Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

4 Potenzfunktionen

4 Potenzfunktionen

Titelblatt der *Margarita philosophica* – »Philosophische Perle« – des Kartäuserpriors Gregor REISCH (1470?–1525) aus dem Jahre 1503

4 Potenzfunktionen

4.1 Definition

In den ersten drei Kapiteln haben wir den Potenzbegriff so erweitert, daß wir die Potenz b^{ϱ} für jede positive Basis b und jede reelle Zahl ϱ als Exponenten bilden können. Stellen wir uns vor, daß entweder die Basis oder der Exponent variabel ist, dann entsteht jeweils ein Funktionsterm. Ist die Basis variabel, dann spricht man von einer Potenzfunktion, ist der Exponent variabel, dann nennt man die zugehörige Funktion Exponentialfunktion. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den Potenzfunktionen.

Definition 78.1: Die Funktion $x \mapsto x^{\varrho}$ mit $\varrho \in \mathbb{R}$ und maximaler Definitionsmenge heißt **Potenzfunktion**.

Bemerkung: Die maximale Definitionsmenge hängt von ϱ ab:

a) Ist ϱ eine natürliche Zahl n, dann ist $D_{\max} = \mathbb{R}$. Die Funktion $x \mapsto x^n$, $D = \mathbb{R}$ heißt auch **Potenzfunktion *n*-ter Ordnung**, ihr Graph wurde früher auch Parabel n-ter Ordnung genannt.*

b) Ist ϱ null oder eine negative ganze Zahl, dann ist $D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph der Funktion $x \mapsto x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wurde früher auch Hyperbel n-ter Ordnung genannt.* Heute verwendet man das Wort Hyperbel nur noch für $n = 1$. Es handelt sich dabei um den Spezialfall der gleichseitigen Hyperbel, der uns schon als Graph der indirekten Proportionalität bekannt ist.

c) Ist ϱ keine ganze Zahl, dann ist $D_{\max} = \mathbb{R}_0^+$, falls $\varrho > 0$, und $D_{\max} = \mathbb{R}^+$, falls $\varrho < 0$.

In Tabellenform zusammengefaßt:

$\varrho \in$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}_0^-$	$\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}$
$D_{\max} =$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^+$

Mit einer Wertetabelle kann man sich einen ersten Eindruck vom Verlauf des Graphen verschaffen. Man erkennt, daß es verschiedene Typen von Graphen gibt.

1) $\varrho \in \mathbb{N}$ und ϱ gerade

z. B. $f_2(x) = x^2$

$f_4(x) = x^4$

$f_6(x) = x^6$

...

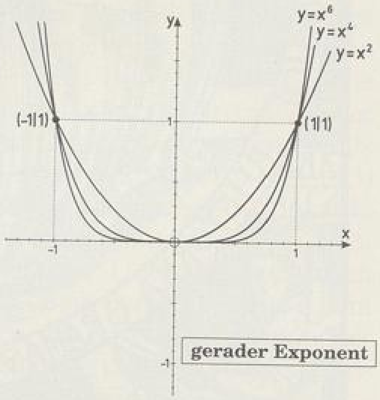

Abb. 78.1 Die Graphen der Potenzfunktionen mit geraden natürlichen Exponenten

* **Parabel** nennt Pierre DE FERMAT (1601–1665) spätestens 1636 jede Kurve $y^n = kx^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$, also unsere Typen **1**, **2** und **5**. Im Druck erschien diese Verallgemeinerung wohl erstmals 1644 in den *Cogitata*

Alle Graphen liegen (bis auf den Punkt (0|0)) im 1. und 2. Quadranten und enthalten die Punkte (0|0), (1|1) und (−1|1).
Im Bereich $]-1;1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x-Achse, je größer der Exponent ist.
Im Bereich $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ist es umgekehrt (Abbildung 78.1).
Ersetzt man x durch $-x$, dann ändert sich wegen

$$f_{2k}(-x)=f_{2k}(x), \quad k\in\mathbb{N},$$

der Funktionsterm, also auch der Graph, nicht; der Graph ist symmetrisch zur y-Achse. Siehe Abbildung 79.1.

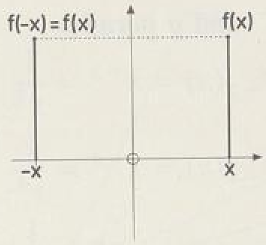

Abb. 79.1 Achsensymmetrie der Graphen der Potenzfunktionen mit geraden natürlichen Exponenten

2) $\varrho\in\mathbb{N}$ und ϱ ungerade

z. B. $f_1(x)=x^1$

$f_3(x)=x^3$

$f_5(x)=x^5$

...

Alle Graphen liegen (bis auf den Punkt (0|0)) im 1. und 3. Quadranten und enthalten die Punkte (0|0), (1|1) und (−1|−1).
Im Bereich $]-1;1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x-Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ist es umgekehrt (Abbildung 79.2).
Ersetzt man x durch $-x$, dann ändert wegen

$$f_{2k-1}(-x)=-f_{2k-1}(x), \quad k\in\mathbb{N},$$

der Funktionsterm sein Vorzeichen, also ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung (0|0). Siehe Abbildung 79.3.

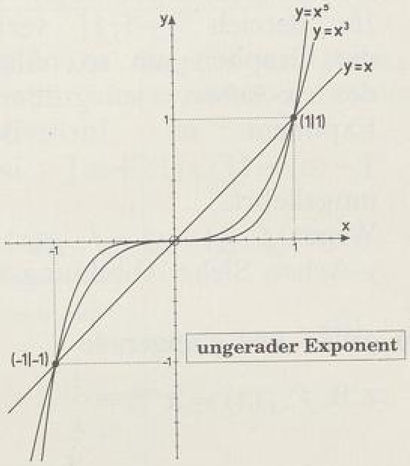

Abb. 79.2 Die Graphen der Potenzfunktionen mit ungeraden natürlichen Exponenten

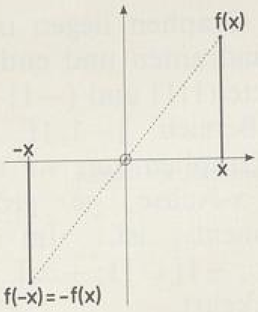

Abb. 79.3 Punktsymmetrie der Graphen der Potenzfunktionen mit ungeraden natürlichen Exponenten

physicomathematica von Marin MERSENNE (1588–1648), der dort einen über ihn für Bonaventura CAVALIERI (1598?–1647) bestimmten, aber nicht angekommenen Brief FERMATS von 1642 im wesentlichen wörtlich abdruckt. Als 1643 Evangelista TORRICELLI (1608–1647) von den französischen Arbeiten erfährt, bricht er seine Studien der Parabeln ab und wendet sich den Kurven $x^m y^n = k$ zu, die er **allgemeine Hyperbel** nennt

3) $\varrho \in \mathbb{Z}^-$ und ϱ gerade

z. B. $f_{-2}(x) = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$

$$f_{-4}(x) = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

$$f_{-6}(x) = x^{-6} = \frac{1}{x^6}$$

...

