen von  $V_3$ ?
4. Zeige:  $M = \{a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 \mid a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 2, 4\}$  ist ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit den Verknüpfungen von  $V_3$ .
5. Im arithmetischen Vektorraum  $\mathbb{R}^4$  sind gegeben  $a = (-1 \mid 3 \mid 2 \mid -4)$  und  $b = (2 \mid 7 \mid -1 \mid -3)$ . Berechne  $a + b$ ,  $5 \cdot a$ ,  $-b$ ,  $2 \cdot a - 3 \cdot b$ .
6. Sind folgende Mengen von Tripeln Vektorräume mit den Verknüpfungen von  $V_2$ ?  
**a)**  $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a = 2b \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$   
**b)**  $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a \leq b \leq c \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$   
**c)**  $M = \{(a \mid b \mid c) \mid ab = 0 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$   
**d)**  $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a = b = c \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$   
**e)**  $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a = b^2 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$   
**f)**  $M = \{(a \mid b \mid c) \mid k_1a + k_2b + k_3c = 0 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$   $k_i$  seien feste reelle Zahlen.

7.  $M$  sei die Menge aller Paare reeller Zahlen.  
 Zeige:  $M$  ist kein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ,  
 wenn die Verknüpfungen  $\gg\ll$  und  $\gg\cdot\ll$  so definiert werden:  
 a)  $(a|b) + (c|d) = (a+c|b+d)$ ,  $\mu \cdot (a|b) = (\mu \cdot a|b)$   
 b)  $(a|b) + (c|d) = (a|b)$ ,  $\mu \cdot (a|b) = (\mu \cdot a|\mu \cdot b)$   
 c)  $(a|b) + (c|d) = (a+c|b+d)$ ,  $\mu \cdot (a|b) = (\mu^2 \cdot a|\mu^2 \cdot b)$
8. Zeige: Die folgenden Mengen von Tripeln reeller Zahlen sind keine Vektorräume über  $\mathbb{R}$  mit den Verknüpfungen von  $\mathbf{V}_2$ :  
 a)  $M = \{(a|b|c) | a \geq 0\}$   
 b)  $M = \{(a|b|c) | a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$   
 c)  $M = \{(a|b|c) | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
9.  $M$  sei die Menge aller Paare reeller Zahlen.  
 Eine Verknüpfung  $\gg\ll$  sei durch  $(a|b) + (c|d) = (a+c|b+d)$ ,  
 eine Verknüpfung  $\gg\cdot\ll$  sei durch  $\mu \cdot (a|b) = (\mu \cdot a|0)$  definiert.  
 Zeige: In  $M$  sind bis auf  $N_5$  alle Axiome eines Vektorraums erfüllt.  
 Man kann daraus schließen, daß das Axiom  $N$  nicht aus den andern Axiomen folgt.  
 (Siehe auch nächste Aufgabe.)
10. In der Menge  $V \neq \{0\}$  sei eine Verknüpfung  $\gg\ll$  so definiert, daß  $V$  eine kommutative Gruppe ist. Als Verknüpfung  $\gg\cdot\ll$  sei definiert  $\mu \cdot a = 0$  für alle  $a \in V$  und  $\mu \in \mathbb{R}$ .  
 Zeige: Bis auf  $N_5$  sind alle Axiome des Vektorraums erfüllt.

### Basis und Dimension

1. a) Schreibe  $a = -3x^2 - 8x + 1$  als Linearkombination der Vektoren  
 $u = -4x^2 + x - 2$  und  $v = x^2 - 2x + 1$   
 aus dem Vektorraum der Polynome bis zum Grad 2.  
 b) Schreibe  $a = -3x^2 + x + 4$  als Linearkombination der Vektoren  
 $u = -2x^2 + 5x + 1$ ,  $v = -3x^2 + 2$  und  $w = x^2 + 3x$   
 aus dem Vektorraum der Polynome bis zum Grad 2.
2. Untersuche die folgenden Mengen von Vektoren aus dem Vektorraum der Polynome bis zum Grad 3 auf lineare Unabhängigkeit  
 a)  $\{1 - 4x + 2x^2 + 3x^3, -x^3 + 4x^2 + 2x + 1, 2 - x - 3x^2 + 5x^3\}$   
 b)  $\{3x^3 - 2x^2 - 5x + 1, 1 - 4x - 3x^2 + 4x^3, 9x^3 - 7x^2 - 7x + 2\}$
3. Zeige für den Vektorraum der  $n$ -Tupel:  
 a) Die Menge  $\{(1|0|\dots|0), (0|1|\dots|0), \dots, (0|0|\dots|1)\}$  ist linear unabhängig.  
 b) Nimmt man zur Menge von a) einen beliebigen Vektor hinzu, so wird sie linear abhängig. Gib ein Beispiel an.

