Anschauliche analytische Geometrie

Barth, Elisabeth

München, 2000

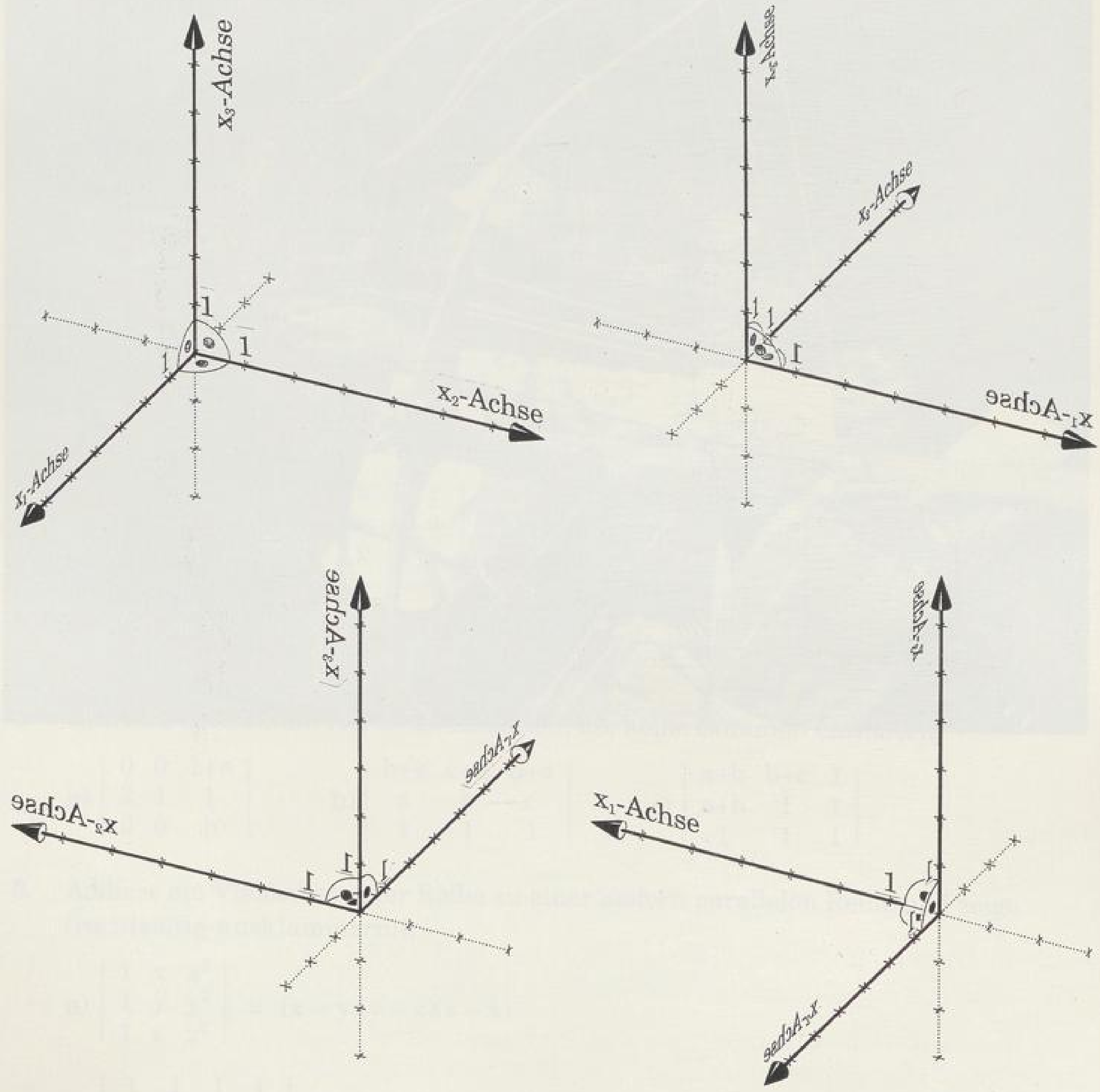
III. Punkte und Vektoren im Raum

urn:nbn:de:hbz:466:1-83392

III. Punkte und Vektoren im Raum

1. Räumliche Koordinatensysteme

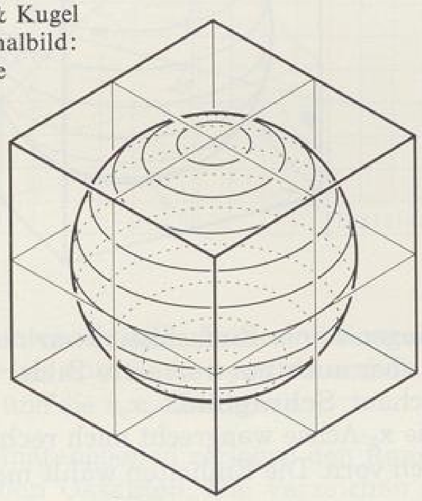
In der Ebene beschreibt man die Lage von Punkten in einem Koordinatensystem mit zwei Zahlen, den Koordinaten. Für Punkte im Raum brauchen wir eine dritte Zahl, also ein Koordinatensystem mit drei Achsen. Üblicherweise legt man die drei Achsen so, daß sie paarweise aufeinander senkrecht stehen. Verwendet man auf allen Achsen auch noch dieselbe Einheit, dann spricht man von einem **räumlichen kartesischen Koordinatensystem** oder auch orthonormierten (= rechtwinklig mit gleich langen Einheiten) Koordinatensystem. Künftig verwenden wir bis auf Ausnahmen nur kartesische Systeme. Die Achsen nennt man **x_1-Achse**, **x_2-Achse** und **x_3-Achse**, manchmal auch x-, y- und z-Achse oder i-, j- und k-Achse.



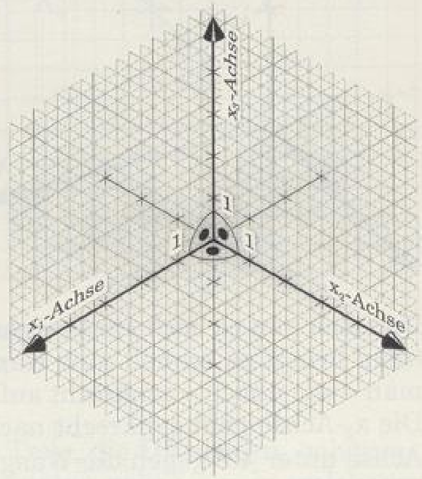
Eine wirklichkeitsgetreue Darstellung verlangt ein dreidimensionales Modell. Doch dafür ist kein Platz, weder im Heft noch im Buch – ganz zu schweigen von der zeitraubenden Anfertigung! Deswegen begnügen wir uns mit zweidimensionalen Bildern räumlicher Figuren. Am anschaulichsten sind **Normalbilder**. Sie zeigen Figuren so, wie man sie aus großer Entfernung wirklich sieht. Wie Koordinatensysteme ausschauen, hängt von der Blickrichtung ab. Es gibt unendlich viele Ansichten. Beim Zeichnen allerdings verwendet man nur einige, nämlich:

Normalbild in Isometrie
In der Zeichnung sind alle drei Einheiten gleich lang und die Winkel zwischen den Achsen 120°. Papier mit aufgedrucktem Isometrienetz und passende Schablonen erleichtern das Zeichnen beträchtlich.

Würfel & Kugel
im Normalbild:
Isometrie



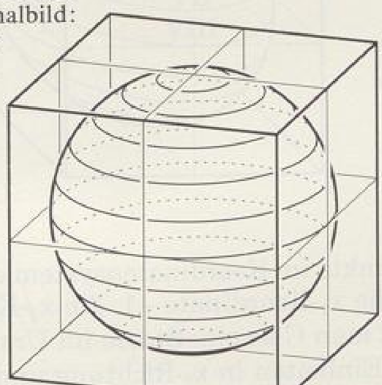
Normalbild in Isometrie

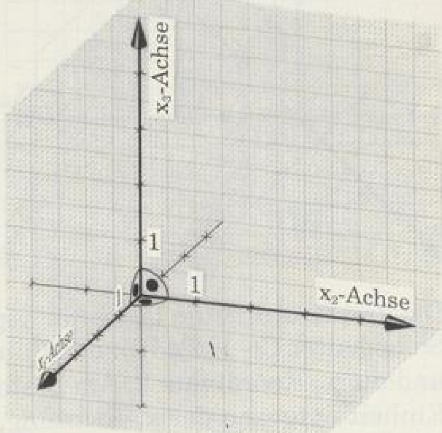


Normalbild in Dimetrie
In der Zeichnung sind zwei Einheiten gleich lang und die dritte halb so lang. Auch dieses System ist genormt: die x_3-Achse geht senkrecht nach oben, die x_2-Achse ist 7°, die x_1-Achse 42° gegen die Waagrechte geneigt. Und auch hier gibt es passende Schablonen und Papier mit Dimetrienetz. Diese Darstellungsart ist in der Technik gebräuchlich. Man nennt sie deshalb Ingenieur-Axonometrie.

Normalbild in Dimetrie

Würfel & Kugel
im Normalbild:
Dimetrie

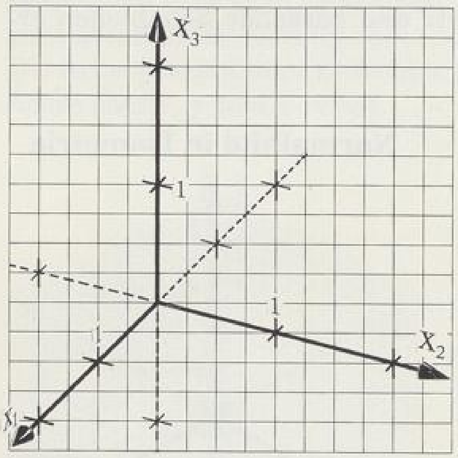




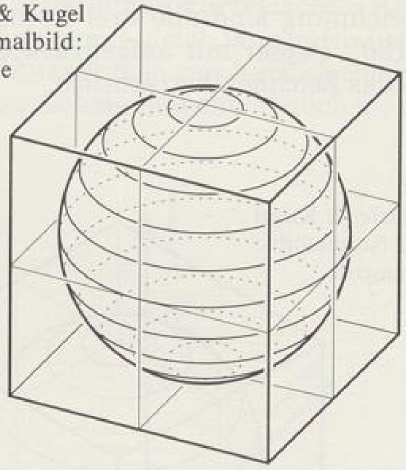
Normalbild in Trimetrie

In der Zeichnung sind alle drei Einheiten verschieden lang. Fürs Zeichnen auf Karopapier eignen sich besonders solche Systeme, bei denen die Einheitsmarken auf Gitterpunkten liegen. Hier ein bewährtes, leicht zeichenbares Koordinatensystem:

Normalbild in Trimetrie

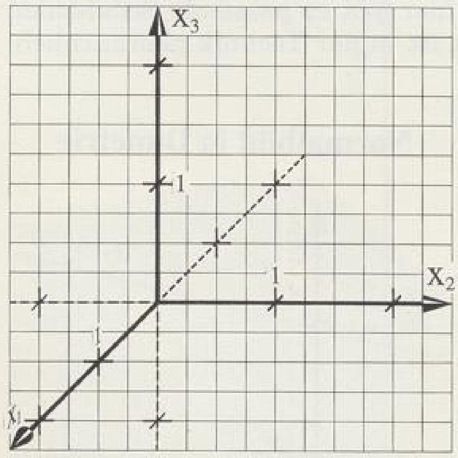


Würfel & Kugel
im Normalbild:
Trimetrie

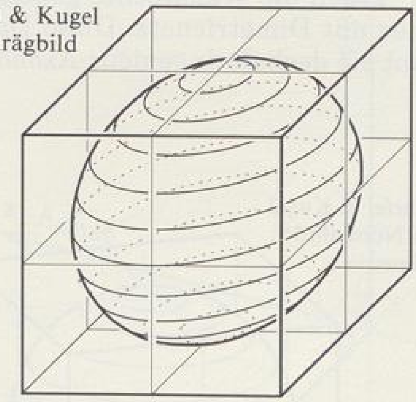


Daneben gibt es noch ein Verfahren, das wegen seiner Einfachheit zwar recht beliebt ist (man bringt es schnell aufs Karopapier), aber auch nur verzerrte Bilder liefert, wenn man – wie üblich – senkrecht aufs Papier schaut: **Schrägbild**.
Die x_3-Achse geht senkrecht nach oben, die x_2-Achse waagrecht nach rechts und die x_1-Achse unter 45° gegen die Waagrechte nach vorn. Die Einheiten wählt man so, daß die Einheitsmarken auf Gitterpunkten liegen.

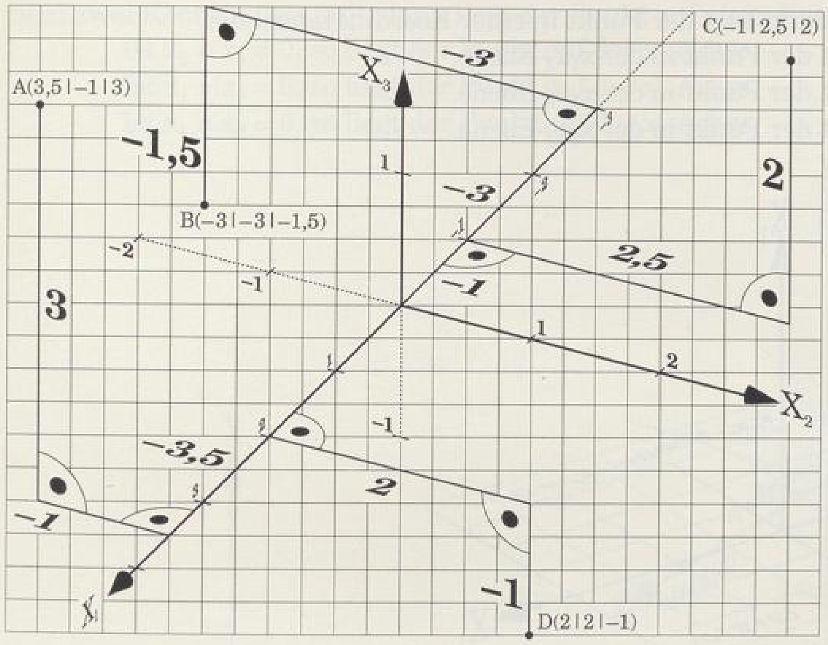
Schrägbild



Würfel & Kugel
im Schrägbild



Die drei Koordinaten legen die Lage eines Punkts im Koordinatensystem eindeutig fest. So bedeutet C(–1 | 2,5 | 2): der Punkt C hat die x_1-Koordinate –1, die x_2-Koordinate 2,5 und die x_3-Koordinate 2. Am besten zeichnet man C so ein: Starte im Ursprung, gehe 1 Einheit entgegen der x_1-Richtung, dann 2,5 Einheiten in x_2-Richtung und schließlich 2 Einheiten in x_3-Richtung.