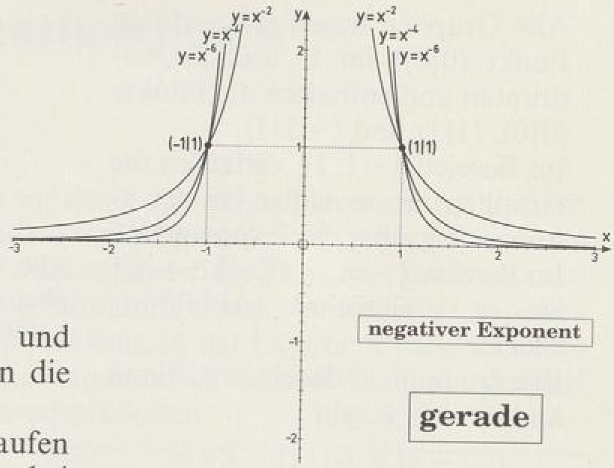

Abb. 80.1 Die Graphen der Potenzfunktionen mit geraden negativen Exponenten

Alle Graphen liegen im 1. und 2. Quadranten und enthalten die Punkte $(1|1)$ und $(-1|1)$.
Im Bereich $]-1; 1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x-Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich $]-\infty; -1[\,\cup\,]1; +\infty[$ ist es umgekehrt.
Wegen $f_{-2k}(-x) = f_{-2k}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, sind die Graphen symmetrisch zur y-Achse. Siehe Abbildung 80.1.

4) $\varrho \in \mathbb{Z}^-$ und ϱ ungerade

z. B. $f_{-1}(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

$$f_{-3}(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$f_{-5}(x) = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

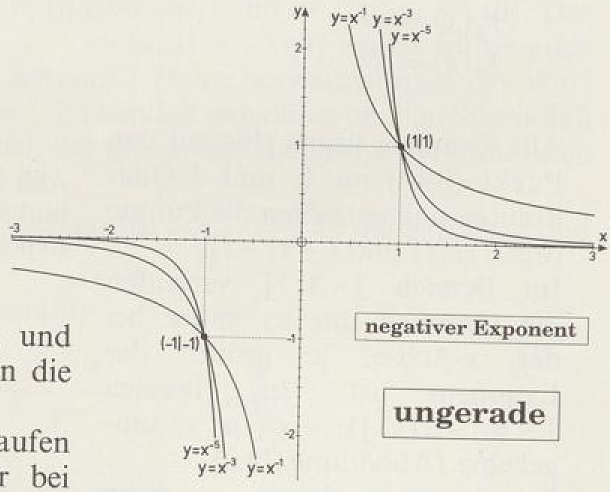

Abb. 80.2 Die Graphen der Potenzfunktionen mit ungeraden negativen Exponenten

Alle Graphen liegen im 1. und 3. Quadranten und enthalten die Punkte $(1|1)$ und $(-1|-1)$.
Im Bereich $]-1; 1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x-Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich $]-\infty; -1[\,\cup\,]1; +\infty[$ ist es umgekehrt.
Wegen $f_{-(2k-1)}(-x) = -f_{-(2k-1)}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, sind die Graphen punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$. Siehe Abbildung 80.2.

(Typen **3**, **4** und **6**). 1646 informiert er in mehreren Briefen Cavalieri, Fermat, Mersenne und Carcavy (um 1600–1684). John Wallis (1616–1703), der 1657 gestand, den Namen Fermat noch nie gehört zu haben, nennt 1655 in seinem *De sectionibus conicis, nova methodo expositis, tractatus* die Typen **1** und **2** *Paraboloides* (= Parabelartige), **3** und **4** *Hyperboloides*. **5** und **6** behandelt er 1655 in seiner *Arithmetica infinitorum*.

5) $\varrho \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$

z.B. $f_{\frac{1}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$f_{\frac{3}{2}}(x) = x^{\frac{3}{2}}$

$f_{\frac{1}{3}}(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$f_{\frac{2}{3}}(x) = x^{\frac{2}{3}}$

...

Alle Graphen liegen (bis auf den Punkt (0|0)) im 1. Quadranten und enthalten die Punkte (0|0) und (1|1).
Im Bereich $]0;1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x-Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich $]1;+\infty[$ ist es umgekehrt (Abbildung 81.1).

Der Graph mit der Funktionsgleichung $y = x^{\frac{m}{n}}$ ist bezüglich der Geraden $y = x$ symmetrisch zu dem Graphen mit der Funktionsgleichung $y = x^{\frac{n}{m}}$ (Abbildung 81.2).

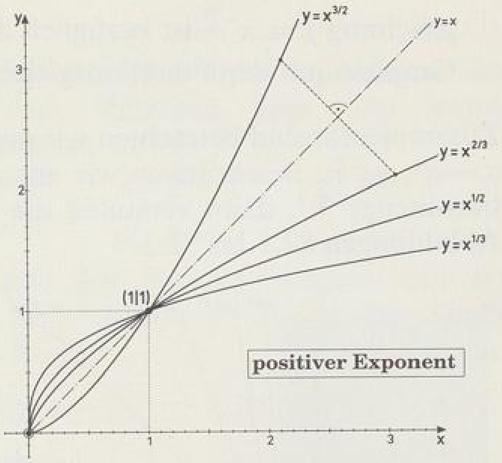

Abb. 81.1 Die Graphen der Potenzfunktionen mit positiven rationalen Exponenten

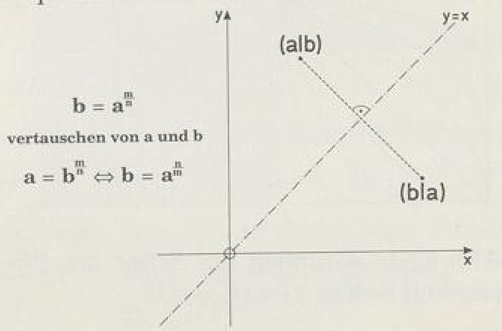

Abb. 81.2 Symmetrie des Graphen mit der Gleichung $y = x^{\frac{m}{n}}$ zum Graphen mit der Gleichung $y = x^{\frac{n}{m}}$ bezüglich der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten

6) $\varrho \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}$

z.B. $f_{-\frac{1}{2}}(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

$f_{-\frac{3}{2}}(x) = x^{-\frac{3}{2}}$

$f_{-\frac{1}{3}}(x) = x^{-\frac{1}{3}}$

$f_{-\frac{2}{3}}(x) = x^{-\frac{2}{3}}$

Alle Graphen liegen im 1. Quadranten und enthalten den Punkt (1|1).
Im Bereich $]0;1[$ verlaufen die Graphen um so näher bei der x-Achse, je größer der Exponent ist. Im Bereich $]1;+\infty[$ ist es umgekehrt (Abbildung 81.3).
Der Graph mit der Funktions-

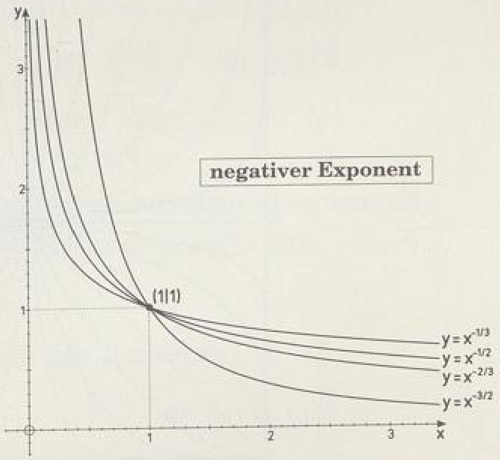

Abb. 81.3 Die Graphen der Potenzfunktionen mit negativen rationalen Exponenten

gleichung $y = x^{-\frac{m}{n}}$ ist bezüglich der Geraden $y = x$ symmetrisch zu dem Graphen mit der Funktionsgleichung $y = x^{-\frac{n}{m}}$.

