# Algebra

**Barth, Friedrich**

**München, 2000**

6.3 Arithmetische Folgen und Reihen

Inhalt $A_i$? Welchen Wert hat die Summe $S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$? Welcher Zahl kommt $S_n$ mit wachsendem $n$ beliebig nahe? Wie kann man dieses Ergebnis einfacher gewinnen?

**d)** Löse die Teilaufgaben **a)**, **b)** und **c)** für folgende Halbkreisradien:
**1)** $r_i = (\frac{3}{4})^{i-1}$ **2)** $r_i = 0{,}9^{i-1}$ **3)** $r_i = 0{,}99^{i-1}$

• **25.** Zu der reinperiodischen Dezimalzahl $z = 0{,}\overline{37}$ erhält man eine Folge von Näherungsbrüchen, wenn man nach der 1., 2., 3., ... Periode abbricht: $z_1 = 0{,}37$; $z_2 = 0{,}3737$; $z_3 = 0{,}373737$; ... Die verschiedenen Werte, welche die Periode 37 jeweils darstellt, kann man durch folgende Schreibweise für die Näherungsbrüche verdeutlichen:

$z_1 = 37 \cdot 10^{-2}$, $z_2 = 37 \cdot 10^{-2} + 37 \cdot 10^{-4}$,
$z_3 = 37 \cdot 10^{-2} + 37 \cdot 10^{-4} + 37 \cdot 10^{-6}$, usw.

**a)** Wie lautet allgemein diese Summendarstellung für den Näherungswert $z_n$ ($n \geqq 2$)? Begründe, daß es sich dabei um eine endliche geometrische Reihe handelt.

**b)** Welche Darstellung für $z_n$ erhält man mit Hilfe von Satz 137.1? Welcher rationalen Zahl $y$ kommt somit $z_n$ beliebig nahe, wenn man $n$ unbeschränkt wachsen läßt?
Zeige an Hand der Dezimalentwicklung von $y$, daß $y = z$ gilt.

**c)** Bestimme nach dem in **a)** und **b)** am Beispiel $0{,}\overline{37}$ gezeigten Verfahren die Bruchschreibweise für
**1)** $0{,}\overline{7}$ **2)** $0{,}\overline{06}$ **3)** $0{,}\overline{481}$ **4)** $0{,}\overline{4321}$.

**26.** Stelle die folgenden unendlichen Dezimalzahlen als gewöhnliche Brüche dar (vgl. Aufgabe **25**):
**a)** $3{,}\overline{15}$ **b)** $0{,}0\overline{6}$ **c)** $0{,}5\overline{18}$ **d)** $10{,}70\overline{185}$

## **6.3 Arithmetische Folgen und Reihen

Einen besonders einfachen Typ einer Zahlenfolge erhält man, wenn man bei einer linearen Funktion die Definitionsmenge auf $\mathbb{N}$ einschränkt.

**Beispiele:**

**1)** $f\colon x \mapsto 3x - 1$ ergibt die Zahlenfolge
$a_1 = 2$; $a_2 = 5$; $a_3 = 8$; $a_4 = 11$; ...; also $a_n = 3n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

**2)** $f\colon x \mapsto -1{,}5x + 3$ ergibt die Zahlenfolge
$a_1 = 1{,}5$; $a_2 = 0$; $a_3 = -1{,}5$; $a_4 = -3$; ...; also $a_n = -1{,}5n + 3$, $n \in \mathbb{N}$.

Als typisches Merkmal dieser Folgen erkennt man die Eigenschaft, daß die Differenz aufeinanderfolgender Glieder konstant ist; es handelt sich bei ihr jeweils um den Koeffizienten von $x$ in der entsprechenden linearen Funktion.