4. Zeige: Die Vektoren  $a = (1|3|5)$ ,  $b = (0|-1|2)$  und  $c = (0|0|1)$  bilden eine Basis des Vektorraums der reellen Tripel.
5.  $a = (1|2|0)$ ,  $b = (-1|3|1)$  und  $c = (1|-13|-3)$  gehören dem Vektorraum  $V$  der reellen Tripel an.
- a) Ist  $\{a, b, c\}$  eine Basis von  $V$ ?
- b) Welche Bedingung müssen  $u$ ,  $v$  und  $w$  erfüllen, damit der Vektor  $(u|v|w)$  als Linearkombination von  $a$ ,  $b$  und  $c$  darstellbar ist?
6. Gib  $a = (-2|5|3)$  und  $b = (a|b|c)$  aus dem Vektorraum der reellen Tripel in Koordinatenschreibweise an bezüglich der Basis
- a)  $\{(1|0|0), (0|1|0), (0|0|1)\}$       b)  $\{(1|1|1), (1|1|0), (1|0|0)\}$
7.  $\{a, b, c\}$  sei eine Basis eines Vektorraums. Zum Vektor  $u = 7 \cdot a - 2 \cdot b - c$  wird der Vektor  $\mu \cdot v$  mit  $v = -3 \cdot a + 5 \cdot b + c$  addiert ( $\mu \in \mathbb{R}$ ). Für welchen  $\mu$ -Wert ist die  $a$ -Komponente von  $u + \mu \cdot v$  gleich null?
8.  $\{a, b, c\}$  sei eine Basis eines Vektorraums. Welcher vom Vektor  $u = 3 \cdot a + 4 \cdot b - 2 \cdot c$  linear abhängige Vektor hat die Komponente  $-2a$ ?
9. Berechne aus der Gleichung  $3 \cdot a + 5 \cdot b - 4 \cdot c = 0$  die Koordinaten der Vektoren:  $a$  bezüglich der Basis  $\{b, c\}$ ,  $b$  bezüglich der Basis  $\{a, c\}$ ,  $c$  bezüglich der Basis  $\{a, b\}$ .
10. a) Zeige:  $a = (1|2|1)$ ,  $b = (3|5|0)$  und  $c = (2|0|0)$  sind eine Basis des Vektorraums  $V$  der reellen Tripel.
- b) Berechne bezüglich der Basis  $\{a, b, c\}$  die Koordinaten des Vektors  $d = (0|-1|2)$ . Gib auch seine Komponenten an.
11. Bestimme die Taylorentwicklung der Funktion  $f$  mit dem Term  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 25x - 24$  an der Stelle  $x = 2$  sowie die Näherungen der Ordnungen 2, 1 und 0 von  $f(x)$  dort. Was bedeutet die Näherung 2. Ordnung?
12. Ist  $M = \{(a|a|b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  mit den Verknüpfungen von  $V_2$  ein Vektorraum? Nenne gegebenenfalls eine Basis und die Dimension von  $M$ .
13. Es sind 3 Vektoren aus dem Vektorraum  $V$  der reellen Tripel gegeben. Prüfe nach, ob der von ihnen gebildete Vektorraum  $U$  der gesamte Vektorraum  $V$  ist. Welche Dimension hat  $U$ ?
- a)  $(1|4|-1)$ ,  $(3|-1|2)$ ,  $(2|0|1)$       b)  $(1|1|0)$ ,  $(0|1|1)$ ,  $(3|1|-2)$
14. Ist jedes Element des Vektorraums  $V$  der reellen Tripel darstellbar als Linearkombination der Elemente  $(1|4|2)$ ,  $(6|1|1)$  und  $(3|5|2)$ ?
15. Zeige: Die Vektormenge  $\{(1|1|1|1), (0|1|1|1), (0|0|1|1), (0|0|0|1)\}$  des Vektorraums  $V$  der reellen Quadrupel ist eine Basis von  $V$ .