Zusammenfassend betrachten wir nun noch die Schar der Potenzfunktionen $x \mapsto x^{\varrho}$, $\varrho \in \mathbb{R}$. Beschränken wir uns auf ihre maximale gemeinsame Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$, dann verlaufen die Graphen alle im 1. Quadranten. Siehe Abbildungen 82.1 bis 82.3.

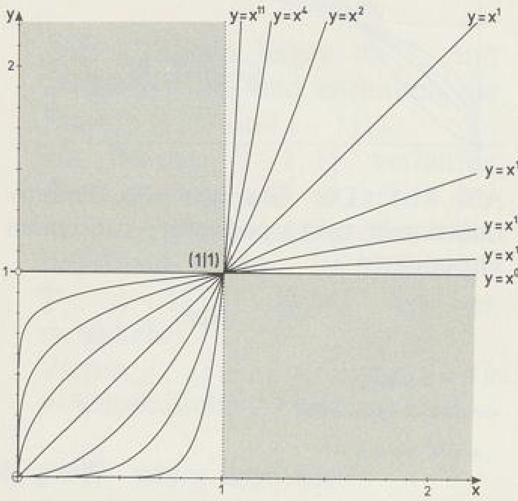

Abb. 82.1 Graphen der Schar der Potenzfunktionen $x \mapsto x^{\varrho}$, $\varrho > 0$

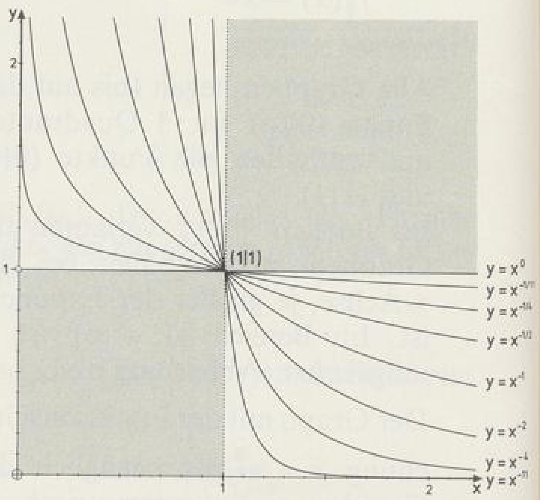

Abb. 82.2 Graphen der Schar der Potenzfunktionen $x \mapsto x^{\varrho}$, $\varrho < 0$

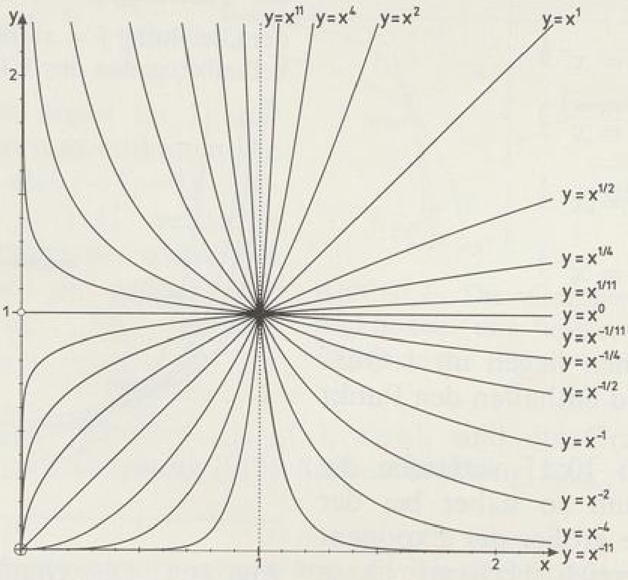

Abb. 82.3 Graphen der Schar der Potenzfunktionen $x \mapsto x^{\varrho}$, $\varrho \in \mathbb{R}$

Aufgaben

1. Zeichne mit Hilfe einer Wertetabelle den Teil des Graphen mit der folgenden Gleichung, der in dem Rechteck liegt, das durch $-2 \leqq x \leqq 2 \wedge -9 \leqq y \leqq 17$ bestimmt ist.

a) $y = x^0$ **b)** $y = x$ **c)** $y = x^2$ **d)*** $y = x^3$ **e)** $y = x^4$
f) $y = x^{-1}$ **g)** $y = x^{-2}$ **h)** $y = x^{-3}$ **i)** $y = x^{-4}$

2. Zeichne mit Hilfe einer Wertetabelle den Teil des Graphen mit der folgenden Gleichung, der in dem Rechteck liegt, das durch $0 \leqq x \leqq 10 \wedge 0 \leqq y \leqq 27$ bestimmt ist.

a) $y = x^{\frac{1}{2}}$ **b)** $y = x^{\frac{1}{3}}$ **c)** $y = x^{\frac{2}{3}}$ **d)** $y = x^{\frac{3}{2}}$
e) $y = x^{-\frac{1}{2}}$ **f)** $y = x^{-\frac{1}{3}}$ **g)** $y = x^{-\frac{2}{3}}$ **h)** $y = x^{-\frac{3}{2}}$

3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Graphen der Schar der Potenzfunktionen und der Graphik auf dem Buchdeckel?

4. Für welche Exponenten ϱ geht der Graph von $x \mapsto x^\varrho$ durch den Punkt
a) $(2|8)$ **b)** $(2|-8)$ **c)** $(-2|8)$ **d)** $(-2|-8)$?

5. Für welche Exponenten ϱ geht der Graph von $x \mapsto x^\varrho$ durch den Punkt
a) $(2|16)$ **b)** $(3|81)$ **c)** $(0{,}5|0{,}25)$ **d)** $(4|2)$ **e)** $(64|4)$ **f)** $(2|0{,}25)$?

6. Für welche Exponenten ϱ geht der Graph von $x \mapsto x^\varrho$ durch den Punkt
a) $(1|1)$ **b)** $(-1|1)$ **c)** $(1|-1)$ **d)** $(-1|-1)$ **e)** $(0|0)$
f) $(0|1)$ **g)** $(1|0)$ **h)** $(1|2)$ **i)** $(2|1)$?

7. a) Bestimme mit dem Taschenrechner die auf Hundertstel gerundeten Werte von $x^{\frac{3}{4}}$ für $x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, 5, 6$ und zeichne damit den Graphen der Funktion $x \mapsto x^{\frac{3}{4}}$.

b) Bestimme mit Hilfe dieses Graphen Näherungswerte für
1) $0{,}7^{\frac{3}{4}}$ **2)** $1{,}4^{\frac{3}{4}}$ **3)** $2{,}6^{\frac{3}{4}}$ **4)** $3{,}1^{\frac{3}{4}}$ **5)** $3{,}25^{\frac{3}{4}}$.

c) Für welche Werte von x nimmt $x^{\frac{3}{4}}$ den Wert
1) $\frac{1}{2}$ **2)** 1 **3)** 2 **4)** 3 **5)** 3,5
an? Lies entsprechende Näherungswerte aus dem Graphen ab.

d) Bestimme mit Hilfe des Graphen Näherungswerte für
1) $0{,}5^{\frac{4}{3}}$ **2)** $2{,}5^{\frac{4}{3}}$ **3)** $3{,}75^{\frac{4}{3}}$.

8. Zeichne für $x \in [-5; 5]$ den Graphen der Relation
a) $y = x^{\frac{1}{2}}$ **b)** $y = |x|^{\frac{1}{2}}$ **c)** $|y| = x^{\frac{1}{2}}$ **d)** $|y| = |x|^{\frac{1}{2}}$.

