Algebra

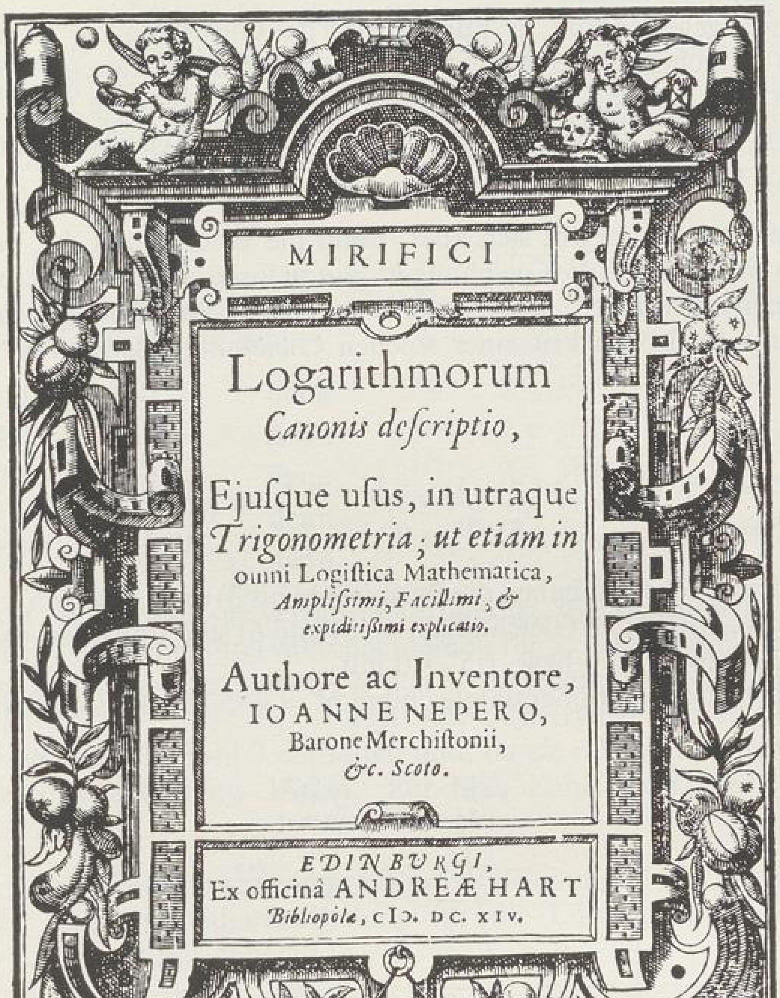
Barth, Friedrich

München, 2000

7 Logarithmen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

7 Logarithmen



MIRIFICI

Logarithmorum
Canonis descriptio,

Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.

Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.

EDINBVRGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIↃ. DC. XIV.

Titelkupfer der *Descriptio* von John NAPIER von 1614

Beschreibung der wunderbaren Tafel der Logarithmen, und Erklärung von deren überaus weitläufigem, leichtem, schnellem und bequemem Gebrauch, in beiden Trigonometrien; wie auch überhaupt in jeder mathematischen Rechenkunst.
Vom Autor und Erfinder, Johannes NEPERUS, Baron von Merchiston, etc. einem Schotten.
Zu Edinburg, aus der Druckerei des Buchhändlers Andreas HART, 1614.

7 Logarithmen

7.1 Der Logarithmus

Kann man, wenn in der Gleichung $b^\varrho = a$ zwei der drei Zahlen gegeben sind, die dritte stets berechnen?
Falls b und ϱ gegeben sind, ist a die Lösung der Gleichung $x = b^\varrho$; man findet sie durch Berechnung der Potenz b^ϱ, also durch Potenzieren. Wenn ϱ und a gegeben sind, hat man zur Bestimmung von b die Gleichung $x^\varrho = a$ zu lösen. Auch hier handelt es sich um einen schon bekannten Aufgabentyp (vgl. Kapitel **3**). Falls $\varrho \neq 0$, erhält man $x = a^{\frac{1}{\varrho}}$.

Eine neue Situation ergibt sich aber, wenn die Basis b und der Potenzwert a gegeben sind. Nun ist die Gleichung $b^x = a$ zu lösen. Da hier die Unbekannte im Exponenten auftritt, spricht man von einer **Exponentialgleichung**. Wie steht es um die Lösbarkeit einer solchen Gleichung? Betrachten wir dazu einige

Beispiele:

1) $5^x = 125$	**2)** $(\frac{4}{9})^x = \frac{27}{8}$	**3)** $6^x = 1$
4) $1^x = 6$	**5)** $2^x = 0$	**6)** $1{,}5^x = -2{,}25$

Wie man leicht erkennt, haben die Beispiele **1)** bis **3)** die Lösungen $x = 3$ bzw. $x = -\frac{3}{2}$ bzw. $x = 0$. Die Gleichungen **4)**, **5)** und **6)** sind unlösbar, da für jedes $x \in \mathbb{R}$ $1^x = 1$ bzw. $2^x > 0$ bzw. $1{,}5^x > 0$ gilt.
Die Lösbarkeit der Exponentialgleichung $b^x = a$ steht offensichtlich in enger

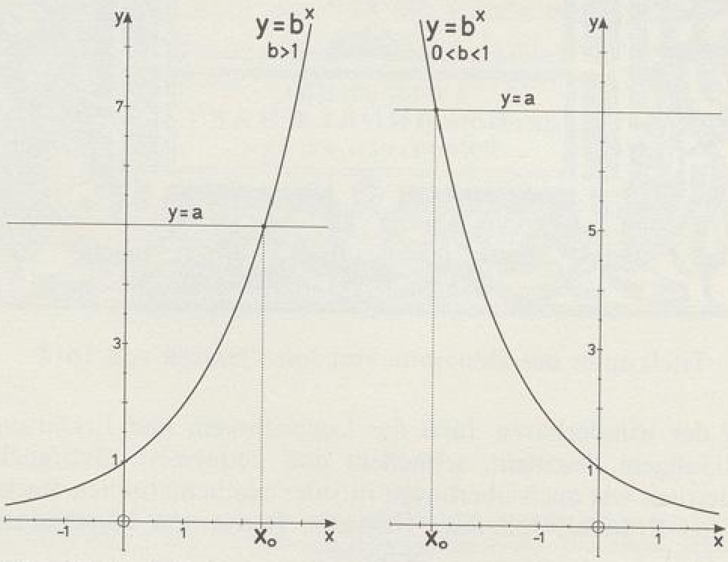


Abb. 154.1 Zur Lösbarkeit der Exponentialgleichung $b^x = a$ für $b > 1$ bzw. $0 < b < 1$

Beziehung zu den Eigenschaften der Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$, die im Fall $b > 0$ bekanntlich in ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, nur positive Funktionswerte annimmt und für $b > 1$ echt monoton zunimmt, für $0 < b < 1$ echt monoton abnimmt. Abbildung 154.1 läßt vermuten, daß sowohl für $b > 1$ als auch für $0 < b < 1$ zu jeder positiven Zahl a genau eine Zahl x_0 existiert, für die $b^{x_0} = a$ gilt.
Wegen der Monotonie der Exponentialfunktionen kann es jedenfalls nur höchstens eine solche Zahl geben; denn die Gerade $y = a$ hat mit dem Graphen $y = b^x$ höchstens einen Schnittpunkt $S(x_0|a)$. In den Beispielen **1)** bis **3)** konnten wir x_0 tatsächlich angeben. Ob eine solche Lösung immer existiert, hängt mit der schon früher (Seite 125) erwähnten Frage zusammen, ob im Fall $b > 0$ und $b \neq 1$ die Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$ wirklich jede positive Zahl als Funktionswert annimmt. Wir betrachten dazu das

Beispiel: $3^x = 7$

Für eine eventuelle Lösung x_0 findet man, da $x \mapsto 3^x$ monoton zunimmt, folgende Abschätzungen:

$$\begin{array}{rll} 1 < x_0 < 2 & \text{denn} & 3^1 < 7 < 3^2 \\ 1{,}7 < x_0 < 1{,}8 & \text{denn} & 3^{1,7} < 7 < 3^{1,8} \\ 1{,}77 < x_0 < 1{,}78 & \text{denn} & 3^{1,77} < 7 < 3^{1,78} \\ 1{,}771 < x_0 < 1{,}772 & \text{denn} & 3^{1,771} < 7 < 3^{1,772} \\ 1{,}7712 < x_0 < 1{,}7713 & \text{denn} & 3^{1,7712} < 7 < 3^{1,7713} \end{array}$$

Denkt man sich dieses Verfahren fortgesetzt, was prinzipiell möglich ist, so erhält man eine Intervallschachtelung für x_0. Die so dargestellte Zahl x_0 ist der einzige Exponent, für den 3^{x_0} in jedem der Intervalle $[3^1; 3^2]$, $[3^{1,7}; 3^{1,8}]$, $[3^{1,77}; 3^{1,78}], \ldots$ liegt. Diese Intervalle sind so konstruiert, daß sie stets die Zahl 7 enthalten und, da sie offensichtlich wieder eine Intervallschachtelung bilden, nur die Zahl 7. Daher muß gelten: $3^{x_0} = 7$.

So wie in diesem Beispiel kann man bei jeder Gleichung $b^x = a$ mit $a > 0, b > 0$ und $b \neq 1$ eine Intervallschachtelung für die Lösung konstruieren (vgl. Aufgabe 158/**3**). Es gilt daher

> **Satz 155.1:** Jede Gleichung $b^x = a$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ besitzt genau eine Lösung.

Für die Lösung einer solchen Exponentialgleichung hat man eine besondere Schreibweise eingeführt:

> **Definition 155.1:** Die Lösung der Gleichung $b^x = a$ mit $a > 0, b > 0$ und $b \neq 1$ bezeichnet man mit $\log_b a$, gelesen **Logarithmus von *a* zur Basis *b*.**

Eigentlich müßte man $\log_b(a)$ schreiben. Wenn aber kein Mißverständnis zu befürchten ist, kann man die Klammer weglassen.

Beispiele:

$\log_5 125 = 3,$ denn $5^3 = 125$ (vgl. Beispiel **1)**)

$\log_{\frac{4}{9}}\left(\frac{27}{8}\right) = -\frac{3}{2},$ denn $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{27}{8}$ (vgl. Beispiel **2)**)

$\log_6 1 = 0,$ denn $6^0 = 1$ (vgl. Beispiel **3)**)

Nach Satz 155.1 und Definition 155.1 stellt $x = \log_b a$ die Auflösung der Gleichung $b^x = a$ nach x dar. Also sind beide Gleichungen äquivalent:

$$\boxed{b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b a}$$

Die Bedeutung des neuen Terms $\log_b a$ prägt man sich zweckmäßig in folgender Form ein:

$\log_b a$ ist diejenige Zahl, mit der man b potenzieren muß, um a zu erhalten.
Das heißt: $b^{\log_b a} = a$

Die Bestimmung des Logarithmus einer Zahl bezüglich einer Basis b stellt eine neue Rechenart dar, die man als **Logarithmieren** bezeichnet.

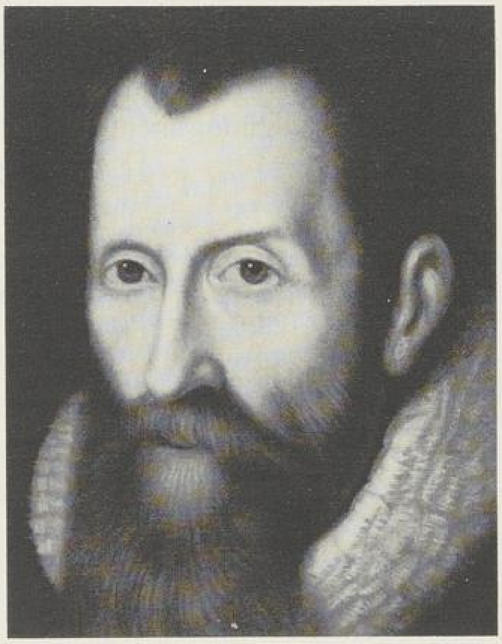
**Zur Geschichte

Das Fachwort **Logarithmus** geht auf John Napier* (1550–1617) zurück, der es in seiner 1614 erschienenen *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio* (siehe Abbildung 153) ohne irgendeine Erklärung prägte. Es ist zusammengesetzt aus λόγος (lógos) = *Verhältnis* und ἀριθμός (arithmós) = *Zahl*; *Anzahl*.** Das Verbum **logarithmieren**

* gesprochen ˈneɪpɪə

** John Wallis greift 1685 in seinem *A Treatise of Algebra, both Historical and Practical* zur Erklärung des Wortes Logarithmus auf den Begriff des Verhältnisses zurück, wie wir ihn auf Seite 62 bei Euklid und Archimedes kennengelernt haben. (In der verbesserten lateinischen Ausgabe von 1693 zitiert Wallis übrigens explizit Euklid, und zwar *Elemente*, Buch V, Def. 10 und Buch VI, Def. 5.) Er betrachtet zunächst wie Napier arithmetisch-geometrische Doppelfolgen (siehe **7.6**) und geht dann zu der schon von Michael Stifel her bekannten geometrischen Folge der Potenzen und der arithmetischen Folge ihrer Exponenten über und schreibt:
»then doth this Exponent always give us the Number of Rations […] in the Term to which it belongs.
1 *r.* *rr.* r^3 r^4 r^5 r^6 *etc.*
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. *etc.*
(as 3 in r^3, 6 in r^6, and so every where,) or shews *How many fold (quam multiplicata)* the Proportion (for instance) of r^6 to 1, is of r to 1. That is, how many Rations or Proportions of r to 1, are compounded in r^6 to 1, to wit 6. To which the name *Logarithmus* fitly answers, that is, λόγων ἀριθμὸς, the *Number of Proportions so compounded.*«
»Dann gibt uns dieser Exponent immer die Anzahl der Verhältnisse […] in dem Term an, zu dem er gehört […]. Anders ausgedrückt: Er zeigt an, *wievielfach* (z. B.) das Verhältnis $r^6 : 1$ bezüglich $r : 1$ ist. Das heißt, wie viele Verhältnisse $r : 1$ in $r^6 : 1$ [multiplikativ] zusammengesetzt sind, nämlich 6. Genau dies drückt aber der Name *Logarithmus* aus, d. h. λόγων ἀριθμός oder die *Anzahl der so zusammengesetzten Verhältnisse.*«
Beachte: Wallis benutzt stillschweigend $r^6 : 1 = (r : 1)^6$. – Weitere Erklärungen des Wortes Logarithmus siehe Seite 202f.

erscheint erst 1836 in Carl Koppes (1803–1874) *Anfangsgründe der reinen Mathematik für den Schulunterricht* (§ 175). Die Verwendung des Wortes **Basis** stammt von Leonhard Euler (1707 bis 1783), der 1748 in seiner *Introductio in Analysin infinitorum* – »Einleitung in die Analysis des Unendlichen« – die in der Gleichung $b^x = a$ vorkommende konstante Zahl b als »Basis der Logarithmen« bezeichnete. (Siehe auch Seite 205.) Napier hat »Logarithmus« noch ausgeschrieben. Aber bereits 1624 verwendet Johannes Kepler (1571–1630) in seinen *Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos* – »Tausend Logarithmen zu ebensoviel runden Zahlen« – die Abkürzung »Log.«, woraus 1632 bei dem Jesuater Fra Bonaventura Cavalieri (1598?–1647) »log.« wird. August Leopold Crelle (1780–1855) fordert 1821, dem Logarithmussymbol auch die Basis beizufügen, und schlägt vor, sie darüber zu setzen: $\overset{b}{\log}\, x$. Bis zur Festsetzung der Schreibweise $\log_b x$ durch den Deutschen Normenausschuß im Februar 1968 gemäß DIN 1302 gab es noch die Schreibweisen ${}^b\log x$, ${}_b\log x$ und $\log^b x$, die du noch in älteren Büchern findest.



1616

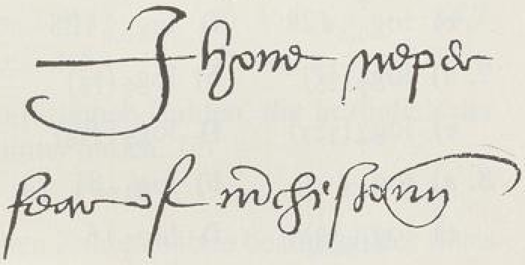


Abb. 157.1. John Napier, auch Neper, Fear* of Merchiston (1550 Merchiston Castle bei Edinburgh bis 4.4.1617 ebd.)

Aufgaben

1. Bestimme die Lösung der Exponentialgleichung.

   a) $2^x = 128$ **b)** $0{,}5^x = 32$ **c)** $(\frac{2}{3})^x = \frac{3}{2}$

   d) $5^x = 0{,}04$ **e)** $0{,}25^x = 512$ **f)** $0{,}125^x = 0{,}5$

2. Die folgenden Gleichungen aus der *Arithmetica integra* (1544) von Michael Stifel (1487?–1567) haben rationale Lösungen. Schreibe sie als Logarithmen und berechne sie.

   a) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{729}{64}$ **b)** $\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}$

* *Fear*, engl. *fiar*, bezeichnet den Eigentümer eines ihm voll zustehenden Besitzes.

3. a) Bestimme die ersten vier Intervalle einer Intervallschachtelung für die Lösung der Exponentialgleichung. Beginne dabei mit dem aus aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen bestehenden Intervall und verwende die Zehnteilungsmethode.

1) $2^x = 5$ **2)** $10^x = 37$ **3)** $1{,}5^x = 1{,}1$
4) $5^x = 0{,}75$ **5)** $0{,}4^x = 4$ **6)** $(\frac{5}{6})^x = 0{,}56$

b) Berechne für den folgenden Logarithmus den auf drei geltende Ziffern gerundeten Näherungswert mit Hilfe einer Intervallschachtelung der in **a)** beschriebenen Art.

1) $\log_3 5$ **2)** $\log_7 0{,}7$ **3)** $\log_{0,5}(\frac{5}{3})$ **4)** $\log_{15}\sqrt{2}$

Zu den Aufgaben 4 bis 13: Berechne die Logarithmen.

4. a) $\log_5 25$ **b)** $\log_2 16$ **c)** $\log_{10} 10000$ **d)** $\log_{10} 10^n$
e) $\log_2 1024$ **f)** $\log_7 343$ **g)** $\log_6 216$ **h)** $\log_4 256$

5. a) $\log_3(\frac{1}{3})$ **b)** $\log_{10}(\frac{1}{10})$ **c)** $\log_{11}(\frac{1}{121})$ **d)** $\log_5(\frac{1}{625})$
e) $\log_2 0{,}5$ **f)** $\log_2 0{,}125$ **g)** $\log_5 0{,}04$ **h)** $\log_{10} 0{,}01$

6. a) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ **b)** $\log_{\frac{1}{3}} 81$ **c)** $\log_{\frac{1}{11}} 121$ **d)** $\log_{\frac{1}{6}} 1296$
e) $\log_{0,5} 128$ **f)** $\log_{0,2} 125$ **g)** $\log_{0,1} 0{,}001$ **h)** $\log_{0,01} 10^6$

7. a) $\log_{\frac{4}{5}}(\frac{16}{25})$ **b)** $\log_{\frac{4}{5}}(\frac{25}{16})$ **c)** $\log_{\frac{5}{4}}(\frac{25}{16})$ **d)** $\log_{\frac{5}{4}}(\frac{16}{25})$
e) $\log_{\frac{2}{7}}(\frac{8}{343})$ **f)** $\log_{\frac{4}{3}}(\frac{81}{256})$ **g)** $\log_{0,6}(\frac{625}{81})$ **h)** $\log_{1,25} 0{,}512$

8. a) $\log_4 8$ **b)** $\log_{27} 81$ **c)** $\log_{25} 125$ **d)** $\log_{125} 25$
e) $\log_{16}(\frac{1}{8})$ **f)** $\log_{\frac{1}{8}} 16$ **g)** $\log_{128} 1024$ **h)** $\log_{343} 49$
i) $\log_{100} 1000$ **k)** $\log_{1000} 100$ **l)** $\log_{100} 0{,}1$ **m)** $\log_{0,01} 0{,}00001$

9. a) $\log_{10}\sqrt{10}$ **b)** $\log_2 \sqrt[3]{2}$ **c)** $\log_5 \sqrt[11]{25}$ **d)** $\log_3 \sqrt[9]{81}$
e) $\log_2 \sqrt[5]{\frac{1}{8}}$ **f)** $\log_6 \sqrt{\frac{1}{216}}$ **g)** $\log_{15}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{225}}\right)$ **h)** $\log_8\left(\frac{1}{\sqrt[5]{512}}\right)$
i) $\log_{\frac{1}{7}}\sqrt{343}$ **k)** $\log_{\frac{1}{18}} \sqrt[7]{\frac{1}{324}}$ **l)** $\log_{0,1} \sqrt[4]{10}$ **m)** $\log_{0,2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3125}}\right)$

10. a) $\log_{\sqrt{3}} 3$ **b)** $\log_{\sqrt[3]{6}}(\frac{1}{36})$ **c)** $\log_{\sqrt[5]{2}} 64$ **d)** $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 125$
e) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[7]{64}$ **f)** $\log_{\sqrt[4]{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{27}}$ **g)** $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{0{,}04}$ **h)** $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt[9]{0{,}125}$

11. a) $\log_6 216 - \log_{\frac{1}{6}} 216 + 2 \cdot \log_5 0{,}2 + \log_{0,2}(\frac{1}{25}) - \log_{0,1} 1$
b) $\log_8 0{,}125 + \log_5 0{,}008 + \log_{0,4} 2{,}5 + \log_{0,01} 1000 + \log_{100} 0{,}001$
c) $\log_2 \sqrt[3]{4} - \log_3 \sqrt[5]{27} - \log_{\frac{9}{4}}(\frac{8}{27}) + \log_{0,6}\sqrt{\frac{125}{27}} + \log_{1,5} 5\frac{1}{16}$

12. **a)** $\log_a 1$ **b)** $\log_a a$ **c)** $\log_a a^2$ **d)** $\log_a a^n$

e) $\log_a\left(\frac{1}{a}\right)$ **f)** $\log_a\left(\frac{1}{a^2}\right)$ **g)** $\log_a\left(\frac{1}{a^n}\right)$ **h)** $\log_a \sqrt{a}$

i) $\log_a \sqrt[3]{a}$ **k)** $\log_a \sqrt[5]{a^2}$ **l)** $\log_a \sqrt[7]{\frac{1}{a^3}}$ **m)** $\log_a (\sqrt[4]{a^3})^5$

13. **a)** $\log_{\frac{1}{a}} a^2$ **b)** $\log_{a^2}\left(\frac{1}{a^3}\right)$ **c)** $\log_{a^3} \sqrt[3]{a}$ **d)** $\log_{\frac{1}{a^2}} \sqrt[3]{a^4}$

e) $\log_{\sqrt{a}} a^n$ **f)** $\log_{\frac{1}{\sqrt{a}}} \sqrt[3]{a}$ **g)** $\log_{|a|} a^6$ **h)** $\log_{\sqrt{|a|}}\left(\frac{1}{a^4}\right)$

14. Löse folgende Gleichungen:

a) $\log_2 x = 3$ **b)** $\log_5 x = -2$ **c)** $\log_9 x = 0{,}5$ **d)** $\log_{0,5} x = -\frac{1}{3}$

e) $\log_x 121 = 2$ **f)** $\log_x(\frac{81}{169}) = -2$ **g)** $\log_x(\frac{1}{8}) = -6$ **h)** $\log_x \sqrt[3]{0{,}5} = \frac{2}{3}$

i) $\log_{\sqrt{x}} 16 = 2$ **k)** $\log_{x^2} 49 = \frac{1}{2}$ **l)** $\log_{x+4} 64 = 2$ **m)** $\log_{2x+5} 1 = 0$

15. Bestimme den auf vier geltende Ziffern gerundeten Wert von x aus

a) $\log_2 x = 1{,}25$ **b)** $\log_7 x = 2{,}8118$ **c)** $\log_{0,8} x = -14{,}2$

d) $\log_{10} x = -0{,}35223$ **e)** $\log_{100} x = 1{,}5$ **f)** $\log_{0,5} x = 3{,}023$.