Bezeichnen wir wie üblich das Anfangsglied der Folge mit $a$ und die Differenz mit $d$, so gilt
$a_1 = a, \quad a_2 = a + d, \quad a_3 = a_2 + d = a + 2d, \quad a_4 = a_3 + d = a + 3d, \ldots,$
allgemein also $a_n = a + (n-1)d,\ n \in \mathbb{N}$.
Für drei aufeinanderfolgende Glieder einer solchen Folge ergibt sich (vgl. Aufgabe 145/**2**):

$$a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1} \quad \text{und damit} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}.$$

Das mittlere von drei aufeinanderfolgenden Gliedern ist damit das arithmetische Mittel der Nachbarglieder. Das erklärt den für solche Zahlenfolgen verwendeten Namen:

> **Definition 144.1:** Eine Zahlenfolge mit dem Bildungsgesetz $a_n = a + (n-1)d,\ n \in \mathbb{N}$, heißt **arithmetische Folge** mit dem **Anfangsglied** $a$ und der **Differenz** $d$.

Bei vielen Anwendungen benötigt man die Summe aus den ersten $n$ Gliedern einer arithmetischen Folge. Dazu gilt

> **Definition 144.2:**
> Die Summe $a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+(n-1)d)$
> heißt **arithmetische Reihe**, der mit $s_n$ bezeichnete Summenwert heißt **Wert der arithmetischen Reihe**.

Für die Berechnung von $s_n$ läßt sich leicht eine Summenformel herleiten:

Aus $s_n = a + (a+d) + \ldots + (a+(n-2)d) + (a+(n-1)d)$
und $s_n = (a+(n-1)d) + (a+(n-2)d) + \ldots + (a+d) + a$

folgt durch Addition dieser Gleichungen, bei der wir jeweils die beiden untereinanderstehenden Summanden zusammenfassen, die Beziehung

$$2s_n = (2a+(n-1)d) + (2a+(n-1)d) + \ldots + (2a+(n-1)d),$$

also $2s_n = (2a+(n-1)d) \cdot n$,

d.h., $s_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$.

Da der zweite Faktor als die Summe $a_1 + a_n$ gedeutet werden kann, gilt auch $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

> **Satz 144.1:** Die arithmetische Reihe $a + (a+d) + \ldots + (a+(n-1)d)$ hat den Wert $s_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

**Beispiele:**

**3)** Bei der arithmetischen Folge mit $a = 2$ und $d = 3$ (Beispiel **1)**) gilt

$a_{10} = 2 + 9 \cdot 3 = 29$, $\quad a_{500} = 2 + 499 \cdot 3 = 1499$,

$s_{10} = \frac{10}{2}(2 + 29) = 155$, $\quad s_{500} = \frac{500}{2}(2 + 1499) = 375250$.

**4)** Bei der arithmetischen Folge mit $a = 1{,}5$ und $d = -1{,}5$ (Beispiel **2)**) gilt

$a_{20} = 1{,}5 + 19 \cdot (-1{,}5) = -27$, $\quad s_3 = \frac{3}{2}(2 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot (-1{,}5)) = 0$,

$s_{30} = \frac{30}{2}(2 \cdot 1{,}5 + 29 \cdot (-1{,}5)) = -607{,}5$.

**Aufgaben**

**1.** Gib für die arithmetische Folge mit Anfangsglied $a$ und Differenz $d$ die ersten vier Glieder an und berechne $a_{20}$:

**a)** $a = 0$; $d = 2$ **b)** $a = 10$; $d = -1$ **c)** $a = -16$; $d = 2{,}5$

**2.** Beweise, daß bei einer arithmetischen Folge für je drei aufeinanderfolgende Glieder die Beziehung $a_{n+1} = (a_n + a_{n+2}) : 2$ gilt.