* Dieser Graph heißt **kubische Parabel.** *Parabola cubica* nannte ihn z. B. 1642 Pierre DE FERMAT (1601–1665) im Brief an Bonaventura CAVALIERI (1598?–1647), abgedruckt 1644 in den *Cogitata* des Marin MERSENNE (1588–1648). Bei John WALLIS (1616–1703), der ihn zu entdecken glaubte, heißt er *Paraboloides cubicale* (*De sectionibus conicis*, 1655). Siehe auch Fußnote auf Seite 78.

9. a) Zeichne den Graphen mit der Gleichung $|y| = x^{\frac{3}{2}}$. John Wallis (1616–1703) nannte ihn 1659 **semikubische Parabel***, Isaac Newton (1643–1727) spätestens seit 1693 auch **Neilsche Parabel** zu Ehren von William Neil (1637–1670)**.

b) Zeichne den Graphen mit der Gleichung $y = |x|^{\frac{2}{3}}$. Auch er ist eine Neilsche Parabel. Wie entsteht er aus dem Graphen der Aufgabe **a)**?

10. Johannes Kepler (1571–1630) veröffentlichte 1619 im 3. Kapitel des letzten Buches seiner *Harmonices mundi libri V* – »Fünf Bücher über die Harmonie der Welt« – seine heute als 3. Keplersches Gesetz bezeichnete Entdeckung: »Das Verhältnis der Umlaufzeiten zweier Planeten ist das anderthalbfache Verhältnis der Bahnradien.«***

a) Zeige, daß die moderne Formulierung »Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der Bahnradien« dasselbe besagt.

b) Gib die Umlaufzeit T als Funktion des Bahnradius r an. Welche Kurve ist ihr Graph? Wie verändert sich die Umlaufzeit bei Verdopplung (Verdreifachung, Vervierfachung) des Bahnradius?

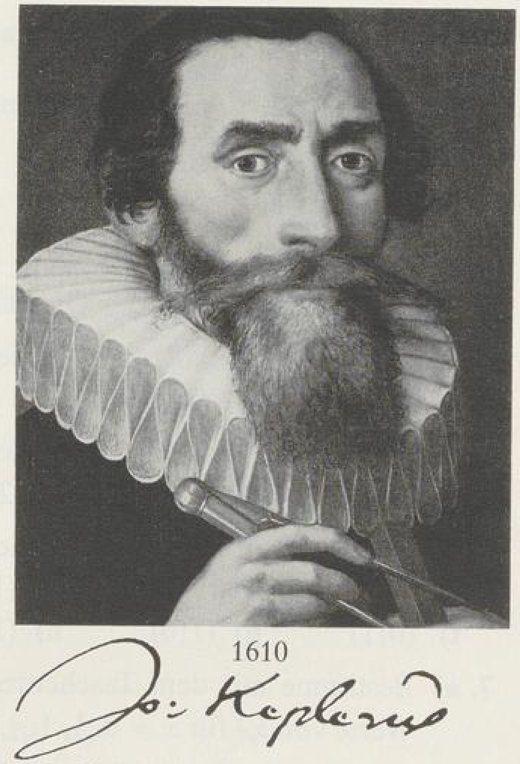

Abb. 84.1 Johannes Kepler (27.12.1571 Weil der Stadt – 15.11.1630 Regensburg)

* semi (lat.) = halb. – curva paraboloidis semicubicalis bei Wallis, der sehr stolz ist, den parabelartigen Charakter erkannt zu haben; parabola semicubica bei Newton (*Enumeratio linearum tertii ordinis* 1704).

** gesprochen ni:l, geschrieben auch Neile (7.12.1637 Bishopsthorpe – 25.8.1670 Berkshire). Allgemein nennt man jeden Graphen mit einer Gleichung $y^2 = ax^3$ bzw. $y^3 = ax^2$ eine Neilsche Parabel. – 1659 veröffentlichte Frans van Schooten (um 1615–1660) in der zweiten lateinischen Ausgabe der *Géométrie* von René Descartes (1596–1650) einen an ihn gerichteten Brief des Niederländers Hendrik van Heuraet (1633–1660?) vom 13.1.1659 unter dem Titel *De transmutatione curvarum linearum in rectas* – »Über die Verwandlung gekrümmter Linien in Gerade« –, in dem er eine allgemeine Methode bewies, mit der man die Länge eines beliebigen Stücks einer gekrümmten Kurve berechnen konnte, und die er auch an der semikubischen Parabel vorführte. Christiaan Huygens (1629–1695) teilte diese Entdeckung am 9.6.1659 John Wallis (1616–1703) mit. Dieser antwortete am 4.12.1659 in einem Brief, den er als den letzten der *Tractatus duo. Prior de Cycloide* [...]. *Posterior, Epistolaris; in qua agitur de Cissoide* [...] 1659 publizierte. Darin teilte er mit, daß und wie William Neil bereits 1657 die Länge der semikubischen Parabel berechnet hat. Das Verfahren Heuraets ist im Gegensatz zum Neilschen auch auf andere Kurven anwendbar. Bis 1897 glaubte man, William Neil gebühre die Ehre, als erster die Länge einer vom Kreis verschiedenen gekrümmten Kurve berechnet zu haben. Tatsächlich gelang dies aber Evangelista Torricelli (1608–1647) bei der logarithmischen Spirale, wie er Februar 1645 Pierre de Carcavy (um 1600–1684) mitteilte. Descartes war 1637 noch der Meinung, daß dies »nie von Menschen« geleistet werden könne!

*** Abweichend von der Erkenntnis Keplers werden hier mit guter Näherung die Umlaufbahnen der Planeten als Kreise um die Sonne aufgefaßt. – Zur Bedeutung des Wortes Verhältnis siehe Seite 62.

11. Druck p und Volumen V einer abgeschlossenen Gasmenge von konstanter Temperatur genügen dem Boyle-Mariotteschen Gesetz* $pV = c$. Stelle p als Funktion von V dar und zeichne den Graphen für $c = 3\,\text{bar} \cdot \text{m}^3$.

12. Das Delische Problem der Würfelverdopplung (Vgl. Aufgabe 46/**7**.)**
MENAICHMOS (Mitte 4. Jh. v. Chr.) löste das Problem nicht nur durch den Schnitt zweier Parabeln, sondern auch durch den Schnitt der Parabel $ay = x^2$ mit der gleichseitigen Hyperbel $xy = ab$. Bei dieser Gelegenheit entdeckte er übrigens erst Parabel und Hyperbel.

a) Leite aus der Bedingung des HIPPOKRATES $a : x = x : y = y : b$ (siehe Aufgabe 46/**7.b)**) die beiden Gleichungen her und berechne die beiden mittleren Proportionalen als Koordinaten des Schnittpunkts.

b) Zeichne für $a = 1$ und $b = 2$ die beiden Graphen und bestimme damit einen Näherungswert für $\sqrt[3]{2}$. (Einheit 5 cm)

:13. Zeichne den Graphen mit der Gleichung $y = x^{\frac{2}{3}}$ im Bereich $0 \leqq x \leqq 9$. Erzeuge aus ihm die Graphen mit der Gleichung

a) $y = x^{\frac{2}{3}} + 3$ **b)** $y = 2x^{\frac{2}{3}}$ **c)** $y = 2x^{\frac{2}{3}} + 3$

d) $y = (x-4)^{\frac{2}{3}}$ **e)** $y = 2(x-4)^{\frac{2}{3}} + 3$ **f)** $y = -3(x+2)^{\frac{2}{3}} + 1$

•14. Zeichne die Graphen der Funktionen $x \mapsto x^{-\frac{1}{3}}$ und $x \mapsto x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$ (Einheit 4 cm). Was kannst du daraus über die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$ schließen? Bestimme graphisch einen möglichst guten Näherungswert. Verbessere ihn mit dem Taschenrechner zu der auf Tausendstel genauen Lösung.

