



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Algebra**

**Barth, Friedrich**

**München, 2000**

Zur Geschichte

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83532)

**Definition 74.1:** Ist  $q$  eine Irrationalzahl mit der Folge der rationalen Näherungszahlen  $r_1, r_2, r_3, \dots$  und ist  $a$  positiv, dann ist  $a^q$  diejenige Zahl, der sich die Folge  $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots$  beliebig nähert. Ferner gelte  $0^q := 0$  für  $q > 0$ .

**Bemerkung:** Man kann zeigen, daß die Definition von  $a^q$  unabhängig von der Wahl der Folge ist, mit der man  $q$  annähert.

Mit der vorstehenden Definition ist nun das Symbol  $a^x$  für jede reelle Zahl  $x$  definiert. Man vergesse jedoch nicht, daß bis auf wenige Ausnahmen, nämlich  $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , die Basis  $a$  positiv sein muß.

Die Frage, ob  $3^{\sqrt{2}}$  rational oder irrational ist, ist schwer zu entscheiden. Seltsamerweise kann man aber ohne Schwierigkeit zeigen, daß es sogar Fälle gibt, bei denen die irrationale Potenz einer Irrationalzahl eine rationale Zahl liefert. Ist nämlich  $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$  rational, dann haben wir einen solchen Fall. Ist aber  $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$  irrational, dann bilden wir  $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$  und erhalten  $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ , also eine rationale Zahl. Somit ist entweder  $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$  oder  $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$  ein Beispiel für eine Potenz mit irrationaler Basis und irrationalen Exponenten, die einen rationalen Wert hat.

Bei der vorstehenden Überlegung haben wir so getan, als ob die Rechengesetze für Potenzen mit rationalen Exponenten auch für Potenzen mit irrationalen Exponenten gelten würden. Das ist tatsächlich der Fall, was sich aber nur mit einigem Aufwand zeigen läßt. Wir begnügen uns daher mit einem Beispiel und zeigen die Gültigkeit der Regel I für die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis.

Sind  $q$  bzw.  $\sigma$  durch die Folge  $r_1, r_2, r_3, \dots$  bzw.  $s_1, s_2, s_3, \dots$  definiert, dann definiert  $r_1 + s_1, r_2 + s_2, r_3 + s_3, \dots$  die reelle Zahl  $q + \sigma$ . Dem Produkt  $a^q \cdot a^\sigma$  ist die Folge  $a^{r_1} \cdot a^{s_1}, a^{r_2} \cdot a^{s_2}, a^{r_3} \cdot a^{s_3}, \dots$  zugeordnet. Das ist aber wegen der Gültigkeit von Regel I für rationale Exponenten die Folge  $a^{r_1+s_1}, a^{r_2+s_2}, a^{r_3+s_3}, \dots$ , die nach Definition 74.1 die Zahl  $a^{q+\sigma}$  liefert. Somit gilt  $a^q \cdot a^\sigma = a^{q+\sigma}$ .

### \*\*Zur Geschichte

Das Bewußtsein, daß der Begriff der Potenz mit irrationalen Exponenten einer eigenen Definition bedarf, entwickelte sich erst im letzten Jahrhundert, als man den Begriff der reellen Zahl präziserte. Immerhin notierte aber Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) auf dem ihm zugegangenen Brief Isaac NEWTONS (1643–1727) vom 13. Juni 1676 (siehe Seite 62f.) neben dem Ausdruck  $\overline{P + PQ}^{\frac{m}{n}}$ : »Potest  $m$  vel  $n$  etiam esse fractus vel irrationalis, quod magni est momenti.« [Es kann  $m$  oder  $n$  gebrochen oder irrational sein, was von großer Bedeutung ist.] Irrationale Exponenten benützt NEWTON tatsächlich im Brief vom 24. Oktober 1676 an OLDENBURG, der wiederum zur Weiterleitung an LEIBNIZ bestimmt ist:

Als Beispiel führt er die Gleichung  $(x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}})^{\frac{3}{2}} = y$  an. Beide Briefe veröffentlichte John WALLIS (1616–1703) im 3. Band seiner *Opera mathematica* 1699, der bereits 1655 in seiner *Arithmetica infinitorum* irrationale Exponenten in seine Betrachtung einbezogen hatte.

### Aufgaben

1. a) Welche Zahl liefert dein Taschenrechner für

1)  $2^{\sqrt{5}}$       2)  $10^{\sqrt{7}}$       3)  $\sqrt{2}^{\sqrt{11}}$       4)  $\pi^\pi$  ?

• b) Berechne für die Zahlen aus a) jeweils die ersten fünf Zahlen der Näherungsfolge nach dem Vorgehen auf Seite 73.