16. Nenne alle höchstens dreistelligen natürlichen Zahlen, die bezüglich der Basis a einen ganzzahligen Logarithmus haben, für

a) $a = 10$ **b)** $a = 2$ **c)** $a = \frac{1}{3}$ **d)** $a = 0{,}1$.

•**17.** Welche Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen haben bezüglich der Basis 10 einen rationalen Logarithmus, der nicht größer als 3 ist?

:**18.** Beweise, daß die folgenden Logarithmen irrationale Zahlen sind.

a) $\log_{10} 2$ **b)** $\log_{10} 5$ **c)** $\log_{10} 6$ **d)** $\log_2 3$ **e)** $\log_5 9$

f) $\log_q p$, falls p und q verschiedene Primzahlen sind.

(*Anleitung*: Gehe von der gegenteiligen Annahme aus und leite daraus einen Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung natürlicher Zahlen ab.)

19. Gib zur Gleichung $\log_x y = x$ alle ganzzahligen Lösungspaare $(x|y)$ an, für welche y kleiner als 10^6 ist.

20. Warum kann man die Zahl 1 nicht als Basis von Logarithmen verwenden?

21. Weshalb haben sowohl die Addition als auch die Multiplikation nur eine Umkehrung, während das Potenzieren zwei verschiedene Umkehrungen besitzt?

7.2 Rechenregeln für Logarithmen

Da das Logarithmieren eine Umkehrung des Potenzierens darstellt, ergeben sich aus den bekannten Rechenregeln für Potenzen entsprechende Regeln für das Rechnen mit Logarithmen.

Beispiel 1:

1) $\log_2 4 = \log_2(2^2) = 2$; **2)** $\log_2 8 = \log_2(2^3) = 3$;

3) $\log_2(4 \cdot 8) = \log_2(2^2 \cdot 2^3) = \log_2(2^{2+3}) = 2 + 3$.

Aus **1)**, **2)** und **3)** erhält man: $\log_2(4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8$.

Das Ergebnis dieses Beispiels läßt sich verallgemeinern zu

> **Satz 160.1:** Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Faktoren.
> Für $u > 0$, $v > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ gilt also:
> $$\boldsymbol{\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v}$$

Beweis: Mit $x := \log_b u$ und $y := \log_b v$ gilt $b^x = u$ und $b^y = v$.
Also ist $u \cdot v = b^x \cdot b^y = b^{x+y}$ und damit
$\log_b(u \cdot v) = \log_b(b^{x+y}) = x + y$, d.h. $\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$.

Satz 160.1 gilt natürlich auch für Produkte mit mehr als zwei Faktoren; z.B. ist

$$\begin{aligned}\log_b(u \cdot v \cdot w) &= \log_b(u \cdot (v \cdot w)) = \\ &= \log_b u + \log_b(v \cdot w) = \\ &= \log_b u + \log_b v + \log_b w.\end{aligned}$$

Ganz analog zu Satz 160.1 läßt sich auch eine Rechenregel für den Logarithmus eines Quotienten aufstellen:

> **Satz 160.2:** Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus den Logarithmen von Dividend und Divisor.
> Für $u > 0$, $v > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ gilt also:
> $$\boldsymbol{\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v}$$

Den **Beweis** kannst du leicht selbst durchführen (Aufgabe 161/**1**).

Bemerkung: In den Formeln von Satz 160.1 und 160.2 ist die linke Seite auch noch definiert, wenn u und v beide negativ sind, die rechte dagegen nicht mehr. Die folgende Form dieser Formeln erfaßt jedoch auch diesen Fall:

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b|u| + \log_b|v| \quad \text{bzw.} \quad \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b|u| - \log_b|v|.$$

Zu einem Satz über den Logarithmus einer Potenz führt uns

Beispiel 2:

1) $\log_3 9 = \log_3(3^2) = 2$;

2) $\log_3(9^5) = \log_3[(3^2)^5] = \log_3(3^{2\cdot 5}) = 2\cdot 5 = 5\cdot 2$

Aus **1)** und **2)** erhält man: $\log_3(9^5) = 5\cdot\log_3 9$.

Auch dieses Ergebnis läßt sich verallgemeinern zu

> **Satz 161.1:** Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Basis.
> Für $u > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ und $\varrho \in \mathbb{R}$ gilt also:
> $$\mathbf{\log_b u^\varrho = \varrho\cdot\log_b u}$$

Beweis: Mit $x := \log_b u$ gilt $b^x = u$ und damit $u^\varrho = (b^x)^\varrho = b^{\varrho x}$.
Daher ist $\log_b u^\varrho = \log_b(b^{\varrho x}) = \varrho\cdot x$, also $\log_b u^\varrho = \varrho\cdot\log_b u$.

Die drei in den vorausgehenden Sätzen enthaltenen Rechenregeln besagen, daß das Logarithmieren ein Produkt zu einer Summe, einen Quotienten zu einer Differenz und eine Potenz zu einem Produkt macht. Auf dieser Vereinfachung der Rechenarten beruhte bis in die jüngste Zeit, d.h. bis zur Einführung von elektronischen Rechnern, die große Bedeutung der Logarithmen für das praktische Rechnen. Historisch gesehen führte gerade das Bedürfnis, schwierige numerische Rechnungen zu vereinfachen, zur Entdeckung der Logarithmen (vgl. **7.6**).

Aufgaben

1. Beweise die Rechenregel: $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$

2. Zerlege in ein Aggregat von einfacheren Logarithmen unter der Voraussetzung, daß alle Variablen positive Zahlen vertreten:

a) $\log_a(3uv)$ **b)** $\log_a(2mnv)$ **c)** $\log_a\left(\frac{1}{5uv}\right)$ **d)** $\log_a\left(\frac{uw}{3v}\right)$

e) $\log_a\left(\frac{4xy}{27z}\right)$ **f)** $\log_a[(15cd)\cdot(3ce)]$ **g)** $\log_a[(16pq):(12qr)]$

3. Drücke die folgenden Logarithmen durch Logarithmen von Primzahlen aus.

a) $\log_a 6$ **b)** $\log_a 24$ **c)** $\log_a 75$ **d)** $\log_a 81$

e) $\log_a 1000$ **f)** $\log_a(\frac{4}{7})$ **g)** $\log_a(\frac{1}{11})$ **h)** $\log_a(\frac{12}{25})$

i) $\log_a 0{,}04$ **k)** $\log_a 8{,}45$ **l)** $\log_a\sqrt{3}$ **m)** $\log_a\sqrt[5]{24}$

4. Fasse zu einem einzigen Logarithmus zusammen:

a) $\log_a 2 + \log_a 3$ b) $\log_a 5 - \log_a 7$ c) $\log_a 1 - \log_a 11 + \log_a 2$

d) $2\log_a 16 - \log_a 8$ e) $3\log_a 2 + \log_a 4$ f) $\log_a \sqrt[5]{243} - \log_a 6 + \log_a 2$

5. Alle Variablen vertreten positive Zahlen. Vereinfache:

a) $\log_a u^3$ b) $\log_a 2c^4$ c) $\log_a \left(\frac{3}{vw}\right)^3$ d) $\log_a \left(\frac{u^2 v}{(2w)^3}\right)$

e) $\log_a \sqrt[4]{u}$ f) $\log_a \sqrt[6]{\frac{u^5}{v}}$ g) $\log_a \left(\frac{1}{\sqrt[3]{r^2 st}}\right)$ h) $\log_a \left(\sqrt[3]{p} \cdot \sqrt[4]{2q}\right)^2$

6. Sind die folgenden Terme äquivalent?

a) $\log_b x + 2$ und $\log_b (x+2)$ b) $\log_b a^2$ und $(\log_b a)^2$

c) $\log_b (a^2)^3$, $(\log_b a^2)^3$ und $[(\log_b a)^2]^3$

7. Fasse zusammen:

a) $2\log_a m + 3\log_a n$ b) $0{,}5\log_a p^3 - \log_a \left(\frac{p^2}{\sqrt{q}}\right)$

c) $2\log_a (c^2\sqrt{cd}) - 4\log_a \left(\frac{c}{d^2}\right)$ d) $\log_a c + 1$

e) $2 - \log_a (u^2 v)$ f) $\frac{1}{2}(\log_a m^2 n - 3) - \left(0{,}5 - \log_a \frac{\sqrt{n}}{m}\right)$

8. Berechne:

a) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$ b) $\log_6 4 + \log_6 9$ c) $\log_{15} 5 - \log_{15} 75$

d) $3\log_{10} 5 + \log_{10} 8$ e) $2\log_6 12 + \log_6 1{,}5$ f) $2\log_{16} 3 - \log_{16} 72$

9. Vereinfache:

a) $\log_3 (5+4) + \log_3 (5-4)$ b) $\log_2 (6+2) - \log_2 (6-2)$

c) $\log_5 (25-5) - \log_5 (125-25)$ d) $\log_7 (48 - 17 \cdot 2) + \log_7 (3 + 5^2)$

e) $\log_4 (2+4+8) - \log_4 (30-2)$ f) $\log_9 (9^2 + 9 \cdot 2) + \log_9 (27 + 270)$

10. Berechne:

a) $\log_{a^3} a + \log_{a^3} a^2$ b) $\log_{a^2} a^3 + \log_{a^2} a$ c) $\log_a \sqrt[3]{a^5} - \log_a \sqrt[3]{a^2}$

d) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{a} + \log_{\sqrt{a}} \sqrt[6]{a}$ e) $\log_a \sqrt{a} - 2\log_a \sqrt[3]{a} + \log_a \sqrt[6]{a}$

11.* Löse mit Hilfe der Rechengesetze für Logarithmen:

a) $\log_2 (2x+6) - \log_2 (x-2) = 2$

b) $\log_7 (x+4) + \log_7 (x-2) = 1$

c) $\log_3 (x+8) + \log_3 (x+9) = \log_3 (13x + 93)$

d) $\log_2 (x-1) - \log_2 (3x-5) = 1 - \log_2 x$

e) $\log_3 (x-1) + \log_3 (5x-2) = 2 + \log_3 (-2x)$

f) $\log_a (x^2 - 2x) - \log_a (x-2) = \log_a (2x-3)$

* Die Bearbeitung dieser Aufgabe kann auch erst im Abschnitt **7.5.2** erfolgen.

12. Vereinfache:

a) $\log_4(-2)^6$ **b)** $\log_3(-9)^2$ **c)** $\log_{\frac{1}{7}}(-49)^{-2}$

d) $\log_{0,2}(-5)^{-4}$ **e)** $\log_3 \frac{2-5}{7-9} + \log_3(10-4)$

f) $\log_{0,5}\sqrt{(120-11^2)\cdot(12-3{,}5^2)}$ **g)** $\log_{\sqrt{2}}((12\cdot 13-4\cdot 47):\log_2 0{,}25)$

13.*Löse mit Hilfe der Rechengesetze für Logarithmen:

a) $\log_a x = \log_a 5 - 2\cdot\log_a 3$ **b)** $\log_a x = 1 + \log_a 5$

c) $\log_b \sqrt{x} + 3\cdot\log_b 2 = 2\cdot\log_b 3$ **d)** $\log_b(-2x) = 4\log_b 2 + \log_b 4 - 2$

e) $\log_c x^2 - \log_c x + 1 = 0$ **f)** $\log_c x^3 + \log_c x^2 - \log_c x = 0$

g) $\log_2 \sqrt[3]{x} - 2\cdot\log_2 x = 0{,}5 - 3\cdot\log_2\sqrt{x}$

h) $\log_{10}(0{,}01x) + \log_{10}(100x)^2 = \log_{10} 0{,}0001 - 2\cdot\log_{10}\sqrt{x}$

14.* Löse mit Hilfe der Rechengesetze für Logarithmen:

a) $\log_{10}\sqrt{x^2} = -4$ **b)** $2\log_{10}\sqrt{x} = -4$ **c)** $2\log_{10}\sqrt{|x|} = -4$

d) $\log_5\left(\frac{1}{|x|}\right) = 2$ **e)** $\frac{1}{3}\log_3\sqrt{|2x-1|} + 0{,}5 = 0$ **f)** $\log_2\sqrt[3]{5x-3} = 3$

7.3 Verschiedene Logarithmenbasen

7.3.1 Die Umrechnungsregel

Bei den in **7.2** behandelten Rechenregeln war wesentlich, daß die darin vorkommenden Logarithmen jeweils dieselbe Basis hatten. Natürlich ändert sich der Logarithmus einer (von 1 verschiedenen) Zahl, wenn man die Basis wechselt. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den auf verschiedene Basen bezogenen Logarithmen einer bestimmten Zahl?

Beispiel 1:

Es ist $\log_2 8 = 3$; $\log_4 8 = \frac{3}{2}$; $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$.

Da außerdem $\log_2 4 = 2$ und $\log_2 16 = 4$ gilt, kann man $\log_4 8$ und $\log_{16} 8$ in folgender Form darstellen:

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4};\quad \log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16}.$$

Aus dem Logarithmus der Zahl 8 zur Basis 2 erhält man also ihren Logarithmus bezüglich der neuen Basis 4 bzw. 16, indem man $\log_2 8$ durch $\log_2 4$ bzw. $\log_2 16$ dividiert.

* Die Bearbeitung dieser Aufgabe kann auch erst im Abschnitt **7.5.2** erfolgen.

Allgemein gilt

> **Satz 164.1: Umrechnungsregel**
> Aus den Logarithmen bezüglich einer Basis a erhält man die Logarithmen bezüglich einer neuen Basis b mit Hilfe der Formel:
> $$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$$
> Dabei ist $u > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$.

Beweis: Wir setzen $\log_b u =: x$; dann gilt

$$b^x = u$$
$$\log_a b^x = \log_a u$$
$$x \cdot \log_a b = \log_a u$$
$$x = \frac{\log_a u}{\log_a b}, \quad \text{also} \quad \log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}, \quad \text{q.e.d.}$$

Aufgaben

1. Verwandle in Logarithmen zur Basis 8:

a) $\log_2 2$ **b)** $\log_2 3$ **c)** $\log_4 \sqrt{5}$
d) $\log_4 u$ **e)** $\log_{16} v$ **f)** $\log_{32} w$

2. **a)** Drücke $\log_7 5$ durch Logarithmen zur Basis 2 aus.
b) Drücke $\log_3 1{,}7$ durch Logarithmen zur Basis 5 aus.
c) Drücke $\log_5 64$ durch Logarithmen zur Basis 4 aus.
d) Drücke $\log_{1,1}(\frac{1}{49})$ durch Logarithmen zur Basis 7 aus.
e) Drücke $\log_9 2$ durch Logarithmen zur Basis 3 aus.
f) Drücke $\log_5 1{,}63$ durch Logarithmen zur Basis 25 aus.

3. Drücke durch Logarithmen zur Basis 10 aus:

a) $\log_2 10$ **b)** $\log_5 100$ **c)** $\log_{100} 5$ **d)** $\log_{1000} 2$ **e)** $\log_2 1000$
f) $\log_{20} 1000$ **g)** $\log_{0,1} 7$ **h)** $\log_3 \sqrt{0{,}1}$ **i)** $\log_{\sqrt{10}} 6$ **k)** $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{0{,}001}$
l) $\log_3 2$ **m)** $\log_5 0{,}5$ **n)** $\log_{\frac{1}{9}}(\frac{3}{7})$ **o)** $\log_{11} 523$ **p)** $\log_{0,16} 49$

4. Beweise: Für $a > 0,\ a \neq 1$ und $b > 0,\ b \neq 1$ gilt $\log_b a \cdot \log_a b = 1$.

5. **a)** Beweise: $\log_a x = \log_{a^n} x^n$ (falls $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$).
•**b)** Kann man stets $\log_{a^n} x^n$ durch $\log_a x$ ersetzen?

•6. Löse folgende Gleichungen:

a) $\log_2 x = \log_4 9$ **b)** $\log_2 x = \log_{\frac{1}{4}} 5$ **c)** $\log_{0,2} x - \log_{25} 3 = 0$

d) $\log_5 \sqrt{x} = \log_{\sqrt{5}} 7$ **e)** $\log_a x^2 = 2 + \log_{\frac{1}{a}} 2$

f) $\log_{\sqrt{a}}(x-3) = \log_a(x+3)$ **g)** $\log_9(1+\log_2 x) = \log_3 2$

h) $\log_3(1+\log_2 x) = \log_{\frac{1}{3}} 2$

7.3.2 Zehner- und Zweierlogarithmen

Die große Bedeutung der Umrechnungsregel liegt offensichtlich darin, daß es genügt, die Logarithmen bezüglich einer einzigen Basis a zur Verfügung zu haben, um daraus dann die Logarithmen für jede andere Basis recht einfach berechnen zu können. Welche Zahl man als Basis a wählt, ist grundsätzlich gleichgültig. In der Praxis hat man sich vor allem für die Basis 10, die Grundzahl unseres Zahlensystems, entschieden.

Definition 165.1: Die Logarithmen zur Basis 10 nennt man **Zehnerlogarithmen** oder **dekadische Logarithmen**.
Für $\log_{10} x$ ist die kürzere Bezeichnung $\mathbf{lg}\,\boldsymbol{x}$ üblich.*

Jahrhundertelang benützte man zum praktischen Rechnen sogenannte Logarithmentafeln, in denen für sehr viele Zahlen die Zehnerlogarithmen aufgelistet waren. Solche Tafeln mußten ursprünglich in sehr mühsamer und langwieriger Arbeit berechnet werden; mehr darüber erfährst du im Abschnitt **7.6**. Heute verwenden wir elektronische Rechner, die den dekadischen Logarithmus einer Zahl an Hand eines einprogrammierten Rechenverfahrens in kürzester Zeit mit hoher Genauigkeit berechnen. Überprüfe mit einem Taschenrechner die folgenden

Beispiele:**

1) $\lg 2 = 0{,}30103$ **2)** $\lg 876 = 2{,}94250$

3) $\lg 0{,}2 = -0{,}69897$ **4)** $\lg 0{,}01 = -2$

Mit Hilfe der uns somit zur Verfügung stehenden Zehnerlogarithmen lassen sich nun die Logarithmen bezüglich einer beliebigen Basis b nach Satz 164.1 mit der Formel $\log_b u = \dfrac{\lg u}{\lg b}$ berechnen.

* δεκαδεύς (dekadeus) = zu zehn gehörend. Das Symbol »lg« wurde 1968 durch den Deutschen Normenausschuß gemäß DIN 1302 festgelegt.

** Die angegebenen Dezimalbrüche sind jeweils auf 5 Stellen nach dem Komma gerundet.

Beispiele*:

1) $\log_5 10 = \frac{\lg 10}{\lg 5} = \frac{1}{0{,}69897} = 1{,}43068$

2) $\log_{3,7} 41 = \frac{\lg 41}{\lg 3{,}7} = \frac{1{,}61278}{0{,}56820} = 2{,}83840$

3) $\log_{0,4} 8{,}5 = \frac{\lg 8{,}5}{\lg 0{,}4} = \frac{0{,}92942}{-0{,}39794} = -2{,}33558$

4) $\log_{0,1} 0{,}5 = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}1} = \frac{-0{,}30103}{-1} = 0{,}30103$

Oft spielt in der Mathematik und Physik auch der Logarithmus zur Basis 2 eine wichtige Rolle. Daher gibt es auch für ihn eigene Bezeichnungen:

Definition 166.1: Die Logarithmen zur Basis 2 nennt man **Zweierlogarithmen**.
Für $\log_2 x$ schreibt man **ld** x, gelesen **logarithmus dualis von** x, und auch **lb** x, gelesen **binärer Logarithmus von** x.**

Beispiele:

1) $\mathrm{ld}\,64 = 6$ 2) $\mathrm{ld}\,0{,}125 = -3$
3) $\mathrm{ld}\,10 = 3{,}32193$ 4) $\mathrm{ld}\,0{,}64 = -0{,}64386$

Aufgaben

1. Welche dekadischen Logarithmen haben die folgenden Zahlen?
   a) 1; 10; 100; 1000; 10000; 100000; 1000000
   b) 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001; 0,000001
   c) 10^3; 10^{-5}; $\sqrt{10}$; $\sqrt[3]{10^4}$; $100 \cdot 10^4$; 1000^3

2. Bestimme mit dem Taschenrechner die auf 4 Stellen nach dem Komma gerundeten Zehnerlogarithmen der folgenden Zahlen:

a)	3478	347,8	3,478	0,03478
b)	6002	600200	6,002	0,6002
c)	591	0,00591	59100	0,591
d)	21	210000	0,00021	2,100
e)	201	2010	0,201	20,1

* Die angegebenen Dezimalbrüche sind jeweils auf 5 Stellen nach dem Komma gerundet.
** dualis (lat.) = zwei enthaltend – bini (lat.) = je zwei; binär = aus zwei Einheiten bestehend.

3. Jede positive Zahl z läßt sich bekanntlich eindeutig in der Form $z = a \cdot 10^k$ mit $1 \leqq a < 10$ und $k \in \mathbb{Z}$ schreiben (Gleitkommadarstellung!). Für $\lg z$ ergibt sich damit

$$\lg z = \lg(a \cdot 10^k) = \lg a + \lg(10^k) = \lg a + k$$

Beispiele:

$$\lg 300 = \lg(3 \cdot 10^2) = \lg 3 + 2 = 0{,}47712 + 2 = 2{,}47712$$

$$\lg 0{,}03 = \lg(3 \cdot 10^{-2}) = \lg 3 + (-2) = 0{,}47712 - 2 = -1{,}52288$$

Zurückgehend auf Johannes Kepler (1571–1630) heißt die Zahl z in diesem Zusammenhang **Numerus**. Die ganze Zahl k nannte 1624 Henry Briggs (1561–1631) in seiner *Arithmetica logarithmica* **characteristica**. Das auch im Deutschen verwendete »Charakteristik« wurde 1758 durch Abraham Gotthelf Kästner (1719–1800) in seinem Werk *Anfangsgründe* mit **Kennziffer** übersetzt. Ernst Gottfried Fischer (1754–1831) führte 1824 in seinem *Lehrbuch der Elementarmathematik zum Gebrauch in den oberen Klassen gelehrter Schulen* (Bd. 3) das heute übliche Wort **Kennzahl** ein. Damit wird im Gegensatz zu »Kennziffer« richtig wiedergegeben, daß k sowohl mehrstellig wie auch negativ sein kann. Das von John Wallis (1616–1703) stammende Wort **mantissa** verwendete Leonhard Euler (1707–1783) ausschließlich für die in $\lg a$ nach dem Komma auftretende Dezimalziffernfolge (*Introductio in Analysin infinitorum*, 1748), das Kästner 1764 zu **Mantisse** eindeutschte. Wir merken uns also

$$\lg \underbrace{300}_{\text{Numerus}} = \lg(3 \cdot 10^2) = 0{,}\underbrace{47712\ldots}_{\text{Mantisse}} + \underbrace{2}_{\text{Kennzahl}}$$

Die so als Ziffernfolge definierte Mantisse darf nicht verwechselt werden mit der Mantisse a in der Gleitkommadarstellung $a \cdot 10^k$, die als Faktor vor der Zehnerpotenz definiert, also eine Zahl ist. (Siehe auch die Fußnote auf Seite 8.)

a) Begründe, daß aus $z = a \cdot 10^k$ mit $1 \leqq a < 10$ und $k \in \mathbb{Z}$ die Ungleichung $k \leqq \lg z < k + 1$ folgt, d.h., daß die Kennzahl k die **größte Ganze von $\lg z$** ist, wofür man auch **[**$\lg z$**]** schreibt.*

b) Wie lautet die Kennzahl des dekadischen Logarithmus von

1) 7 **2)** 28,4 **3)** 1429,35 **4)** 365000 ?