15. Löse wie in Aufgabe **14** die Gleichungen

a) $x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{2}} - 2$ (Einheit 8 cm) **b)** $x^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2} + x^{\frac{3}{2}}$ (Einheit 8 cm)

c) $x^{-\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} - 1$ (Einheit 2 cm). Gib auch die exakte Lösung an.

4.2 Die Monotoniegesetze

Ein Blick auf die Graphen der Potenzfunktionen läßt vermuten, daß für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt:

Die Graphen steigen echt monoton, wenn der Exponent positiv ist, die Graphen fallen echt monoton, wenn der Exponent negativ ist.

* Das Gesetz geht auf Messungen zurück, deren Werte Sir Robert BOYLE (1627–1691), ein englischer Physiker und Chemiker, 1661 veröffentlichte. Unabhängig von BOYLE führte Edme MARIOTTE (1620–1684), ein französischer Geistlicher und Physiker, seine Experimente aus und veröffentlichte seine Erkenntnisse als Gesetz im Jahre 1676 in seinem *Discours de la Nature de l'Air*.

** Das Problem hat immer wieder zur Lösung herausgefordert, so auch Giacomo CASANOVA (1725–1798), der seine *Solution du Problème deliaque* 1790 auf eigene Kosten in Dresden drucken ließ.

Die anschaulichen Begriffe »steigt echt monoton« und »fällt echt monoton« werden präzisiert durch

Definition 86.1: Die Funktion $f: x \mapsto f(x)$ heißt **echt monoton zunehmend in M**, wenn für alle $a, b \in M \subset D_f$ gilt: $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
Der Graph G_f **steigt** dann **echt monoton**.
Die Funktion $f: x \mapsto f(x)$ heißt **echt monoton abnehmend in M**, wenn für alle $a, b \in M \subset D_f$ gilt: $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.
Der Graph G_f **fällt** dann **echt monoton**.

Den **Beweis** der obigen Vermutung beginnen wir mit Satz 44.1. Er besagt:
$0 \leqq a < b \Leftrightarrow 0 \leqq a^n < b^n \quad$ für $n \in \mathbb{N}$.

Ersetzen wir a durch $a^{\frac{1}{n}}$ und b durch $b^{\frac{1}{n}}$, dann erhalten wir

$0 \leqq a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow 0 \leqq \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n < \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n$, d.h.,

$0 \leqq a < b \Leftrightarrow 0 \leqq a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$.

Ersetzen wir in dieser Zeile a durch a^m und b durch b^m mit $m \in \mathbb{N}$, dann ergibt sich

$0 \leqq a^m < b^m \Leftrightarrow 0 \leqq (a^m)^{\frac{1}{n}} < (b^m)^{\frac{1}{n}}$.

Das bedeutet

$0 \leqq a < b \Leftrightarrow 0 \leqq a^m < b^m \Leftrightarrow 0 \leqq a^{\frac{m}{n}} < b^{\frac{m}{n}}$.

Damit ist gezeigt, daß die Graphen der Potenzfunktionen für $x \in \mathbb{R}^+$ und positive rationale Exponenten echt monoton steigen.
Da sich jede positive reelle Zahl ϱ beliebig genau durch eine positive rationale Zahl $\frac{m}{n}$ annähern läßt, ist es plausibel, daß die Behauptung über die Monotonie der Potenzfunktionen sogar für positive reelle Exponenten gilt. Auf den Beweis müssen wir hier aber verzichten.
Ist schließlich ϱ negativ, dann ist $(-\varrho)$ positiv, und wir können nach dem eben Gezeigten schreiben:

$$\begin{aligned} 0 < a < b \Leftrightarrow 0 < a^{-\varrho} < b^{-\varrho} &\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a^\varrho} < \frac{1}{b^\varrho} \quad \Big\| \cdot a^\varrho b^\varrho \\ &\Leftrightarrow 0 < b^\varrho < a^\varrho. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wir haben den Fall $a = 0$ weggelassen, weil für $\varrho < 0$ der Term 0^ϱ nicht definiert ist.

Wir fassen zusammen zu

Satz 87.1: Das erste Monotoniegesetz für Potenzen

Für $\varrho > 0$ gilt: $0 \leqq a < b \Leftrightarrow 0 \leqq a^\varrho < b^\varrho$

Für $\varrho < 0$ gilt: $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < b^\varrho < a^\varrho$

Dieser Satz kann auch als Satz über das Monotonieverhalten der Potenzfunktionen formuliert werden:

Satz 87.2: Für $x \in \mathbb{R}^+$ ist die Potenzfunktion $x \mapsto x^\varrho$
echt monoton zunehmend, wenn der Exponent ϱ positiv ist,
echt monoton abnehmend, wenn der Exponent ϱ negativ ist.

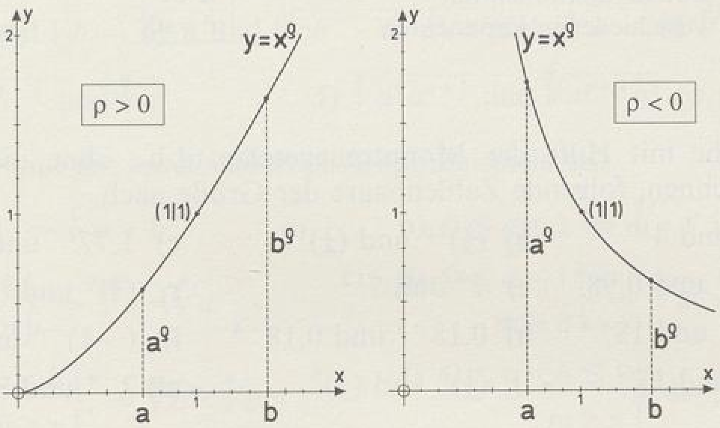

Abb. 87.1 Monotonieverhalten der Potenzfunktionen in Abhängigkeit vom Vorzeichen des Exponenten

Das erste Monotoniegesetz gibt Auskunft über das Monotonieverhalten *einer* Potenzfunktion $x \mapsto x^\varrho$. Beim Vergleich der Graphen *zweier* Potenzfunktionen $x \mapsto x^\varrho$ und $x \mapsto x^\sigma$ haben wir weiter oben festgestellt, daß für $0 < x < 1$ der Graph der Funktion mit dem größeren Exponenten näher bei der x-Achse läuft; für $x > 1$ ist es umgekehrt.
Jetzt können wir diese Beobachtung durch einen Beweis untermauern:

Ist $\varrho < \sigma$, dann ist $\sigma - \varrho > 0$, und es gilt nach Satz 87.1

einerseits

$$\begin{aligned} 0 < a < 1 &\Leftrightarrow 0 < a^{\sigma-\varrho} < 1^{\sigma-\varrho} \quad \| \cdot a^\varrho \text{ (positiv!)} \\ &\Leftrightarrow 0 < a^\sigma < a^\varrho, \end{aligned}$$

andererseits

$$\begin{aligned} 1 < a &\Leftrightarrow 0 < 1^{\sigma-\varrho} < a^{\sigma-\varrho} \quad \| \cdot a^\varrho \text{ (positiv!)} \\ &\Leftrightarrow 0 < a^\varrho < a^\sigma. \end{aligned}$$