16.  $U$  sei der Vektorraum, der von den Vektoren  $a = 2x^2 - 2x + 1$ ,  $b = 3x^2 - x + 4$  und  $c = x^2 - 7x - 7$  des Vektorraums  $V$  der Polynome bis zum Grad 2 gebildet wird. Gib eine Basis und die Dimension von  $U$  an.
17.  $U$  sei der Vektorraum, der von den Vektoren  $a = (1 \mid 5 \mid -3)$ ,  $b = (2 \mid 1 \mid -4)$  und  $c = (3 \mid -3 \mid -5)$  des Vektorraums  $V$  der reellen Tripel aufgespannt wird. Gib eine Basis und die Dimension von  $U$  an.
18. Untersuche, ob die folgenden Vektormengen eine Basis des Vektorraums  $V$  der reellen Tripel sind
- a)  $\{(2 \mid -1 \mid -3), (4 \mid 7 \mid 1)\}$       b)  $\{(1 \mid 0 \mid 5), (2 \mid 1 \mid -7), (-4 \mid -2 \mid 1), (6 \mid 0 \mid 3)\}$   
c)  $\{(1 \mid 0 \mid -1), (3 \mid 2 \mid 1), (-1 \mid -4 \mid -7)\}$       d)  $\{(1 \mid 2 \mid 1), (2 \mid 5 \mid 1), (3 \mid 4 \mid 5)\}$
19. Welche Dimension hat der Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$ , der aufgespannt wird von:
- a)  $\{(-3 \mid 2 \mid 3), (1 \mid -\frac{2}{3} \mid -1)\}$       b)  $\{(1 \mid 1 \mid 1), (2 \mid 3 \mid -2)\}$   
c)  $\{x^2 + 2x - 1, 2x^2 + 4x - 2\}$       d)  $\{x^2 - 4x + 3, -2x^2 + 5x + 1\}$
20. Untersuche, ob die angegebenen Mengen einen Vektorraum bilden. Nenne gegebenenfalls seine Dimension.
- a) Die Menge der Lösungen des Gleichungssystems  

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$
als Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$
- b) Die Menge der Lösungen des Gleichungssystems  

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$
als Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$
21. a) Welche Dimension hat der Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$ :  $V = \{(a \mid b \mid 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  ?  
b) Zeige:  $\{u, v\}$  mit  $u = (2 \mid 5 \mid 0)$  und  $v = (0 \mid 1 \mid 0)$  ist eine Basis von  $V$ .
22. Untersuche auf lineare Abhängigkeit:
- a) Vektorraum der reellen Tripel:  $\{(2 \mid -5 \mid 0), (-1 \mid 3 \mid 7), (-6 \mid 1 \mid 1), (-3 \mid 4 \mid 9)\}$   
b) Vektorraum der Polynome bis zum Grad 2:  $\{2x, 2 - x^2, -3x^2 + x + 4, \frac{1}{2} - \sqrt{2}x\}$
23. Im Vektorraum  $V = \mathbb{R}^4$  sind die Vektoren  $u = (1 \mid 2a \mid 0 \mid 1)$ ,  $v = (a \mid 0 \mid 2a \mid 1)$  und  $w = (a \mid 1 \mid a \mid 0)$  gegeben.
- a) Für welche Werte von  $a$  ist  $\{u, v, w\}$  linear abhängig ?  
b) Wähle für  $a$  einen Wert so, daß die Menge  $\{u, v, w\}$  linear unabhängig ist und ergänze diese Vektormenge zu einer Basis des  $\mathbb{R}^4$ .
- 24. Zeige: Ist  $\{a, b\}$  eine Basis eines zweidimensionalen Vektorraums, so ist  $\{u, v\}$  mit  $u = \lambda \cdot a + \mu \cdot b$  und  $v = \sigma \cdot a + \tau \cdot b$  genau dann eine Basis, wenn  $\lambda\tau \neq \mu\sigma$  ist.

- 25. Die Menge  $M$  aller Linearkombinationen der Vektoren  $a = (x+1)^2$  und  $b = (x-1)^2$  aus dem Vektorraum der Polynome bis zum Grad 2 ist auch ein Vektorraum. Den Termen  $(x+1)^2$  und  $(x-1)^2$  sind durch  $x \mapsto (x+1)^2$  und  $x \mapsto (x-1)^2$  Funktionen mit den Gleichungen  $y = (x+1)^2$  und  $y = (x-1)^2$  zugeordnet, deren Graphen Parabeln sind.

a) Beschreibe die Graphen der Funktionen, die den Elementen von  $M$  zugeordnet werden können. Zeige, daß gilt: Es gibt

genau eine } Parabel(n) mit dem  $\begin{cases} x_s \neq \pm 1 \\ x_s = \pm 1 \wedge y_s \neq 0 \\ x_s = \pm 1 \wedge y_s = 0 \end{cases}$   
keine } Scheitel  $(x_s | y_s)$ , wenn  
unendlich viele }

b) Zeige: Durch Übergang zur neuen Basis  $\{a + b, a - b\}$  vereinfacht sich Aufgabe a).

c) Zu den Elementen des Vektorraums  $M$  gehören die Vektoren  $u = x^2 + 1$  und  $v = 2x^2 + 2$ . Warum ist  $\{u, v\}$  keine Basis von  $M$ ?