**3.** Berechne für die Zahlenfolgen von Aufgabe **1** die Summen $s_{20}$ und $s_{100}$.

**4.** Bestimme Anfangsglied und Differenz der arithmetischen Folge aus

**a)** $a_2 = 5$; $a_3 = -1$ **b)** $a_4 = 1{,}6$; $a_7 = 4$ **c)** $a_5 = -\frac{5}{12}$; $a_{20} = 3\frac{1}{3}$.

**5.** Zwischen 25 und 64 sollen

**a)** zwei Zahlen **b)** vier Zahlen **c)** zwölf Zahlen

so eingefügt werden, daß eine arithmetische Folge entsteht.

**6.** Berechne Anfangsglied $a$ und Differenz $d$ der arithmetischen Folge mit

**a)** $a_2 = 5{,}5$; $s_4 = 25$ **b)** $a_3 = 4$; $s_5 = 20$ (!)

**c)** $a_5 = 5$; $s_5 = 0$ **d)** $s_3 = 13{,}5$; $s_{15} = -67{,}5$.

**7.** Aufgabe 64 aus dem *Papyrus Rhind* (um 1800 v. Chr. entstanden): 100 Scheffel Gerste werden so an 10 Leute verteilt, daß der jeweils nächste $\frac{1}{8}$ Scheffel mehr erhält als sein Vorgänger. Wieviel erhält jeder?

• **8.** Eine der frühesten Aufgaben über arithmetische Folgen findet man auf der altbabylonischen Keilschrifttafel SKT 362 (um 1900 v. Chr.):
10 Brüder; $1\frac{2}{3}$ Minen Silber. Bruder über Bruder hat sich erhoben. Um was er sich erhoben hat, weiß ich nicht. Der Anteil des achten Bruders ist 6 Schekel. Bruder über Bruder, um wieviel hat er sich erhoben?
Berechne den Anteil des ersten Bruders und den konstanten Unterschied zum jeweils nächsten. [60 Schekel = 1 Mine = 0,505 kg]

**9.** Aufgabe 40 aus dem *Papyrus Rhind* (um 1800 v. Chr. entstanden) läßt zwei Deutungen zu:
100 Brote werden in arithmetischer Folge so an 5 Leute verteilt, daß
**a)** die beiden ersten zusammen $\frac{1}{7}$ dessen erhalten, was die drei letzten zusammen erhalten.
**b)** die beiden letzten zusammen $\frac{1}{7}$ dessen erhalten, was die drei ersten zusammen erhalten.
Wie groß ist der Unterschied vom einen zum anderen, und wie wurden die Brote verteilt?

**10.** Sind folgende Merkregeln für die Berechnung des Wertes $s_n$ einer arithmetischen Reihe richtig?
**a)** »halbe Anzahl der Glieder mal (erstes Glied plus letztes Glied)«
**b)** »$n$-mal erstes Glied plus $n(n-1)$-mal halbe Differenz«

**11.** Achte bei den folgenden Aufgaben darauf, ob die Lösung eindeutig ist.
**a)** Eine arithmetische Reihe mit Anfangsglied $-3$ und Differenz 2 hat den Wert 60. Wie groß ist die Anzahl $n$ ihrer Summanden?
**b)** Bestimme $n \in \mathbb{N}$ so, daß bei einer arithmetischen Folge mit $a = -6$ und $d = 1{,}5$ die Summe $s_n$ den Wert $-10{,}5$ erhält.
**c)** Bei einer arithmetischen Reihe mit dem Wert 28,8 heißt der erste Summand 9 und der sechste 3. Wieviel Summanden hat die Reihe?

**12. a)** Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) bestimmte schon als Neunjähriger zur Überraschung seines Lehrers J. G. BÜTTNER in kürzester Zeit den Summenwert einer arithmetischen Reihe.* Es soll sich um $s_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$ gehandelt haben, was GAUSS als das Produkt $50 \cdot 101$ berechnet habe. Begründe sein Vorgehen.
**b)** Berechne die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis $10^4$.
**c)** Wie groß ist die Summe aller höchstens dreistelligen Vielfachen von 7?