Damit haben wir

> **Satz 88.1: Das zweite Monotoniegesetz für Potenzen**
>
> **Für $0 < a < 1$ gilt:**
>
> $$\varrho < \sigma \Leftrightarrow a^\sigma < a^\varrho$$
>
> **Für $1 < a$ gilt:**
>
> $$\varrho < \sigma \Leftrightarrow a^\varrho < a^\sigma$$

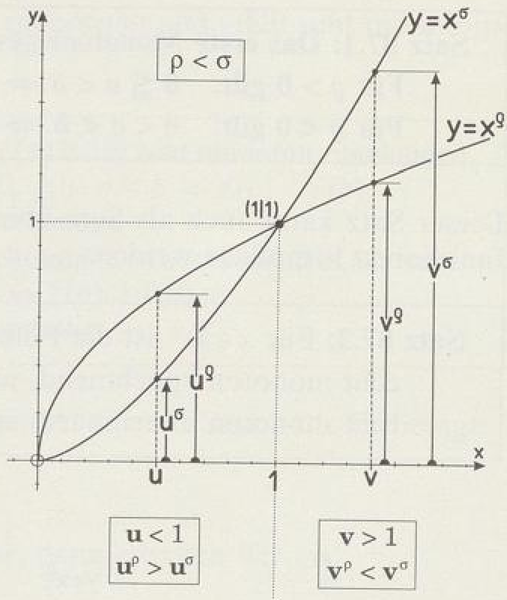

Abb. 88.1 Vergleich von Potenzfunktionen mit verschiedenen Exponenten

Aufgaben

1. Vergleiche mit Hilfe der Monotoniegesetze, d.h., ohne die Potenzen auszurechnen, folgende Zahlenpaare der Größe nach.

a) 3^{10} und 4^{10} **b)** $(\frac{1}{3})^{10}$ und $(\frac{1}{4})^{10}$ **c)** $1{,}77^{13}$ und $1{,}78^{13}$

d) $0{,}99^5$ und $0{,}98^5$ **e)** 7^9 und 7^{12} **f)** $(\frac{1}{7})^9$ und $(\frac{1}{7})^{12}$

g) 18^{-3} und 18^{-4} **h)** $0{,}18^{-3}$ und $0{,}18^{-4}$ **i)** $(-1)^{-4}$ und $(-1)^{-6}$

• **k)** 16^5 und 17^6 • **l)** $(\frac{1}{2})^6$ und $(\frac{2}{3})^5$ • **m)** 2^{-4} und 3^{-6}

2. Ordne die folgenden Potenzen der Größe nach.

a) $5^{\frac{3}{8}}$; $5^{\frac{2}{5}}$; $5^{0,3}$ **b)** $1{,}1^{-\frac{5}{2}}$; $1{,}1^{-\frac{8}{3}}$; $1{,}1^{-\frac{13}{6}}$

c) $(\frac{2}{3})^{1,3}$; $(\frac{2}{3})^{\frac{6}{5}}$; $(\frac{3}{2})^{-\frac{4}{3}}$; $(\frac{2}{3})^{\frac{9}{7}}$ **d)** $0{,}1^{\frac{5}{4}}$; $0{,}1^{-\frac{4}{5}}$; $10^{\frac{4}{3}}$; $100^{-\frac{9}{16}}$

3. Bestimme die Größenbeziehung zwischen

a) $2^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$ und $2^{\frac{1}{3}\sqrt{3}}$ **b)** $(\frac{12}{11})^\pi$ und $(\frac{12}{11})^{\frac{22}{7}}$ **c)** $5^{10^{\frac{3}{7}}}$ und $5^{2^{\frac{10}{7}}}$

d) $(\sqrt[3]{2})^{-\sqrt{5}}$ und $(\sqrt[3]{2})^{-\sqrt{6}}$ **e)** $0{,}9^{\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}}$ und $0{,}9^{\sqrt[4]{\frac{1}{8}}}$

f) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\sqrt{10}}$ und $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\pi}$.

4. Welche Ungleichung besteht zwischen

a) $1{,}5^{\sqrt[7]{3}}$ und $1{,}6^{\sqrt[7]{3}}$ **b)** $0{,}87^{\sqrt[3]{5}}$ und $(\frac{7}{8})^{\sqrt[3]{5}}$ **c)** $(\frac{14}{15})^{1-\sqrt{3}}$ und $(\frac{15}{16})^{1-\sqrt{3}}$

5. Es sei $0 < a < b$. Welche Ungleichungen bestehen dann zwischen folgenden Potenzen?

a) a^2 und b^2 **b)** $a^{1,2}$ und $b^{1,2}$ **c)** $a^{0,1}$ und $b^{0,1}$

d) a^{-4} und b^{-4} **e)** $a^{-\frac{3}{8}}$ und $b^{-\frac{3}{8}}$ **f)** $a^{-0,01}$ und $b^{-0,01}$

:6. Warum kann man unter der Voraussetzung $0 < a < b$ noch keinen Größenvergleich der Potenzen **a)** a^2 und b^3 **b)** $a^{0,5}$ und $b^{0,2}$ durchführen? Nimm eine Fallunterscheidung vor und gib jeweils passende Zahlenbeispiele an.

• 7. Es sei $0 < x < 1 < y$. Welche Größenbeziehung besteht dann zwischen

a) $x^{\frac{2}{3}}$ und $y^{0,1}$ **b)** $x^{0,1}$ und $y^{\frac{2}{3}}$ **c)** $x^{-\frac{1}{5}}$ und y^{-3}.

8. Es sei $0 < a < b$. Ordne folgende Ausdrücke der Größe nach.

a) $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ **b)** a und $\sqrt{ab}$ **c)** $a\sqrt{b}$ und $b\sqrt{a}$ **d)** $\sqrt[3]{a^2}$ und $\sqrt[3]{b^2}$

e) $\sqrt[4]{a^2b^{-1}}$ und $\sqrt[4]{a}$ **f)** $\sqrt[n]{a^p b^{q+1}}$ und $\sqrt[n]{a^{p+1}b^q}$ $(p, q > 0)$

• 9. Beweise und gib jeweils auch passende Beispiele an.

a) $a > 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > 1$ **b)** $0 \leqq a < 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < 1$

c) $\left.\begin{matrix} a > 1 \\ m > n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$ **d)** $\left.\begin{matrix} 0 \leqq a < 1 \\ m > n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$

e) $\left.\begin{matrix} 1 \leqq a < b \\ m > n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{b}$ **f)** $\left.\begin{matrix} 0 \leqq a < b \leqq 1 \\ m > n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{b}$

• 10. **a)** Begründe aus den Monotoniegesetzen für Potenzen, warum bei positiven Exponenten ϱ kein Funktionsgraph aus der Schar $x \mapsto x^\varrho$, $\varrho > 0$, im Feld $\{(x|y) \mid 0 \leqq x < 1 \wedge y \geqq 1\} \cup \{(x|y) \mid x > 1 \wedge 0 \leqq y \leqq 1\}$ verläuft.
(*Hinweis*: Zeichne das Sperrgebiet in ein Koordinatensystem ein.)

b) Begründe aus den Monotoniegesetzen für Potenzen, warum bei negativen Exponenten ϱ kein Funktionsgraph aus der Schar $x \mapsto x^\varrho$, $\varrho < 0$, im Feld $\{(x|y) \mid 0 \leqq x < 1 \wedge 0 \leqq y \leqq 1\} \cup \{(x|y) \mid x > 1 \wedge y \geqq 1\}$ verläuft.
(*Hinweis*: Zeichne das Sperrgebiet in ein Koordinatensystem ein.)