Nach welcher Regel erhält man also sehr einfach die Kennzahl des dekadischen Logarithmus einer Zahl $z > 1$?

c) Wie lautet die Kennzahl des dekadischen Logarithmus von

1) 0,5 **2)** 0,064 **3)** 0,00001 **4)** $\frac{1}{101}$?

Nach welcher Regel erhält man also die Kennzahl des dekadischen Logarithmus einer Zahl zwischen 0 und 1?

* 1808 hat Carl Friedrich Gauss (1777–1855) für die größte Ganze einer Zahl x das Zeichen $[x]$ eingeführt. Es heißt gelegentlich **Gaußklammer**.

4. Beweise:

a) Wenn zwei Zahlen sich lediglich durch die Stellung des Kommas unterscheiden, dann unterscheiden sich ihre dekadischen Logarithmen um eine ganze Zahl.

b) Auch die Umkehrung des Satzes von **a)** ist richtig.

5. Bestimme mit Hilfe des Taschenrechners zu den folgenden dekadischen Logarithmen die auf vier geltende Ziffern gerundeten Zahlen:

a)	0,3414	2,3414	5,3414	0,3414 − 1
b)	3,7777	0,7777 − 2	4,7777	0,7777 − 5
c)	1,7553	0,7553	0,7553 − 4	3,7553
d)	0,2416	6,2416	0,2416 − 3	2,2416

6. Bestimme die auf vier geltende Ziffern gerundeten Werte der zu den folgenden Zehnerlogarithmen gehörenden Zahlen:

a) 2,3515	**b)** 0,3796 − 1	**c)** 1,4303	**d)** 0,4617 − 13
e) 0,0128	**f)** 0,1280	**g)** 1,28	**h)** 12,8
i) −0,5913	**k)** −0,0346	**l)** −2,8511	**m)** −5,6347

7. Berechne mit Hilfe der dekadischen Logarithmen den auf drei geltende Ziffern gerundeten Wert von

a) $\log_2 7$	**b)** $\log_7 5$	**c)** $\log_3 0{,}3$	**d)** $\log_{0,5} 64$
e) $\log_{1,1} 1000$	**f)** $\log_4 1{,}35^6$	**g)** $\log_{\frac{2}{3}} \sqrt{73}$	**h)** $\log_{\sqrt{2}} 10$.

8. Berechne mit einer Genauigkeit von vier geltenden Ziffern:

a) $1 + \log_5 8 - \log_6 7$ **b)** $\dfrac{3 \cdot \log_9 4{,}5}{2 + \log_{\frac{1}{2}} 6}$

c) $\log_7(\lg\sqrt{1560} - \log_{2,5} 3{,}48)$ **d)** $(\log_2(\log_3(\log_5 1000)))$

• **9.** Bestimme mit Hilfe der Zehnerlogarithmen die Stellenzahl folgender Zahlen:

a) 2^{100}	**b)** 2^{1000}	**c)** 5^{150}	**d)** 50^{150}
e) 57^{57}	**f)** 99^{99}	**g)** 4^{4^4}	**h)** 7^{7^7}
i) 3^{4^5}	**k)** 5^{4^3}	**l)** $(9^{10} + 11^{12})^{13}$	**m)** $(9^{10} \cdot 11^{12})^{13}$

•• **10.** **a)** Wie heißt die Endziffer (= Einerziffer) von 5^{150}; welche Ziffer steht am Anfang? (*Hinweis*: Betrachte den Zehnerlogarithmus dieser Zahl.)

b) Wieviel Endnullen hat die Zahl 50^{150}? Mit welcher Ziffer beginnt sie?

c) Wie heißt die erste und wie die letzte Ziffer von 2^{1000}? Kann man auch die zweite Ziffer angeben?
(*Hinweis*: Betrachte die Folge der Endziffern der Potenzen von 2.)

d) Wie heißt die erste und wie die letzte Ziffer von

1) 4^{4^4} **2)** 7^{7^7} **3)** 3^{4^5} ?

11. a) Bestimme **1)** $\operatorname{ld} 2$ **2)** $\operatorname{ld} 128$ **3)** $\operatorname{ld} 1024$.

b) Bestimme **1)** $\operatorname{ld} 0{,}5$ **2)** $\operatorname{ld} \frac{1}{64}$ **3)** $\operatorname{ld} \sqrt{2}$.

c) Berechne die auf vier Stellen gerundeten Werte von

1) $\operatorname{ld} 10$ **2)** $\operatorname{ld} 20$ **3)** $\operatorname{ld} 0{,}8$ **4)** $\operatorname{ld} \sqrt{5}$.

:12. Wenn man eine natürliche Zahl n im Zweiersystem darstellt, erhält man eine Dualzahl mit $[\operatorname{ld} n] + 1$ Stellen.

a) Prüfe diese Behauptung für

1) $n = 1$ **2)** $n = 5$ **3)** $n = 32$ **4)** $n = 100$

b) Beweise die Gültigkeit des Satzes.

:13. a) Otto erkundigt sich bei seiner Schwester Ute, einer Schülerin der Kollegstufe, welche Punktezahl sie bei ihrer letzten Mathematikarbeit erreicht habe. »Viermal darfst du fragen«, sagt Ute. Otto weiß, daß in der Kollegstufe die Punktezahlen 0, 1, 2, …, 15 vergeben werden. Er meint, es sei doch ziemlich aussichtslos, mit nur vier Fragen unter 16 Zahlen die richtige zu finden. »Doch«, sagt Ute, »das ist möglich.« Wie geht das?

b) Aus einer Menge von n Gegenständen soll ein bestimmter herausgefunden werden. Zeige, daß dies mit höchstens $[\operatorname{ld} n] + 1$ Fragen möglich ist, wenn diese jeweils nur mit »ja« oder »nein« wahrheitsgemäß beantwortet werden. In welchen Fällen genügen sogar $[\operatorname{ld} n]$ Fragen?

**7.3.3 Berechnung von Logarithmen

Die Logarithmen zur Basis 10 liefert uns der Taschenrechner. Nach Eingabe des Numerus wird durch Drücken der lg-Taste ein Rechenprogramm gestartet, das in kürzester Zeit den gesuchten Logarithmus mit hoher Genauigkeit ermittelt. Die hierzu benützten Programme beruhen auf Methoden der höheren Mathematik, so daß wir hier nicht näher darauf eingehen können. Grundsätzlich geht es darum, die Berechnung der Logarithmen mit Hilfe von schon bekannten Rechenverfahren durchzuführen. Eine einfache Methode, die wir schon in Aufgabe 158/**3** angewandt haben, ist die Berechnung einer Intervallschachtelung für den gesuchten Logarithmus. Ihre Beschreibung und die Durchführung mit dem Taschenrechner oder einem Computer vereinfacht sich, wenn man statt des Zehnteilungsverfahrens die Halbierungsmethode benützt und die Rechenregeln für Logarithmen geschickt anwendet:
Zu berechnen sei $\log_b a$, wobei wir $b > 1$ voraussetzen.
Man bestimmt zunächst ein Intervall $[u_1; v_1]$ so, daß $b^{u_1} < a < b^{v_1}$ und damit $u_1 < \log_b a < v_1$ gilt. Mit der Intervallmitte $m_1 := (u_1 + v_1) : 2$ berechnet man sodann b^{m_1}. Wäre $b^{m_1} = a$, so hätte man bereits $\log_b a = m_1$ gefunden. Von

diesem in der Praxis kaum auftretenden Fall wollen wir im folgenden absehen.
Falls $b^{m_1} < a$, setzt man $u_2 := m_1$ und $v_2 := v_1$;
falls $b^{m_1} > a$, setzt man $u_2 := u_1$ und $v_2 := m_1$.
Damit hat man ein kleineres Intervall $[u_2; v_2]$ gefunden, in dem $\log_b a$ liegt. Das neue Intervall wird nun durch $m_2 := (u_2 + v_2) : 2$ wieder halbiert, b^{m_2} berechnet, usw. Man wiederholt diesen Schritt so lange, bis $\log_b a$ auf ein hinreichend kleines Intervall eingeschränkt ist.
Der wesentliche Rechenschritt beim Übergang von einem Intervall $[u_n; v_n]$ zum nächsten ist dabei die Berechnung von b^{m_n}, also von $b^{(u_n+v_n):2}$. Diese Zahl läßt sich aber aus den zuvor schon berechneten Werten b^{u_n} und b^{v_n} ermitteln. Es gilt nämlich $b^{(u_n+v_n):2} = (b^{u_n+v_n})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b^{u_n} \cdot b^{v_n}}$. Man braucht also lediglich die Quadratwurzel aus dem Produkt der beiden Potenzen zu berechnen. Bricht man die Rechnung mit dem Intervall $[u_n; v_n]$ ab, so ist $m_n = (u_n + v_n) : 2$ ein Näherungswert für $\log_b a$, dessen Fehler kleiner als die halbe Intervallänge, also kleiner als $\frac{1}{2}(v_n - u_n)$ ist.

Beispiel: Zu berechnen sei $\log_4 7$.

Man wählt etwa, da $4^1 < 7 < 4^2$ gilt, $u_1 = 1$ und $v_1 = 2$.
Wegen $\sqrt{4^1 \cdot 4^2} = 8 > 7$ wird $u_2 = 1$ und $v_2 = 1{,}5$.
Wegen $\sqrt{4^1 \cdot 4^{1,5}} = 2{,}82\ldots < 7$ wird $u_3 = 1{,}25$ und $v_3 = 1{,}5$.
Wegen $\sqrt{4^{1,25} \cdot 4^{1,5}} = 4{,}75\ldots < 7$ wird $u_4 = 1{,}375$ und $v_4 = 1{,}5$.
Wegen $\sqrt{4^{1,375} \cdot 4^{1,5}} = 6{,}16\ldots < 7$ wird $u_5 = 1{,}4375$ und $v_5 = 1{,}5$.
Wegen $\sqrt{4^{1,4375} \cdot 4^{1,5}} = 7{,}02\ldots > 7$ wird $u_6 = 1{,}4375$ und $v_6 = 1{,}46875$.
Wir brechen hier ab. Mit $m_6 = (u_6 + v_6) : 2 = 1{,}453125$ und $\frac{1}{2}(v_6 - u_6) = 0{,}015625$ gilt also:
$\log_4 7 = 1{,}453125 \pm 0{,}015625$.

Aufgaben

1. Berechne, beginnend mit dem ganzzahligen Intervall der Länge 1, nach dem Halbierungsverfahren die ersten fünf Intervalle für

a) $\log_5 3$ **b)** $\log_3 0{,}5$ **c)** ld 10
d) ld 4,7 **e)** lg 0,75 **f)** lg 83,5

2. Berechne für die folgenden Logarithmen Näherungswerte, deren Fehler kleiner als ein Hundertstel ist.

a) $\log_6 9$ **b)** ld 0,8 **c)** lg 123

7.4 Logarithmusfunktionen

Nach Wahl einer von 1 verschiedenen positiven Zahl b kann man jeder positiven Zahl x eindeutig ihren Logarithmus zur Basis b zuordnen. Man erhält damit eine Funktion.

Definition 171.1: Die Funktion $f\colon x \mapsto \log_b x$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ heißt **Logarithmusfunktion zur Basis *b***.

Abbildung 171.1 zeigt die Graphen der Logarithmusfunktionen mit den Basen $b = 2$ und $b = 10$.

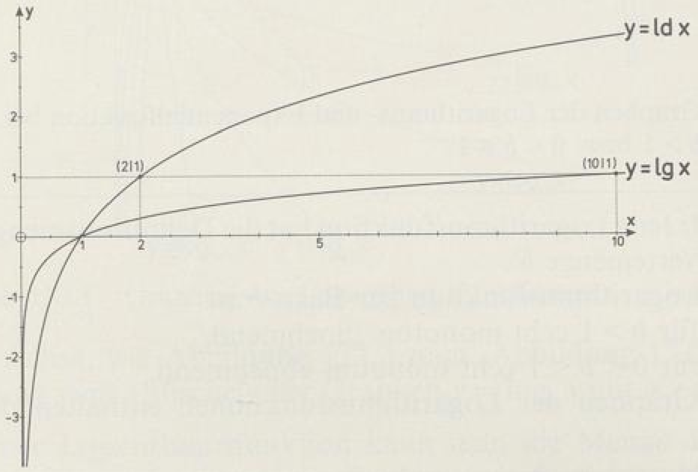


Abb. 171.1 Graphen der Logarithmusfunktionen für $b = 2$ und $b = 10$

Die Funktionsgleichung $y = \log_b x$ ist, wie wir wissen, äquivalent zur Gleichung $x = b^y$ (vgl. **7.1**). Das bedeutet, daß man die Gleichung $y = \log_b x$ eindeutig nach x auflösen kann; jeder Funktionswert y wird an genau einer Stelle $x \in \mathbb{R}^+$ angenommen. Somit besitzt die Logarithmusfunktion eine Umkehrfunktion, und diese hat, mit y als unabhängiger Variabler geschrieben, die Gleichung $x = b^y$. Um ihre Darstellung mit x als unabhängiger Variabler zu erhalten, vertauschen wir x und y. Das ergibt $y = b^x$, also die Gleichung der Exponentialfunktion mit der Basis b. Es gilt also

Satz 171.1: Die Logarithmusfunktion $x \mapsto \log_b x$, $x \in \mathbb{R}^+$ hat die Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$, $x \in \mathbb{R}$ als Umkehrfunktion und umgekehrt.

Da das Vertauschen der Variablen x und y eine Spiegelung des Graphen an der Winkelhalbierenden $y = x$ bewirkt, liegen die Graphen $y = \log_b x$ und $y = b^x$ symmetrisch zu dieser Geraden (Abbildung 172.1).
Mit dem in Satz 171.1 beschriebenen Zusammenhang kann man aus den bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktionen die entsprechenden Eigenschaften der Logarithmusfunktionen erschließen. Es gilt

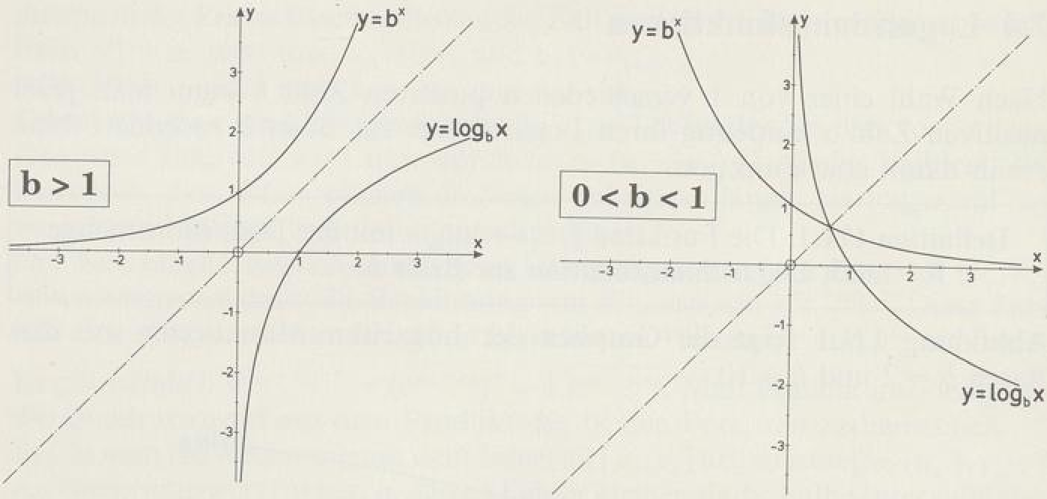


Abb. 172.1 Graphen der Logarithmus- und Exponentialfunktion bei gleicher Basis $b > 1$ bzw. $0 < b < 1$

Satz 172.1: Jede Logarithmusfunktion hat die Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ und die Wertemenge $\mathbb{R}$.
Die Logarithmusfunktion zur Basis b ist
für $b > 1$ echt monoton zunehmend,
für $0 < b < 1$ echt monoton abnehmend.
Die Graphen der Logarithmusfunktionen enthalten den Punkt $(1|0)$.

Da die Graphen $y = b^x$ und $y = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ bezüglich der y-Achse zueinander symmetrisch verlaufen, liegen die Graphen $y = \log_b x$ und $y = \log_{\frac{1}{b}} x$ symme-

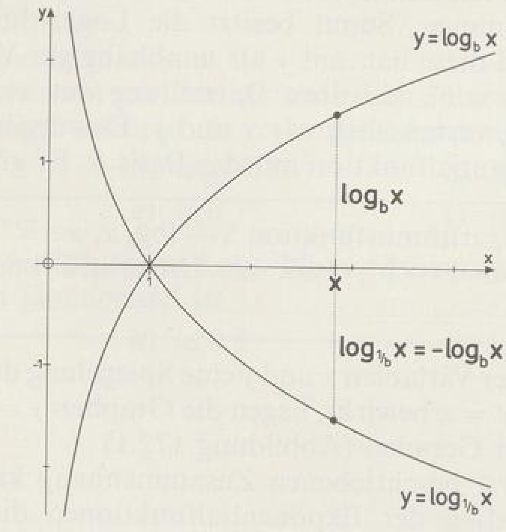


Abb. 172.2 Symmetrie der Graphen $y = \log_b x$ und $y = \log_{\frac{1}{b}} x$

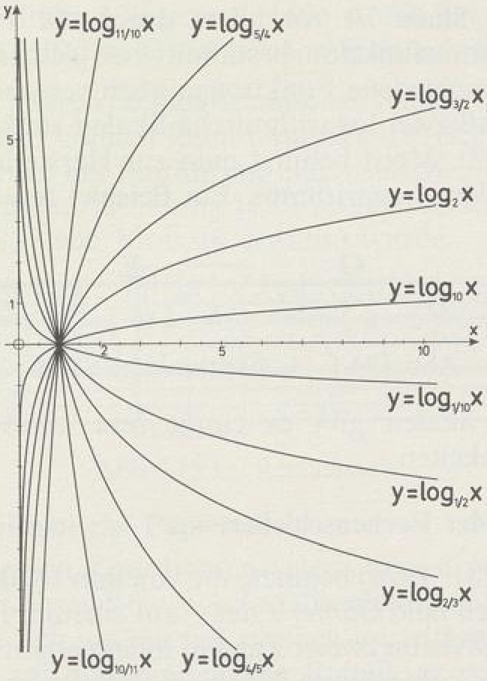


Abb. 173.1 Graphen von Logarithmusfunktionen $x \mapsto \log_b x$

trisch zur x-Achse, wie Abbildung 172.2 zeigt. Abbildung 173.1 vermittelt eine Vorstellung vom »Büschel« der Graphen $y = \log_b x$ mit $b > 0$ und $b \neq 1$.

Mit Hilfe einer Logarithmusfunktion kann man die Menge der positiven Zahlen umkehrbar eindeutig auf die Punkte einer Geraden abbilden. Man wählt dazu auf der Geraden einen Anfangspunkt O und einen Punkt E, der zusammen mit O die Längeneinheit und die Orientierung festlegt. Damit ordnet man nun jeder Zahl $x > 0$ denjenigen Punkt der Geraden zu, der sich ergibt, wenn man von O aus den Pfeil $\log_b x \cdot \overrightarrow{\mathrm{OE}}$ abträgt. Mit anderen Worten: man bestimmt auf der Zahlengeraden mit dem Nullpunkt O und dem Einheitspunkt E den zur Zahl $\log_b x$ gehörenden Punkt, bezeichnet ihn aber mit x (Abbildung 173.2). Eine so erzeugte Skala heißt **logarithmische Skala**.*

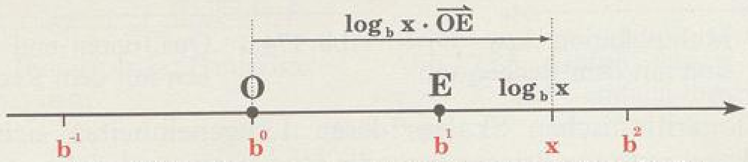


Abb. 173.2 Erzeugung einer logarithmischen Skala

Bei dieser Zuordnung entspricht, wie man leicht erkennt, dem Punkt O die Zahl 1 und dem Punkt E die Zahl b, die Basis der Logarithmusfunktion. Zwei Potenzen von b, deren Exponenten sich um 1 unterscheiden, haben in dieser Skala stets den gleichen Abstand $\overline{\mathrm{OE}}$; denn es gilt $\log_b b^{k+1} - \log_b b^k = (k+1) - k = 1$.

* scalae (lat.), scala (ital.) = Treppe, Leiter

Eine logarithmische Skala ist vor allem durch die zu ihrer Herstellung verwendete Logarithmusfunktion bestimmt; bei gleicher Wahl der Punkte O und E ergeben verschiedene Funktionen auch verschiedene Skalen. Man kann aber zeigen, daß zwei logarithmische Skalen stets zueinander ähnlich sind (Aufgabe 181/**22**). Meist benützt man zur Herstellung logarithmischer Skalen den dekadischen Logarithmus. Ein Beispiel zeigt Abbildung 174.1.

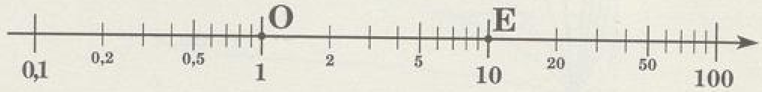


Abb. 174.1 Logarithmische Skala

Für logarithmische Skalen gibt es einige sehr sinnvolle und nützliche Anwendungsmöglichkeiten:

a) Der Rechenstab oder Rechenschieber

Edmund Gunter (1581–1626) benützte die von ihm 1620 erfundene logarithmische Skala – sie hieß bald *Gunter's line* – auf einem 6 Fuß langen Stab zur Multiplikation und Division zweier Zahlen, indem er auf ihm mit dem Zirkel Strecken addierte bzw. subtrahierte.* William Oughtred (1574–1660) vereinfachte 1621 diesen Vorgang erheblich, indem er zwei Exemplare einer logarithmischen Skala gegeneinander legte: Der Rechenstab war erfunden! Das erste Modell mit festem und beweglichem Körper ließ er 1633 konstruieren, das älteste erhaltene fertigte 1654 ein gewisser Robert Bissacker.
Abbildung 174.2 zeigt die Multiplikation zweier Zahlen als Streckenaddition. Addiert werden die beiden Strecken mit den Längen $\lg a$ und $\lg b$. Wegen $\lg a + \lg b = \lg(a \cdot b)$ liest man unter der Marke b der oberen Skala das Produkt $a \cdot b$ auf der unteren Skala ab. Mit derselben Einstellung löst man auch die Divisionsaufgabe $c : b$.