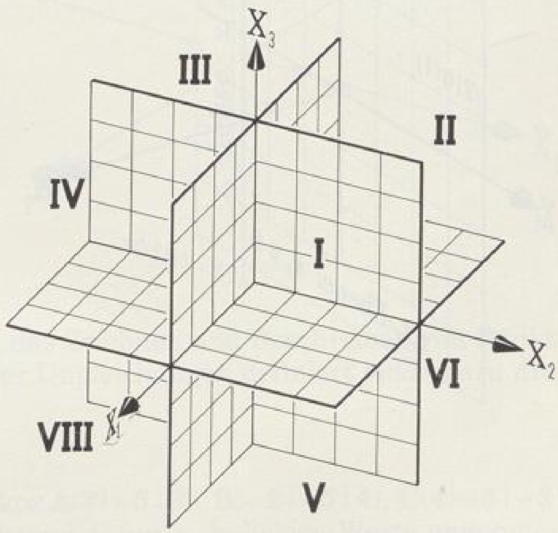


Die drei Koordinatenachsen legen die drei **Koordinatenebenen** fest:
die **x_1x_2-Ebene** (sie enthält die x_1-Achse und die x_2-Achse),
die **x_1x_3-Ebene** und die **x_2x_3-Ebene**.

Die drei Koordinatenebenen zerlegen den Raum in acht Teile, die **Oktanten**, gehören aber nicht zu den Oktanten. Die Vorzeichen der Koordinaten geben an, in welchem Oktanten der Punkt liegt:

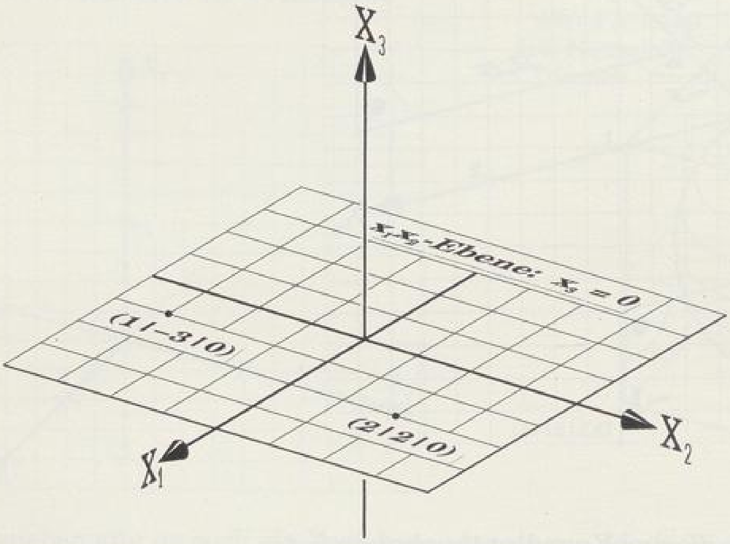
x_1	x_2	x_3	Oktant
+	+	+	I
−	+	+	II
−	−	+	III
+	−	+	IV
+	+	−	V
−	+	−	VI
−	−	−	VII
+	−	−	VIII

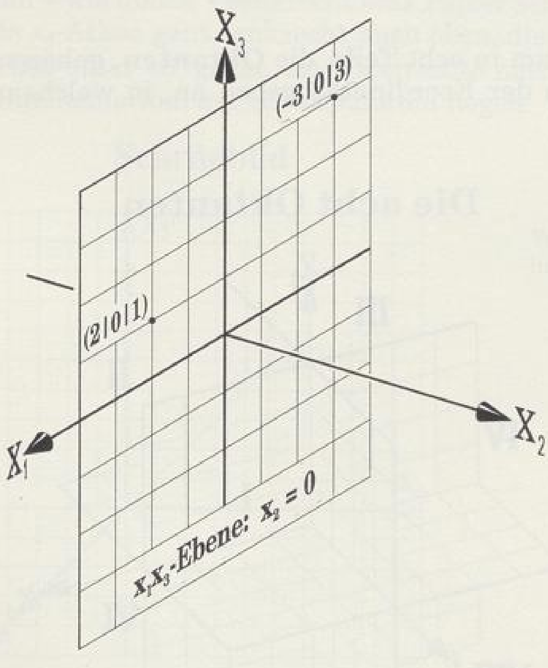
Die acht Oktanten

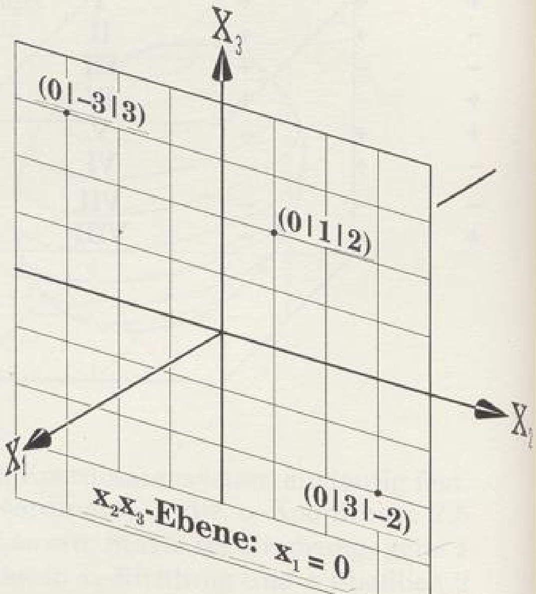


Ist eine Koordinate null, dann liegt der Punkt in einer Koordinatenebene:

Ist $x_3 = 0$, so liegt der Punkt in der x_1x_2-Ebene.
Ist $x_2 = 0$, so liegt der Punkt in der x_1x_3-Ebene.
Ist $x_1 = 0$, so liegt der Punkt in der x_2x_3-Ebene.

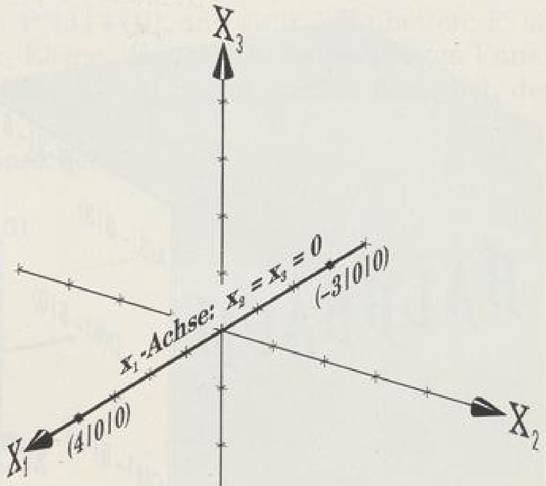


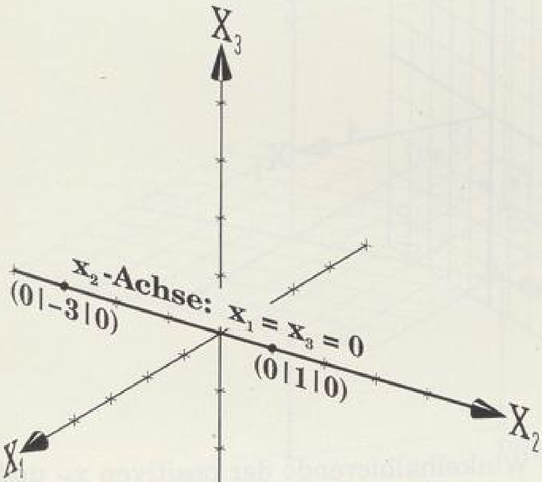


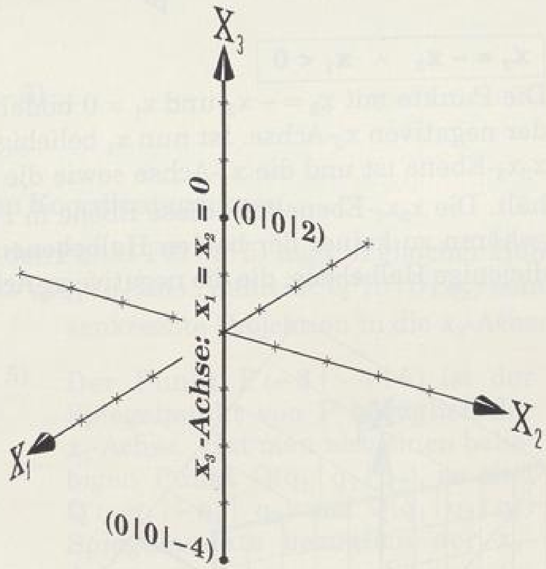


Sind zwei Koordinaten null, dann liegt der Punkt auf einer Koordinatenachse:

Ist $x_2 = x_3 = 0$, so liegt der Punkt auf der x_1-Achse.
Ist $x_1 = x_3 = 0$, so liegt der Punkt auf der x_2-Achse.
Ist $x_1 = x_2 = 0$, so liegt der Punkt auf der x_3-Achse.







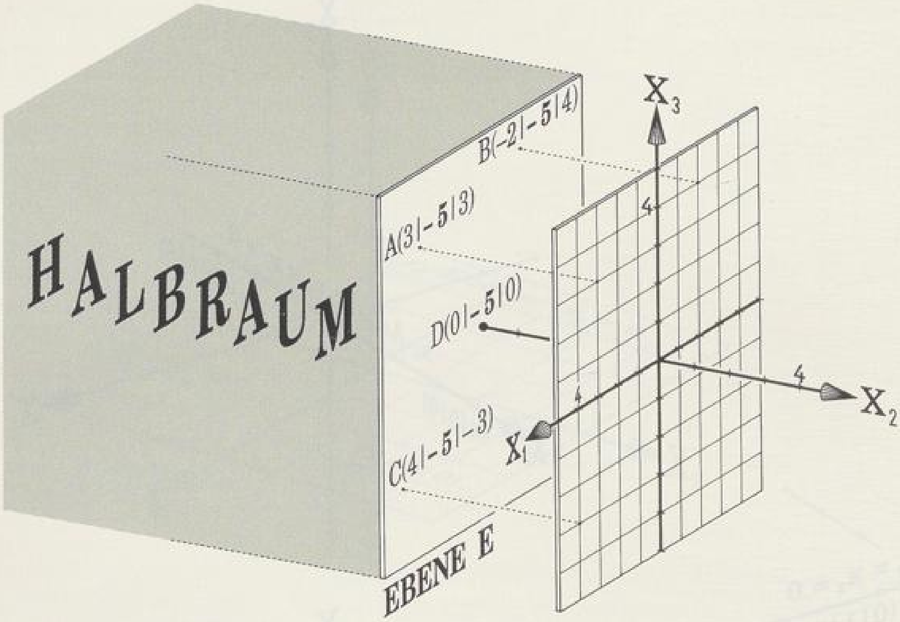
Ein gutes Training der Raumvorstellung ist das Zeichnen und Beschreiben von Punktmengen, die durch einfache Gleichungen oder Ungleichungen definiert sind. Dazu drei Beispiele.

$\boxed{x_2 = -5}$

Diese Menge enthält zum Beispiel die Punkte A(3 | **−5** | 3), B(− 2 | **−5** | 4), C(4 | **−5** | −3) und D(0 | **− 5** | 0). x_2 ist immer gleich −5, während x_1 und x_3 beliebige Werte annehmen können. Die Punktmenge ist also eine Ebene E durch (0 | **−5** | 0), die parallel zur x_1x_3-Ebene ist.

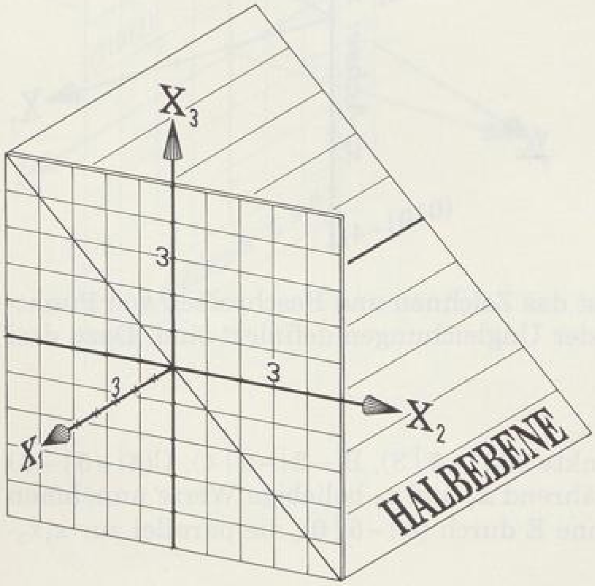
$\boxed{x_2 \leq -5}$

Diese Menge enthält die gerade besprochene Ebene E. E zerlegt den Raum in zwei Teile, diese nennt man **Halbräume**. E gehört zu keinem der beiden Halbräume. Die gesuchte Punktmenge ist derjenige Halbraum einschließlich E, der den Ursprung nicht enthält.



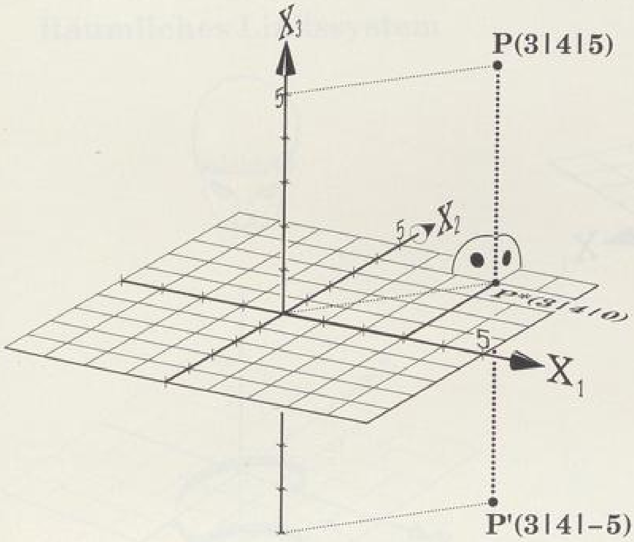
$\boxed{x_2 = -x_3 \quad \wedge \quad x_1 < 0}$

Die Punkte mit $x_2 = -x_3$ und $x_1 = 0$ bilden die Winkelhalbierende der positiven x_2- und der negativen x_3-Achse. Ist nun x_1 beliebig, dann entsteht eine Ebene, die senkrecht zur x_2x_3-Ebene ist und die x_1-Achse sowie die gerade beschriebene Winkelhalbierende enthält. Die x_2x_3-Ebene teilt diese Ebene in zwei **Halbebenen**. Die Punkte der x_2x_3-Ebene gehören zu keiner der beiden Halbebenen. Wegen $x_1 < 0$ ist die gesuchte Punktmenge diejenige Halbebene, die die negative x_1-Achse enthält.