11. Welche der folgenden Funktionen sind in D monoton? Welche Art von Monotonie liegt gegebenenfalls vor?

a) $x \mapsto x^2$, $D = \mathbb{R}_0^+$ **b)** $x \mapsto x^2$, $D = \mathbb{R}^-$

c) $x \mapsto x^2$, $D = \{x \mid -3 \leqq x < 5\}$ **d)** $x \mapsto x^0$, $D = \mathbb{R}^+$

e) $x \mapsto x^{-1}$, $D = \mathbb{R}^+$ **f)** $x \mapsto x^{-1}$, $D = \mathbb{R}^-$

g) $x \mapsto x^{-1}$, $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ **h)** $x \mapsto x^{-2}$, $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

4.3 Umkehrung der Potenzfunktion

Wir betrachten die Potenzfunktion $x \mapsto x^\varrho$, $\varrho \neq 0$, auf der Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$. Weil die Gleichung $x^\varrho = \sigma$ für *jedes* positive σ die Lösung $x = \sigma^{\frac{1}{\varrho}}$ hat, nimmt x^ϱ jeden positiven Wert σ an. Also ist $\mathbb{R}^+$ die Wertemenge von $x \mapsto x^\varrho$. Wegen der echten Monotonie der Potenzfunktionen auf $\mathbb{R}^+$ ist die Gleichung $x^\varrho = \sigma$ sogar eindeutig lösbar. Jede Parallele zur x-Achse in der Höhe σ schneidet also den Graphen genau einmal. Daher ist jede Potenzfunktion auf $\mathbb{R}^+$ umkehrbar. Wir suchen nun den Term der Umkehrfunktion:

$f\colon x \mapsto x^\varrho$, $\varrho \neq 0$, $D_f = \mathbb{R}^+$, $W_f = \mathbb{R}^+$.

Funktionsgleichung: $y = x^\varrho$ Auflösen nach x: $x = y^{\frac{1}{\varrho}}$

Umkehrfunktion mit y als unabhängiger Variabler:

$$f^{-1}\colon y \mapsto y^{\frac{1}{\varrho}},\ D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}^+,\ W_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}^+.$$

In dieser Darstellung der Umkehrfunktion stimmt ihr Graph mit dem Graphen G_f der Ausgangsfunktion f überein. Die Zuordnung geht dabei von der y-Achse zur x-Achse. Wählt man, wie üblich, x als unabhängige Variable für die Umkehrfunktion f^{-1}, dann erhält man für sie die Darstellung

$$f^{-1}\colon x \mapsto x^{\frac{1}{\varrho}},\ D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+,\ W_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+.$$

Der Graph $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion in dieser Darstellung geht aus dem Graphen G_f der Ausgangsfunktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten hervor. Jetzt geht die Zuordnung wieder von der x-Achse zur y-Achse.

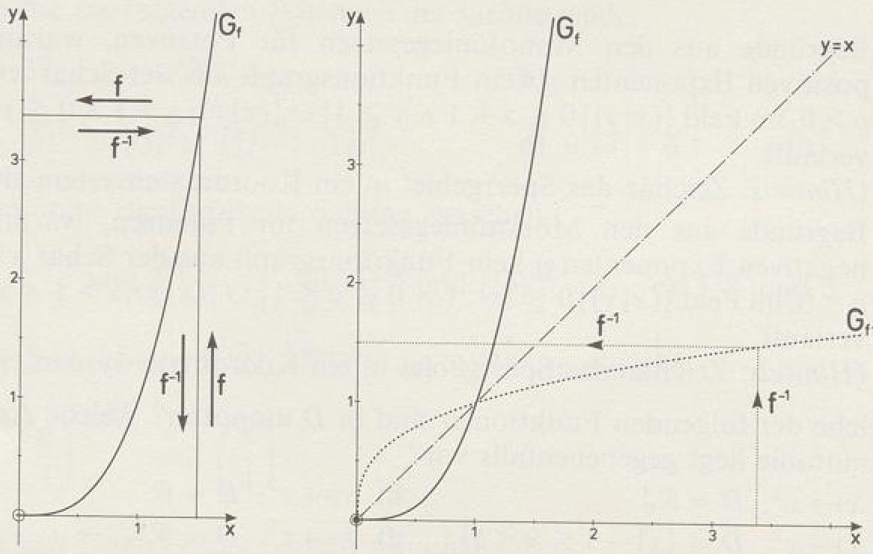

Abb. 90.1 Zusammenhang zwischen dem Graphen G_f der Funktion f und dem Graphen $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion f^{-1}

Für $\varrho > 0$ ist die Funktion $x \mapsto x^{\varrho}$ sogar in $\mathbb{R}_0^+$ definiert und dort auch umkehrbar.

Ist aber der Exponent ϱ eine ungerade ganze Zahl, also $\varrho = 2z + 1, z \in \mathbb{Z}$, dann ist $x \mapsto x^{\varrho}$ für $z \in \mathbb{N}_0$ sogar auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar, für $z \in \mathbb{Z}^-$ aber nur auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. In $\mathbb{R}^+$ hat nach dem Obigen der Graph $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion f^{-1} die Gleichung $y = x^{\frac{1}{2z+1}}$. Weil G_f und damit auch $G_{f^{-1}}$ punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems sind, gewinnen wir in $\mathbb{R}^-$ die Gleichung des Graphen $G_{f^{-1}}$, indem wir in der für $x \in \mathbb{R}^+$ gültigen Gleichung x durch $-x$ und y durch $-y$ ersetzen. Wir erhalten $-y = (-x)^{\frac{1}{2z+1}}$ und damit $y = -(-x)^{\frac{1}{2z+1}}$. Weil schließlich für $z \in \mathbb{N}_0$ noch $(0|0) \in G_f$ ist, gilt in diesem Fall auch $(0|0) \in G_{f^{-1}}$.

Wir fassen die gewonnenen Erkenntnisse zusammen in

Satz 91.1: Für $\varrho > 0$ hat die Funktion f: $x \mapsto x^{\varrho}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$ die Umkehrfunktion f^{-1}: $x \mapsto x^{\frac{1}{\varrho}}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$.

Für $\varrho < 0$ hat die Funktion f: $x \mapsto x^{\varrho}$, $x \in \mathbb{R}^+$ die Umkehrfunktion f^{-1}: $x \mapsto x^{\frac{1}{\varrho}}$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Die Funktion f: $x \mapsto x^{2z+1}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{N}_0$ bzw. mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}^-$ hat die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{1}{2z+1}} & \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \\ -(-x)^{\frac{1}{2z+1}} & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \\ 0 & \text{für } x = 0, \text{ falls außerdem } z \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Abbildung 92.1 zeigt den Zusammenhang zwischen dem Graphen der Funktion f: $x \mapsto x^{2z+1}$ und dem ihrer Umkehrfunktion **a)** für $z \in \mathbb{N}_0$ **b)** für $z \in \mathbb{Z}^-$.