26. Zeige: Die Vektormenge  $\{(x-1)^2, x^2, (x+1)^2\}$  ist eine Basis des Vektorraums der Polynome bis zum Grad 2. Das heißt:  
Aus den Termen  $(x-1)^2, x^2$  und  $(x+1)^2$  der zugehörigen Parabeln läßt sich jeder Term  $ax^2 + bx + c$  der zugehörigen, beliebigen Parabel  $p$  durch Linearkombination erzeugen.

Stelle mit der Basis  $\{(x-1)^2, x^2, (x+1)^2\}$  den Term der Parabel dar, die die Gleichung  $y = x^2 + 2x + 2$  hat.

27. Jedem Vektor  $u = ax + b$  des Vektorraums der Polynome bis zum Grad 1 wird durch  $y = ax + b$  die Gleichung einer Gerade zugeordnet.

Man spricht von »Geradentermen«  $ax + b$ .

- a) Gib 2 Geraden an, deren Terme so beschaffen sind, daß sie eine Basis des Vektorraums bilden.  
b) Nenne 2 Geradenterme, bei denen diese Forderung nicht erfüllt ist.

28. Welche Dimension (in Abhängigkeit von  $\mu \in \mathbb{R}$ ) hat der Vektorraum aller Linearkombinationen der Vektoren  $a, b, c$  und  $d$  aus  $\mathbb{R}^4$ .

- a)  $a = (1 | 1 | 0 | 0), b = (0 | 0 | 1 | 1), c = (1 | 1 | 1 | \mu^2), d = (1 | \mu^2 | 1 | \mu)$   
b)  $a = (0 | 2 | 4 | 1), b = (-2 | \mu | 4\mu | 1), c = (0 | -\mu | -3 | 0), d = (1 | 0 | 1 | 1)$

29.  $a = (1 | -1 | 2), b = (0 | 2 | 1), c = (1 | 3 | 4), d = (1 | 1 | 0)$

Bestimme die Dimension des Vektorraums

- a) aller Linearkombinationen von  $a, b, c$  ( $V_a$ )  
b) aller Linearkombinationen von  $d$  ( $V_b$ )      c)  $V_a \cap V_b$

30.  $a = (1 | -1 | 1), b = (1 | \mu | \mu), \mu \in \mathbb{R}$ . Ergänze  $\{a, b\}$  zu einer Basis von  $\mathbb{R}^3$ .  
Für welche Werte von  $\mu$  ist die Aufgabe nicht lösbar?

### Sätze

1.  $a = (2 \mid -1 \mid -4)$  und  $b = (-3 \mid 0 \mid 2)$  spannen den Untervektorraum  $U$  des Vektorraums  $V$  der reellen Tripel auf.
  - a) Welche Dimension hat  $U$ ?
  - b) Welche der folgenden Vektoren gehören  $U$  an:  
 $u = (0 \mid -3 \mid -8)$ ,  $v = (-1 \mid -1 \mid 3)$ ,  $w = (1 \mid 0 \mid 0)$
  
2. Zeige:  
 $p = (1 \mid -5/7 \mid 3)$  ist auf mehrere Arten darstellbar als Linearkombination von  $a = (2 \mid -1 \mid 4)$ ,  $b = (-3 \mid 0 \mid 1)$  und  $c = (-4 \mid -1 \mid 6)$ . (Siehe Satz 1)
  
3. Zeige:
  - a) Jede Obermenge einer linear abhängigen Vektormenge ist linear abhängig.
  - b) Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Vektormenge ist linear unabhängig.
  
4. Zeige: Sind  $a$  und  $b$  Vektoren des Vektorraums  $V$ ,  
dann ist  $U := \{\lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$  ein Untervektorraum von  $V$ .  
Welche Dimension kann  $U$  haben?
  
