Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

7.5.1 Exponentialgleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

7.5 Exponentialgleichungen und Logarithmusgleichungen

7.5.1 Exponentialgleichungen

Bestimmungsgleichungen, bei denen die Unbekannte nur in den Exponenten von Potenzen vorkommt, nennt man **Exponentialgleichungen**. Bei einfachen Gleichungen dieser Art kann man die Lösungen exakt bestimmen. Grundlage dafür ist

> **Satz 184.1:** Die Gleichung $b^x = a$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ hat genau eine Lösung, nämlich $x = \log_b a$.

Daß $\log_b a$ eine Lösung der Gleichung $b^x = a$ ist, beruht auf der Definition des Logarithmus (Definition 155.1), daß es die einzige Lösung ist, wurde schon in Satz 155.1 festgestellt.

Beispiel 1:

$5^x = 12$ hat die Lösung $x = \log_5 12$.

Den Übergang von der ersten zur zweiten Gleichung deuten wir so, daß von beiden Seiten der Gleichung der Logarithmus zur Basis 5 gebildet wird. Man nennt diesen Schritt **Logarithmieren der Gleichung**. Wir schreiben dafür

$$\begin{aligned} 5^x &= 12 \quad && \| \log_5 \\ x &= \log_5 12 \end{aligned}$$

Beim praktischen Rechnen, z.B. mit dem Taschenrechner, bevorzugt man den dekadischen Logarithmus. Man erhält dann folgenden Lösungsweg:

$$\begin{aligned} 5^x &= 12 \quad && \| \lg \\ x \cdot \lg 5 &= \lg 12 \quad && \| : \lg 5 \\ x &= \frac{\lg 12}{\lg 5} \approx 1{,}544 \end{aligned}$$

Daß die so gefundene Lösung mit $\log_5 12$ übereinstimmt, folgt aus Satz 164.1.

Beispiel 2:

Bei der Gleichung $16^x = 128$ kann man beide Seiten als Potenzen mit gleicher Basis darstellen. Das Logarithmieren der Gleichung läuft dann einfach auf das Gleichsetzen der Exponenten hinaus:

$$\begin{aligned} 16^x &= 128 \\ 2^{4x} &= 2^7 \quad && \| \log_2 \\ 4x &= 7 \\ x &= \tfrac{7}{4} \end{aligned}$$

Beispiel 3:

$1{,}5^{2x+1} = 7^{-x}$

Hier steht auf beiden Seiten eine Potenz, deren Exponent die Unbekannte enthält. Durch Logarithmieren erhält man eine lineare Gleichung für x.

$$1{,}5^{2x+1} = 7^{-x} \quad \| \lg$$
$$(2x+1)\cdot \lg 1{,}5 = -x\cdot \lg 7$$
$$x(2\cdot \lg 1{,}5 + \lg 7) = -\lg 1{,}5$$
$$x = \frac{-\lg 1{,}5}{2\cdot \lg 1{,}5 + \lg 7} \approx -0{,}1471$$

Beispiel 4:

$5\cdot 3^{2x} = 3^{x+3} - 34$

Da rechts eine Differenz steht, führt Logarithmieren nicht weiter. Man kann aber jedes der beiden Glieder, welche die Unbekannte enthalten, durch die Potenz 3^x ausdrücken.

$$5\cdot 3^{2x} = 3^{x+3} - 34$$
$$5\cdot (3^x)^2 = 3^3\cdot 3^x - 34$$

Mit der Substitution $z = 3^x$ erhält man eine quadratische Gleichung für z.

$$5z^2 - 27z + 34 = 0$$

Sie hat die Lösungen $z_1 = 2$ und $z_2 = 3{,}4$. Beide Lösungen sind positiv und kommen somit als Werte der Potenz 3^x in Betracht. Damit gilt

$$3^x = 2 \quad \vee \quad 3^x = 3{,}4$$
$$x = \frac{\lg 2}{\lg 3} \quad \vee \quad x = \frac{\lg 3{,}4}{\lg 3};$$

$x_1 \approx 0{,}6309$ und $x_2 \approx 1{,}114$, jeweils auf vier geltende Ziffern gerundet.