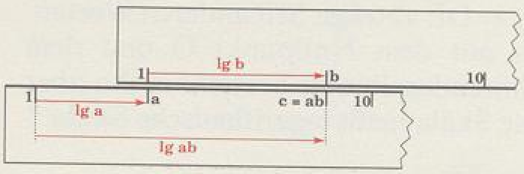


Abb. 174.2 Multiplikation bzw. Division mit dem Rechenstab

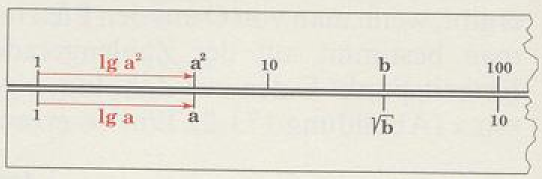


Abb. 174.3 Quadrieren und Wurzelziehen mit dem Rechenstab

Mit zwei logarithmischen Skalen, deren Längeneinheiten sich wie 2 : 1 verhalten, kann man quadrieren bzw. die Quadratwurzel ziehen (Abbildung 174.3). Wenn die Marken 1 der beiden Skalen übereinandergestellt sind, liest man über der Zahl a der unteren Skala ihr Quadrat a^2 auf der oberen Skala ab. Umgekehrt steht unter einer Zahl b der oberen Skala ihre Quadratwurzel auf

* gesprochen ˈgʌntə. Bei den englischen Seeleuten war lange Zeit ein zwei Fuß langer flacher Stab in Gebrauch, der neben der logarithmischen Skala auch logarithmische Skalen trigonometrischer Funktionen enthielt. Er hieß *The Gunter*. *According to Gunter* sagen übrigens die Amerikaner für unser »nach Adam Riese«. (Bei den Engländern heißt es dagegen *according to Cocker* nach dem englischen Mathematiker Edward Cocker [1631–1675], dessen *Arithmetick* von 1678 insgesamt 112 Auflagen erfuhr.)

der unteren Skala. Edmund WINGATE (1596–1656) hat 1645 die »Quadratskala« erfunden und auf dem GUNTERschen Stab anbringen lassen.

Mit Hilfe geeigneter Paare von logarithmischen Skalen lassen sich noch viele weitere Aufgaben recht einfach lösen (Aufgabe 181/**23** und 182/**24**). Rechenstäbe wurden vor der Einführung elektronischer Taschenrechner auch im Unterricht verwendet. Abbildung 175.1 zeigt einen Rechenstab mit »Läufer«, der erstmals 1837 von MOUZIN erwähnt wurde.

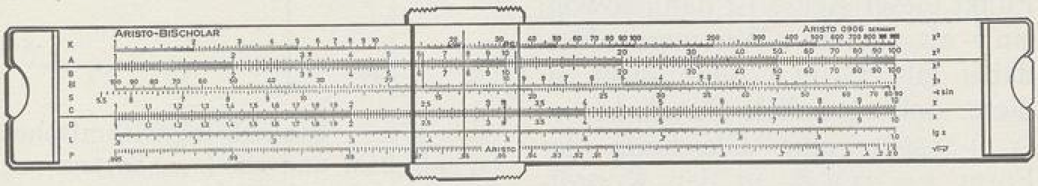


Abb. 175.1 Rechenstab

b) Das einfach-logarithmische Papier

Abbildung 175.2 zeigt ein Koordinatensystem, dessen y-Achse eine logarithmische Skala trägt, während die x-Achse die gewohnte äquidistante Teilung aufweist. Es handelt sich um ein sog. einfach-logarithmisches Koordinatensystem; ein Papier, auf dem eine solche Einteilung vorgedruckt ist, heißt einfach-logarithmisches Papier.

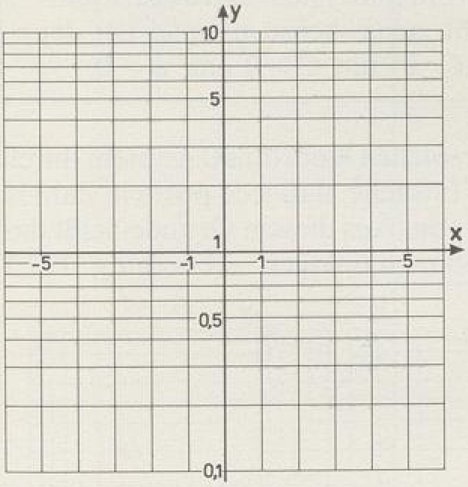


Abb. 175.2 Einfach-logarithmisches Koordinatensystem

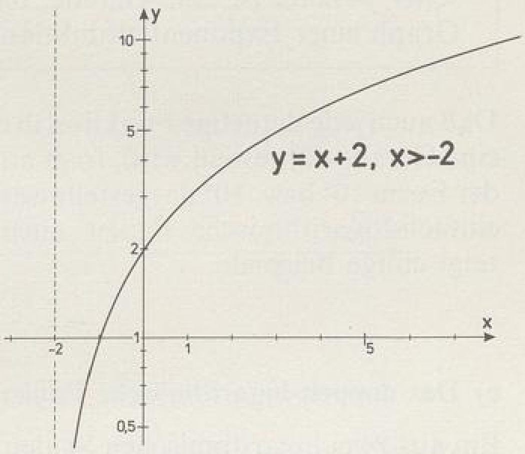


Abb. 175.3 Graph von $x \mapsto x+2$, $x > -2$ auf einfach-logarithmischem Papier

Natürlich hat in einem solchen Koordinatensystem der Graph einer Funktion eine andere Form als in den uns geläufigen Systemen mit jeweils äquidistant geteilten Achsen. Zum Beispiel ist der Graph einer linearen Funktion auf einfach-logarithmischem Papier keine Gerade, sondern eine gekrümmte Kurve (Abbildung 175.3). Es gibt aber auch Funktionen, deren Graphen sich bei Verwendung von logarithmischem Papier vereinfachen. Von besonderem Interesse ist die Frage, welche Funktionen in einem solchen Koordinatensystem als Graphen eine Gerade haben.

Um dies zu untersuchen, führen wir eine mit der y-Achse zusammenfallende, äquidistant geteilte z-Achse ein, und zwar so, daß der Punkt $z = 0$ mit dem Punkt $y = 1$ und der Punkt $z = 1$ mit dem Punkt $y = 10$ zusammenfallen (Abbildung 176.1). Jedem Punkt dieser Achse ist dann sowohl ein y- als auch ein z-Wert zugeordnet; dabei gilt $z = \lg y$. Eine nicht zu dieser Achse parallele Gerade hat im (x, z)-System eine Gleichung der Form $z = ax + b$. In den Koordinaten x und y hat diese Gerade die Gleichung $\lg y = ax + b$. Die Umformung $\lg y = ax + b \Leftrightarrow y = 10^{ax+b} \Leftrightarrow y = (10^a)^x \cdot 10^b$ zeigt, daß es sich um eine Gleichung der Form $y = C \cdot B^x$ handelt (mit $B := 10^a$ und $C := 10^b$), also um die Gleichung einer Exponentialfunktion. Dabei sind die Basis B und der Faktor C positiv. Damit haben wir folgendes Ergebnis:

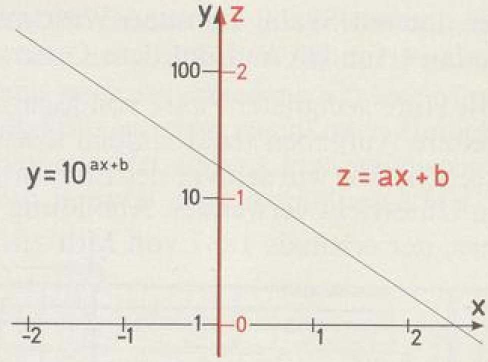


Abb. 176.1 Einfach-logarithmisches (x, y)-System und ein (x, z)-System mit äquidistant geteilten Achsen

> In einem einfach-logarithmischen Koordinatensystem mit logarithmischer y-Skala ist eine Gerade, die nicht zur y-Achse parallel ist, der Graph einer Exponentialfunktion $x \mapsto C \cdot B^x$ mit $C > 0$ und $B > 0$.

Daß auch jede derartige Funktion in einem solchen Koordinatensystem durch eine Gerade dargestellt wird, folgt aus der Tatsache, daß jede positive Zahl in der Form 10^a bzw. 10^b dargestellt werden kann. Aus diesem Grunde heißt das einfach-logarithmische Papier auch Exponentialpapier. Abbildung 177.1 zeigt einige Beispiele.

c) Das doppelt-logarithmische Papier

Ein aus zwei logarithmischen Skalen gebildetes Koordinatensystem heißt doppelt-logarithmisch; Papiere, auf denen eine entsprechende Einteilung vorgedruckt ist, bezeichnet man als doppelt-logarithmische Papiere (Abbildung 176.2).

Welche Funktionen werden auf doppelt-logarithmischem Papier durch Geraden graphisch dargestellt? Wir denken uns an Stelle der x-Achse eine äquidistant geteilte t-Achse so, daß

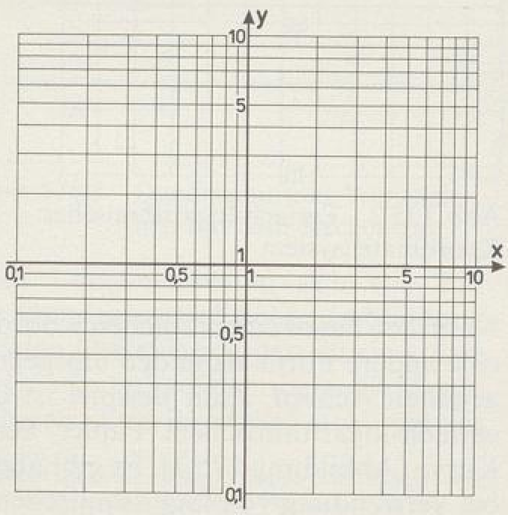


Abb. 176.2 Doppelt-logarithmisches Koordinatensystem

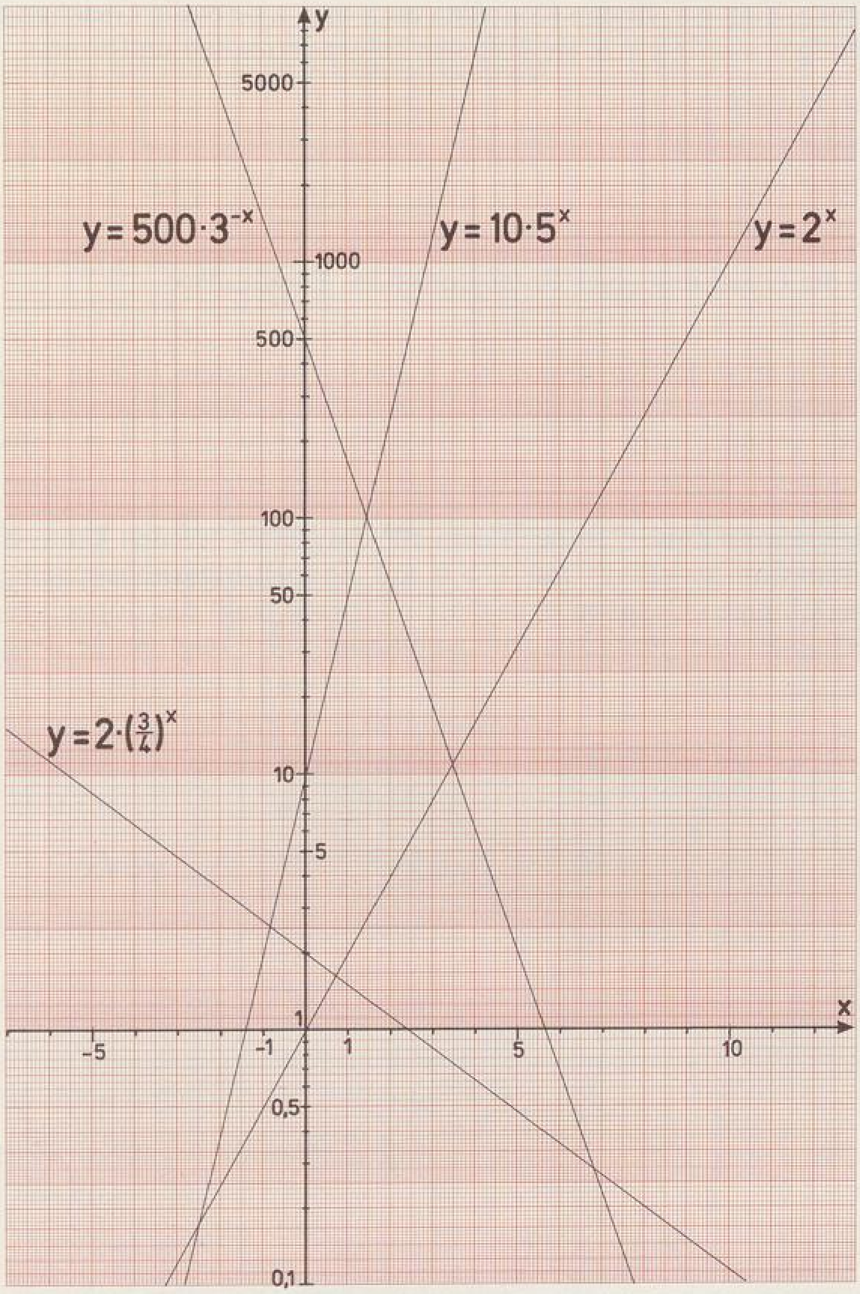


Abb. 177.1 Graphen von Exponentialfunktionen auf einfach-logarithmischem Papier

$t=0$ mit $x=1$ und $t=1$ mit $x=10$ übereinstimmt, ebenso an Stelle der y-Achse eine äquidistant geteilte z-Achse so, daß sich $z=0$ und $y=1$ sowie $z=1$ und $y=10$ entsprechen. Es gilt dann $t=\lg x$ und $z=\lg y$. Im (t, z)-System hat jede Gerade, die nicht zur z-Achse parallel ist, eine Gleichung der Form $z = at + b$. In den Koordinaten x und y heißt die Gleichung dieser Geraden $\lg y = a \cdot \lg x + b$; sie läßt sich folgendermaßen umformen:

$$\lg y = a \cdot \lg x + b$$
$$\lg y = \lg(x^a) + \lg(10^b)$$
$$\lg y = \lg(x^a \cdot 10^b)$$
$$y = C \cdot x^a, \quad \text{mit } C := 10^b, \quad \text{also } C > 0.$$

Das ist die Gleichung einer Potenzfunktion. Es gilt also:

> In einem doppelt-logarithmischen Koordinatensystem ist eine Gerade, die nicht zur y-Achse parallel ist, der Graph einer Potenzfunktion $x \mapsto C \cdot x^a$ mit $C > 0$.

Da jede positive Zahl C in der Form 10^b dargestellt werden kann, hat jede Potenzfunktion $x \mapsto C \cdot x^a$ mit $C > 0$ auf doppelt-logarithmischem Papier einen geradlinigen Graphen. Aus diesem Grunde heißt das doppelt-logarithmische Papier auch Potenzpapier. Abbildung 178.1 zeigt einige Beispiele.

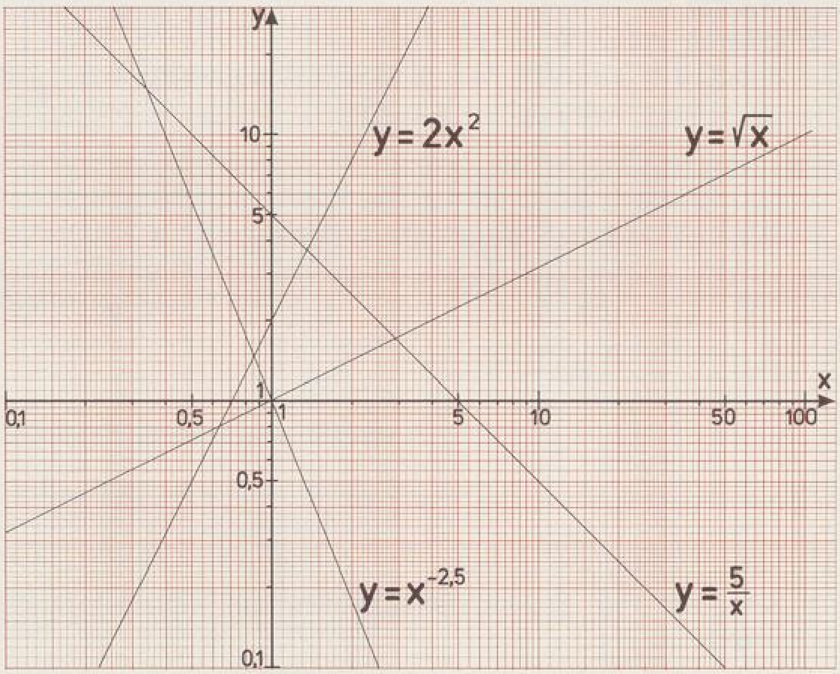


Abb. 178.1 Graphen von Potenzfunktionen auf doppelt-logarithmischem Papier

Aufgaben

1. Bestimme die maximale Definitionsmenge:

a) $x \mapsto \log_3 x$ **b)** $x \mapsto \log_5 |x|$ **c)** $x \mapsto \log_2 \sqrt{x}$

d) $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(2x-5)$ **e)** $x \mapsto \log_4(2x+5)$ **f)** $x \mapsto \log_7 |2x-3|$

2. Welche maximale Definitionsmenge hat folgende Funktion?

a) $x \mapsto \lg(x^2+11)$ **b)** $x \mapsto \lg(x^2-1)$

c) $x \mapsto \log_{0,1}(x^2+2x+2)$ **d)** $x \mapsto \log_5(x^2+2x+1)$

e) $x \mapsto \log_{1,1}(x^2-4x-5)$ **f)** $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} |2x^2+7x-4|$

3. Gib zu den folgenden Funktionsgleichungen $y = f(x)$ jeweils eine Gleichung $x = f^{-1}(y)$ der Umkehrfunktion an.

a) $y = 2^x$ **b)** $y = (\frac{1}{3})^x$ **c)** $y = 5^{2x}$ **d)** $y = 0{,}1^{2-x}$

e) $y = \operatorname{ld} x$ **f)** $y = \log_{\frac{2}{3}} x$ **g)** $y = \lg(-2x)$ **h)** $y = \log_{0,1} \sqrt{x}$

4. Zeichne den Graphen der Funktion.

a) $x \mapsto \log_3 x$ **b)** $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}} x$ **c)** $x \mapsto \log_{0,6} x$ **d)** $x \mapsto \log_{\sqrt{3}} x$

5. Bestimme diejenige Funktion $x \mapsto \log_b x$, deren Graph den angegebenen Punkt enthält, und skizziere den Graphen.

a) A(8|3) **b)** B(8|1,5) **c)** C(8|−6)

d) D(0,25|2) **e)** E(5|$\frac{1}{2}$) **f)** F($\frac{1}{27}$|$-\frac{3}{4}$)

6. Kann man zu jedem Punkt der rechten Halbebene ($x > 0$) eine Funktion $x \mapsto \log_b x$ angeben, deren Graph den Punkt enthält? Gibt es Punkte, durch welche mehr als eine derartige Logarithmuskurve geht?

7. Zeichne die Graphen $y = \operatorname{ld} 5x$ und $y = \operatorname{ld} \dfrac{x}{5}$ und vergleiche sie mit dem Bild von $y = \operatorname{ld} x$. Welche Zusammenhänge vermutest du? Begründe deine Vermutung mit Hilfe der Rechengesetze.

8. Stelle folgende Funktionen graphisch dar:

a) $x \mapsto \operatorname{ld}(x-1)$ **b)** $x \mapsto \operatorname{ld} x - 1$

c) $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$ **d)** $x \mapsto \log_{\frac{1}{3}} x + 2$

9. Zeichne die Graphen der Funktionen f und g auf der jeweiligen maximalen Definitionsmenge.

a) $f(x) = 2 \operatorname{ld} x, \quad g(x) = \operatorname{ld} x^2$

b) $f(x) = 2\log_{\frac{1}{2}}(2x-5), \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x-5)^2$

c) $f(x) = 2\log_3 |x-3|, \quad g(x) = \log_3 (x-3)^2$

10. Werden durch die folgenden Paare von Zuordnungsvorschriften verschiedene Funktionen definiert? (Es soll jeweils die größtmögliche Definitionsmenge genommen werden.)

a) $x \mapsto 2\log_a x$ und $x \mapsto \log_a x^2$ **b)** $x \mapsto \frac{1}{2}\log_a x$ und $x \mapsto \log_a \sqrt{x}$
c) $x \mapsto 3\log_5 x$ und $x \mapsto \log_5 x^3$ **d)** $x \mapsto \lg(x+1)^2$ und $x \mapsto 4\lg\sqrt{x+1}$
e) $x \mapsto x$ und $x \mapsto \operatorname{ld} 2^x$ **f)** $x \mapsto \operatorname{ld} 2^x$ und $x \mapsto 2^{\operatorname{ld} x}$
g) $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto \log_3 3^{x^2}$ **h)** $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto 3^{2\log_3 x}$

11. Stelle die Funktionen $x \mapsto \log_2 x$, $x \mapsto \log_4 x$ und $x \mapsto \log_8 x$ graphisch dar. Welche geometrische Beziehung besteht zwischen den Graphen?

12. Zeichne das Bild der Funktion $x \mapsto \lg x$ und konstruiere daraus den Graphen einer neuen Funktion, indem du alle Ordinaten
a) verdoppelst **b)** verdreifachst **c)** halbierst.
Handelt es sich bei den neuen Kurven ebenfalls um die Graphen von Logarithmusfunktionen, und wenn ja, von welchen?

13. a) Gegeben sei der Graph $y = \operatorname{ld} x$ und ein beliebiger Punkt $P(x_1|y_1)$ mit $x_1 > 1$ und $y_1 > 0$. Zeichne den durch P verlaufenden Graphen einer Funktion $x \mapsto \log_b x$. (*Hinweis*: Nach der Umrechnungsregel von Satz 164.1 ist das Verhältnis der zu einer bestimmten Abszisse gehörenden Ordinaten der beiden Graphen konstant.)
b) Verwende anstatt des Punktes P einen Punkt $Q(x_2|y_2)$ mit $x_2 > 1$, $y_2 < 0$.

14. Für welche Werte von x sind die folgenden Funktionen definiert?
a) $f(x) = \operatorname{ld}(\operatorname{ld} x)$ **b)** $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{2}} x)$ **c)** $f(x) = \lg(\log_{0,1} x)$
d) $f(x) = \log_3[\log_4(\log_5 x)]$ **e)** $f(x) = \log_2[\log_{0,4}(\log_3 x)]$

15. Löse folgende Gleichungen:
a) $\operatorname{ld}(\operatorname{ld} x) = 1$ **b)** $\log_5(\log_3 x) = 1$
c) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_4 x^2) = -1$ **d)** $\log_{\frac{1}{2}}[\log_2(x^2-2x+8)] = -2$
e) $\log_2[\log_3(\log_5 x)] = 0$ **f)** $\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_{0,2} x)] = 1$

16. Welche Ungleichung besteht zwischen
a) $\operatorname{ld} 5$ und $\operatorname{ld} 7$ **b)** $\log_{\frac{1}{2}} 5$ und $\log_{\frac{1}{2}} 7$
c) $\log_7 \frac{3}{5}$ und $\log_7 \frac{5}{8}$ **d)** $\log_{0,2} 0{,}7$ und $\log_{\frac{1}{5}} 0{,}699$
e) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 15$ und $\log_{\frac{1}{2}\sqrt{2}} 0{,}15$ **f)** $\log_\pi 1$ und $\log_\pi \frac{12}{13}$?