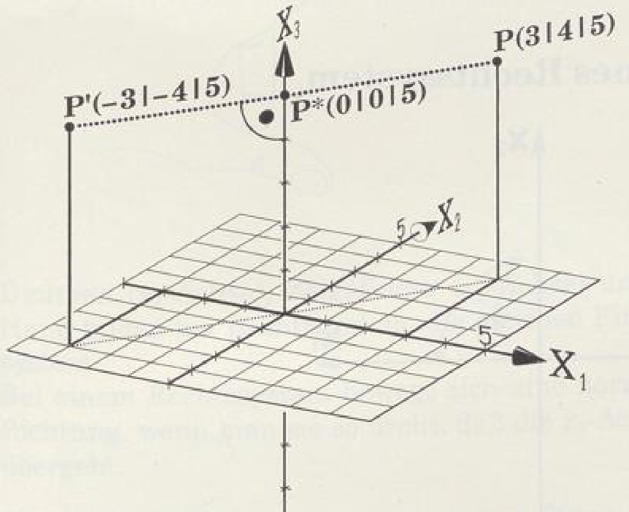
Senkrechte Projektionen und Spiegelungen an Koordinatenebenen

Der Punkt $P^*(3 \mid 4 \mid 0)$ liegt in der x_1x_2-Ebene, der Punkt $P(3 \mid 4 \mid 5)$ liegt senkrecht über P^*, und zwar 5 Einheiten. Hat man also einen beliebigen Punkt $Q(q_1 \mid q_2 \mid q_3)$, dann ist $Q^*(q_1 \mid q_2 \mid 0)$ seine senkrechte Projektion in die x_1x_2-Ebene.
Der Punkt $P'(3 \mid 4 \mid -5)$ liegt senkrecht unter $P^*(3 \mid 4 \mid 0)$, und zwar 5 Einheiten; P' ist also der Spiegelpunkt von P bezüglich der x_1x_2-Ebene. Hat man einen beliebigen Punkt $Q(q_1 \mid q_2 \mid q_3)$, dann sind $Q'(q_1 \mid q_2 \mid -q_3)$ und $Q(q_1 \mid q_2 \mid q_3)$ Spiegelpunkte bezüglich der x_1x_2-Ebene.
Bei den andern Koordinatenebenen ist es entsprechend.



Senkrechte Projektionen und Spiegelungen an Koordinatenachsen

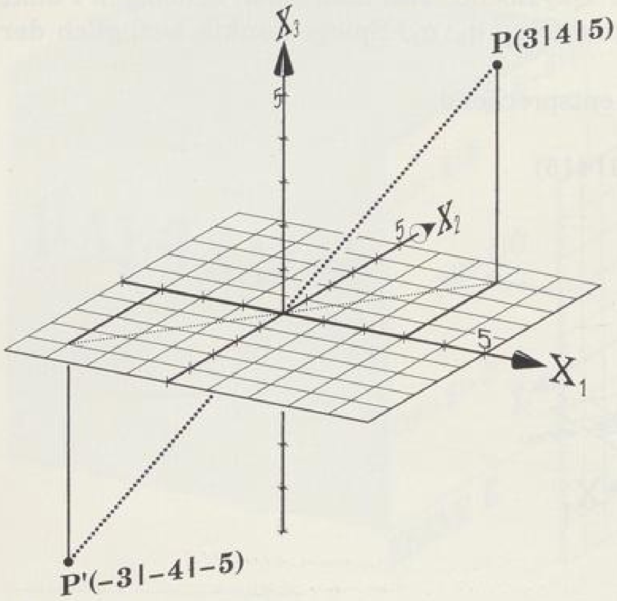
Der Punkt $P^*(0 \mid 0 \mid 5)$ liegt auf der x_3-Achse, der Punkt $P(3 \mid 4 \mid 5)$ liegt in gleicher Höhe wie P^*. Hat man also einen beliebigen Punkt $Q(q_1 \mid q_2 \mid q_3)$, dann ist $Q^*(0 \mid 0 \mid q_3)$ seine senkrechte Projektion in die x_3-Achse.



Der Punkt $P'(-3 \mid -4 \mid 5)$ ist der Spiegelpunkt von P bezüglich der x_3-Achse. Hat man also einen beliebigen Punkt $Q(q_1 \mid q_2 \mid q_3)$, so sind $Q'(-q_1 \mid -q_2 \mid q_3)$ und $Q(q_1 \mid q_2 \mid q_3)$ Spiegelpunkte bezüglich der x_3-Achse.
Bei den andern Koordinatenachsen ist es entsprechend.

Spiegelung am Koordinatenursprung

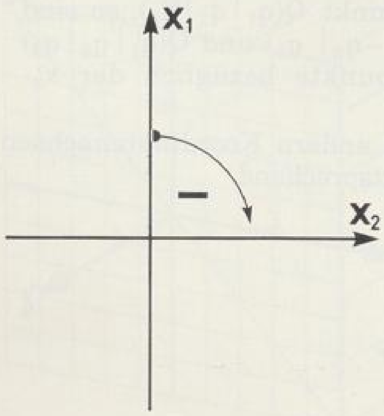
Ändert man bei allen Koordinaten eines Punkts die Vorzeichen, dann bekommt man den Spiegelpunkt bezüglich des Ursprungs. So sind also die Punkte $Q(q_1 | q_2 | q_3)$ und $Q'(-q_1 | -q_2 | -q_3)$ Spiegelpunkte bezüglich des Ursprungs.



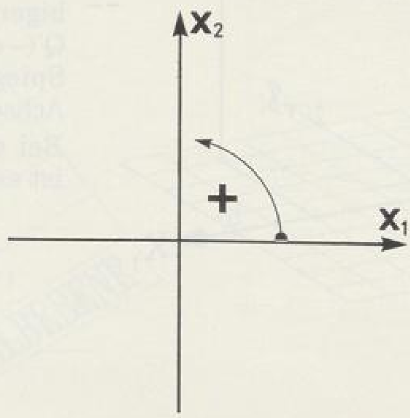
Orientierung

Je nach Lage der Achsen unterscheidet man in der Ebene zwei verschieden orientierte Koordinatensysteme. Wenn man die x_1-Achse durch eine mathematisch positive Drehung (linksrum, entgegen dem Uhrzeigersinn) auf kürzestem Weg in die x_2-Achse überführen kann, dann heißt das Koordinatensystem **positiv orientiert** oder kurz **Rechtssystem**. Vertauscht man die beiden Achsen, so ergibt sich ein **negativ orientiertes** Koordinatensystem, kurz ein **Linkssystem**.

Ebenes Linkssystem

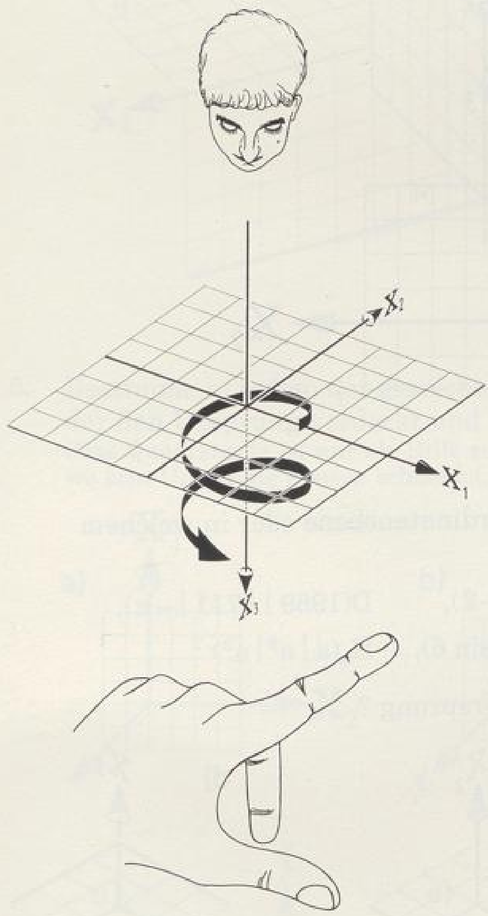


Ebenes Rechtssystem

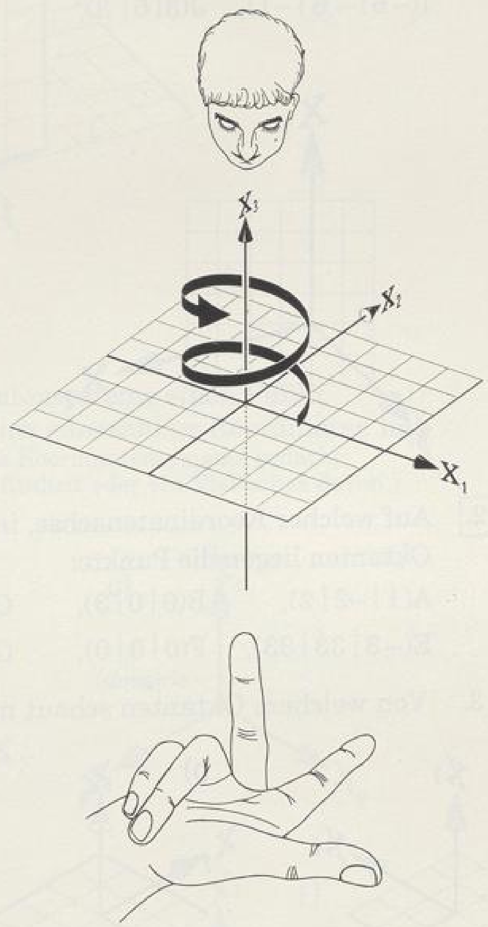


Im Raum ist es komplizierter. Ebene Koordinatensysteme lassen sich hier nicht mehr in Links- und Rechtssysteme einteilen, weil man sie von zwei Seiten betrachten kann. Was man von der einen Seite als Rechtssystem sieht, ist von der andern Seite aus gesehen ein Linkssystem und umgekehrt. Räumliche Koordinatensysteme aber lassen sich wieder in zwei Gruppen einteilen: Schaut man so auf die x_1x_2-Ebene, daß ihre Achsen ein ebenes Rechtssystem bilden, und kommt die x_3-Achse auf einen zu, dann hat man ein **räumliches Rechtssystem** vor sich. Zeigt dagegen die x_3-Achse von einem weg, so ist das Koordinatensystem ein **räumliches Linkssystem**.

Räumliches Linkssystem



Räumliches Rechtssystem



Daumen (x_1-Achse), Zeigefinger (x_2-Achse) und Mittelfinger (x_3-Achse) der rechten Hand bilden ein Rechtssystem, die gleichen Finger der linken Hand bilden ein Linkssystem.
Bei einem Rechtssystem bewegt sich eine normale Schraube (Rechtsschraube) in x_3-Richtung, wenn man sie so dreht, daß die x_1-Achse auf kürzestem Weg in die x_2-Achse übergeht.

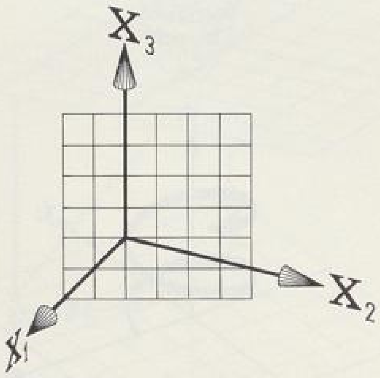
Spiegelt man ein Rechtssystem an einer Ebene, so entsteht ein Linkssystem und umgekehrt. Wir verwenden künftig nur Rechtssysteme.

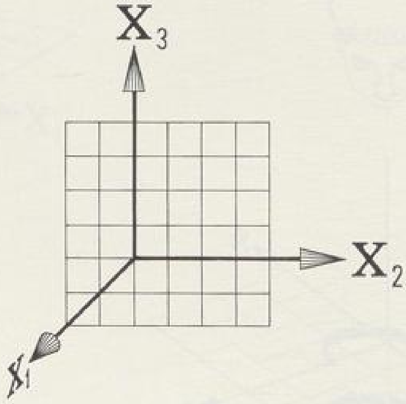
Aufgaben

»Bestimme die Punkte ...«, »Lies die Punkte ... ab« steht kurz und bündig für:
Bestimme die Koordinaten der Punkte..., Lies die Koordinaten der Punkte ... ab.

1. Zeichne ein Koordinatensystem
  a) im Schrägbild
  b) im Normalbild und trage die Punkte ein:

A(0 | −2 | 0), B(0 | 2 | 3), C(−5 | 0 | 3), D(2 | 4 | 4),
E(−4 | 2 | 3), F(−2 | −4 | 5), G(5 | −2 | 1), H(4 | −6 | −5),
I(−6 | −6 | −1), J(3 | 6 | 3), K(−3 | 4 | −6).

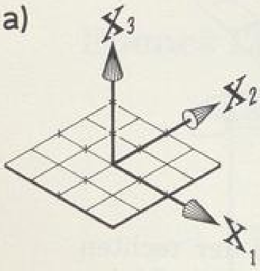


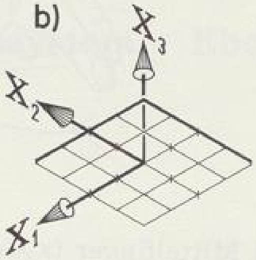


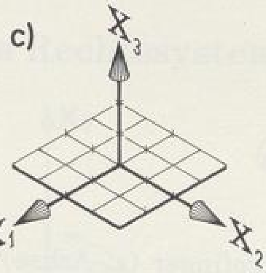
2. Auf welcher Koordinatenachse, in welcher Koordinatenebene oder in welchem Oktanten liegen die Punkte:

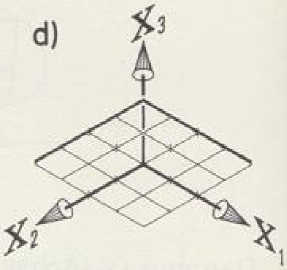
A(1 | −2 | 2), B(0 | 0 | 3), C($-\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2}$ | −2), D(1989 | 4711 | $-\pi$),
E(−3 | 33 | 33), F(0 | 0 | 0), G(sin 2 | sin 4 | sin 6), H_a(a | a^2 | a^3)

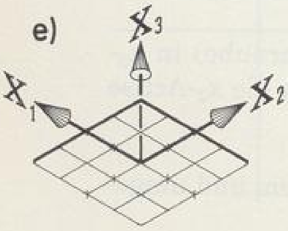
3. Von welchem Oktanten schaut man auf den Ursprung ?