**13. a)** Berechne die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$.
**b)** Bestimme den Wert der Summe $S_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n}{n}$; $n \in \mathbb{N}$.
**c)** Berechne $T_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$. Wie verhält sich $T_n$ mit wachsendem $n$?
**d)** Berechne $U_n = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \ldots + \frac{2n-1}{n^2}$; $n \in \mathbb{N}$.

* Wolfgang SARTORIUS FREIHERR VON WALTERSHAUSEN (1809–1876) zeichnete viele Gespräche mit GAUSS, zum Teil wörtlich, auf und gab sie 1856 unter dem Titel *Gauß zum Gedächtnis* heraus. Darin berichtet er, daß GAUSS dieses Ereignis »uns in seinem hohen Alter mit großer Freude und Lebhaftigkeit öfter erzählt hat.« Und daß, als BÜTTNER schließlich die Ergebnisse prüfte, »das seinige zum Staunen aller Anwesenden als richtig befunden, während viele der übrigen falsch waren«. – Getauft wurde GAUSS übrigens auf *Johann Friderich Carl*; so trug er sich auch noch, nur mit anderer Schreibweise des mittleren Namens, am 18. 2. 1792 in die Matrikel des Collegium Carolinum zu Braunschweig ein.

**14.** In einem Stapel von Rohren liegen in der untersten Schicht 12 Rohre, in der obersten 5 Rohre. Aus wieviel Rohren besteht der ganze Stapel, wenn die Rohre wie üblich »auf Lücke« übereinandergeschichtet sind? Wieviel Rohre könnte man noch auf den Stapel legen, ohne die Basis zu verbreitern?

**15.** Eine trapezförmige Dachfläche soll mit Ziegeln gedeckt werden. Für die erste Reihe benötigt man 64, für die letzte 30 Dachziegel. Es sind 18 Reihen. Wieviel Paletten zu je 100 Ziegeln wird man bestellen, wenn man 5% Verlust durch Bruch einkalkuliert?

**16.** Aus der *Stereometrica* des HERON von Alexandria (um 62 n.Chr.):

**a)** Aufgabe 43: In einem Theater mit 250 Sitzreihen enthält die unterste 40 Sitze, jede höhere jeweils 5 Sitze mehr. Wieviel Sitze enthält die oberste Reihe?

**b)** Die Aufgabe 42 »In einem Theater mit 280 Sitzreihen hat die unterste 120, die oberste 480 Sitze. Wieviel Sitze hat das Theater insgesamt?« löst HERON durch folgende Rechnung:

$\frac{480+120}{2} \cdot 280 = 8400$. Nimm dazu kritisch Stellung.

**17.** Wenn ein dünnes Maßband auf einen Zylinder aufgerollt ist, kann man die einzelnen Windungen mit guter Näherung als Kreise betrachten.

**a)** Wieviel mm beträgt der Durchmesser einer Trommel, auf die ein Maßband von $\frac{1}{4}$ mm Dicke und 2 m Länge aufgerollt wird, wenn sich dabei 16 Windungen ergeben?

**b)** Ein 20 m langes Maßband, das 0,5 mm dick ist, wird auf eine Achse von 20 mm Durchmesser aufgewickelt. Wie viele Windungen ergibt das?

## 6.4 Aus der Finanzmathematik

Wichtige Anwendungen von geometrischen Folgen und Reihen ergeben sich in der Finanzmathematik:

### a) Zinseszinsrechnung

Ein Kapital $K_0$, das zu einem Zinssatz von $p$% angelegt wird, bringt im ersten Jahr den Zins $Z_1 = \frac{K_0}{100} \cdot p$. Am Ende des ersten Jahres ist somit das Kapital $K_1 = K_0 + Z_1 = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ vorhanden. Die Verzinsung mit $p$% bewirkt also, daß das anfangs vorhandene Kapital sich im Laufe eines Jahres mit dem Faktor $1 + \frac{p}{100}$ multipliziert; man nennt ihn **Zinsfaktor**.