17. Zwischen welchen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen liegen die folgenden Logarithmen?
a) $\log_5 100$ **b)** $\log_3 39$ **c)** $\lg 1{,}67$ **d)** $\lg 16{,}7$ **e)** $\lg 1670$
f) $\log_5 0{,}3$ **g)** $\operatorname{ld} 0{,}01$ **h)** $\lg 0{,}0011$ **i)** $\log_{0,3} 2$ **k)** $\log_{\frac{2}{3}} 7$
l) $\log_{0,5} 50$ **m)** $\log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{8})$ **n)** $\log_{\frac{3}{7}}(\frac{3}{26})$ **o)** $\log_{0,5} 0{,}3$ **p)** $\log_{0,2} 0{,}05$

18. Löse folgende Ungleichungen:
a) $\log_5 x < \log_5 \sqrt{5}$ **b)** $\log_{0,3} x \leqq \log_{0,3} 11$

c) $0 < \log_3 x < 3$ **d)** $\log_{\frac{1}{2}} 3 \geqq \operatorname{ld} \frac{1}{x} \geqq -3$

e) $\operatorname{ld}(2x+5) > \log_4(4x+1)$ **f)** $\log_{0,5}(2x+1) < \log_{\frac{1}{4}}(x+2)$

19. a) Zeichne unter Verwendung des dekadischen Logarithmus und der Längeneinheit 5 cm eine logarithmische Skala für das Intervall $[1; 1000]$. Gib auf dieser Skala die den Zahlen 6; 350; $\sqrt{1000}$ und $\sqrt[3]{100}$ entsprechenden Punkte an.

b) Fertige für das Intervall $[\frac{1}{16}; 1024]$ eine auf der Funktion $x \mapsto \operatorname{ld} x$ beruhende logarithmische Skala mit der Längeneinheit 1 cm an. Trage darauf die Punkte $\sqrt{2}$, 5, $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{9}$, 100 und 800 ein.

20. Auf der in Aufgabe **19.a)** beschriebenen logarithmischen Skala liege

a) der Punkt A 4 cm rechts von der Marke 1,

b) der Punkt B in der Mitte zwischen den Marken 100 und 1000,

c) der Punkt C 32 mm links von der Marke 100.

Bestimme die auf zwei Stellen nach dem Komma gerundeten Werte der diesen Punkten zugeordneten Zahlen a, b und c.

21. a) Wieviel Längeneinheiten beträgt auf einer dekadisch-logarithmischen Skala der Abstand zwischen den Punkten

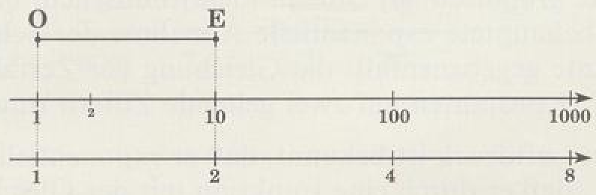
1) 2 und 20 **2)** 0,46 und 460 **3)** $\sqrt{0,1}$ und $\sqrt{1000}$?

b) Begründe für eine beliebige logarithmische Skala (mit Basis b), daß auf ihr der Abstand zweier Punkte x_1 und x_2 mit $x_1 > x_2$ dem dekadischen Logarithmus des Quotienten $x_1 : x_2$ proportional ist.

22. a) In Abbildung 181.1 sind die mit derselben Längeneinheit $\overline{OE}$ konstruierten logarithmischen Skalen mit Basis 10 und Basis 2 einander gegenübergestellt. Mit welchem Faktor muß man die erste Skala strecken (z. B. vom Punkt 1 aus), um den Abstand der Punkte 1 und 2 auf den gleichen Wert wie in der zweiten Skala zu bringen?

b) Zeige, daß das bei dieser Streckung entstehende Bild der ersten Skala zur zweiten Skala kongruent ist. (*Hinweis*: Betrachte die einer beliebigen Zahl $x > 0$ auf den beiden Skalen zugeordneten Punkte.)

Abb. 181.1
Zu Aufgabe **22**



23. Konstruiere analog zu Abbildung 174.3 über dem Intervall $[1; 10]$ einer logarithmischen Skala eine »Kubikskala« so, daß man mit diesem Skalenpaar 3. Potenzen und 3. Wurzeln bestimmen kann.*

* Auf den meisten Rechenstäben ist eine solche Skala tatsächlich vorhanden, 1645 von Edmund WINGATE (1596–1656) eingeführt.

24. Stelle einer logarithmischen Skala des Intervalls [1; 10] eine »Kehrwertskala« gegenüber, auf der man unter dem Punkt x der ersten Skala die Zahl $\frac{1}{x}$ abliest. Zeige, daß es sich bei ihr wieder um eine logarithmische Skala handelt.*

25. a) Begründe, daß man die beiden Skalen von Abbildung 174.3 so einander gegenüberstellen kann, daß über der Marke x der unteren Skala der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius x abgelesen werden kann.

b) Welche Anordnung der Skalen liefert zum Durchmesser x den Flächeninhalt des Kreises?

26. Zeige, daß man mit zwei gleichen logarithmischen Skalen zu drei positiven Zahlen a, b, c die 4. Proportionale, d.h. die Lösung der Gleichung $a:b = c:x$, bestimmen kann. (*Hinweis*: Vgl. Abbildung 174.2.)

27. Stelle in einem einfach-logarithmischen Koordinatensystem mit logarithmisch geteilter y-Achse folgende Funktionen graphisch dar:

a) $x \mapsto 3^x$ **b)** $x \mapsto 0{,}2^x$ **c)** $x \mapsto 20 \cdot 1{,}5^x$

d) $x \mapsto 50 \cdot (\frac{7}{8})^x$ **e)** $x \mapsto 10 \cdot 2^{-x}$ **f)** $x \mapsto 0{,}2 \cdot 0{,}5^{-x}$

28. Welche Funktion hat in einem einfach-logarithmischen Koordinatensystem mit logarithmischer y-Skala als Graphen die Verbindungsgerade der Punkte

a) $P(0|100)$ und $Q(2|1)$ **b)** $R(0|1)$ und $S(4|100)$

c) $T(0|80)$ und $U(-3|10)$ **d)** $V(1|2)$ und $W(-5|128)$?

29. Angeblich soll in einem frisch eingeschenkten Glas Bier die Höhe des Schaums exponentiell mit der Zeit abnehmen. Hans will dies nachprüfen. Er schenkt ein Glas Bier ein und mißt in Abständen von einer halben Minute die Schaumhöhe. Dabei erhält er folgende Meßreihe:

t [in min]	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
h [in mm]	80	56	39	27	19	13	9	7	5	3	2

Prüfe graphisch auf einfach-logarithmischem Papier, ob diese Meßreihe die behauptete exponentielle Abnahme der Schaumhöhe bestätigt. Wie könnte gegebenenfalls die Gleichung der Zerfallsfunktion $t \mapsto h(t)$ lauten? (Konstanten auf zwei geltende Ziffern runden.)

30. Vom Luftdruck ist bekannt, daß er exponentiell mit der Höhe abnimmt, d.h., daß er durch eine Funktion mit der Gleichung $p(h) = p_0 \cdot b^{-h}$, mit $b > 1$, beschrieben werden kann. Bei einem Ballonaufstieg wird in 1 km Höhe der Druck $p_1 = 879$ hPa und in 5 km Höhe der Druck $p_2 = 533$ hPa gemessen. Wie groß ist an diesem Tag der Luftdruck p_0 am Boden? Mit

* Auf den meisten Rechenstäben ist eine solche Skala tatsächlich vorhanden.

welchem Druck ist in 10 km Höhe zu rechnen? Löse die Aufgabe auf einfach-logarithmischem Papier.

31. a) Zeichne den Graphen der Funktion $x \mapsto \operatorname{ld} x$ in einem einfach-logarithmischen Koordinatensystem, dessen x-Achse logarithmisch geteilt ist. Welche Vermutung legt das Ergebnis nahe?

• **b)** Beweise, daß der Graph einer Logarithmusfunktion mit der Gleichung $y = \log_b x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer x-Skala und äquidistant geteilter y-Skala stets eine Gerade ist.

32. Die Höhe über dem Erdboden kann aus dem Luftdruck nach der Formel $h = 18{,}4\,\text{km} \cdot \lg\left(\frac{p_0}{p}\right)$ bestimmt werden; dabei ist p_0 der Luftdruck am Boden. In welcher Höhe befindet sich an einem Tag mit $p_0 = 1010\,\text{hPa}$ ein Meßballon, wenn ein mitgeführtes Barometer folgenden Druck anzeigt:
a) 900 hPa **b)** 800 hPa **c)** 400 hPa **d)** 200 hPa **e)** 150 hPa?
Löse die Aufgabe graphisch auf einfach-logarithmischem Papier.

33. Zeichne auf doppelt-logarithmischem Papier die Graphen folgender Funktionen:
a) $x \mapsto x^3$ **b)** $x \mapsto 2\sqrt{x^3}$ **c)** $x \mapsto \left(\frac{2}{x}\right)^{1,5}$ **d)** $x \mapsto 5\sqrt[3]{x^2}$

34. a) Eine Potenzfunktion $x \mapsto Cx^{\varrho}$ hat für $x = 0{,}2$ den Wert $y = 0{,}4$ und für $x = 20$ den Wert $y = 10$. Bestimme mit Hilfe von doppelt-logarithmischem Papier näherungsweise den Funktionswert für
1) $x = 1$ **2)** $x = 2$ **3)** $x = 10$ **4)** $x = 40$.

• **b)** Bestimme für die in **a)** definierte Funktion die Konstanten C und ϱ durch Rechnung.

35. Prüfe graphisch, ob die folgende Tabelle von Meßwerten einer Potenzfunktion entspricht.

a)

x	2	5	10	20	30	50
y	3,8	6,6	10,0	15,1	19,2	26,1

b)

x	0,5	1	2	4	6	10
y	0,42	0,53	0,85	2,2	5,7	37

7.5 Exponentialgleichungen und Logarithmusgleichungen

7.5.1 Exponentialgleichungen

Bestimmungsgleichungen, bei denen die Unbekannte nur in den Exponenten von Potenzen vorkommt, nennt man **Exponentialgleichungen**. Bei einfachen Gleichungen dieser Art kann man die Lösungen exakt bestimmen. Grundlage dafür ist

> **Satz 184.1:** Die Gleichung $b^x = a$ mit $a > 0$, $b > 0$ und $b \neq 1$ hat genau eine Lösung, nämlich $x = \log_b a$.

Daß $\log_b a$ eine Lösung der Gleichung $b^x = a$ ist, beruht auf der Definition des Logarithmus (Definition 155.1), daß es die einzige Lösung ist, wurde schon in Satz 155.1 festgestellt.

Beispiel 1:

$5^x = 12$ hat die Lösung $x = \log_5 12$.

Den Übergang von der ersten zur zweiten Gleichung deuten wir so, daß von beiden Seiten der Gleichung der Logarithmus zur Basis 5 gebildet wird. Man nennt diesen Schritt **Logarithmieren der Gleichung**. Wir schreiben dafür

$$5^x = 12 \qquad \| \log_5$$
$$x = \log_5 12$$

Beim praktischen Rechnen, z.B. mit dem Taschenrechner, bevorzugt man den dekadischen Logarithmus. Man erhält dann folgenden Lösungsweg:

$$5^x = 12 \qquad \| \lg$$
$$x \cdot \lg 5 = \lg 12 \qquad \| : \lg 5$$
$$x = \frac{\lg 12}{\lg 5} \approx 1{,}544$$

Daß die so gefundene Lösung mit $\log_5 12$ übereinstimmt, folgt aus Satz 164.1.

Beispiel 2:

Bei der Gleichung $16^x = 128$ kann man beide Seiten als Potenzen mit gleicher Basis darstellen. Das Logarithmieren der Gleichung läuft dann einfach auf das Gleichsetzen der Exponenten hinaus:

$$16^x = 128$$
$$2^{4x} = 2^7 \qquad \| \log_2$$
$$4x = 7$$
$$x = \tfrac{7}{4}$$

Beispiel 3:

$1{,}5^{2x+1} = 7^{-x}$

Hier steht auf beiden Seiten eine Potenz, deren Exponent die Unbekannte enthält. Durch Logarithmieren erhält man eine lineare Gleichung für x.

$$1{,}5^{2x+1} = 7^{-x} \quad \| \lg$$

$$(2x+1)\cdot \lg 1{,}5 = -x \cdot \lg 7$$

$$x(2\cdot \lg 1{,}5 + \lg 7) = -\lg 1{,}5$$

$$x = \frac{-\lg 1{,}5}{2\cdot \lg 1{,}5 + \lg 7} \approx -0{,}1471$$

Beispiel 4:

$5 \cdot 3^{2x} = 3^{x+3} - 34$

Da rechts eine Differenz steht, führt Logarithmieren nicht weiter. Man kann aber jedes der beiden Glieder, welche die Unbekannte enthalten, durch die Potenz 3^x ausdrücken.

$$5 \cdot 3^{2x} = 3^{x+3} - 34$$

$$5 \cdot (3^x)^2 = 3^3 \cdot 3^x - 34$$

Mit der Substitution $z = 3^x$ erhält man eine quadratische Gleichung für z.

$$5z^2 - 27z + 34 = 0$$

Sie hat die Lösungen $z_1 = 2$ und $z_2 = 3{,}4$. Beide Lösungen sind positiv und kommen somit als Werte der Potenz 3^x in Betracht. Damit gilt

$$3^x = 2 \quad \vee \quad 3^x = 3{,}4$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 3} \quad \vee \quad x = \frac{\lg 3{,}4}{\lg 3};$$

$x_1 \approx 0{,}6309$ und $x_2 \approx 1{,}114$, jeweils auf vier geltende Ziffern gerundet.

Aufgaben

Bestimme die Lösungsmenge. Gib für irrationale Lösungen auch den auf vier geltende Ziffern gerundeten Näherungswert an.

1. **a)** $7^x = 343$ **b)** $3^x = 11$ **c)** $(\frac{3}{7})^x = 10$ **d)** $1{,}2^x - 0{,}6 = 0$

2. **a)** $4^{x-5} = 6$ **b)** $8^{2x-3} = 32$ **c)** $5^{x^2-1} = 1$ **d)** $0{,}4^{3-x} = 0{,}5$

3. **a)** $2^x = 8^{x-2}$ **b)** $3{,}1^{2x} = 2 \cdot 31^x$ **c)** $10 \cdot (\frac{5}{9})^{4-x} = 2^{2x+1}$

4. **a)** $3^x \cdot 5^{x-1} = 1$ **b)** $4^{2x-3} \cdot 32^{1-x} = \frac{1}{8}$

   c) $\dfrac{2^{5x}}{7^{x+2}} = 10$ **d)** $(\sqrt{2})^{x+3} = \dfrac{3 \cdot 13^{4-x}}{(\sqrt{5})^x}$

5. **a)** $4 \cdot 2^{\sqrt{x}} = 0{,}5^{-x}$ **b)** $5^{x^2+3} = 25 \cdot 0{,}2^{x-1}$

6. **a)** $7^{2x+1} - 40 \cdot 7^x = 63$ **b)** $9 \cdot (\frac{2}{3})^{2x+1} + 54 \cdot (\frac{2}{3})^{x-1} - 42 = 0$

7. **a)** $25^x = 15 \cdot 5^x - 50$ **b)** $3^x + 9^x = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$

8. **a)** $4^{x+2} - 5 \cdot 2^{x+3} - 24 = 0$ **b)** $(\frac{1}{2})^{x-1} \cdot (8^{x+1} - 4^5) = 16(4^x - 8)$

9. Im Jahre 1990 lebten auf der Erde 5,3 Milliarden Menschen. Die jährliche Wachstumsrate betrug etwa 1,5%.

a) In welchem Jahr würde bei gleichbleibender Wachstumsrate die Weltbevölkerung
  1) auf 6,0 Milliarden anwachsen
  2) doppelt so groß wie 1990 werden?

b) In welcher Zeit nimmt bei der Wachstumsrate 1,5% die Bevölkerungszahl von 1990
  1) um 1 Million zu (Einwohnerzahl einer Großstadt)
  2) um 77 Millionen zu (Bevölkerungszahl Deutschlands)?

7.5.2 Logarithmusgleichungen

Eine Bestimmungsgleichung, bei der die Unbekannte nur im Argument von Logarithmen auftritt, bezeichnet man als **Logarithmusgleichung**. Auch solche Gleichungen lassen sich in einfachen Fällen exakt lösen. Grundlage dafür ist

> **Satz 186.1:** Die Gleichung $\log_b x = \varrho$ mit $b > 0$, $b \neq 1$ und $\varrho \in \mathbb{R}$ hat genau eine Lösung, nämlich $x = b^\varrho$.

Dies folgt aus der echten Monotonie der Funktion $x \mapsto \log_b x$ und der Tatsache, daß diese Funktion die Wertemenge $\mathbb{R}$ hat.

Beispiel 1:

$\log_4 x = 5$ hat die Lösung $x = 4^5$.

Den Übergang zur zweiten Gleichung kann man so deuten, daß man jede Seite der Ausgangsgleichung zum Exponenten einer Potenz mit der Basis 4, also der Basis des Logarithmus, macht. Wir schreiben

$$\log_4 x = 5 \qquad \| 4^{\cdots}$$
$$4^{\log_4 x} = 4^5$$
$$x = 1024$$

Diese Umformung, bei der der Logarithmus »beseitigt wird«, bezeichnet man als **Delogarithmieren der Gleichung**.

Beispiel 2:

$\lg(2x+3)+\lg(1-x)-\lg(1-4x)=0$

Hier muß man zuerst die linke Seite zu einem einzigen Logarithmusterm zusammenfassen:

$$\lg\frac{(2x+3)(1-x)}{1-4x}=0 \qquad \| 10^{\cdots}$$

$$\frac{(2x+3)(1-x)}{1-4x}=1 \qquad \| \cdot(1-4x)$$

$$2x^2-3x-2=0$$

$$x_1=2; \quad x_2=-0{,}5$$

Da die Zusammenfassung von Logarithmen keine Äquivalenzumformung zu sein braucht, wenn man jeweils die maximale Definitionsmenge zugrundelegt, muß man die Probe machen. Sie zeigt, daß nur x_2 eine Lösung der Ausgangsgleichung ist.

Beispiel 3:

$\log_9(x^2+1)=\log_3(2x-1)$

Hier muß man zuerst Logarithmen mit gleicher Basis herstellen:

$$\frac{\log_3(x^2+1)}{\log_3 9}=\log_3(2x-1)$$

$$\log_3(x^2+1)=2\cdot\log_3(2x-1) \qquad \| 3^{\cdots}$$

$$x^2+1=(2x-1)^2$$

$$3x^2-4x=0$$

$$x_1=0; \quad x_2=\tfrac{4}{3}$$

Die Probe zeigt, daß nur x_2 eine Lösung der Ausgangsgleichung ist.

Aufgaben

Bestimme die Lösungsmenge. Gib für irrationale Lösungen auch den auf vier geltende Ziffern gerundeten Näherungswert an.

1. **a)** $\log_3 x=1{,}5$ **b)** $\log_{\frac{1}{2}} x=8$ **c)** $\lg x=0{,}1$
2. Alle Gleichungen sollen auf der jeweils maximalen Definitionsmenge betrachtet werden.
   a) Zeige an Hand der Lösungsmengen, daß die Gleichungen
   $\lg[(x+4)(x+1)]=1$ und $\lg(x+4)+\lg(x+1)=1$
   nicht äquivalent sind.
   b) Sind die Gleichungen $\log_3(x-8)-\log_3(1-2x)+1=0$ und
   $\log_3\dfrac{x-8}{1-2x}+1=0$ äquivalent?

c) Begründe, daß für die Lösungsmengen L_1 und L_2 der Gleichungen
(1) $\log_b[(rx+s)(ux+v)] = c$ und
(2) $\log_b(rx+s) + \log_b(ux+v) = c$
gilt: L_2 ist (echte oder unechte) Teilmenge von L_1.

3. a) $\lg(7x+2) = 1 + \lg(x-4)$
b) $\operatorname{ld}(x^2-1) - \operatorname{ld}(4x-1) + \operatorname{ld} 3 = 0$

4. a) $\log_6(5x-4) - \log_6(3+x) + \log_6(2x+1) = 1$
b) $\lg 2 + \lg(x+2) + \lg(3x+5) = \lg(5x^2-1)$
c) $\lg 2 + \lg[(x+2)(3x+5)] = \lg(5x^2-1)$

5. a) $\log_5(3x+4) - \log_{25}(4x-3) = 1$
b) $\lg(x^2+4) - \log_{\sqrt{10}}(3x+2) = 0$

6. a) $\log_5(x^2-5x+1) = 1 + \log_5(3x-10)$
b) $\lg(2x^2+x-5) + \log_{0,1}(x^2+1) = \lg 2$

7.5.3 Graphische und numerische Lösungsverfahren

Die in den bisherigen Beispielen betrachteten Exponential- und Logarithmusgleichungen ließen sich durch Logarithmieren bzw. Delogarithmieren oder mit Hilfe einer Substitution auf einfachere Gleichungstypen zurückführen, für die uns exakte Lösungsverfahren bekannt sind. Es gibt aber auch Gleichungen, bei denen eine solche Vereinfachung nicht möglich ist. Dann muß man sich damit begnügen, für die Lösungen hinreichend gute Näherungswerte zu bestimmen. Das kann durch graphische Lösungsmethoden, durch lineare Interpolation oder durch ein geeignetes Iterationsverfahren geschehen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 1:
$1 + 2^x - 3^{-x} = 0$

a) Graphische Lösung: Man bringt die Gleichung z.B. auf die Form $1 + 2^x = 3^{-x}$ und sucht die x-Werte, für welche die Funktionen $x \mapsto 1 + 2^x$ und $x \mapsto 3^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, gleichen Funktionswert haben. Zeichnet man die Graphen $y = 1 + 2^x$ und $y = 3^{-x}$, so ergeben sich diese x-Werte als die Abszissen der gemeinsamen Punkte beider Kurven. Abbildung 189.1 zeigt, daß in diesem Fall genau ein solcher Punkt existiert; für seine Abszisse liest man $x \approx -0{,}5$ ab.

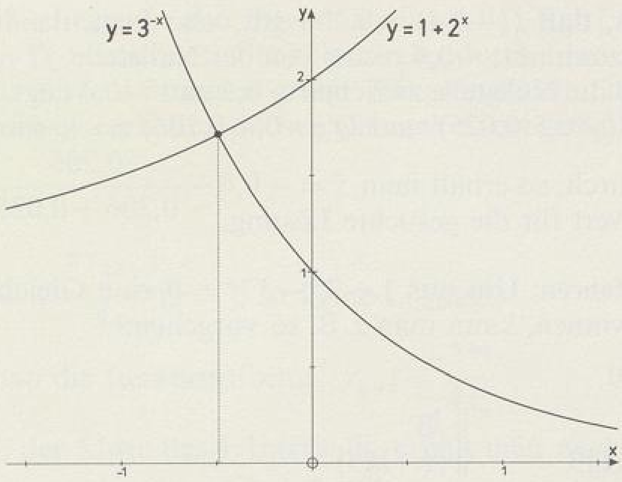


Abb. 189.1 Graphische Lösung der Gleichung $1 + 2^x - 3^{-x} = 0$

b) Lineare Interpolation: Man berechnet für die Funktion $f\colon x \mapsto 1 + 2^x - 3^{-x}$ eine Wertetabelle, etwa

x	-2	-1	0	1	2
y	$-7{,}75$	$-1{,}5$	1	$2\frac{1}{3}$	$4\frac{8}{9}$

Offensichtlich liegt zwischen -1 und 0 eine Nullstelle der Funktion, also eine Lösung der gegebenen Gleichung. Wir ersetzen den Graphen zwischen den Punkten $(-1|-1{,}5)$ und $(0|1)$ durch die Strecke und berechnen deren Schnittpunkt mit der x-Achse.