Aufgaben

Bestimme die Lösungsmenge. Gib für irrationale Lösungen auch den auf vier geltende Ziffern gerundeten Näherungswert an.

1. a) $7^x = 343$ b) $3^x = 11$ c) $(\frac{3}{7})^x = 10$ d) $1{,}2^x - 0{,}6 = 0$
2. a) $4^{x-5} = 6$ b) $8^{2x-3} = 32$ c) $5^{x^2-1} = 1$ d) $0{,}4^{3-x} = 0{,}5$
3. a) $2^x = 8^{x-2}$ b) $3{,}1^{2x} = 2\cdot 31^x$ c) $10\cdot(\frac{5}{9})^{4-x} = 2^{2x+1}$
4. a) $3^x\cdot 5^{x-1} = 1$ b) $4^{2x-3}\cdot 32^{1-x} = \frac{1}{8}$

   c) $\dfrac{2^{5x}}{7^{x+2}} = 10$ d) $(\sqrt{2})^{x+3} = \dfrac{3\cdot 13^{4-x}}{(\sqrt{5})^x}$

5. **a)** $4 \cdot 2^{\sqrt{x}} = 0{,}5^{-x}$ **b)** $5^{x^2+3} = 25 \cdot 0{,}2^{x-1}$

6. **a)** $7^{2x+1} - 40 \cdot 7^x = 63$ **b)** $9 \cdot (\frac{2}{3})^{2x+1} + 54 \cdot (\frac{2}{3})^{x-1} - 42 = 0$

7. **a)** $25^x = 15 \cdot 5^x - 50$ **b)** $3^x + 9^x = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$

8. **a)** $4^{x+2} - 5 \cdot 2^{x+3} - 24 = 0$ **b)** $(\frac{1}{2})^{x-1} \cdot (8^{x+1} - 4^5) = 16(4^x - 8)$

9. Im Jahre 1990 lebten auf der Erde 5,3 Milliarden Menschen. Die jährliche Wachstumsrate betrug etwa 1,5%.

a) In welchem Jahr würde bei gleichbleibender Wachstumsrate die Weltbevölkerung

1) auf 6,0 Milliarden anwachsen

2) doppelt so groß wie 1990 werden?

b) In welcher Zeit nimmt bei der Wachstumsrate 1,5% die Bevölkerungszahl von 1990

1) um 1 Million zu (Einwohnerzahl einer Großstadt)

2) um 77 Millionen zu (Bevölkerungszahl Deutschlands)?

7.5.2 Logarithmusgleichungen

Eine Bestimmungsgleichung, bei der die Unbekannte nur im Argument von Logarithmen auftritt, bezeichnet man als **Logarithmusgleichung**. Auch solche Gleichungen lassen sich in einfachen Fällen exakt lösen. Grundlage dafür ist

Satz 186.1: Die Gleichung $\log_b x = \varrho$ mit $b > 0$, $b \neq 1$ und $\varrho \in \mathbb{R}$ hat genau eine Lösung, nämlich $x = b^{\varrho}$.

Dies folgt aus der echten Monotonie der Funktion $x \mapsto \log_b x$ und der Tatsache, daß diese Funktion die Wertemenge $\mathbb{R}$ hat.

Beispiel 1:

$\log_4 x = 5$ hat die Lösung $x = 4^5$.

Den Übergang zur zweiten Gleichung kann man so deuten, daß man jede Seite der Ausgangsgleichung zum Exponenten einer Potenz mit der Basis 4, also der Basis des Logarithmus, macht. Wir schreiben

$$\log_4 x = 5 \qquad \| 4^{\cdots}$$
$$4^{\log_4 x} = 4^5$$
$$x = 1024$$

Diese Umformung, bei der der Logarithmus »beseitigt wird«, bezeichnet man als **Delogarithmieren der Gleichung**.