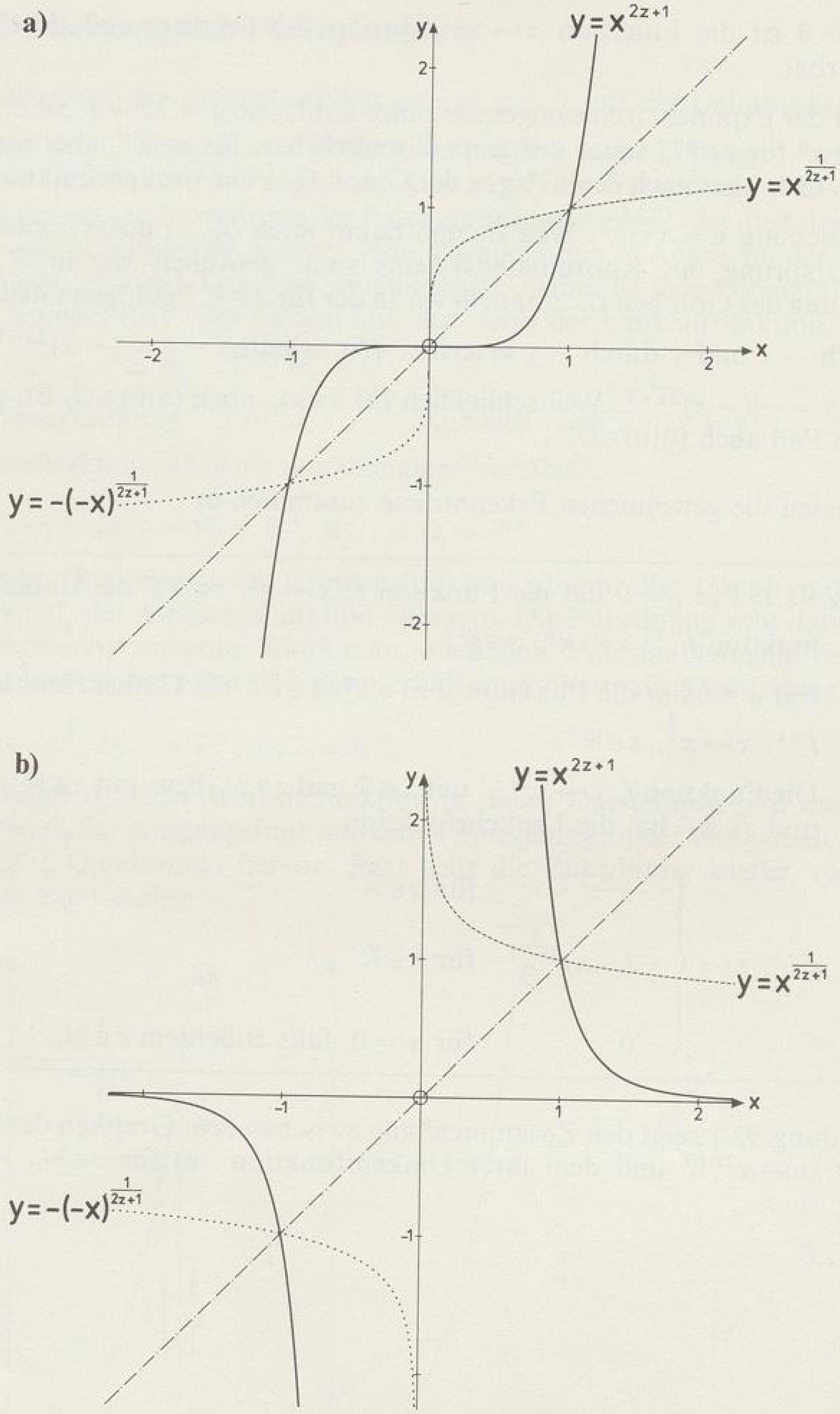

Abb. 92.1 Zusammenhang zwischen dem Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto x^{2z+1}$ und dem ihrer Umkehrfunktion **a)** für $z \in \mathbb{N}_0$ **b)** für $z \in \mathbb{Z}^-$

Aufgaben

1. Zeichne im Bereich $0 < x < 17$, $0 < y < 17$ den Graphen der Funktion $x \mapsto x^{-2}$ und konstruiere daraus den Graphen von $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$.

2. Zeichne für $0 \leqq x \leqq 4$ den Graphen der Funktion $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ und konstruiere daraus den Graphen der Funktion $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$.

3. Bestimme zu der gegebenen Funktion $x \mapsto f(x)$ die Umkehrfunktion $x \mapsto f^{-1}(x)$. Gib jeweils Definitions- und Wertemenge von f^{-1} an.

a) $f(x) = 2x^2 + 3, \quad D = \{x \mid x \geqq 0\}$
b) $f(x) = (x-3)^5, \quad D = \{x \mid x \geqq 3\}$
c) $f(x) = (x-3)^5, \quad D = \{x \mid x < 3\}$
d) $f(x) = 5x^{\sqrt{2}} - 4, \quad D = \{x \mid x \geqq 0\}$
e) $f(x) = 0{,}2x^{-0{,}3} + \sqrt[3]{5}, \quad D = \{x \mid x > 0\}$
f) $f(x) = 6x^{-\frac{1}{3}} + 5, \quad D = \{x \mid 8 \leqq x \leqq 27\}$

4. Bestimme zu $f\colon x \mapsto (x+2)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}$, $D = [-2; +\infty[$ die Umkehrfunktion f^{-1} samt Definitions- und Wertemenge. Zeichne G_f und $G_{f^{-1}}$.

5. $f\colon x \mapsto x^3$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$.
a) Zeichne G_f.
b) Bestimme den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion, ihre Definitions- und ihre Wertemenge.
c) Zeichne $G_{f^{-1}}$.
• **d)** Löse **a)**–**c)** für die Funktion $g\colon x \mapsto x^3$, $D_g = \mathbb{R}$.

6. $f\colon x \mapsto x^{-3}$, $D_f = \mathbb{R}^+$.
a) Zeichne G_f.
b) Bestimme den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion, ihre Definitions- und ihre Wertemenge.
c) Zeichne $G_{f^{-1}}$.
d) Löse **a)**–**c)** für die Funktion $g\colon x \mapsto x^{-3}$, $D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

7. $f\colon x \mapsto x^{-1}$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
a) Zeichne G_f.
b) Bestimme den Term $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion, ihre Definitions- und ihre Wertemenge.
c) Zeichne $G_{f^{-1}}$.

• **8.** Für $n \in \mathbb{Z}^-$ ist $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ die maximale Definitionsmenge der Funktionen $f_n\colon x \mapsto x^n$. Für welche n lassen sich die Funktionen f_n umkehren? Gib für diese den Term der Umkehrfunktion, ihre Definitions- und ihre Wertemenge an.

Zu Seite 95:

TARTAGLIA stützt sich auf ein Brett mit seinem Namen und dem Wahlspruch

LE INVENTIONI SONO DIFFICILI, MA LO AGGIONGERVI È FACILE
Die Erfindungen sind schwierig, aber ihnen etwas hinzuzufügen ist leicht.

Der Text unter dem Bildnis lautet:

Mit der Gunst und dem Privileg des hochverehrten venezianischen Senats, daß sich niemand erkühne oder anmaße, das vorliegende Werk zu drucken noch andernorts gedruckte zu verkaufen oder verkaufen zu lassen, weder in Venedig noch in irgendeinem Orte oder Gebiet der venezianischen Herrschaft innerhalb der nächsten 10 Jahre unter Strafe von 300 Dukaten und des Verlusts der Werke; ein Drittel dieser Strafe, unmittelbar nachdem sie ausgesprochen wurde, erhält das Arsenal, ein Drittel der Magistrat oder das Oberhaupt der Gemeinde, wo man die Verfolgung durchführt, und das restliche Drittel der Anzeigende oder Anklagende, der geheimgehalten werden wird, wie es im Privileg verlautet.