Hat man allgemein zwei Punkte $P(x_1|y_1 < 0)$ und $Q(x_2|y_2 > 0)$ und ist $S(\bar{x}|0)$ der Schnittpunkt der Geraden PQ mit der x-Achse, so kann man die Steigung dieser Geraden sowohl aus dem Steigungsdreieck $\triangle$ STQ als auch aus $\triangle$ PRQ bestimmen (Abbildung 189.2) und erhält die Gleichung

$$\frac{y_2 - 0}{x_2 - \bar{x}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Deren Auflösung nach $\bar{x}$ ergibt

$$\bar{x} = x_2 - \frac{y_2}{y_2 - y_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

In unserem Beispiel erhält man so für die Lösung der Gleichung den Näherungswert

$$\bar{x} = 0 - \frac{1}{1 + 1{,}5} \cdot 1 = -0{,}4.$$

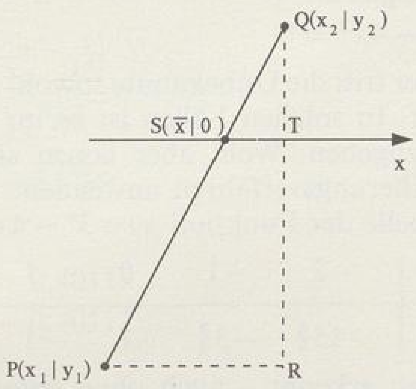


Abb. 189.2 Zur linearen Interpolation

Die Probe zeigt, daß $f(-0{,}4) \approx 0{,}206$ gilt; also liegt, da die Funktion in diesem Bereich zunimmt, $-0{,}4$ rechts von der Nullstelle. $f(-0{,}5) \approx -0{,}025$ zeigt weiter, daß die Nullstelle zwischen $-0{,}5$ und $-0{,}4$ liegt. Führt man mit den Punkten $P'(-0{,}5|0{,}025)$ und $Q'(-0{,}4|0{,}206)$ noch einmal die lineare Interpolation durch, so erhält man $\bar{x} = -0{,}4 - \dfrac{0{,}206}{0{,}206 + 0{,}025} \cdot 0{,}1 \approx -0{,}49$ als genaueren Wert für die gesuchte Lösung.

c) Iterationsverfahren: Um aus $1 + 2^x - 3^{-x} = 0$ eine Gleichung der Form $x = g(x)$ zu gewinnen, kann man z.B. so vorgehen:

$$
\begin{aligned}
&1 + 2^x - 3^{-x} = 0 \\
&1 + 2^x = 3^{-x} && \| \lg \\
&\lg(1 + 2^x) = -x \lg 3 && \| :(-\lg 3) \\
&x = -\frac{\lg(1 + 2^x)}{\lg 3}
\end{aligned}
$$

Mit der Iterationsformel $x_{n+1} = -\dfrac{\lg(1 + 2^{x_n})}{\lg 3}$ und $x_0 = -0{,}5$ erhält man:

$x_1 = -0{,}486\ldots$	$x_3 = -0{,}4893\ldots$	$x_5 = -0{,}48952\ldots$
$x_2 = -0{,}490\ldots$	$x_4 = -0{,}48958\ldots$	$x_6 = -0{,}489539\ldots$

Daraus kann man bereits einen sehr genauen Näherungswert für die gesuchte Lösung entnehmen: $x \approx -0{,}4895$. Die Zahlen x_n lassen sich sehr einfach mit dem Taschenrechner berechnen; Abbildung 190.1 zeigt eine dafür geeignete Tastenfolge. Natürlich läßt sich ein Iterationsverfahren besonders gut mit einem programmierbaren Rechner durchführen.

$\boxed{x_0}\ \boxed{\mathrm{M}}\ \boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{\mathrm{MR}}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{\lg}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{\lg}\ \boxed{=}\ \boxed{+/-}$

Abb. 190.1 Zum Lösen der Gleichung $1 + 2^x - 3^{-x} = 0$ mit dem Taschenrechner

Beispiel 2:

$3^x - 4x^2 = 0$

Hier tritt die Unbekannte sowohl als Exponent als auch als Basis einer Potenz auf. In solchen Fällen ist es im allgemeinen unmöglich, exakte Lösungen anzugeben. Wohl aber lassen sich auch hier die in Beispiel 1 benützten Näherungsverfahren anwenden. Man beginnt am besten mit einer Wertetabelle der Funktion $x \mapsto 3^x - 4x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$-15\frac{8}{9}$	$-3\frac{2}{3}$	1	-1	-7	-9	17	25

Man erkennt – auch ohne graphische Darstellung –, daß der Graph die x-Achse mindestens dreimal schneidet, die Gleichung also mindestens drei

Lösungen hat. Sie liegen in den Intervallen $]-1;0[$, $]0;1[$ und $]3;4[$ und seien mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 bezeichnet. Graphisch oder durch lineare Interpolation könnte man für diese Lösungen grobe Näherungswerte bestimmen. Um genauere Ergebnisse zu erhalten, suchen wir nach einem geeigneten Iterationsverfahren.

1. Versuch:

$$3^x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3^x}{4x} \quad (x = 0 \text{ ist keine Lösung!})$$

Damit erhält man die Iterationsformel $x_{n+1} = \dfrac{3^{x_n}}{4x_n}$. $\quad (\mathrm{I}_1)$

Mit $x_0 = -0{,}5$, der Mitte des 1. Intervalls, erhält man nach (I_1)

$x_1 = -0{,}288\ldots$	$x_3 = -0{,}198\ldots$
$x_2 = -0{,}630\ldots$	$x_4 = -1{,}01\ldots$

Die Werte »laufen auseinander«; (I_1) ist für die Berechnung von ξ_1 ungeeignet.

Mit $x_0 = 0{,}5$, der Mitte des 2. Intervalls, erhält man aus (I_1)

$x_1 = 0{,}866\ldots$	$x_5 = 0{,}75844\ldots$
$x_2 = 0{,}747\ldots$	$x_6 = 0{,}75837\ldots$
$x_3 = 0{,}760\ldots$	$x_7 = 0{,}758389\ldots$
$x_4 = 0{,}758\ldots$	$x_8 = 0{,}758387\ldots$

Für die in $]0;1[$ liegende Lösung ξ_2 gilt also $\xi_2 = 0{,}75838\ldots \approx 0{,}7584$.

Mit $x_0 = 3{,}5$, der Mitte des 3. Intervalls, erhält man aus (I_1)

$x_1 = 3{,}340\ldots$
$x_2 = 2{,}937\ldots$
$x_3 = 2{,}144\ldots$

und erkennt, daß (I_1) zur Berechnung von ξ_3 unbrauchbar ist.

Zur Bestimmung von ξ_1 und ξ_3 benötigt man also andere Iterationsformeln.

2. Versuch:

$$3^x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3^x}{4} \Leftrightarrow x = \tfrac{1}{2}\sqrt{3^x} \vee x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3^x}.$$

Das ergibt für $x > 0$ die Iteration $\quad x_{n+1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3^{x_n}} \quad (\mathrm{I}_2)$

und für $x < 0$ die Iteration $\quad x_{n+1} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3^{x_n}}. \quad (\mathrm{I}_3)$

Mit $x_0 = -0{,}5$ erhält man aus (I_3)

$x_1 = -0{,}379\ldots$	$\ldots$	$x_6 = -0{,}40113\ldots$
$x_2 = -0{,}405\ldots$		$x_7 = -0{,}40112\ldots$

Damit hat man bereits $\xi_1 \approx -0{,}4011$ gefunden.
Dagegen erweist sich (I_2) zur Berechnung von ξ_3 wieder als ungeeignet!

3. Versuch:

$3^x - 4x^2 = 0$

$3^x = 4x^2 \qquad \| \lg$

$x \lg 3 = \lg(4x^2) \qquad \| : \lg 3$

$$x = \frac{\lg(4x^2)}{\lg 3}$$

Die entsprechende Iterationsformel lautet $x_{n+1} = \dfrac{\lg(4x_n^2)}{\lg 3}$. $\quad (\mathrm{I}_4)$

Mit $x_0 = 3{,}5$ erhält man daraus

$x_1 = 3{,}542\ldots$	$\ldots$	$x_{10} = 3{,}5872\ldots$
$x_2 = 3{,}564\ldots$		$x_{11} = 3{,}5873\ldots$

Da die Werte immer noch leicht ansteigen, ist man noch nicht sicher, ob beim Runden auf 4 Ziffern die 7 erhalten bleibt. Man kann dies prüfen, indem man $x = 3{,}587$ und $x = 3{,}5875$ in die linke Seite der zu lösenden Gleichung, also in $f(x) = 3^x - 4x^2$, einsetzt. Aus $f(3{,}587) = -0{,}01\ldots$ und $f(3{,}5875) = +0{,}003\ldots$ folgt, daß ξ_3 zwischen diesen beiden x-Werten liegt und somit $\xi_3 \approx 3{,}587$ gilt.

Aufgaben

1. Bestimme Näherungswerte für die Lösungen nach der graphischen Methode. (Längeneinheit 1 cm; eine Stelle nach dem Komma)
   a) $2^x + 8x - 7 = 0$ **b)** $1{,}5^x + x^2 = 2$ **c)** $1 - x + (\frac{1}{3})^x = 0$

2. Berechne mit Hilfe eines Iterationsverfahrens die auf vier geltende Ziffern gerundeten Lösungen der Gleichung von
   a) Aufgabe **1.a)** **b)** Aufgabe **1.b)** **c)** Aufgabe **1.c)**.

3. **a)** Bestimme graphisch Näherungswerte für die beiden Lösungen der Gleichung $0{,}5x^2 - 1 = \lg x$.
   b) Begründe, daß die in **a)** angegebene Gleichung auf die äquivalente Form $x = \sqrt{2(\lg x + 1)}$ gebracht werden kann, und benütze diese zur iterativen Berechnung des auf vier geltende Ziffern gerundeten Wertes der größeren der beiden Lösungen. Kann man mit dieser Iteration auch die zweite Lösung berechnen?
   c) Zeige, daß sich die Gleichung $0{,}5x^2 - 1 = \lg x$ nach Multiplikation mit $2x$ auf die Form $x = \dfrac{2x \cdot \lg x}{x^2 - 2}$ bringen läßt, und berechne damit den auf vier geltende Ziffern gerundeten Wert der zweiten Lösung.

4. **a)** Bestimme an Hand einer graphischen Darstellung näherungsweise die Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Graphen $y = x^{-1}$ und $y = \lg(x-2)$.

b) Berechne durch Iteration die auf Hundertstel gerundete Abszisse von S. Wie lautet die ebenso gerundete Ordinate von S?

5. Ermittle mit einer Wertetabelle die Lage der Nullstellen der Funktion. Suche geeignete Iterationsformeln zur Berechnung dieser Nullstellen und bestimme jeweils die auf vier geltende Ziffern gerundeten Werte.

a) $x \mapsto 10^x + 2^x - 9$ **b)** $x \mapsto 5 - x \cdot 2^{4-x}$

c) $x \mapsto \lg(2x-1) + 3x - 5$ **d)** $x \mapsto \lg(x^2+1) + \mathrm{ld}(5-x)$

• **6.** Berechne die auf vier Stellen nach dem Komma gerundeten Näherungswerte der Lösungen.

a) $x - \cos x = 0 \wedge x \in \mathbb{R}$ **b)** $\sin x - x^2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+$

c) $x^2(1 + \tan x) = 1 \wedge x \in [0; \frac{1}{2}\pi[$

• **7.** Mit den von einer Schallquelle ausgesandten Wellen wird Energie transportiert. Unter der *Schallintensität* J an einer bestimmten Stelle versteht man die dort auf eine Fläche von $1\,\mathrm{m}^2$ entfallende Schalleistung; die Maßeinheit für J ist also $1\,\mathrm{W}\,\mathrm{m}^{-2}$.
Von einer Schallintensität zu unterscheiden ist die beim Hören empfundene *Lautstärke L*. Eine Verdoppelung der Intensität J empfindet unser Gehör keineswegs als Verdoppelung der Lautstärke L. Auch gibt es einen *Schwellenwert* J_0 der Schallintensität, unterhalb dessen der Schall nicht mehr hörbar ist. Aus dem für Sinnesreize geltenden Weber-Fechnerschen Gesetz* folgt für den Zusammenhang zwischen Schallintensität und Lautstärke die Beziehung $L = k \lg \frac{J}{J_0}$, $k \in \mathbb{R}^+$. Für den Proportionalitätsfaktor k hat man die Zahl 10 festgelegt; also: $L = 10 \lg \frac{J}{J_0}$ phon.
Dabei ist phon keine physikalische Benennung: das Hinweiswort **Phon**** (Kurzzeichen phon) soll nur an die logarithmische Definition der unbenannten Zahl L und an ihre Verwendung in der Akustik erinnern.

a) Wie groß ist die Schallintensität J im Abstand r von der Schallquelle, wenn diese nach allen Seiten gleichmäßig die Leistung P abgibt?

b) Welcher Wert der Lautstärke L entspricht dem Schwellenwert J_0 der Schallintensität?

c) Wie groß ist J, ausgedrückt durch J_0, bei der Lautstärke

1) 10 phon (Ticken einer Taschenuhr in 4 m Abstand)

2) 40 phon (normales Sprechen bei 2 m Abstand)

* Das Weber-Fechnersche Gesetz besagt: Die Empfindungsstärke E eines Reizes ist proportional zum Logarithmus des Quotienten aus der Reizstärke R und der Schwellenreizstärke R_0; d.h., $E = k \cdot \lg \frac{R}{R_0}$.
Ernst Heinrich Weber (24.6.1795 Wittenberg – 26.1.1878 Leipzig) war Physiologe und Anatom.
Gustav Theodor Fechner (19.4.1801 Groß-Särchen bei Muskau/Lausitz – 18.11.1887 Leipzig) war Physiker, Psychologe und Philosoph.

** Das Hinweiswort Phon, vom griechischen φωνή (phonē) = *Laut*, wurde 1926 von dem deutschen Physiker Heinrich Georg Barkhausen (2.12.1881 Bremen – 20.2.1956 Dresden) eingeführt.

3) 80 phon (starker Straßenlärm)
4) 130 phon (Schmerzgrenze, bleibende Gehörschädigung!)?

d) Eine Schallquelle gibt einen bestimmten Ton mit gleichbleibender Leistung ab. In 1 m Entfernung beträgt die Lautstärke 40 phon. Wie weit muß man sich von der Schallquelle entfernen, um den Ton nicht mehr zu hören?

e) Der Lärm eines Flugzeugmotors wird in 400 m Entfernung mit 80 phon gemessen. Wie groß ist die Lautstärke für einen Flugpassagier, der sich beim Einsteigen dem Triebwerk auf 10 m nähert?

f) Die Schwellenintensität J_0 für die Schallwahrnehmung hängt von der Tonfrequenz ab. Im Bereich von 1000 Hz bis 2000 Hz ist sie besonders klein, bei sehr hohen und sehr tiefen Tönen wesentlich größer. Für die Frequenz 1000 Hz gilt $J_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W m^{-2}}$ (mittlerer Wert für Jugendliche!).

1) Welche Lautstärke entspricht bei einem Ton mit 1000 Hz der Schallintensität $J = 8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{W m^{-2}}$?

2) Welche Schallintensitäten ergeben bei einem Ton von 1000 Hz die Lautstärken 1 phon, 20 phon, 100 phon, 130 phon?

3) Ein Lautsprecher strahlt mit der Leistung 5 W einen Ton von 1000 Hz gleichmäßig nach allen Seiten ab. Mit welchen Lautstärken hört man diesen Ton in 5 m, 10 m und 50 m Entfernung?

g) Bei einem Ton von 125 Hz ist die Schwellenintensität $J_0 = 10^{-9}\,\mathrm{W m^{-2}}$. Welche Schallintensitäten gehören bei diesem Ton zu den Lautstärken von Aufgabe **f) 2)**?

•**8.** In der Praxis muß Schall häufig verstärkt bzw. gedämpft werden. Wird z. B. eine Intensität J_1 auf den kleineren Wert J_2 gedämpft, so gibt man als Maß der Dämpfung die Zahl $\beta = 10 \cdot \lg \frac{J_1}{J_2}$ Dezibel an. Das Hinweiswort **Dezibel***, abgekürzt mit dB, bezeichnet keine physikalische Maßeinheit, sondern dient nur zur Erinnerung an die logarithmische Definition der unbenannten Dämpfungszahl β.

a) Wie verhalten sich die Schallintensitäten J_1 und J_2 bei einer Dämpfung von 5 dB?

b) Wieviel Dezibel beträgt die Verstärkung, wenn die Schallintensität
1) verdoppelt **2)** verzehnfacht **3)** verhundertfacht wird?

c) Ein Tonsignal mit der Leistung 0,05 W wird durch einen Verstärker um 20 dB verstärkt. Welche Leistung hat das verstärkte Signal?

d) Um wieviel phon verändert sich die Lautstärke (vgl. Aufgabe **7**), wenn die Schallintensität um n dB verstärkt (gedämpft) wird?

* Die Bezeichnungen Bel (B) und Dezibel (dB) wurden zu Ehren des Ingenieurs Alexander Graham BELL (3.3.1847 Edinburg – 1.8.1922 Baddeck [Kanada]), des Erfinders des elektromagnetischen Telephons, eingeführt. 1 B = 10 dB. Sein *Photophone*, das mittels eines codierten Lichtstrahls die menschliche Stimme (damals bis zu 200 m) übertragen konnte, hielt er schon 1880 für seine größte Errungenschaft. Damit war die *Photonik* geboren.

**7.6 Zur Geschichte der Logarithmen

Im 16. Jh. nahmen die Anforderungen an die Rechengenauigkeit vor allem von seiten der Astronomie immer mehr zu. So mußten insbesondere die von dem dänischen Astronomen Tycho BRAHE (1546–1601) gelieferten Beobachtungsdaten auf Verträglichkeit mit den von der Theorie angebotenen Planetenbahnen überprüft werden. Man suchte daher nach Möglichkeiten, das für große Zahlen sehr zeitaufwendige Multiplizieren und Dividieren durch das schnellere und auch leichtere Addieren bzw. Subtrahieren zu ersetzen, so, wie es zwischen 1505 und 1513 in der Trigonometrie* dem Nürnberger Pfarrer Johannes WERNER (1468–1528) gelungen war.** Diese Prosthaphairesis (προσθαφαίρεσις = Zu-Wegnahme) genannte Methode wurde 1580 von Tycho BRAHE und seinem schlesischen Assistenten Paul WITTICH (1555?–1587) wiederentdeckt. Sie benützten neben der WERNERschen Formel $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$ auch die schon bei IBN YUNIS (†1009 Kairo) vorkommende Formel $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$, deren praktisch-rechnerische Bedeutung IBN YUNIS aber noch nicht erkannt hatte: Man faßt die Ziffernfolge der zwei zu multiplizierenden Zahlen als Ziffernfolge des Kosinus eines Winkels α bzw. β auf, sucht in cos-Tabellen α und β und kann damit die rechte Seite recht einfach berechnen.***

Das Bestreben, bessere Methoden dieser Art zu finden, führt gegen Ende des 16. Jh.s zur Entdeckung der Logarithmen, und zwar durch einen Schweizer Uhrmacher und einen schottischen Baron, die nichts voneinander wußten und die auf keine Vorarbeiten zurückgreifen konnten! Ausgangspunkt der Überlegungen ist das auf Seite 38 beschriebene Korollar zu Satz 11 aus Buch IX der *Elemente* des EUKLID (um 300 v. Chr.), das ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) in seiner *Schrift über die Sandzahl* wesentlich vertiefen konnte (siehe Seite 38). Über die Araber gelangte seine Erkenntnis ebenso wie die von den Indern erfundene Null ins Abendland, so daß Nicolas CHUQUET 1484 in seinem *Triparty* geometrischen Folgen der Bauart $1, a, a^2, a^3, \ldots$ die mit 0 beginnende arithmetische Folge $0, 1, 2, \ldots$ gegenüberstellen kann. Er nennt die Glieder der arithmetischen Folge die *denominacions* der Glieder der geometrischen Folge und zeigt dann die zwischen den Gliedern solcher Doppelfolgen bestehende interessante Beziehung: Man erhält als Produkt zweier Glieder der geometrischen Folge dasjenige Glied dieser Folge, dessen *denominacion* in der arithmetischen Folge die Summe der *denominacions* der beiden Faktoren ist. Wir illustrieren diese Regel an Hand der uns auf der altbabylonischen Keilschrifttafel MLC 2078**** überlieferten

* Das Wort *Trigonometrie* scheint der in der Pfalz als Hofprediger wirkende Schlesier Bartholomaeus PITISCUS (1561–1613) mit dem Titel seines 1595 in Heidelberg erschienenen Werks *Trigonometria sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus* – »Trigonometrie oder eine kurze und klare Abhandlung über die Lösung von Dreiecken« geprägt zu haben. Es ist zusammengesetzt aus τρίγωνον (trígonon) = *Dreieck* und μετρεῖν (metreīn) = *messen*.

** Das Manuskript seiner *Libri quatuor de triangulis sphaericis* wurde erst 1902 wiederaufgefunden und 1907 gedruckt.

*** Auf Grund der Formeln wird der Name Prosthaphairesis verständlich. Er ist zusammengesetzt aus πρόσθεσις (prósthesis) = *Hinzufügung, Addition* und aus ἀφαίρεσις (aphaíresis) = *Wegnahme, Subtraktion*, da α und β einmal addiert und einmal subtrahiert werden. Hierzu ein **Beispiel**:

$2{,}31456\cdot 8{,}00753 = 0{,}231456\cdot 0{,}800753\cdot 10^2 = ?$

$\cos\alpha = 0{,}231456 \Rightarrow \alpha = 76°37'02''$; $\cos\beta = 0{,}800753 \Rightarrow \beta = 36°47'53''$

$\alpha-\beta = 39°49'09'' \Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = 0{,}768068294$; $\alpha+\beta = 113°24'55'' \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = -0{,}397390122$

$\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] = 0{,}185339086$, also $2{,}31456\cdot 8{,}00753 = 18{,}5339086$.

Das exakte Ergebnis lautet 18,5339086368.

**** Morgan Library Collection der Yale University, New Haven (USA) zwei Doppelfolgen. Das zweite Beispiel zeigt, daß die arithmetische Folge keineswegs die Folge der natürlichen Zahlen sein muß; der Anfang $0 \leftrightarrow 1$ fehlt natürlich.

	plus						plus			
1	2	3	4	5	6	arithmetisch	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
2	4	8	16	32	64	geometrisch	2	4	8	16
	mal						mal			

Wozu die Babylonier diese Doppelfolgen gebraucht haben, wissen wir nicht. Aber die Erkenntnis CHUQUETS findet sich wieder bei mehreren deutschen Cossisten der 1. Hälfte des 16. Jh.s. 1544 stellt Michael STIFEL (1487?–1567) in Buch I (fol. 35r) seiner *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – die vier Rechengesetze zusammen, die die Beziehung zwischen diesen Doppelfolgen regeln:*

1. Addition in der arithmetischen Folge entspricht der Multiplikation in der geometrischen Folge.
2. Subtraktion in der arithmetischen Folge entspricht der Division in der geometrischen Folge.
3. Multiplikation in der arithmetischen Folge entspricht einer Potenzierung in der geometrischen Folge.
4. Division in der arithmetischen Folge entspricht dem Radizieren in der geometrischen Folge, das Halbieren also dem Quadratwurzelziehen.