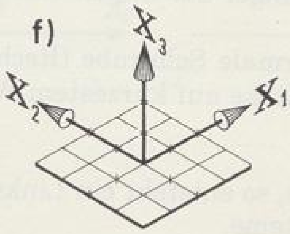
a)


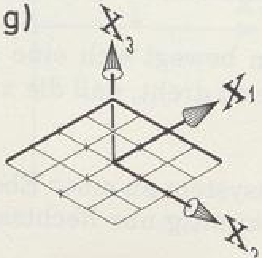
b)


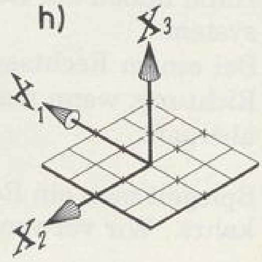
c)


d)


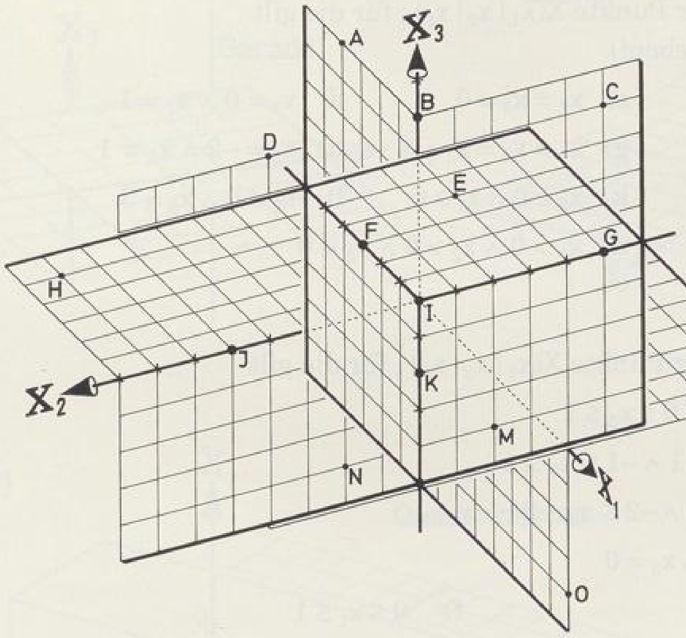
e)


f)


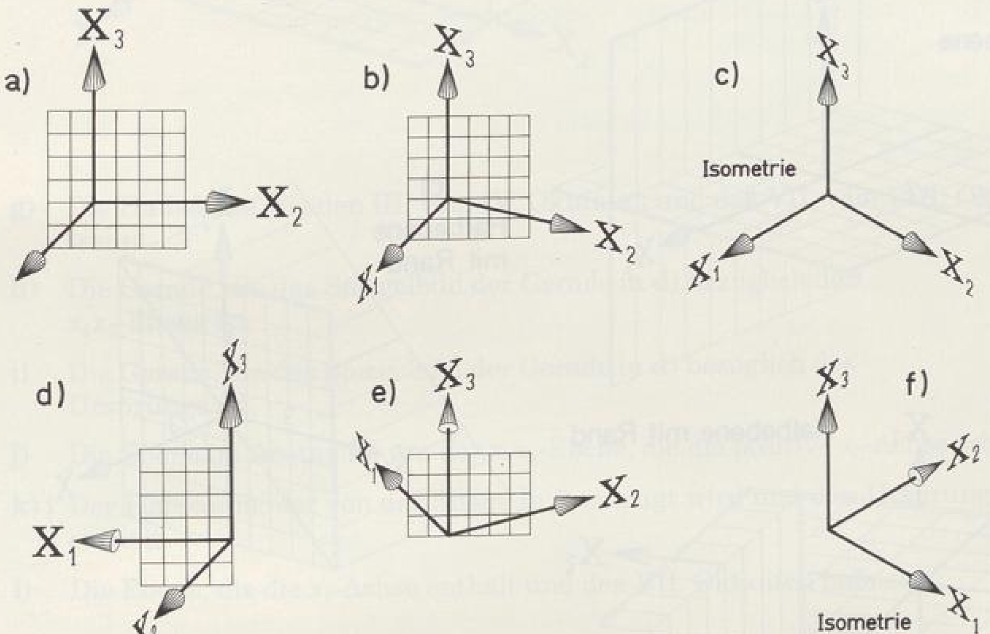
g)


h)


4. Lies die Punkte A bis O aus dem Bild ab. Die Punkte liegen auf Gitterlinien. Benachbarte parallele Gitterlinien in den Koordinatenebenen haben den Abstand 1.



5. Bestimme in jedem der gezeichneten Koordinatensysteme einen Punkt, der den Ursprung verdeckt und möglichst kleine ganzzahlige Koordinaten hat.
(Das Quadratnetz ist nur als Hilfe zum Zeichnen des Koordinatensystems gedacht; wo sein Umriß die Achsen schneidet, setze man die Einheit oder ein Vielfaches davon.)



6. Bestimme in jedem Koordinatensystem von Aufgabe **5.** einen Punkt mitganzzahligen Koordinaten, der möglichst nah am Ursprung liegt und vom Ursprung verdeckt wird.

7. Bestimme im Schrägbild von Aufgabe **5. a)** einen Punkt mit möglichst kleinen ganzzahligen Koordinaten, der den Punkt $A(-2 \mid -3 \mid 2)$ verdeckt.

$\boxed{8.}$ Beschreibe die Menge aller Punkte $X(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$, für die gilt (Skizzen erleichtern das Leben!)

a) $x_2 = 0$	**b)** $x_1 = -2$	**c)** $x_2 = x_3 = 0$	**d)** $x_3 = 0 \wedge x_2 = 1$
e) $x_2 = x_3$	**f)** $x_1 = -x_3$	**g)** $x_1 = x_2 = x_3$	**h)** $x_2 = -2 \wedge x_3 = 1$
i) $x_2 < 0$	**j)** $x_1 \geq -2$	**k)** $x_2 \geq 0 \wedge x_3 \geq 0$	**l)** $x_2 \leq 0 \wedge x_3 = 3$

m) $x_1 = -x_2 \wedge x_3 < 0$ **n)** $x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \wedge x_3 < 0$

o) $x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \wedge x_3 = 0$

• **9.** Beschreibe die Menge aller Punkte $X(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$, für die gilt

a) $0 \leq x_1 \leq 1 \wedge 0 \leq x_2 \leq 1 \wedge 0 \leq x_3 \leq 1$

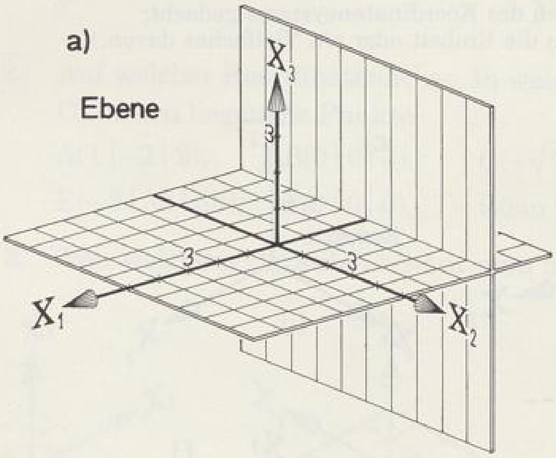
b) $-1 \leq x_1 \leq 1 \wedge -1 \leq x_2 \leq 1 \wedge -1 \leq x_3 \leq 1$

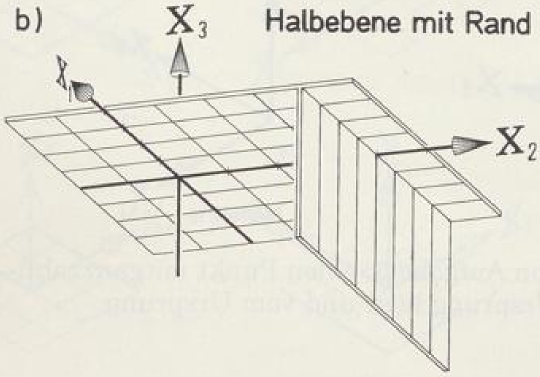
c) $0 \leq x_1 \leq 1 \wedge -1 \leq x_2 \leq 1 \wedge -2 \leq x_3 \leq 2$

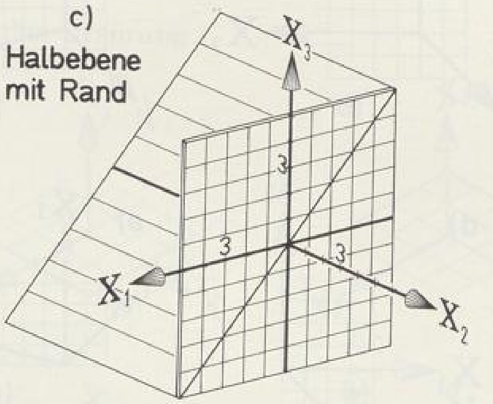
d) $0 \leq x_1 \leq 1 \wedge 0 \leq x_2 \leq 1 \wedge x_3 = 0$

e) $0 \leq x_1 \leq 1 \wedge 0 \leq x_2 \leq 1$ **f)** $0 \leq x_1 \leq 1$

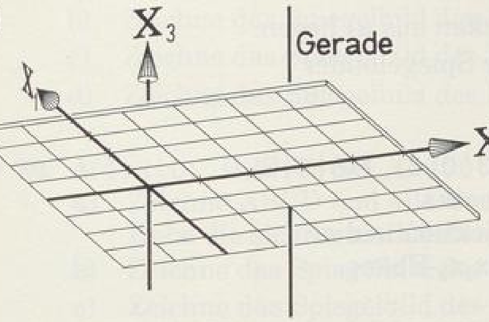
10. Beschreibe die Punktmenge im Bild oder Text mit Koordinaten(un)gleichungen



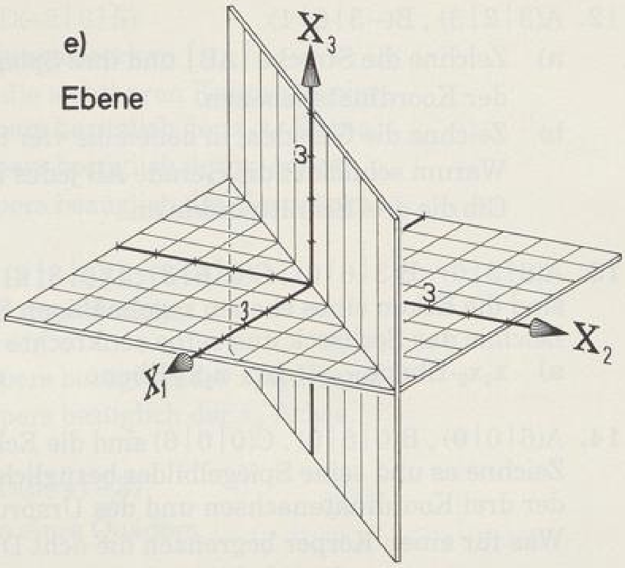




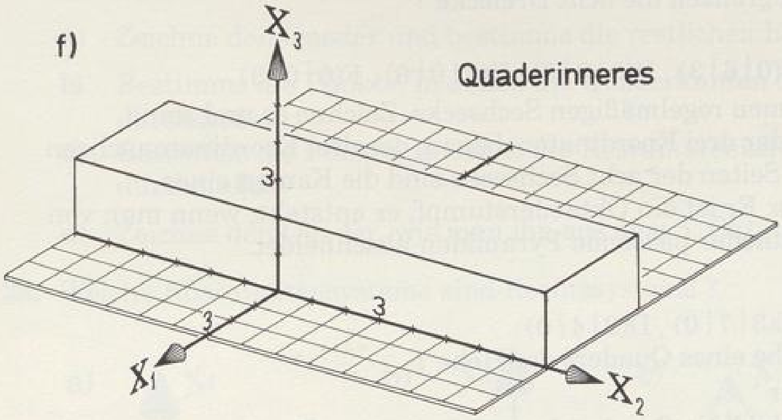
d)



e)



f)



g) Die Halbebene, die den III. vom IV. Oktanten und den VII. vom VIII. Oktanten trennt.

h) Die Gerade, die das Spiegelbild der Gerade in **d)** bezüglich der x_1x_2-Ebene ist.

i) Die Gerade, die das Spiegelbild der Gerade in **d)** bezüglich des Ursprungs ist.

j) Die Ebene im Abstand 3 von der x_1x_2-Ebene, die die positive x_3-Achse schneidet.

k) Der Halbraum, der von der Ebene in **j)** erzeugt wird und den Ursprung enthält.

l) Die Ebene, die die x_1-Achse enthält und den VII. Oktanten halbiert.

11. Zeichne den Punkt A(2 | 4 | 6) und seine Spiegelbilder bezüglich der Koordinatenachsen, der Koordinatenebenen und des Ursprungs. Verbinde alle Punkte so, daß ein Quaderbild entsteht. Markiere und bestimme die Punkte, in denen die Koordinatenachsen die Quaderflächen durchstoßen.

12. A(3 | 2 | 3) , B(−3 | 6 | 1)

a) Zeichne die Strecke [AB] und ihre Spiegelbilder bezüglich der Koordinatenebenen.

b) Zeichne die Geraden, in denen die vier Strecken aus **a)** liegen. Warum schneidet die Gerade AB jedes ihrer Spiegelbilder ? Gib die drei Schnittpunkte an.

• **13.** A(6 | 3 | 0) , B(3 | 6 | 0) , C(0 | 6 | 3) , D(0 | 3 | 6) , E(3 | 0 | 6) , F(6 | 0 | 3) sind die Ecken eines ebenen regelmäßigen Sechsecks.
Zeichne das Sechseck und seine senkrechte Projektion in die

a) x_1x_2-Ebene **b)** x_1x_3-Ebene **c)** x_2x_3-Ebene.