5. Untersuche, ob mit den Verknüpfungen von  $V_2$  die folgenden Tripelmengen Untervektorräume des Vektorraums  $V$  der reellen Tripel sind:
  - a)  $M = \{(a \mid b \mid 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
  - b)  $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a + b + c = 0 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$
  - c)  $M = \{(a \mid b \mid 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
  - d)  $M = \{(2a \mid 0 \mid 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
  - e)  $M = \{(a - b \mid a + b \mid a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
  - f)  $M = \{(4a \mid 3a \mid a^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$
  
6. Zeige: Die Schnittmenge von Untervektorräumen eines Vektorraums  $V$  ist wieder ein Untervektorraum von  $V$ .  
Gib ein Beispiel dafür an, daß dieser Satz für die Vereinigung von Untervektorräumen nicht gilt.
  
7. Sei  $V$  der Vektorraum der Polynome bis zum Grad 2. Zeige, daß die folgenden Mengen Untervektorräume bilden, und gib jeweils eine Basis und die Dimension an:
  - a) Menge aller Polynome bis zum Grad 2 mit der Nullstelle 0.
  - b) Menge aller Polynome bis zum Grad 2 mit den Nullstellen 0 und 1.
  - c) Menge aller Polynome bis zum Grad 3 mit den Nullstellen 0, 1 und  $-1$ .
  
8. Beweise den Satz oder gib ein Gegenbeispiel an:  
Wenn die Menge von Vektoren  $\{a, b, c \mid a, b, c \neq 0\}$  linear abhängig ist, dann ist  $c$  darstellbar als Linearkombination von  $a$  und  $b$ .
  
9. Es sei  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  linear unabhängig, aber  $\{a_1, a_2, \dots, a_m, b\}$  linear abhängig.  
Zeige:  $b$  läßt sich darstellen als Linearkombination der  $a_i$ .

10. Zeige: Ist  $\{b_1, b_2, b_3\}$  eine Basis eines dreidimensionalen Vektorraums  $V$ , dann ist auch  $\{b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3, b_2 + \sigma b_3, b_3\}$  eine Basis von  $V$  mit beliebigen reellen Konstanten.

11. a) Zeige: Im Vektorraum der Funktionen über  $\mathbb{R}$  sind die Funktionen mit dem Termen  $f(x) = 1$   
 $g(x) = \sin x$   
 $h(x) = \cos x$  linear unabhängig.

b) Sind im Vektorraum der Funktionen über  $\mathbb{R}$  die folgenden Funktionen linear unabhängig?  $f(x) = 1$   
 $g(x) = (\sin x)^2$   
 $h(x) = (\cos x)^2$

### Gruppe und Körper

1. Zeige: Legt man in der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen beziehungsweise in der Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen die gewöhnliche Addition und Multiplikation als Verknüpfungen » + « und » · « zugrunde, so kann als Vektorraum aufgefaßt werden:  
 a)  $\mathbb{R}$  über  $\mathbb{R}$       b)  $\mathbb{R}$  über  $\mathbb{Q}$       c)  $\mathbb{Q}$  über  $\mathbb{Q}$   
 Warum ist  $\mathbb{Q}$  kein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ?

2. Gib für die Vektorräume, wenn möglich, die Dimension und eine Basis an:  
 a)  $\mathbb{Q}$  über  $\mathbb{Q}$       b)  $\mathbb{R}$  über  $\mathbb{R}$       c)  $\mathbb{R}$  über  $\mathbb{Q}$

3. Zeige: Im Vektorraum  $\mathbb{R}$  über  $\mathbb{Q}$  sind linear unabhängig  
 a) die Vektoren 1 und  $\sqrt{2}$       b) die Vektoren 1,  $\sqrt{2}$  und  $\sqrt{3}$

4.  $G$  sei die Gruppe der Kongruenzabbildungen, die ein Quadrat auf dieses Quadrat abbilden mit der Nacheinanderausführung als Verknüpfung.  
 Wieviel Elemente hat  $G$ ?

5.  $V$  sei der Vektorraum der Tripel über dem Körper  $\{0;1\}$  (siehe *Gruppe und Körper*)  
 a) Gib alle seine Vektoren an.  
 b) Welcher Vektor  $x$  ist Lösung der Gleichung?  
 $\alpha) x + x = 0$        $\beta) x + (1 | 0 | 1) = (0 | 1 | 0)$

6. Restklassenkörper modulo 3  
 Zeige: Die Menge  $\{0; 1; 2\}$  bildet einen Körper, wenn man die Verknüpfungen so definiert:  
 $a + b = \text{Rest von } (a+b) \text{ bei Division durch } 3,$   
 $a \cdot b = \text{Rest von } (a \cdot b) \text{ bei Division durch } 3.$