Das sind aber genau die Gesetze des logarithmischen Rechnens, die du in den Sätzen 160.1 bis 161.1 kennengelernt hast. In Buch III nennt STIFEL die Glieder der arithmetischen Folge *Exponenten* (= Ausgesetzte) der Glieder der geometrischen Folge. Und dann folgt die überaus bedeutsame Idee, die arithmetische Folge ins Negative fortzusetzen (vgl. auch Seite 41):

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

STIFEL ist sich der Bedeutung dieses Vorgangs auch bewußt; denn unmittelbar im Anschluß an diese Tabelle schreibt er: »Man könnte jetzt ein ganzes Buch über die wunderbaren Eigenschaften der Zahlen schreiben, aber ich muß mich an dieser Stelle zurückhalten und mit geschlossenen Augen weitergehen.« Er weist aber noch darauf hin, daß die oben aufgestellten Regeln auch für negative Exponenten gelten.

Von unten nach oben gelesen, stellt die obige Tafel in unserer Sprechweise eine Logarithmentafel $x \mapsto \log_2 x$ für $x \in \{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \ldots, 64\}$ dar. Für die im 16. Jh. gesuchte praktische Anwendung war diese Tafel natürlich nicht umfangreich genug. Und selbst wenn man sie nach beiden Seiten fortsetzte, könnten so einfache Rechnungen wie $2 \cdot 5$ oder $3 \cdot 3$ mit ihr gar nicht bewältigt werden, da in der unteren Zeile weder 5 noch 3 vorkommen. Man brauchte also Tafeln mit sehr kleiner Schrittweite.

Es war das Verdienst des aus Coburg stammenden Frankfurter Rechenmeisters Simon JACOB (1510?–1564), in seinem *Ein New und Wolgegründet Rechenbuch, auff den Linien und Ziffern, sampt der Welschen Practic* (1565) die Erkenntnisse STIFELS eingedeutscht und weiterverarbeitet zu haben. Sein Werk kann der des Lateinischen nicht mächtige Schweizer Uhrmacher und Instrumentenbauer Jost BÜRGI (1552–1632) lesen, der sich, vielleicht schon 1588, vielleicht aber erst zwischen 1603 und 1611 an die Arbeit macht,

* Wahrscheinlich erstmals ausgesprochen im *Codex Dresden C80*^{m} um 1499.

eine arithmetisch-geometrische Doppelfolge mit kleiner Schrittweite zu berechnen, nachdem er 1584 durch den Besuch WITTICHS in Kassel die Prosthaphairesis kennengelernt und auch verbessert hat. Vergessen wir nicht, daß zu jener Zeit das Rechnen mit Dezimalbrüchen noch in den Kinderschuhen steckte. Kleine Schrittweiten erzielt BÜRGI nun dadurch, daß er den Zahlenbereich von 10^8 bis 10^9 verwendet; dem Einerschritt dort entspricht im Intervall [1; 10] eine Schrittweite von 10^{-8}. Seiner Rechnung legt BÜRGI die arithmetische Folge 0, 10, 20, …, allgemein $x_n = 10n$, und die geometrische Folge $y_n = 10^8(1+10^{-4})^n$ zugrunde*, deren Glieder sich wegen $y_{n+1} = y_n(1+10^{-4}) = y_n + 10^{-4}y_n$ leicht berechnen lassen: Addiere zu einer Zahl ihren 10000ten Teil, und du hast ihren Nachfolger. BÜRGI macht dies 23000mal, was ihn sicher einige Monate Rechenzeit gekostet hat; nach der Einerstelle schneidet er dabei immer ab.

0	100 000 000 = 10^8
	10 000
10	100 010 000
	10 001
20	100 020 001
	10 002
30	100 030 003
	10 003
40	100 040 006
	10 004
…	… … …
230 000	997 303 557

Schließlich berechnet er noch

230 270,022 1 000 000 000 = 10^9.

1619

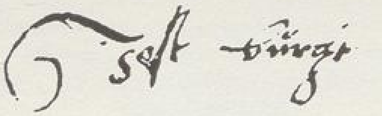


Abb. 197.1 Jost BÜRGI (28.2.1552 Lichtensteig/Schweiz – 31.1.1632 Kassel) Stich von Egidius II SADELER (1570–1629)

Da hier der roten Null nicht die schwarze Eins, sondern die schwarze 10^8 zugeordnet ist, lassen sich die STIFELschen Regeln nicht unmittelbar anwenden. Nach unserem heutigen Verständnis sind aber die rot gedruckten Zahlen die Logarithmen der schwarz gedruckten Zahlen (siehe Anhang Lösungsheft). BÜRGI hat keinen Namen für sie. Er nennt sie »rote Zahlen« und läßt sie auch rot drucken, als er endlich** 1620 seine *Progreß-Tabulen* (siehe Abbildung 198.1) herausbringt. Sie sind eine sog. **Antilogarithmentafel*****; denn zu den ganzzahligen (roten) Log-

* Die Zuordnung $10n \mapsto y_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, kann auch als Zinseszinsformel gedeutet werden mit dem Anfangskapital $y_0 = 10^8$, dem Zinsfuß 10^{-2}% und dem Endkapital y_n nach $10n$ Monaten, wenn alle 10 Monate der Zins zum Kapital geschlagen wird.

** Noch 1627 tadelt Johannes KEPLER (1571–1630) in seinen *Rudolphinischen Tafeln* BÜRGI: »Etsi homo cunctator et secretorum suorum custos foetum in partu destituit, non ad usus publicos educavit.« [Allerdings hat der Zauderer und Geheimniskrämer das neugeborene Kind verkommen lassen, statt es zum allgemeinen Nutzen großzuziehen.]

*** Auch **Antilogarithmus** ist wie Logarithmus eine Wortschöpfung John NAPIERS (1550–1617); er versteht jedoch in seiner *Descriptio* (1614) darunter den Logarithmus des Kosinus eines Winkels. Erst John WALLIS (1616–1703) verwendet es 1693 in seinem *Tractatus de Algebra* im heutigen Sinn: In $y = \log x$ ist y der Logarithmus von x und x ist der Antilogarithmus von y.

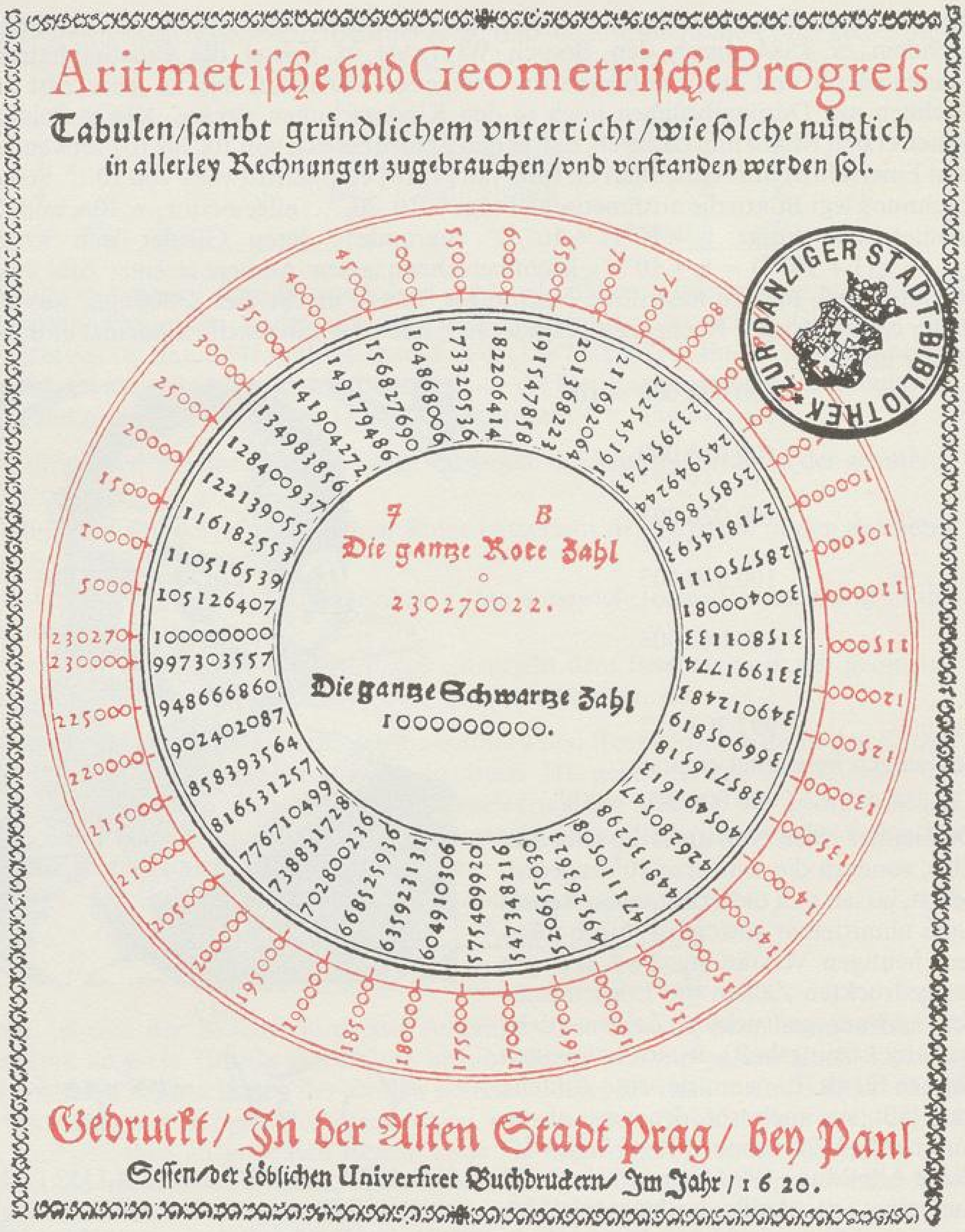


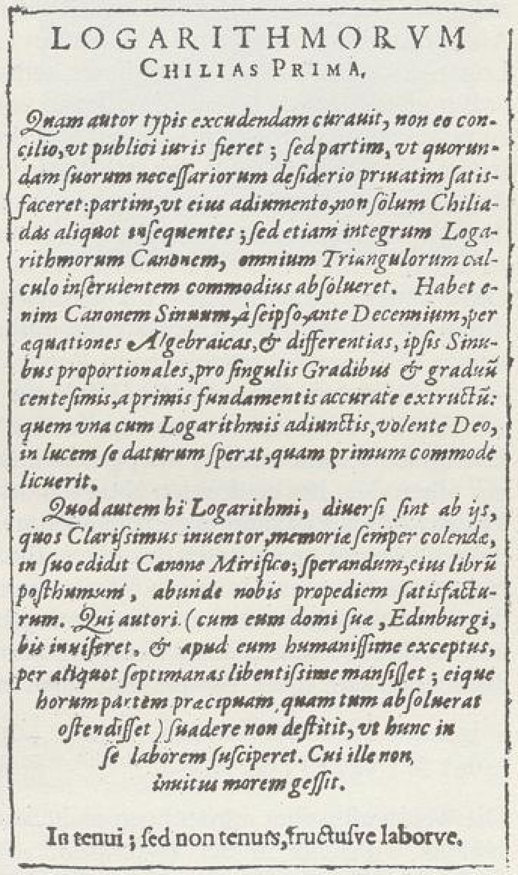
Abb. 198.1 Titelblatt der Logarithmentafel von Jost Bürgi von 1620. Die Initialen J und B stehen für den Verfasser. Die Darstellung enthält zwei Druckfehler: Die neben der roten 5000 stehende schwarze Zahl 105 126 407 muß richtig 105 126 847 heißen. Bei der darunter stehenden schwarzen Zahl 100 000 000 fehlt eine Null; es handelt sich nämlich um »Die gantze Schwartze Zahl« 1 000 000 000. Der kleine rote Kreis über 230 270 022 kennzeichnet die Einerstelle; »Die gantze Rote Zahl« ist also als 230 270,022 zu lesen. – Nur zwei Exemplare sind erhalten geblieben, eines in Danzig und eines in München.

arithmen sind die gerundeten (schwarzen) Numeri angegeben. In einer Logarithmentafel werden dagegen zu den ganzzahligen Numeri die gerundeten Logarithmen angegeben. Der im Titel angekündigte »gründliche Unterricht« fehlt gänzlich, so daß die Tafeln für die wenigen Käufer unverständlich und wertlos blieben.

Die Zeit war aber schon über Bürgi hinweggeschritten. Denn bereits 1614 hatte der schottische Gutsherr und kämpferische Protestant John Napier, auch Neper, (1550–1617), der sich in seinen Mußestunden der Mathematik widmete, seine *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (siehe Abbildung 153) herausgebracht.

1590 hört Napier durch John Craig, der Tycho Brahe auf der Insel Hven besucht hat, von dessen »Erfindung« der Prosthaphairesis. Bereits am 27. März 1592 schreibt dann Craig an Brahe, daß ein Landsmann einen *canon mirificus* konstruiere. Napiers Ziel ist es, die trigonometrischen Rechnungen zu vereinfachen. Seine *Descriptio* ist daher eine Tafel der Logarithmen des Sinus der Winkel zwischen 0° und 90°. Zu seiner Zeit war der Sinus noch nicht das Verhältnis aus Gegenkathete und Hypotenuse, sondern die Länge der Gegenkathete selbst, was auch seinen ursprünglichen indischen Namen erklärt.*

Napier erstellt in langjähriger Arbeit eine komplizierte 7ziffrige arithmetisch-geometrische Doppelfolge, indem er zwei Punkte mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit starten läßt. Der eine bewegt sich ins Unendliche so fort, daß in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurückgelegt werden, der andere auf einer vorgegebenen endlichen Strecke so, daß die jeweils noch zurückzulegenden Wege eine geometrische Folge bilden. Diese Wege sind dann die Numeri, deren »Logarithmen« die auf der Geraden bis zum jeweiligen Zeitpunkt zurückgelegten Strecken sind. Da die Numeri sin-Werte sein sollen, es aber keine geometrische Folge gibt, die mit $0 = \sin 0°$ beginnen kann, konstruiert Napier eine fallende geometrische Folge, die mit sin 90°, dem sinus totus, wie man seit Gerhard von Cremona (1114–1187) den Kreisradius nennt, beginnt. Dem gibt er den Wert 10^7, um – wie Bürgi – zu kleinen Schrittweiten kommen zu kön-


LOGARITHMORVM
CHILIAS PRIMA,

Quam autor typis excudendam curauit, non eo consilio, vt publici iuris fieret; ſed partim, vt quorundam ſuorum neceſſariorum deſiderio priuatim ſatisfaceret: partim, vt eius adiumento, non ſolum Chiliadas aliquot ſuſequentes; ſed etiam integrum Logarithmorum Canonem, omnium Triangulorum calculo inſeruientem commodius abſolueret. Habet enim Canonem Sinuum, à ſeipſo, ante Decennium, per æquationes Algebraicas, & differentias, ipſis Sinubus proportionales, pro ſingulis Gradibus & graduũ centeſimis, a primis fundamentis accurate extructũ: quem vna cum Logarithmis adiunctis, volente Deo, in lucem ſe daturum ſperat, quam primum commode licuerit.

Quod autem hi Logarithmi, diuerſi ſint ab iis, quos Clariſsimus inuentor, memoriæ ſemper colendæ, in ſuo edidit Canone Mirifico; ſperandum, eius librũ poſthumum, abunde nobis propediem ſatisfacturum. Qui autori (cum eum domi ſuæ, Edinburgi, bis inuiſeret, & apud eum humaniſſime exceptus, per aliquot ſeptimanas libentiſsime manſiſſet; eique horum partem præcipuam, quam tum abſoluerat oſtendiſſet) ſuadere non deſtitit, vt hunc in ſe laborem ſuſciperet. Cui ille non inuitus morem geſſit.

In tenui; ſed non tenuis, fructuſve laborve.

Abb. 199.1 Titelblatt von Henry Briggs' *Logarithmorum chilias prima* von 1617**

* Babylonier und Griechen legten ihren trigonometrischen Überlegungen die zu einem Zentriwinkel gehörende Sehne zugrunde. Der indische Astronom Āryabatha I (476 n. Chr. – ?) führte eine Rechnung mit der Halb-Sehne = *ardha-dschyâ* ein. Aus Bequemlichkeit ließ man die Vorsilbe *ardha* bald wieder weg, und aus *dschyâ* wurde allmählich *dschîva*, das die Araber wie *dschiba* aussprachen und, da ihre Schrift keine Vokale kennt, als *dschb* schrieben. Dies wiederum wurde später als das echt arabische Wort *dschaib* gelesen und als Fachwort verwendet; die eigentliche Bedeutung von *dschaib* ist aber *Halsausschnitt eines Kleides, Busen*. Robert von Chester (um 1145) übersetzte *dschaib* durch das bedeutungsgleiche lateinische Wort *sinus*. – Georg Simon Klügel (1739–1812) definierte 1770 in seiner *Analytische*[n] *Geometrie* den Sinus als das heute übliche Verhältnis.

** Übersetzung im Lösungsheft

nen, und ordnet ihm als Logarithmus den Wert 0 zu. Durch Interpolation gestaltet er die Tabelle schließlich so, daß er von Winkelminute zu Winkelminute fortschreiten kann (Aufgabe **2** im Anhang des Lösungshefts).
Edward Wright (1558–1615), Mathematiker und Kartograph in Cambridge, erkennt sofort die Bedeutung der Napierschen Tafeln für die Navigation und übersetzt die *Descriptio* mit dessen Zustimmung in die »englische Volkssprache«. 1616 gibt sie Wrights Sohn Samuel postum, auf 6 Stellen gekürzt und mit einem Vorwort von Henry Briggs (1561–1631)* versehen, heraus.
Voller Begeisterung hat dieser Henry Briggs, Professor für Geometrie in London, noch im Winter 1614/15 seine Studenten den Gebrauch der Logarithmen gelehrt und Napier brieflich vorgeschlagen, dem sinus totus als Logarithmus die Null und dessen 10. Teil als Logarithmus den Wert 10^{10} zuzuordnen. Damit waren die Numeri nicht mehr sin-Werte, sondern natürliche Zahlen; ein wesentlicher Fortschritt für die Praxis! Als er dann im Sommer 1615 Napier in Edinburg besucht und seine neu berechneten Logarithmen mitbringt, meint dieser, selbst schon an eine Änderung gedacht zu haben, daß er aber vorzöge, 0 als Logarithmus von 1 und 10^{10} als Logarithmus des sinus totus zu nehmen. »Ich mußte erkennen, daß dies das weitaus Zweckmäßigste ist [...] Auf seinen Rat hin machte ich mir ernsthafte Gedanken über die Berechnung [dieser neuen Art von Logarithmen] und fuhr im nächsten Sommer wieder nach Edinburg und zeigte ihm die wichtigsten von denen, die ich hier vorlege« schreibt Briggs 1624 im Vorwort zu seiner *Arithmetica logarithmica* (siehe unten).
Diese neuen Logarithmen – wir nennen sie heute die dekadischen – kündigt Napier durch eine in Wrights Übersetzung aufgenommene Passage an. Und im Vorwort zu seinen 1617 postum erschienenen *Rabdologiae, seu numerationis per virgulas libri duo* – »Zwei Bücher über die Rhabdologie oder die Zählkunst durch Stäbchen«** – schreibt er: »Wir haben eine viel bessere Art von Logarithmen gefunden [...], aber überlassen wegen unserer körperlichen Schwäche die tatsächliche Berechnung [...] vor allem dem hochgelehrten Henry Briggs [...], einem mir seit langem sehr teueren Freund.« Das Erscheinen der *Logarithmorum chilias prima*, einer 14stelligen Tafel der dekadischen »Logarithmen des ersten Tausends«, also der Zahlen von 1 bis 1000, erlebt Napier nicht mehr. Das nur 16 Seiten umfassende Werkchen trägt weder den Namen des Autors noch Erscheinungsort und -jahr. Und dennoch können wir aus einem Brief vom 6.12.1617 schließen, daß es von Henry Briggs stammt und vor diesem Datum erschienen sein muß. Beispielhaft seien einige seiner Logarithmen angegeben:

$$\lg 2 = 0{,}3010\ 29995\ 66398 \qquad \lg 3 = 0{,}4771\ 21254\ 71966$$
$$\lg 961 = 2{,}9827\ 23387\ 66854 \qquad \lg 999 = 2{,}9995\ 65488\ 22598$$

Die Welt wußte aber immer noch nicht, wie Logarithmen überhaupt errechnet werden. Napier wünschte in der *Descriptio*, »daß zuerst ihr Gebrauch und ihre Vorteile verstanden würden [...]. Ich will das Urteil und die Kritik der Gelehrten abwarten, ehe der Rest, vorzeitig ans Licht gebracht, der Ablehnung der Neider ausgesetzt wird.« Nachdem aber 1618 Wrights Übersetzung eine zweite, ergänzte Auflage erfahren hat,

* Man findet für Henry Briggs die Daten Februar 1560 Worleywood/Yorkshire bis 26.1.1630 Oxford. Nun war in England seit dem 14. Jh. der Neujahrstag der 25. März. Als man dort 1752 den Julianischen durch den Gregorianischen Kalender ersetzte, entschloß man sich, das Jahr 1752 mit dem 1. Januar beginnen zu lassen. Das Jahr 1751 hatte also nur 281 Tage. Inzwischen hatte sich aber die Datumsdifferenz seit der Einführung des Gregorianischen Kalenders in den katholischen Ländern des Kontinents (1582 bis 1585) von 10 auf 11 Tage erhöht. Diese sparte man dadurch ein, daß auf den 2. September der 14. September 1752 folgte. Die Lebensdaten von Henry Briggs sind gregorianisch also Februar 1561 – 5. Februar 1631, da bis zum 28. Februar 1700 die Datumsdifferenz 10 Tage betrug.

** In ihnen erblickt das Dezimalkomma das Licht der Welt.

entschließt sich 1619 NAPIERS Sohn Robert, die mehrere Jahre vor der *Descriptio* verfaßte *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* herauszugeben, in der es übrigens das erst in der *Descriptio* geprägte Kunstwort Logarithmus noch nicht gibt. Statt seiner heißt es dort *numerus artificialis* [künstliche Zahl]. In einem noch von NAPIER verfaßten Anhang wird auch eine Konstruktion für dekadische Logarithmen erklärt.

Abb. 201.1 Die göttliche *Logarithmica* aus den *Tabulae Rudolphinae* KEPLERS

Die Entwicklung schreitet nun schnell voran. BRIGGS' Kollege Edmund GUNTER (1581–1626), Professor für Astronomie, bringt 1620 mit seinem *Canon triangulorum* eine 7stellige Tafel der dekadischen Logarithmen des Sinus und Tangens* mit der Schrittweite 1′ und erfindet die logarithmische Skala (Seite 174).

Bereits 1617 kann Johannes KEPLER (1571–1630) kurz die *Descriptio* einsehen, lehnt aber die Logarithmen ab. Ihren Wert lernt er 1618 durch den *Cursus Mathematici Practici* (1618) des URSINUS genannten Schlesiers Benjamin BEHR (1587–1633/34), seines früheren Gehilfen, kennen. In ihm ist NAPIERS Werk, um 2 Stellen gekürzt, nachgedruckt. Noch am 1.12.1618 schreibt er: »Die Logarithmen sind das glückbringende Unglück [foelix calamitas] für meine Rudolphinischen Tafeln. Es sieht nämlich so aus, als ob die Tafeln neu zu machen und auf Logarithmen umzustellen oder überhaupt aufzugeben seien.«** Da er die Werte nicht ungeprüft übernehmen will und er hinter das Geheimnis ihrer Berechnung gekommen ist, rechnet er die Tafeln nach und verbessert sie.*** KEPLERS Begeisterung für das Rechnen mit den neuen Logarithmen wird keineswegs von den älteren deutschen Mathematikern geteilt, die vor allem ihre kinematische Erzeugung als unmathematisch ablehnen. Seinen Brief vom 3.12.1618

* Dabei prägt GUNTER das Wort *cosinus* als Abkürzung für *sinus complementi* und analog *cotangens* für *tangens complementi*. *Complementum* ist die lateinische Übersetzung des arabischen *tamām* = *Rest*, womit der Winkel bezeichnet wurde, der einen gegebenen Winkel zu 90° ergänzt.