• **14.** A(6 | 0 | 0) , B(0 | 6 | 0) , C(0 | 0 | 6) sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Zeichne es und seine Spiegelbilder bezüglich der drei Koordinatenebenen, der drei Koordinatenachsen und des Ursprungs.
Was für einen Körper begrenzen die acht Dreiecke ?

⁚• **15.** A(6 | 3 | 0) , B(3 | 6 | 0) , C(0 | 6 | 3) , D(0 | 3 | 6) , E(3 | 0 | 6) , F(6 | 0 | 3) sind die Ecken eines ebenen regelmäßigen Sechsecks. Zeichne es und seine Spiegelbilder bezüglich der drei Koordinatenebenen, der drei Koordinatenachsen und des Ursprungs. Die Seiten der acht Sechsecke sind die Kanten eines Archimedischen Körpers: Er ist ein Oktaederstumpf, er entsteht, wenn man von einem regelmäßigen Oktaeder passende Pyramiden abschneidet.

16. A(8 | 2 | 0) , B(9 | 5 | 0) , C(3 | 7 | 0) , D(2 | 4 | 0)
ABCD ist die Grundfläche eines Quaders der Höhe 1.

a) Zeichne den Quader

b) Zeichne das Spiegelbild des Quaders bezüglich der x_1x_2-Ebene.

c) Zeichne das Spiegelbild des Quaders bezüglich der x_1x_3-Ebene.

d) Zeichne das Spiegelbild des Quaders bezüglich der x_2x_3-Ebene.

• **17** A(8 | 2 | 0) , B(9 | 5 | 0) , C(3 | 7 | 0) , D(2 | 4 | 0)
ABCD ist die Grundfläche eines Quaders der Höhe 1.

a) Zeichne den Quader

b) Zeichne das Spiegelbild des Quaders bezüglich der x_3-Achse.

c) Zeichne das Spiegelbild des Quaders bezüglich der x_2-Achse.

d) Zeichne das Spiegelbild des Quaders bezüglich der x_1-Achse.

⁚ **18.** A(6 | 4 | 1) , B(4 | 6 | 0) , C(5 | 8 | 2) , D(7 | 6 | 3) ,
E(4 | 3 | 3) , F(2 | 5 | 2) , G(3 | 7 | 4) , H(5 | 5 | 5)
ABCD ist die Grundfläche, EFGH die Deckfläche eines Würfels.

a) Zeichne den Würfel

b) Zeichne das Spiegelbild des Würfels bezüglich der x_1x_2-Ebene.

c) Zeichne das Spiegelbild des Würfels bezüglich der x_1x_3-Ebene.

d) Zeichne das Spiegelbild des Würfels bezüglich der x_2x_3-Ebene.

• **19.** $A(-4 \mid 2 \mid 0)$, $B(2 \mid 5 \mid 0)$, $C(0 \mid 6 \mid 5)$, $D(-2 \mid 8 \mid 5)$

a) Zeichne ABCD und alle Verbindungsstrecken.
Welcher Körper entsteht? Hebe die sichtbaren Kanten hervor.

b) Zeichne das Spiegelbild des Körpers bezüglich der x_1x_3-Ebene.

c) Zeichne das Spiegelbild des Körpers bezüglich der x_3-Achse.

d) Zeichne das Spiegelbild des Körpers bezüglich des Ursprungs.

• **20.** $A(4 \mid 3 \mid 0)$, $B(5 \mid -4 \mid 0)$, $C(8 \mid 0 \mid 5)$, $D(1 \mid -1 \mid 5)$

a) Zeichne ABCD und alle Verbindungsstrecken.
Hebe die sichtbaren Kanten hervor.

b) Zeichne das Spiegelbild des Körpers bezüglich der x_2x_3-Ebene.

c) Zeichne das Spiegelbild des Körpers bezüglich der x_3-Achse.

: **21.** $A(6 \mid 4 \mid 1)$, $B(2 \mid 8 \mid 1)$, $C(0 \mid -2 \mid 1)$, $D(6 \mid 4 \mid -3)$

[AB], [AC] und [AD] sind die Kanten eines Quaders.

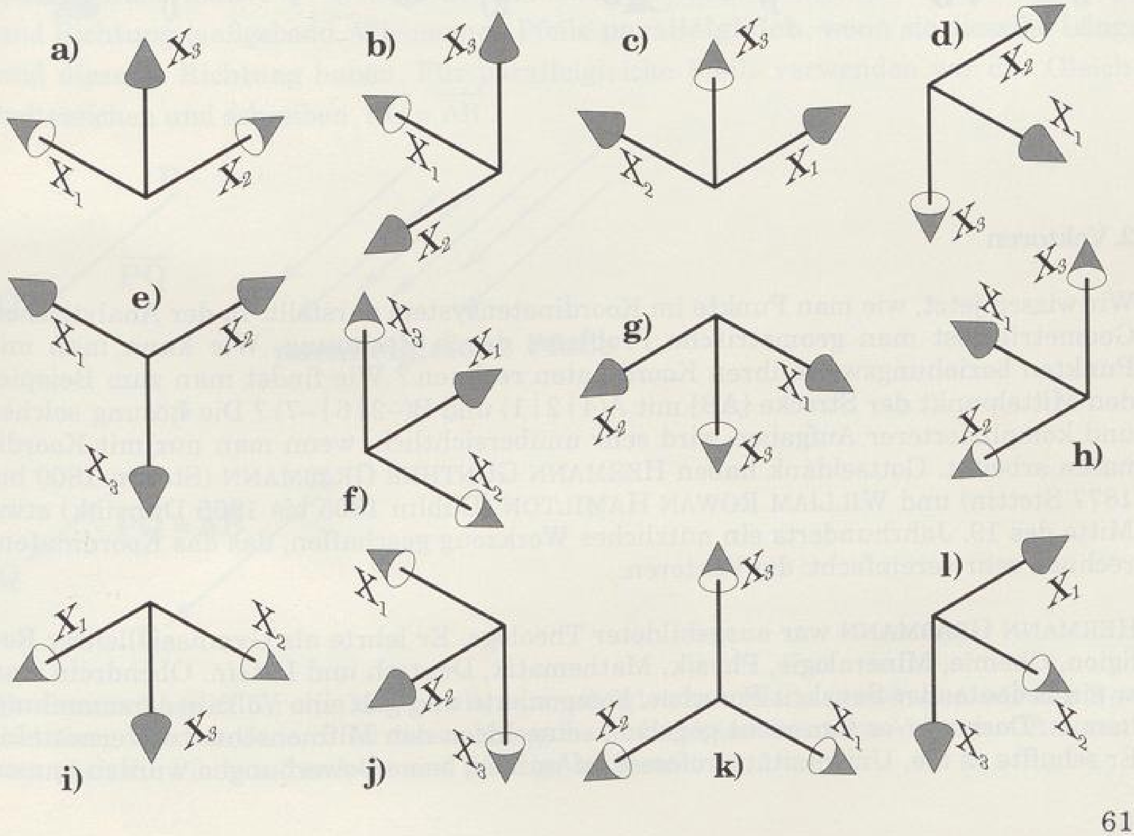
a) Zeichne den Quader und bestimme die restlichen Eckpunkte.

b) Bestimme die Punkte, in denen die Quaderkanten die x_1x_2-Ebene durchstoßen.

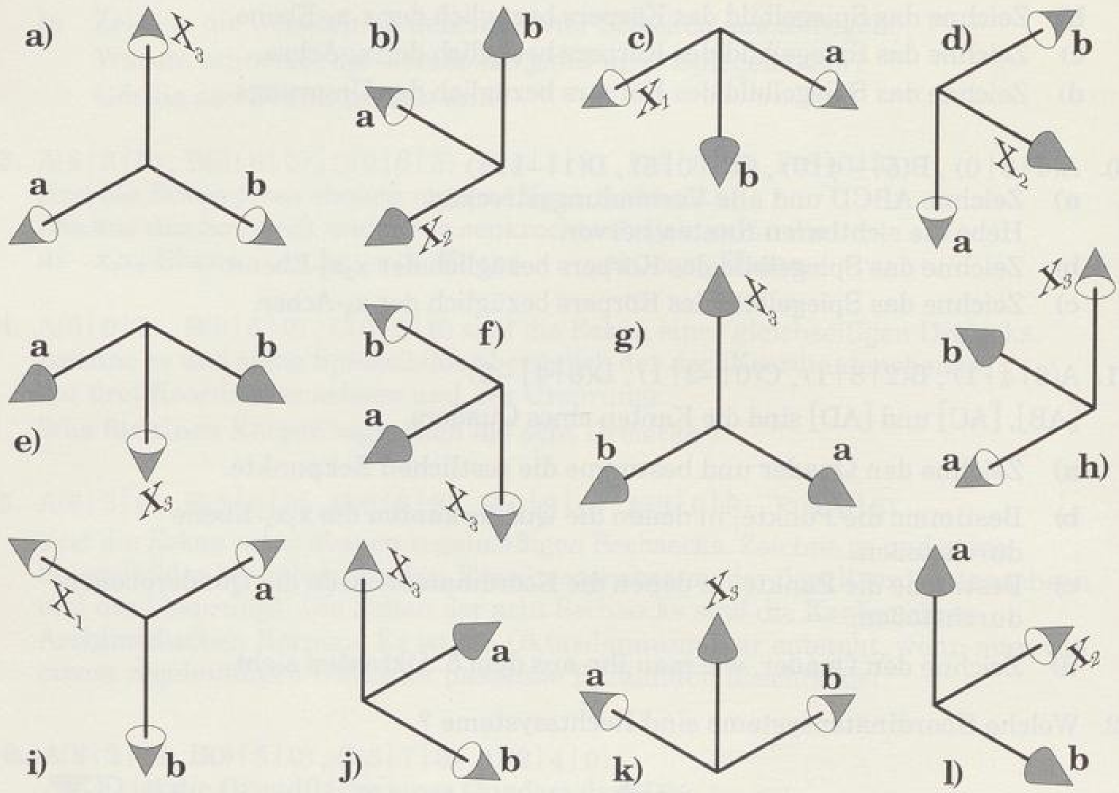
c) Bestimme die Punkte, in denen die Koordinatenachsen die Quaderebenen durchstoßen.

d) Zeichne den Quader, wie man ihn aus dem 5. Oktanten sieht.

• **22.** Welche Koordinatensysteme sind Rechtssysteme ?



23. Ersetze a und b so durch x_1, x_2 beziehungsweise x_3, daß ein Rechtssystem entsteht.



2. Vektoren

Wir wissen jetzt, wie man Punkte im Koordinatensystem darstellt. In der Analytischen Geometrie löst man geometrische Probleme durch Rechnung. Wie kann man mit Punkten beziehungsweise ihren Koordinaten rechnen? Wie findet man zum Beispiel den Mittelpunkt der Strecke [AB] mit A(4 | 2 | 1) und B(–2 | 6 | –7)? Die Lösung solcher und komplizierterer Aufgaben wird sehr unübersichtlich, wenn man nur mit Koordinaten arbeitet. Gottseidank haben HERMANN GÜNTHER GRAßMANN (Stettin 1809 bis 1877 Stettin) und WILLIAM ROWAN HAMILTON (Dublin 1805 bis 1865 Dunsink) etwa Mitte des 19. Jahrhunderts ein nützliches Werkzeug geschaffen, das das Koordinatenrechnen sehr vereinfacht: die Vektoren.

HERMANN GRAßMANN war ausgebildeter Theologe. Er lehrte als Gymnasiallehrer Religion, Chemie, Mineralogie, Physik, Mathematik, Deutsch und Latein. Obendrein war er ein bedeutender Sanskrit-Forscher, komponierte und gab eine Volksliedersammlung heraus. Doch war es ihm nicht gegeben, seine Ideen den Mitmenschen zu vermitteln. Er schaffte es nie, Universitätsprofessor zu werden, seine Bewerbungen wurden immer

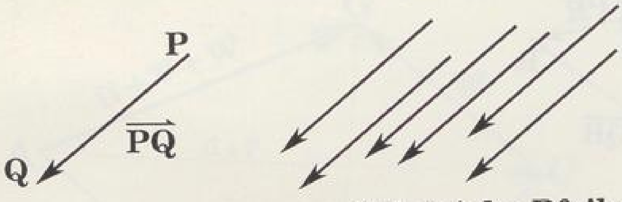
abgelehnt mit dem Urteil: originell, aber unverständlich. Auch sein Hauptwerk »Die lineale Ausdehnungslehre« von 1844 – er stellte darin zum ersten Mal die Vektorrechnung vor – blieb lange Zeit verkannt.
Etwa gleichzeitig mit GRAßMANN entwickelte WILLIAM HAMILTON die Quaternionenrechnung als Erweiterung des Rechnens mit komplexen Zahlen. Er war es, der darin die Bezeichnung »Vektor« eingeführt hat.
JOSIAH WILLARD GIBBS, amerikanischer Mathematiker und Physiker, (New Haven 1839 bis 1903 New Haven) und OLIVER HEAVISIDE, englischer Physiker, (London 1850 bis 1925 Homefield in Torquay) haben die Vektorrechnung vor allem für physikalische Anwendungen ausgebaut.
Nach und nach fanden auch die Mathematiker Gefallen an diesem neuen Instrument. Anfang des 20. Jahrhunderts hat sich die Vektorrechnung durchgesetzt. In vielen mathematischen und technischen Disziplinen ist sie heute unentbehrlich.

Was sind Vektoren?

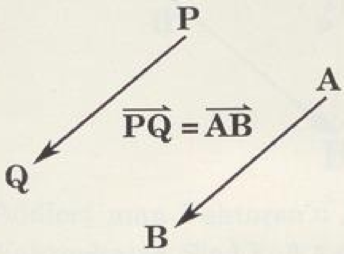
Die Addition von Zahlen läßt sich mit Pfeilen veranschaulichen. Pfeile addiert man, indem man sie »Fuß an Spitze« aneinanderhängt. Der Ergebnispfeil geht vom Fuß des ersten zur Spitze des letzten Pfeils. Diese Pfeilrechnung erweitern wir jetzt auf den Raum.

$$3 + (-9) = -6$$

Ein Pfeil ist festgelegt durch ein Paar von Punkten. Für einen Pfeil, der von P nach Q geht, schreibt man $\overrightarrow{PQ}$. Wie bei der Zahlen-Pfeilrechnung sind auch jetzt nur Länge und Richtung maßgebend. Wir nennen Pfeile **parallelgleich**, wenn sie dieselbe Länge und dieselbe Richtung haben. Für parallelgleiche Pfeile verwenden wir das Gleichheitszeichen und schreiben $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.



parallelgleiche Pfeile



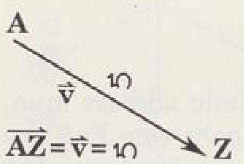
Als Sammelbegriff für die Menge aller parallelgleichen Pfeile verwenden wir die Bezeichnung **Vektor**. Jeder Pfeil dieser Menge heißt **Repräsentant** des Vektors. Oft nennt man auch die Pfeile selber kurz und bündig Vektoren.