2. Berechne:

a)  $2^{1+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}}$       b)  $5^{1+\sqrt{3}} : 5^{3\sqrt{\frac{1}{3}}}$       c)  $9^{\frac{3}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})}$

d)  $(3^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}$       e)  $(10^{\sqrt[3]{2}})^{\sqrt[3]{4}}$       f)  $(5^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$

3. Vereinfache und bestimme die Werte der folgenden Potenzen auf Tausendstel gerundet.

a)  $(2^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{8}}}$       b)  $(3^{-\sqrt[3]{9}})^{\sqrt[3]{24}}$       c)  $(1,21^{\frac{1}{\sqrt{5}}})^{\sqrt{\frac{1}{12}}}$

4. Vereinfache:

a)  $a^{3-5\sqrt{2}} \cdot a^{5\sqrt{2}+1}$       b)  $x^{\sqrt{3}-1} \cdot x^{\sqrt{3}+1}$       c)  $y^{\sqrt{10}} : y^{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}$

d)  $(\sqrt{c^{\sqrt{2}}})^{\sqrt{2}}$       e)  $(a^{\sqrt[3]{4}} b)^{\sqrt[3]{2}}$       f)  $[(\sqrt[4]{a})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}}$

g)  $[\sqrt[3]{m^{\sqrt{3}}} : (m^{\sqrt{3}} \cdot m^{\sqrt{\frac{1}{3}}})]^{\sqrt{3}}$

5. Bestimme die Lösungsmengen.

a)  $5^{x^3} = 125$       b)  $2^x = 4^{1,5}$       c)  $3^x = 27^{\sqrt{2}}$

d)  $17^{x^3} = 1$       e)  $2^{3x-1} = \frac{1}{16}$       f)  $4^{1-x^3} = 128$

g)  $16^{x^2} = 8$       h)  $(\sqrt{11})^{x^2+2} - 21 = 100$       • i)  $(\frac{2}{3})^{\sqrt{x^2-3}} = 2,25$

6. Löse folgende Gleichungen und gib auf Hundertstel gerundete Näherungswerte der Lösungen an.

a)  $x^{\sqrt{7}} = 3$       b)  $x^{-\pi} = \sqrt{2}$       c)  $(\sqrt[3]{x})^{\sqrt{3}} = 10$

d)  $x^{2\sqrt{2}} - x^{\sqrt{2}} = 0$       e)  $x^{\sqrt{5}} + x^{-\sqrt{5}} = 6$       • f)  $2x^{\sqrt{2}} - 9x^{\sqrt{\frac{1}{2}}} + 4 = 0$

**Zu Seite 77:**

Links unten vertritt ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) die *philosophia naturalis*, d. h. die Physik, und rechts unten SENECA (4–65) die *philosophia moralis*, die Ethik. Die vier Kirchenväter AUGUSTINUS (354–430), Bischof von Karthago, GREGOR I. DER GROSSE (um 540–604), Papst von 590 bis 604, HIERONYMUS (um 347–420), ein asketischer Mönch, der seit dem 13. Jh. mit dem Kardinalshut dargestellt wird, und AMBROSIUS (339?–397), Bischof von Mailand, repräsentieren die *philosophia divina*, die Theologie. Im Kreis steht zentral, mit Zepter, Buch und Krone, die *philosophia triceps humanarum rerum*, die dreigesichtige Philosophie der menschlichen Dinge, entsprechend der auf PLATON (428–348 v. Chr.) zurückgehenden Einteilung des Lernens in Physik, Logik und Ethik. Die sieben Damen zu ihren Füßen symbolisieren die sieben *Artes liberales*, die Sieben Freien Künste, die eigentlich die Sieben Künste der Freien heißen müßten, da sie im alten Rom von den freien Bürgern studiert wurden, ohne einem Broterwerb zu dienen. Eingeführt hat diese Studienfächer (= *disciplinae*) der große Gelehrte Marcus Terentius VARRO (116–27 v. Chr.); ihre Siebenzahl ist bereits bei SENECA belegt. BOETHIUS (um 480–524?) und CASSIODORUS (um 490–um 583) fassen die vier aus pythagoreischen Zeiten stammenden Sachfächer Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie zum *Quadrivium* (Viererweg) zusammen. Im 9. Jh. werden schließlich die drei Fächer des elementarlogischen Unterrichts, nämlich Grammatik, Rhetorik und Dialektik (die hier durch die Logik dargestellt wird), zum *Trivium* (Dreierweg) zusammengefaßt. Gelehrt wurden die *Artes Liberales* in der mittelalterlichen Universität an der deshalb so genannten Artistenfakultät. Sie bildeten die Grundlage für ein Studium der Jurisprudenz, Medizin oder Theologie. – Die Arithmetik rechnet auf dem Rechenbrett, und die Geometrie hält einen Zirkel hoch. Die Astronomie hält eine Armillarsphäre (*armilla* [lat.] = Ring) in den Händen, die bis ins 17. Jh. zur Darstellung der Haupthimmelskreise der astronomischen Koordinatensysteme diente. Zu den mathematischen Wissenschaften gehört auch die Musik als Lehre von zahlenmäßigen Gesetzen, die die Tonintervalle und den Rhythmus beherrschen.