** 1601 hatte KEPLER von Kaiser RUDOLF II. (1552–1612, Kaiser seit 1576) den Auftrag erhalten, BRAHES astronomische Tafeln zu vollenden. 1616 glaubte er, die mit prosthaphäretischen Methoden durchgeführte Berechnung bald abschließen zu können; da kamen die Logarithmen dazwischen. 1624 war er dann mit der Neuberechnung fertig, konnte aber erst 1627 auf eigene Kosten (!) 1000 Exemplare der *Tabulae Rudolphinae* drucken lassen. Sie lösten wegen ihrer größeren Genauigkeit – ihnen liegen ja auch schon die sog. KEPLERschen Gesetze zugrunde (siehe Aufgabe 84/**10**) – die *Alfonsinischen Tafeln* (siehe Seite 123) ab.

*** NAPIER hat dies wohl erwartet; denn in einigen Exemplaren endet seine *Descriptio* mit *Nihil in ortu perfectum* – »Nichts ist bei Geburt vollkommen«. Erst im Juli 1619 erhält KEPLER ein Exemplar der *Descriptio*. Voller Begeisterung schreibt er am 28.7.1619 an NAPIER – nicht wissend, daß dieser schon seit zwei Jahren tot ist –, spricht auch hier von der foelix calamitas und berichtet, daß er nur kleinere Fehler gefunden habe. Als Widmung stellt er diesen Brief seiner *Ephemeris motuum coelestium ad annum incarnationis verbi MDCXX* – »Jahrbuch der Himmelsbewegungen auf das Jahr der Fleischwerdung des Wortes 1620« – voran. KEPLER war auf seine Verbesserung des NAPIERschen Wertes 6931469 auf 6931472 für den Logarithmus von $\frac{1}{2}\cdot 10^7$ so stolz, daß er den das Frontispiz der *Tabulae Rudolphinae* bildenden Tempel mit der göttlichen *Logarithmica* als Akroterion schmückte, die in ihren Händen zwei Stäbe im Längenverhältnis 1 : 2 hält und deren Gloriole den von ihm gefundenen Wert zeigt.

beantwortet sein alter Lehrer Michael MÄSTLIN (1550–1631) am 2.3.1620: »Ich halte es eines Mathematikers für unwürdig, mit fremden Augen sehen zu wollen und sich auf Beweise zu stützen oder als solche auszugeben, die er nicht verstehen kann.« »Das war für mich der Anlaß, auf der Stelle mit einem ordentlichen Beweis zu beginnen«**, den KEPLER dann bereits am 19.6.1620 an MÄSTLIN schickt. Gegen Ende 1621 ist KEPLER dann entschlossen, die neue Theorie der Logarithmen zusammen mit den verbesserten NAPIERschen Tafeln drucken zu lassen, deren Berechnung er im Winter 1621/22 abschließt. Die Drucklegung verzögert sich jedoch. Da trifft am 1.12.1623, gewissermaßen als Antwort des toten NAPIER auf KEPLERS Widmungsbrief von 1619, der von GUNTER am 22.2.1622 abgesandte *Canon triangulorum* ein – die Wirren des 30jährigen Krieges machen sich wohl schon bemerkbar – und einige Tage später BRIGGS' *Logarithmorum chilias prima*. KEPLER schreibt daraufhin am 4.12.1623 an GUNTER, er überlege, den logarithmischen Teil der *Tabulae Rudolphinae* dekadisch umzugestalten. Als dann jedoch im Februar 1624 seine *Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos* – »Tausend Logarithmen zu ebensoviel runden Zahlen«*** – erscheinen, ändert er nichts mehr, sondern bereitet die Herausgabe des *Supplementum Chiliadis Logarithmorum, continens praecepta de eorum usu* – »Ergänzung zu den tausend Logarithmen mit Unterweisungen für ihren Gebrauch« – vor, die zur Frankfurter Buchmesse im Herbst 1625 vorliegen. Enttäuscht hat aber schon am 20. Februar (a.St.) = 2. März 1625 (n.St.) BRIGGS auf das Erscheinen von KEPLERS *Chilias Logarithmorum* reagiert, der an Stelle GUNTERS KEPLER antwortete: »Ich erkenne den Scharfsinn an und lobe den Fleiß. Hättest Du jedoch auf den Erfinder MERCHISTON [= NAPIER] gehört und

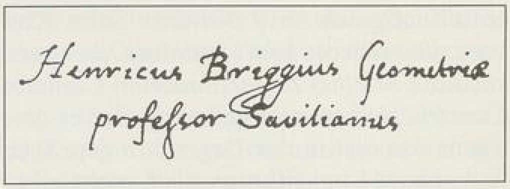
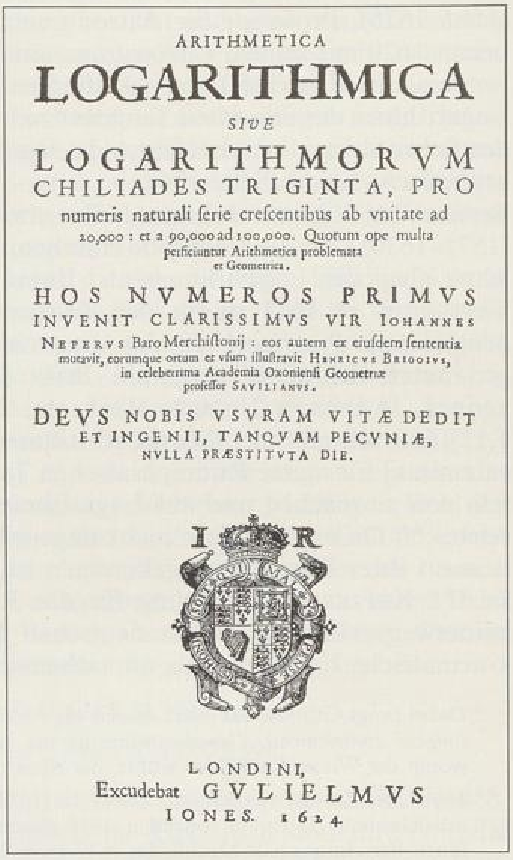


Abb. 202.1 Henry BRIGGS' Unterschrift unter seinen Brief an KEPLER vom 20. Februar (alter Stil) = 2. März (neuer Stil) 1625. – Von BRIGGS ist kein Bildnis überliefert.



ARITHMETICA
LOGARITHMICA
SIVE
LOGARITHMORVM
CHILIADES TRIGINTA, PRO
numeris naturali ſerie creſcentibus ab vnitate ad 20,000 : et a 90,000 ad 100,000. Quorum ope multa perficiuntur Arithmetica problemata et Geometrica.
HOS NVMEROS PRIMVS
INVENIT CLARISSIMVS VIR IOHANNES NEPERVS Baro Merchiſtonij : eos autem ex eiuſdem ſententia mutavit, eorumque ortum et vſum illuſtravit HENRICVS BRIGGIVS, in celeberrima Academia Oxonienſi Geometriæ profeſſor SAVILIANVS.
DEVS NOBIS VSVRAM VITÆ DEDIT ET INGENII, TANQVAM PECVNIÆ, NVLLA PRÆSTITVTA DIE.
I R
LONDINI,
Excudebat GVLIELMVS IONES. 1624.

Abb. 202.2 Titelblatt von Henry BRIGGS' *Arithmetica logarithmica*, 1624*

* Übersetzung im Lösungsheft

** Vorwort zu KEPLERS *Supplementum Chiliadis Logarithmorum* (1625). Dem Beweis liegt die Proportionenlehre EUKLIDS (*Elemente*, Buch V) zugrunde.

*** In diesem Werk erklärt KEPLER »LOGARITHMUS, das ist die Zahl (ἀριθμός), die das Verhältnis (λόγον) anzeigt, das jene Zahl, der der Logarithmus zugeordnet ist, zu 1000 hat.«

wärest mir gefolgt, dann hättest Du meiner Meinung nach denen, die am Gebrauch der Logarithmen ihre Freude haben, einen besseren Dienst erwiesen.«

Beigefügt hat BRIGGS diesem Brief seine Ende 1624 erschienene *Arithmetica logarithmica, sive logarithmorum chiliades triginta, pro numeris naturali serie crescentibus ab unitate ad 20000 et a 90000 ad 100000*, einen Folioband von fast 400 Seiten. In ihr sind als Ergebnis ungebrochenen Fleißes und ungeheuerer Arbeit die neuen dekadischen Logarithmen von 30000 Zahlen, auf 14 Stellen berechnet, enthalten, und zwar von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000.* Da das Werk diesmal unter seinem Namen erschien, heißen die dekadischen Logarithmen auch **Briggssche Logarithmen**. Sie verdrängen in wenigen Jahren wegen ihrer guten Anwendbarkeit die NAPIERschen bzw. KEPLERschen Logarithmen** und heißen im Gegensatz zu diesen und anderen auch **gewöhnliche Logarithmen**.

Theoretisch hält BRIGGS noch an der Vorstellung einer arithmetisch-geometrischen Doppelfolge fest, aus der heraus er auch glaubt, NAPIERS Wortschöpfung »Logarithmus« erklären zu können. In Anlehnung an NAPIER*** bezeichnet er selbst die Logarithmen zunächst als *numerorum proportionalium comites aequidifferentes*, d.h. als »gleiche Differenz habende Begleiter von Zahlen, die in konstantem Verhältnis zueinander stehen«, und fährt dann fort:

> »*Qui ideo videntur a clarissimo Inventore Logarithmi nominati, quia numeros nobis exhibent eandem inter se servantes rationem.*«
> »Die deswegen, so scheint es, von ihrem hochberühmten Erfinder Logarithmen genannt wurden, weil sie uns Zahlen liefern, die untereinander dasselbe Verhältnis bewahren.«

Praktisch hat BRIGGS aber völlig neue Wege zur Berechnung der dekadischen Logarithmen beschritten. Wir begnügen uns damit, den Anfang eines angewandten Verfahrens zu skizzieren.

Ausgehend von

$$\sqrt{10} = 10^{0,5} = 3{,}1622\ 77660\ 16837\ 93319\ 98893\ 54$$

hat er sofort

$$\lg 3{,}1622\ 77660\ 16837\ 93319\ 98893\ 54 = 0{,}5.$$

Dann errechnet er über

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt[2^2]{10} = \sqrt{\sqrt{10}} = 10^{0,25} = 1{,}7782\ 79410\ 03892\ 28011\ 97304\ 13,$$

gewinnt also

$$\lg 1{,}7782\ 79410\ 03892\ 28011\ 97304\ 13 = 0{,}25.$$

Nun fährt er so fort und erhält schließlich, nachdem er insgesamt 54mal die Quadratwurzel gezogen hat,

$$\sqrt[2^{54}]{10} = 10^{2^{-54}} = 1{,}0000\ 00000\ 00000\ 01278\ 19149\ 32003\ 235, \quad \text{also}$$

$$\lg 1{,}0000\ 00000\ 00000\ 01278\ 19149\ 32003\ 235 =$$
$$= 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 05551\ 11512\ 31257\ 82702\ 11815.$$

* Man findet in der Literatur eine weitere Ausgabe aus demselben Jahr beschrieben, die auch noch die Logarithmen der Zahlen von 100000 bis 101000 enthält.

** Wegen der Bedeutung der *Tabulae Rudolphinae* blieben sie in der Astronomie noch bis ins 18. Jh. am Leben.

*** *Descriptio*, Satz 1: Proportionalium numerorum, aut quantitatum, aequi-differentes sunt Logarithmi. [Die Logarithmen proportionaler Zahlen oder Größen haben gleiche Differenz.]

Bei dieser Vorstellung des enormen Rechenaufwands wollen wir es belassen.

Natürlich muß die Lücke zwischen 20000 und 90000 schnellstmöglich geschlossen werden. BRIGGS bietet dazu in seinem Vorwort jedem Interessierten an, das von ihm »zu diesem Zweck beschaffte und durch gerade Linien in Felder eingeteilte Papier zuzusenden«. Im Vorwort der in der 1. Fußnote auf Seite 203 erwähnten weiteren Ausgabe schreibt er überdies, daß er ernsthaft vorhabe, selbst die Lücke zu schließen, wenn er »seine durch anhaltende Anstrengung des Geistes und unausgesetztes Wachen geschwächten Kräfte wieder gestärkt hätte«.

Der rührige holländische Mathematiker und Buchhändler Adriaan VLACQ (um 1600–1667) wittert in den Tafeln mit Recht ein großes Geschäft. Er gewinnt den holländischen Rechenmeister und Landmesser Ezechiel DE DECKER (1603/04 bis 1646/47) für seinen Plan, den Wettlauf mit der Zeit aufzunehmen, weil er »überzeugt ist«, daß der 66jährige BRIGGS »ob seiner sonstigen amtlichen Verpflichtungen, ganz zu schweigen von den Beschwerlichkeiten, denen alle Menschen ausgesetzt sind« nicht in der Lage sein würde, die Arbeit bald abschließen zu können (Vorwort der *Arithmetica logarithmica* von 1628, siehe unten). Da VLACQ außerdem erkennt, daß 10 Stellen »für den allgemeinen Gebrauch mehr als genug sind«, läßt er DE DECKER, für den er NAPIERS *Descriptio* übersetzt, im Oktober 1626 die *Nieuwe tel-konst* – »Neue Zählkunst« – herausbringen; sie enthält die auf 10 Stellen gekürzten BRIGGSschen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 und GUNTERS logarithmische trigonometrische Tafeln und kündigt die Fortsetzung an. Der Entschluß, die Lücke zwischen 20000 und 90000 nur 10stellig zu schließen, bringt einen erheblichen Zeitgewinn. Bereits im Oktober 1627 kann daher DE DECKER den *Tweede deel van de nieuwe tel-konst* – »Zweiter Teil der neuen Zählkunst« – herausgeben. Neben einer von ihm verfaßten Einleitung enthält sie die dekadischen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000, die größtenteils von VLACQ berechnet worden waren.*

Da sich VLACQ bewußt wurde, daß nur eine lateinische Ausgabe Erfolg haben wird, verbindet er 1628 diese Tafeln mit dem nur wenig veränderten Text von BRIGGS' *Arithmetica logarithmica*, fügt die von ihm mit der Schrittweite 1′ neu berechneten Logarithmen der trigonometrischen Funktionen hinzu und deklariert, ohne jede Erwähnung DE DECKERS, das Ganze als 2., vermehrte Auflage von BRIGGS' *Arithmetica logarithmica*. Sie wird ein großer Erfolg und trägt zur raschen Verbreitung der dekadischen Logarithmen bei. BRIGGS ist sicher nicht sehr erfreut. Doch hören wir ihn hierzu selbst in einem Brief an den jungen Mathematiker John PELL (1611–1685) vom 25.10.1628 (Übersetzung im Lösungsheft):

> »My desire was to have those chiliades that are wantinge betwixt 20 and 90 calculated and printed, and I had done them all almost by my selfe, and by some frendes whom my rules had sufficiently informed, and by agreement the busines was conveniently parted amongst us; but I am eased of that charge and care by one Adrian Vlacque, an Hollander, who hathe done all the whole hundred chiliades and printed them in Latin, Dutche and Frenche, 1000 bookes in these 3 languages, and hathe sould them almost all. But he hathe cutt off 4 of my figures throughout; and hathe left out my dedication, and to the reader, and two chapters the 12 and 13, in the rest he hath not varied from me at all.«

Die VLACQsche Tafel ist die Mutter aller weiteren Logarithmentafeln. Sie enthält im ganzen nur 600 Fehler, davon nur 171 in den ersten 7 Stellen!

Am Ende seiner *Arithmetica logarithmica* hat BRIGGS angekündigt, er hoffe, in einem weiteren Buch »die edelste, mit der Lehre von den sphärischen Dreiecken in innigster

* Das Werk geriet völlig in Vergessenheit. Erst 1920 wurde ein Exemplar gefunden.

Verbindung stehende Anwendung der Logarithmen« zeigen zu können. Er greift dazu auf seine um 1600 berechneten 15stelligen trigonometrischen Tafeln zurück und berechnet deren Logarithmen, für den Sinus auf 14, für den Tangens auf 10 Stellen. Dabei entscheidet er sich für eine dezimale Winkelunterteilung! Als Schrittweite wählt er $\frac{1}{100}°$. Auf BRIGGS' Bitten hin läßt VLACQ das Tafelwerk samt Konstruktionsanleitung auf seine Kosten drucken; währenddessen stirbt BRIGGS. Die noch fehlende Anwendung auf die ebene und sphärische Trigonometrie verfaßt, von BRIGGS noch gebeten und von VLACQ schließlich gedrängt, 1632 – das Vorwort trägt das Datum des 30. Oktober – BRIGGS' Freund Henry GELLIBRAND (1597–1637), Professor für Astronomie. VLACQ bringt beide Teile 1633 unter dem Titel *Trigonometria Britannica* in Gouda heraus. Nun hat VLACQ selbst aber schon vor drei Jahren eine 10stellige Logarithmentafel der trigonometrischen Funktionen mit einer Schrittweite von nur 10″ berechnet, was bei der Interpolation eine gerade in der Astronomie benötigte größere Genauigkeit liefert. Da VLACQ außerdem erwartet, daß die dezimale Unterteilung des Grades auf Ablehnung stoßen wird, entschließt er sich, obwohl er BRIGGS' Dezimalteilung begrüßt hat, seine eigenen Tafeln, zusammen mit GELLIBRANDS kaum verändertem Text, noch im selben Jahr, also 1633 – die Widmung trägt das Datum des 26. April – unter dem Titel *Trigonometria artificialis* ebenfalls in Gouda erscheinen zu lassen. Vielleicht hätte sich ohne VLACQS Buch BRIGGS' dezimale Winkelteilung durchgesetzt!

In den bisher aufgeführten Werken wird das Rechnen mit den Logarithmen an Beispielen vorgeführt. Es ist das Verdienst von William OUGHTRED (1574–1660), dem Erfinder des Rechenstabs (1621), in seinem 1647 erschienenen *The Key of the mathematicks, new forged and filed* die unseren Sätzen 160.1 bis 161.1 entsprechenden Rechenregeln kurz und präzise formuliert zu haben.* OUGHTRED wird im übrigen für den Verfasser des anonymen *Appendix* gehalten, der der 2. Auflage von WRIGHTS Übersetzung der *Descriptio* 1618 angefügt wurde und in dem eine neue Methode zur Berechnung der Logarithmen vorgeführt wird, die BRIGGS 1624 auch in seiner *Arithmetica logarithmica* verwendet.

Erhebliche Fortschritte machte die Berechnung der Logarithmen, als man lernte, unendliche Reihen hierfür einzusetzen. Das können wir hier aber nicht mehr darstellen.

Sicher ist dir aufgefallen, daß das Wort **Basis** in diesem historischen Überblick überhaupt noch nicht gefallen ist. Es muß uns heute wirklich erstaunen, daß das bereits von Michael STIFEL (1487?–1567) in seiner *Arithmetica integra* 1544 behandelte Problem, zu vorgegebener Basis b und vorgegebenem Potenzwert a den Wert des Exponenten x zu suchen, der die Gleichung $b^x = a$ löst (Aufgabe 67/**8**), nicht zur Einführung des Logarithmus als Lösung dieser Gleichung führte. Erst langsam gewinnt eine solche Vorstellung an Boden. So schreibt zwar David GREGORY (1661–1710) schon 1684 in seiner *Exercitatio geometrica de dimensione figurarum* »Exponentes sunt ut logarithmi« [Exponenten sind wie Logarithmen] und 1742 William GARDINER (?–?) in seinen *Tables of Logarithms* »The common Logarithm of a number is the Index of that power of 10, which is equal to the number: That is, The Logarithm of any number $a = \overline{10}|^{+x}$, or $\overline{10}|^{-x}$, is $+x$, or $-x$.« Es ist aber Leonhard EULER (1707–1783) vorbehalten, 1748 in seiner *Introductio in Analysin Infinitorum* – »Einleitung in die Analysis des Unendlichen« – diese grundlegend neue Sicht des

* The Summe of two Logarithmes, is the Logarithme of the Product of their Valors: and their difference is the Logarithme of the Quotient. The Logarithme of the Side, drawne into the *Index* or number of Dimensions of any *Potestas*, is the Logarithme of the same *Postestas*. The Logarithme of any *Potestas* divided by the number of its Dimensions, sheweth the Logarithme of its Root.

Logarithmusbegriffs begründet zu haben. In Nr. 101 betrachtet er in der Gleichung $y = a^z$ die Werte a und z als gegeben, behandelt also das übliche Potenzieren. Dann heißt es aber in Nr. 102:

> »Ebenso aber, wie bei gegebenem Werte von a zu jedem Wert von z der entsprechende Wert von y gefunden werden kann, läßt sich auch umgekehrt zu jedem gegebenen positiven Wert von y der Wert von z angeben, für welchen $a^z = y$ ist. Dieser Wert von z heißt, insofern er als Funktion von y betrachtet wird, der *Logarithmus* von y. Es setzt daher die Lehre von den Logarithmen die Annahme einer bestimmten konstanten Zahl a voraus, welche deshalb die *Basis* der Logarithmen genannt wird.«*

Diese uns heute so einsichtige Definition des Logarithmus als Exponent setzte sich in Deutschland erst gegen die Mitte des 19. Jh.s durch, da man sie für Anfänger für viel zu schwierig erachtete. In Frankreich hielten bedeutende Mathematiker noch zu Beginn dieses Jahrhunderts an der Definition des Logarithmus durch die arithmetisch-geometrische Doppelfolge fest.
Heute ist durch die billig gewordenen Taschenrechner die Verwendung der Logarithmen beim praktischen Rechnen fast völlig verschwunden. Wir sollten aber nicht übersehen, daß viele Berechnungen, die der Taschenrechner ausführt, nach einem Programm auf logarithmischer Grundlage ablaufen. Wenn wir uns auch mit vollem Recht die Vorteile der modernen Technik zunutze machen, um »die Rechenarbeit zu verringern, die Kräfte des angespannten Verstandes zu schonen und Zeit zu gewinnen«**, wie KEPLER schon als einen der Zwecke der *Tabulae Rudolphinae* erklärte, so sollten wir doch daran denken, daß es nicht nur »für einen Professor der Mathematik schimpflich ist, sich über irgendeine Abkürzung des Rechnens kindisch zu freuen«***, wenn man deren Grundlage nicht verstanden hat.

* Quemadmodum autem dato numero a ex quovis valoris ipsius z reperiri potest valor ipsius y, ita vicissim dato valore quocunque affirmativo ipsius y conveniens dabitur valor ipsius z, ut sit $a^z = y$; iste autem valor ipsius z, quatenus tanquam functio ipsius y spectatur, vocari solet *Logarithmus* ipsius y. Supponit ergo doctrina logarithmorum numerum certum constantem loco a substituendum, qui propterea vocatur *basis* logarithmorum.

** minuere laborem computandi, parcere viribus intentae mentis, et redimere tempus

*** »turpe esse Professori Mathematico, super compendio aliquo calculi pueriliter exultare«, lautet der von KEPLER im Vorwort seines *Supplementum Chiliadis Logarithmorum* (1625) wiedergegebene Vorwurf der älteren deutschen Mathematiker, er habe sich für das logarithmische Rechnen ohne soliden Beweis begeistert.