Eine ähnliche Unterscheidung macht man auch bei den Brüchen. $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{-18}{-24}, \frac{51}{68}$ ... sind Repräsentanten des Bruchs mit dem Wert 0,75. Auch hier nennt man jeden Repräsentanten einfachheitshalber selber Bruch.

Wir fassen zusammen:

Definition
Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ist die Menge aller zum Pfeil $\overrightarrow{PQ}$ parallelgleichen Pfeile.

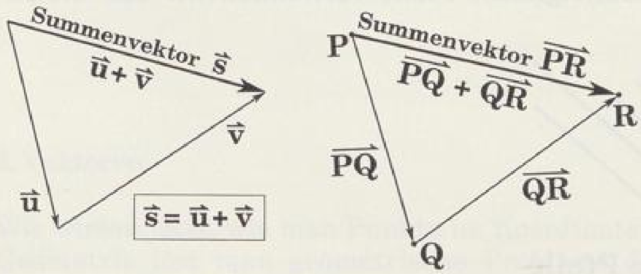
Der Vorteil dieser Definition besteht darin, daß ein Vektor an jedem Raumpunkt als Pfeil zur Verfügung steht.



Um einen Vektor unabhängig vom Repräsentanten zu bezeichnen, verwendet man auch kleine bepfeilte lateinische oder kleine deutsche Buchstaben.

Addition von Vektoren

Die Addition von Vektoren im Raum (und in der Ebene) ist so festgelegt:
Man hängt an einen Pfeil des 1. Summanden einen passenden Pfeil des 2. Summanden, das heißt, einen Pfeil, der da anfängt, wo der erste aufhört. Der Ergebnispfeil führt vom Fuß des ersten zur Spitze des zweiten Pfeils. Er legt den Ergebnisvektor fest.



Bezeichnet man die Anfangs- und Endpunkte der Pfeile mit Buchstaben, dann sieht die Addition so aus:

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}}$$

Regel von CHASLES (sprich schaal)

(Michel CHASLES, französischer Mathematiker,
Epernon 1793 bis 1880 Paris)

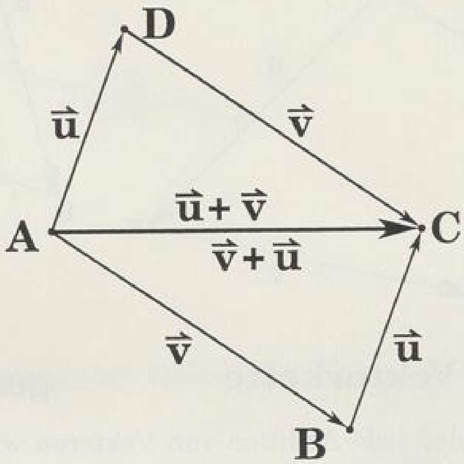
Für diese Vektoraddition gelten dieselben Rechenregeln wie für die Addition von Zahlen:

Kommutativgesetz der Vektoraddition

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



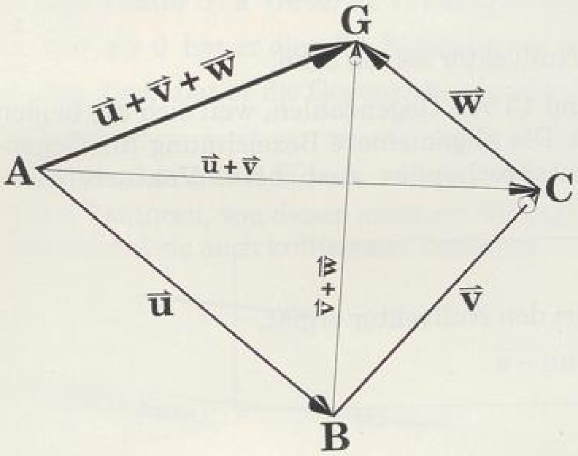
Assoziativgesetz der Vektoraddition

$$\boxed{(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v}+\vec{w})}$$

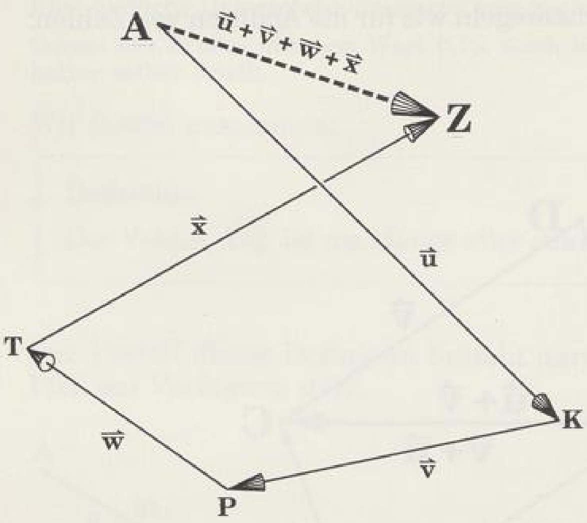
$$(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$$

$$\vec{u} + (\vec{v}+\vec{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$$

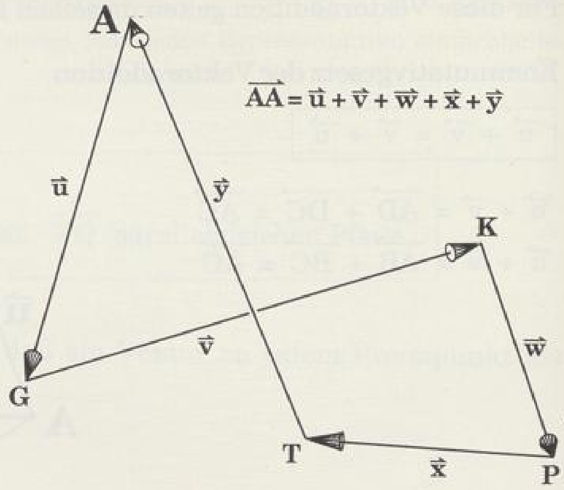
Weil die Reihenfolge der Additionen keine Rolle spielt,
läßt man die Klammern meist weg und schreibt $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.



Addiert man Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ..., dann nennt man diese Aneinanderreihung auch **Vektorkette.** Sind Fuß A des ersten und Spitze Z des letzten Pfeils verschieden, so heißt die Vektorkette **offen**: der Summenvektor $\overrightarrow{AZ} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \ldots$ hat die Richtung von A nach Z. Fallen A und Z zusammen (Z = A), so heißt die Vektorkette **geschlossen**. Formal ergibt sich jetzt der Summenvektor $\overrightarrow{AA}$, ein Gebilde ohne Richtung und Ausdehnung.



offene Vektorkette



geschlossene Vektorkette

Wir verlangen, daß jede Addition von Vektoren wieder einen Vektor ergibt. Deshalb müssen wir $\overrightarrow{AA}$ als Vektor zulassen. Man nennt ihn Nullvektor. Wie die Zahl 0 bewirkt seine Addition nichts, er verhält sich »neutral«.

> **Definition des neutralen Elements**
> Der Vektor, der beim Addieren nichts ändert, heißt **Nullvektor**. Man schreibt ihn $\vec{o}$.

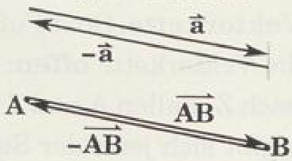
$\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$,
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BB} = \vec{o}$.
Der Nullvektor hat die Länge null.
Der Begriff der Richtung verliert beim Nullvektor seinen Sinn.

Beim Zahlenrechnen spricht man bei –13 und 13 von Gegenzahlen, weil sich die beiden beim Addieren aufheben, also null ergeben. Die allgemeinere Bezeichnung für Gegenzahl ist inverses Element. Weil man Entsprechendes auch beim Vektorrechnen braucht, definiert man:

> **Definition des inversen Elements**
> Der Vektor, der zu einem Vektor $\vec{a}$ addiert den Nullvektor ergibt, heißt **Gegenvektor** von $\vec{a}$. Man schreibt ihn $-\vec{a}$.

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$,
$\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{o}$, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

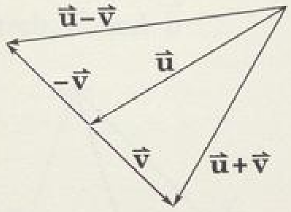
Gegenvektoren

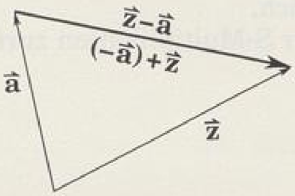


$\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}}$

Der Gegenvektor $-\vec{a}$ von $\vec{a}$ ist genau so lang wie $\vec{a}$ und hat die Gegenrichtung von $\vec{a}$. $\vec{a}$ ist Gegenvektor von $-\vec{a}$. $\vec{a}$ und $-\vec{a}$ sind Gegenvektoren.
Statt $\vec{u} + (-\vec{v})$ schreibt man kurz $\vec{u} - \vec{v}$ und hat damit die Subtraktion von Vektoren auf die Addition zurückgeführt.

Subtraktion – Addition

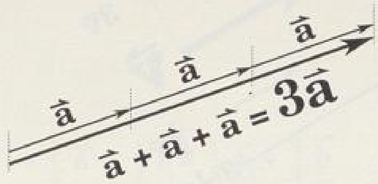




S-Multiplikation

Wie beim Zahlenrechnen führt man auch bei Vektoren für Summen mit gleichen Summanden eine Abkürzung ein:

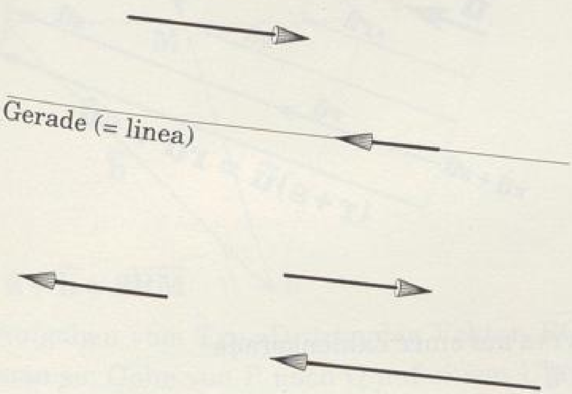
$$\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} =: 3 \cdot \vec{a} \quad (= 3\vec{a})$$



Der Vektor $3\vec{a}$ ist also dreimal so lang wie $\vec{a}$ und hat dieselbe Richtung.
Wie bei Zahlen erweitert man diese Produktdefinition auf reelle Faktoren:

> **Definition**
> Der Vektor $r \cdot \vec{a}$ $(r \in \mathbb{R})$ ist $|r|$-mal so lang wie der Vektor $\vec{a}$.
> Für $r > 0$ hat er dieselbe Richtung wie $\vec{a}$,
> für $r < 0$ hat er die Gegenrichtung von $\vec{a}$.

Insbesondere gilt: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ und $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.
Zwei Vektoren, von denen einer ein Vielfaches des andern ist, sind parallel; man nennt sie auch **kollineare Vektoren**.

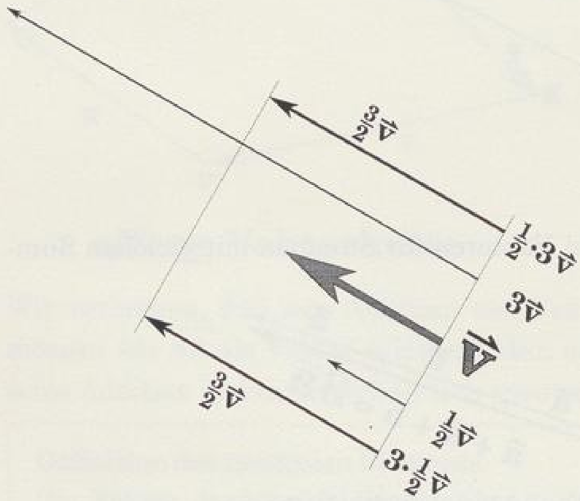


Manchmal nennt man reelle Zahlen im Gegensatz zu Vektoren auch Skalare.
Deshalb heißt die Produktbildung »Skalar·Vektor« auch **S-Multiplikation**.
Für die S-Multiplikation gelten ähnliche Gesetze wie für die Zahlen-Multiplikation:

Assoziativgesetz der S-Multiplikation

$\boxed{r\cdot(s\cdot\vec{u}) = (rs)\cdot\vec{u}}$ $\quad r, s \in \mathbb{R}$

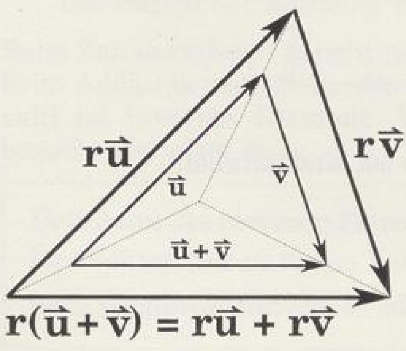
Die Begründung überlegt man sich,
indem man auf die Definition der S-Multiplikation zurückgeht.

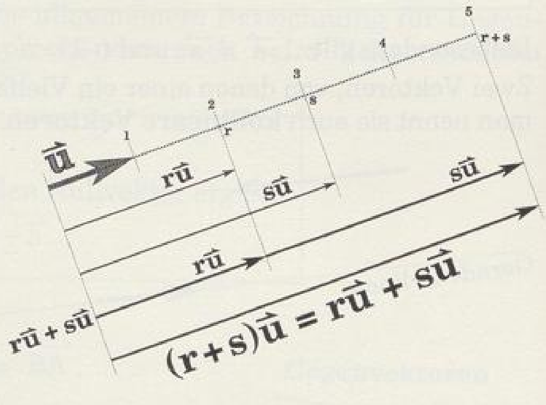


1. Distributivgesetz der S-Multiplikation

$\boxed{r\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = r\cdot\vec{u} + r\cdot\vec{v}}$ $\quad r \in \mathbb{R}$

Die Begründung klappt mit dem Strahlensatz.





2. Distributivgesetz der S-Multiplikation

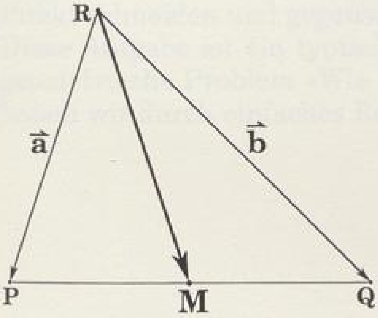
$\boxed{(r + s)\cdot\vec{u} = r\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{u}}$ $\quad r, s \in \mathbb{R}$

Dieses Gesetz beschreibt die Zahlenaddition r+s auf einer Zahlengerade
in Richtung $\vec{u}$, die Einheit ist die Länge von $\vec{u}$.

Beispiele zum Rechnen mit Vektoren

Seitenhalbierender Vektor

Die Seiten [RP] und [RQ] des Dreiecks PQR legen die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{RP}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{RQ}$ fest. Man sagt auch: »Die Vektoren $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{RQ}$ spannen das Dreieck PQR auf«. M ist die Mitte von [PQ]. Gesucht ist eine Darstellung des seitenhalbierenden Vektors $\overrightarrow{RM}$ durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



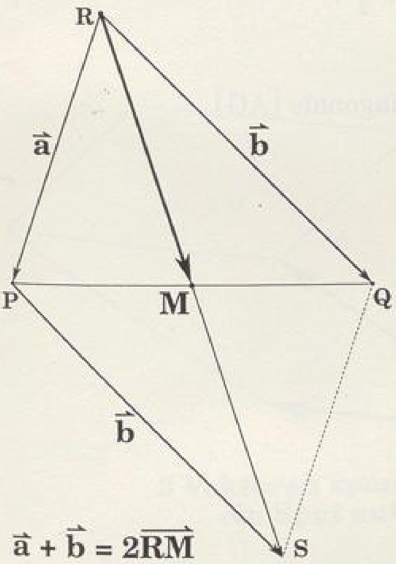
Lösung: $\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PM}$

$$= \vec{a} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$$

$$= \vec{a} + \tfrac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} - \tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b} = \tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}$$

$$\mathbf{\overrightarrow{RM} = \tfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})}$$

Der seitenhalbierende Vektor ist also das arithmetische Mittel der Vektoren, die ihn begrenzen. »Im Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen.« Mit diesem Satz hätte man das Ergebnis gleich sehen können. Betrachte dazu das Parallelogramm RPSQ, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

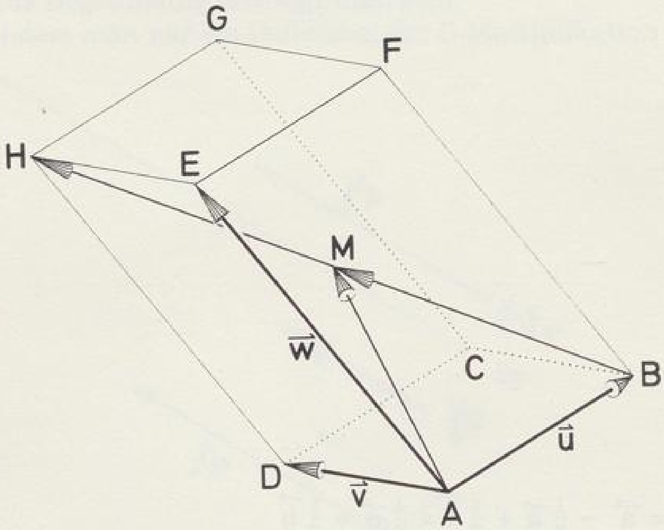


$\vec{a} + \vec{b} = 2\overrightarrow{RM}$

Aufgaben vom Typ »Drücke den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ mit den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus« löst man so: Gehe von P nach Q auf einem Umweg. Der Umweg setzt sich zusammen aus

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ oder aus Vektoren, die sich aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ berechnen lassen (offene Vektorkette). Dazu noch ein Beispiel:

Spatmittelpunkt
Das Spat ist ein Prisma, das von sechs Parallelogrammen begrenzt ist (»schiefer Quader«). Es wird von drei Vektoren aufgespannt. Im Spat ABCDEFGH ist M der Mittelpunkt der Raumdiagonale [BH].



$\overrightarrow{AM}$ soll mit den Kantenvektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ ausgedrückt werden.

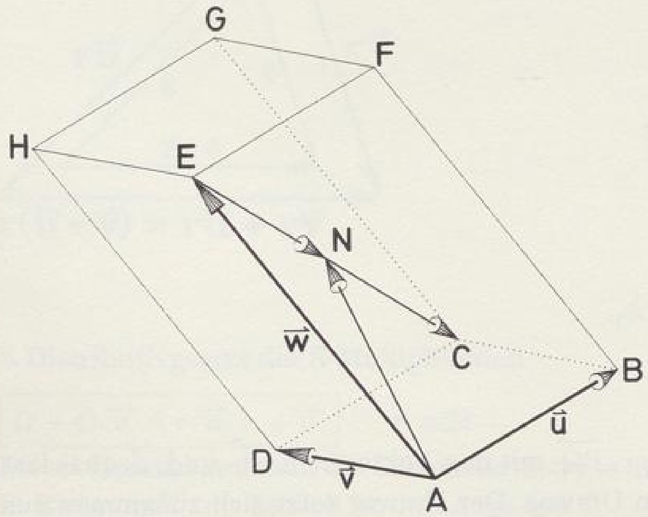
Lösung: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$

$= \vec{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$

$= \vec{u} + \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{w} + \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{v}$

$\mathbf{\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})}$

Wegen $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ ist M auch Mitte der Raumdiagonale [AG].



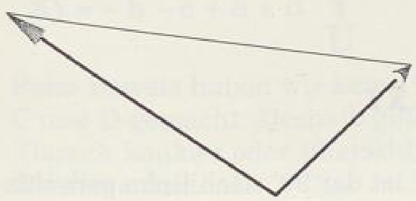
Ist N Mitte von [EC], dann gilt

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EN} \\
&= \vec{w} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{EC} \\
&= \vec{w} + \tfrac{1}{2}(-\vec{w} + \vec{u} + \vec{v}) = \tfrac{1}{2}\vec{w} + \tfrac{1}{2}\vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v}
\end{aligned}$$

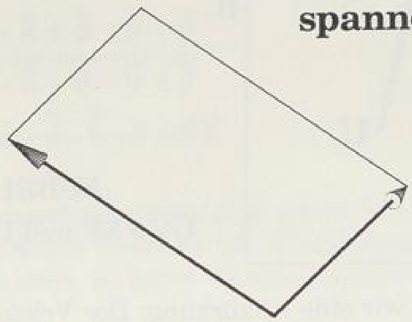
$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$, **also ist N = M.**

Genau so kann man schließlich noch zeigen, daß M auch Mittelpunkt der Raumdiagonale [DF] ist. Damit ist bewiesen daß sich die vier Raumdiagonalen eines Spats in einem Punkt schneiden und gegenseitig halbieren.
Diese Aufgabe ist ein typisches Beispiel für die Kraft der Vektorrechnung. Das raumgeometrische Problem »Wie liegen die vier Raumdiagonalen eines Spats zueinander?« haben wir durch einfaches Rechnen mit Vektoren gelöst. Das ist Analytische Geometrie!

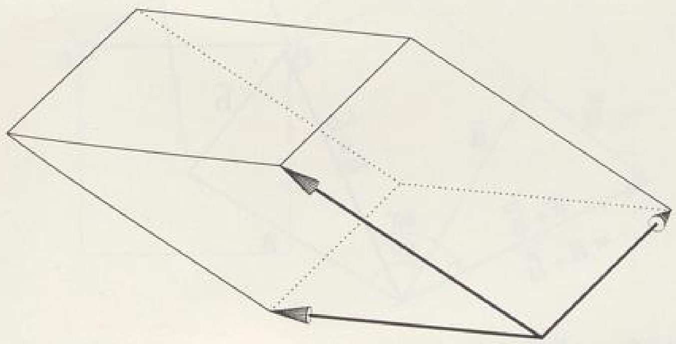
spannende Vektoren



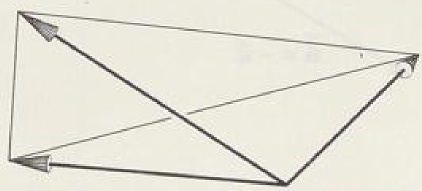
2 Vektoren spannen ein Dreieck auf



2 Vektoren spannen ein Parallelogramm auf



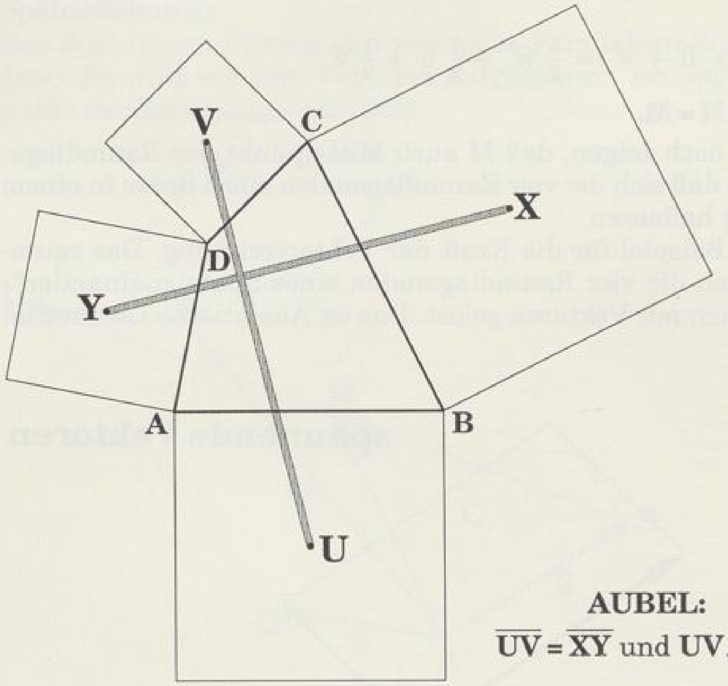
3 Vektoren spannen ein Spat auf



3 Vektoren spannen ein Tetraeder auf

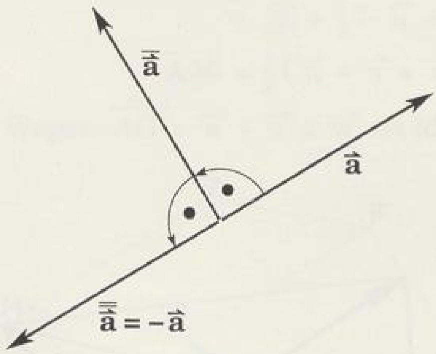
Auch für Probleme der ebenen Geometrie bietet die Vektorrechnung oft eine verblüffend einfache Lösung, zum Beispiel für den Beweis des Aubel-Theorems:

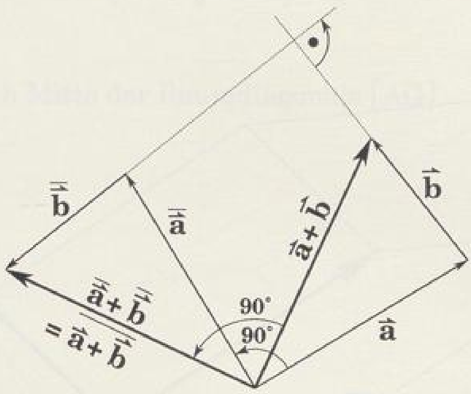
Über den Seiten eines beliebigen Vierecks zeichnet man die Außenquadrate. Verbindet man jeweils die Mitten zweier gegenüberliegender Quadrate, so entstehen zwei Strecken, die gleich lang und zueinander senkrecht sind.



AUBEL:
$\overline{UV} = \overline{XY}$ und $UV \perp XY$

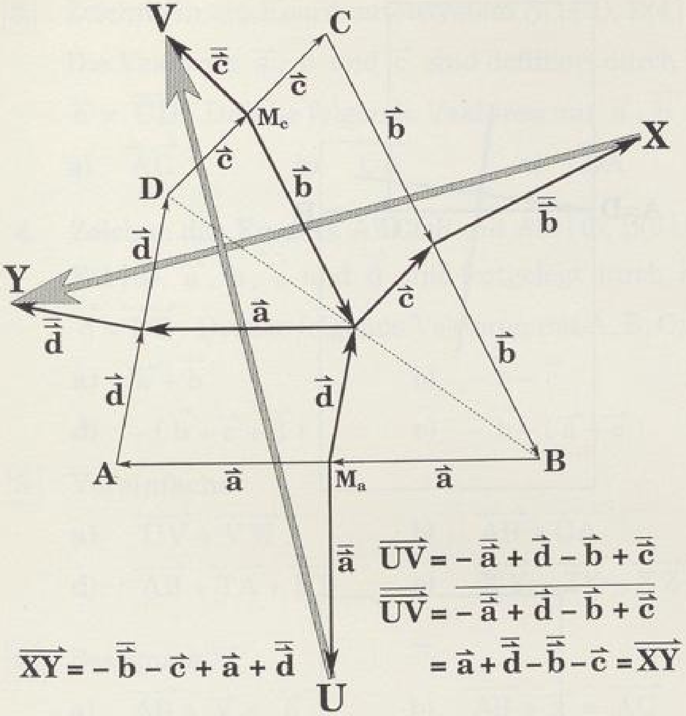
Im Beweis brauchen wir eine Abkürzung: Der Vektor $\vec{\vec{a}}$ ist der 90° nach links gedrehte Vektor $\vec{a}$. Dann ist $\vec{\vec{\vec{a}}} = -\vec{a}$ und $\overrightarrow{\overrightarrow{a+b}} = \vec{\vec{a}} + \vec{\vec{b}}$. Der Beweis steht im Bild, er verwendet $\overrightarrow{M_aM_c} = \vec{d} - \vec{b}$.



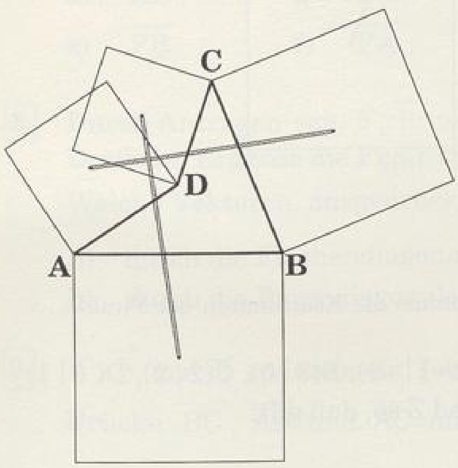


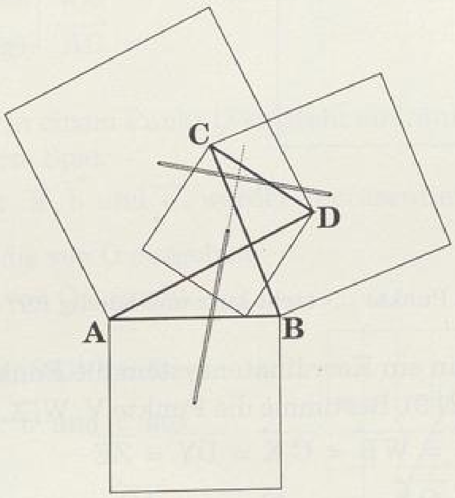
Entweder sieht man das direkt (Mittelparallelen in den Dreiecken ABD und BCD) oder erst nach trickreicher Vektorrechnung:

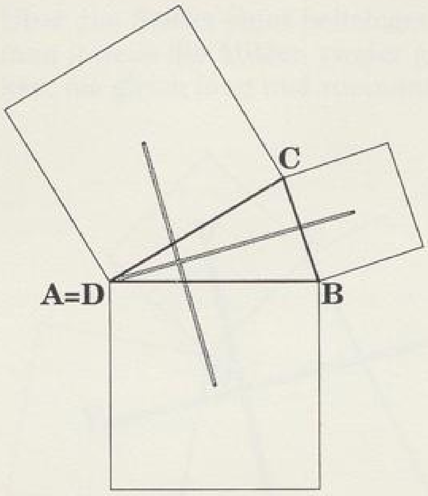
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{M_aM_c} = \vec{a} + 2\vec{d} + \vec{c} \\ \overrightarrow{M_aM_c} = -\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} \end{array}\right\} \overrightarrow{M_aM_c} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{M_aM_c} + \overrightarrow{M_aM_c}\right) = \vec{d} - \vec{b}.$$

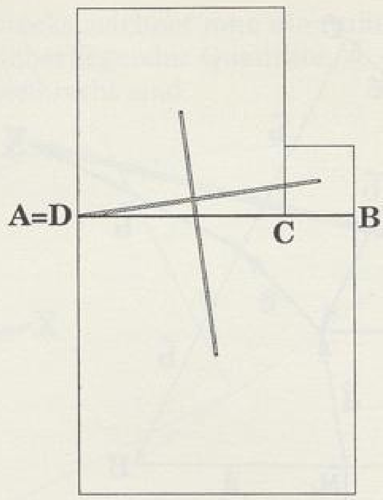


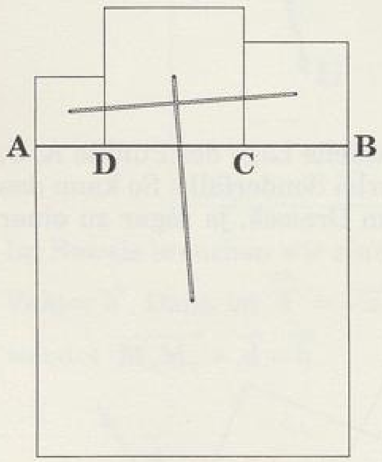
Beim Beweis haben wir keine Voraussetzung über eine spezielle Lage der Punkte A, B, C und D gemacht. Deshalb gilt das Aubel-Theorem für allerlei Sonderfälle: So kann das Viereck konkav oder überschlagen sein, es kann zu einem Dreieck, ja sogar zu einer Strecke entarten!

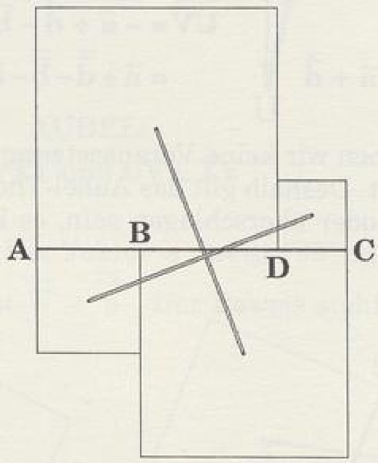












Aufgaben

»Bestimme die Punkte ...« steht kurz und bündig für: »Bestimme die Koordinaten der Punkte...«

1. Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte A(−1 | −2), B(3 | 0), C(2 | 2), D(0 | 1) und E(−2 | 3). Bestimme die Punkte V, W, X, Y und Z so, daß gilt:
$\vec{v} = \overrightarrow{AV} = \overrightarrow{WB} = \overrightarrow{CX} = \overrightarrow{DY} = \overrightarrow{ZE}$

a) $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ **b)** $\vec{v} = \overrightarrow{AO}$ **c)** $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$

2. Zeichne in ein Koordinatensystem A(2 | 0), B(8 | 4) und C(4 | 8).
Zeichne den Summenvektor.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ **c)** $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ 13 / 5 0 14 / 5

d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$ **e)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

3. Zeichne in ein Koordinatensystem A(1 | 1), B(4 | 1), C(6 | 3) und D(3 | 4).
Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind definiert durch $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$. Drücke folgende Vektoren mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus:

a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{CA}$ c) $\overrightarrow{DA}$ d) $\overrightarrow{BD}$

4. Zeichne das Fünfeck ABCDE mit A(0 | 0), B(3 | 0), C(4 | 1), D(4 | 4) und E(1 | 3). $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sind festgelegt durch $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ und $\vec{d} = \overrightarrow{DE}$. Drücke folgende Vektoren mit A, B, C, D und E aus:

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $-\vec{b} - \vec{c}$ c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

d) $-(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$ e) $-\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})$

5. Vereinfache

a) $\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$ c) $\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{RT}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{BT}$ e) $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{XZ}$

6. Bestimme $\vec{x}$

a) $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \vec{o}$ b) $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AB} - \vec{x} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

7. ABCDEF ist ein regelmäßiges Sechseck mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$.
Drücke mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus:

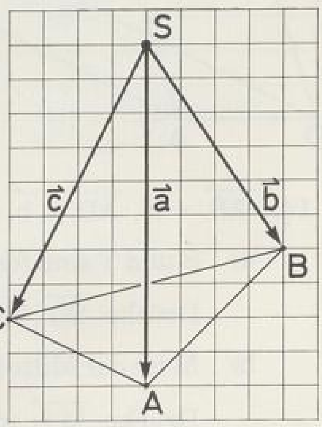
a) $\overrightarrow{ED}$ b) $\overrightarrow{DE}$ c) $\overrightarrow{FD}$ d) $\overrightarrow{FC}$

e) $\overrightarrow{FB}$ f) $\overrightarrow{FA}$ g) $\overrightarrow{AD}$

8. Durch Antragen von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in einem Punkt O entsteht ein räumliches Dreibein. Ergänze die Figur zu einem Spat.
Welche Vektoren, ausgedrückt mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, werden repräsentiert

a) durch die Flächendiagonalen, die von O ausgehen.
b) durch die Raumdiagonale, die von O ausgeht.

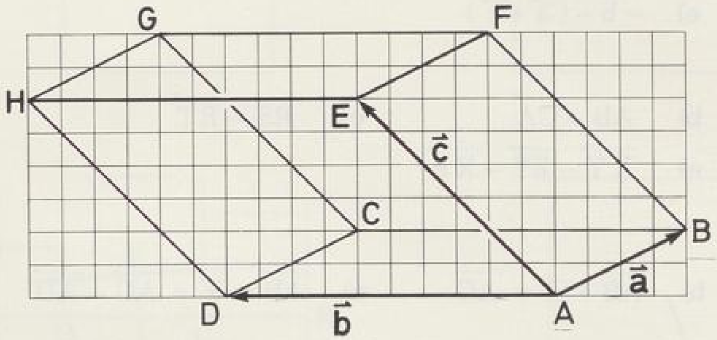
9. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen ein Tetraeder SABC auf.
Drücke $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



10. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ setzen im Ursprung an und bestimmen das Dreieck ABC mit $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. D, E und F sind die Mittelpunkte der Seiten [BC], [CA] und [AB]. Drücke $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{FD}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

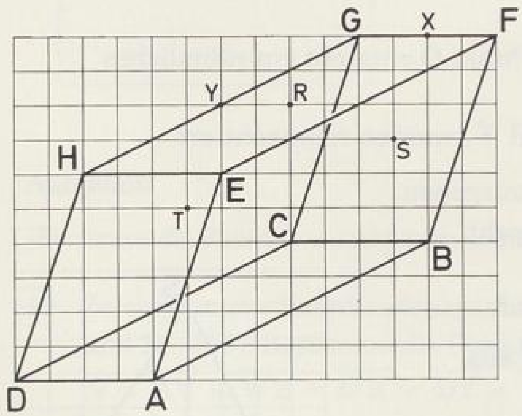
$\boxed{11.}$ $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ spannen das Parallelogramm ABCD auf. Nimm die Punkte E und F so an, daß gilt: $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Drücke $\overrightarrow{EF}$ mit $\vec{d}$ und $\vec{b}$ aus.

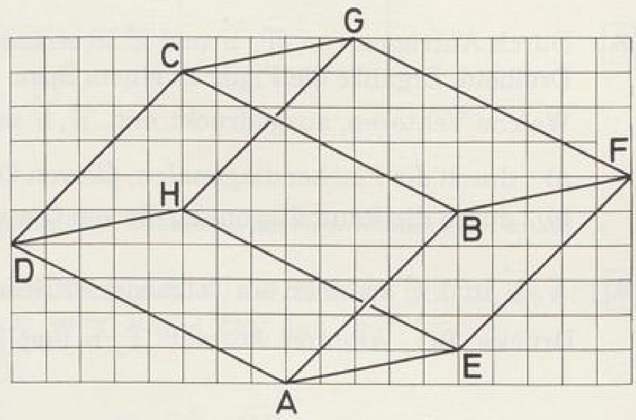
12. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ spannen das Spat ABCDEFGH auf. Drücke $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DF}$ und $\overrightarrow{HB}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



$\boxed{13.}$ $\overrightarrow{AE} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ und $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$ spannen das Spat ABCDEFGH auf. R, S und T sind die Mittelpunkte der Seitenflächen, X und Y sind Kantenmitten. Drücke folgende Vektoren mit $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aus.

a) $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{HT}$, $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{HX}$, $\overrightarrow{YD}$ **b)** $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{YX}$, $\overrightarrow{YT}$, $\overrightarrow{XT}$, $\overrightarrow{ST}$





14. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ spannen das Spat ABCDEFGH auf.

a) S und T sind festgelegt durch $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AT} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.
Drücke $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{TF}$ und $\overrightarrow{ST}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

b) M ist der Mittelpunkt von [EC]. L liegt auf [EG] mit $\overrightarrow{LE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GE}$.
Drücke $\overrightarrow{ML}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

15. Zeige: In jedem Dreieck ist die Summe der drei Vektoren von den Ecken zum Schwerpunkt gleich dem Nullvektor.

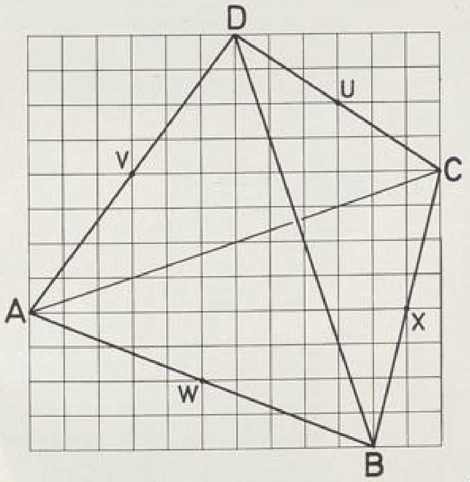
16. Eine Pyramide mit der Spitze S hat als Grundfläche das Rechteck ABCD.
Die Pyramide ist festgelegt durch die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{AS} = \vec{c}$.
M ist der Mittelpunkt der Grundfläche, K ist der Schwerpunkt des Dreiecks BCS.
Drücke $\overrightarrow{MK}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

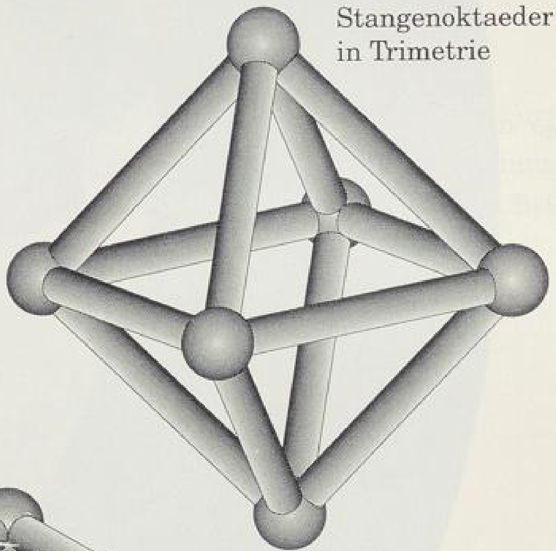
• **17.** $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ spannen das Tetraeder ABCD auf.
U, V, W und X sind Kantenmitten des Tetraeders.

a) Drücke $\overrightarrow{VX}$ und $\overrightarrow{UW}$ mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

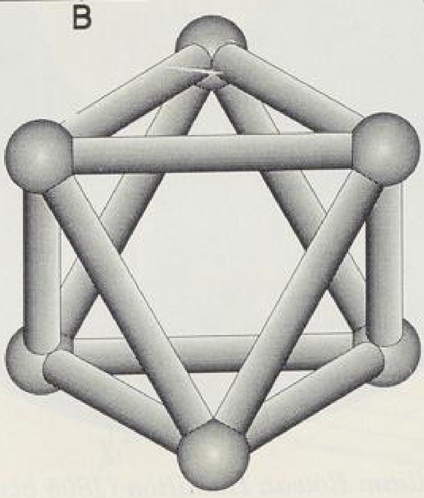
b) L ist Mittelpunkt von [VX], M ist Mittelpunkt von [UW].
Berechne $\overrightarrow{DL}$ und $\overrightarrow{DM}$ in Abhängigkeit von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
Was folgt aus dem Ergebnis?

c) Berechne $\overrightarrow{UV}$ und $\overrightarrow{XW}$ in Abhängigkeit von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
Was folgt aus dem Ergebnis?





Stangenoktaeder in Trimetrie



Stangenoktaeder in Isometrie