



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Algebra**

**Barth, Friedrich**

**München, 2000**

3.3 Zur Geschichte der allgemeinen Wurzel

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83532)

9. Berechne, falls möglich:

a) $\sqrt[4]{3^4}$	b) $\sqrt[4]{(-3)^4}$	c) $\sqrt[4]{(-3)^{-4}}$	d) $\sqrt[5]{3^5}$
e) $\sqrt[5]{(-3)^5}$	f) $\sqrt[5]{(-3)^{-5}}$	g) $\sqrt[5]{ -3 ^5}$	h) $\sqrt[5]{ -3 ^{-5}}$
i) $\sqrt[8]{(-1)^8}$	j) $\sqrt[8]{(-1)^{-8}}$	k) $\sqrt[8]{-1^{-8}}$	l) $\sqrt[8]{(-\frac{1}{100})^{-4}}$
m) $\sqrt[9]{(-\frac{27}{8})^{-6}}$	n) $\sqrt[5]{(\frac{32}{243})^2}$	o) $\sqrt[3]{(\frac{27}{125})^2}$	p) $\sqrt[6]{(-\frac{9}{25})^3}$

10. Die folgenden Gleichungen sind vom Typ  $x^n = a$ . Gib jeweils alle Lösungen an. Welche von ihnen kann als  $\sqrt[n]{a}$  geschrieben werden?

a) $x^3 = 8$	b) $x^3 = -8$	c) $x^4 = 625$	d) $x^4 = -16$
e) $x^7 = 0$	f) $x^5 = -243$	g) $x^5 = 2^{10}$	h) $x^7 = 0,5^{-14}$

### \*\*3.3 Zur Geschichte der allgemeinen Wurzel

Die Entdeckung der Inkommensurabilität zweier Strecken und damit letztlich der Irrationalzahl durch die PYTHAGOREER um die Mitte des 5. Jh.s v. Chr. gehört zu den Großtaten der griechischen Mathematik. Erinnern wir uns: Die Aufgabe, ein Quadrat zu finden, dessen Flächeninhalt doppelt so groß wie der eines gegebenen Quadrats ist, führt auf die Gleichung  $x^2 = 2$ , die durch keine rationale Zahl gelöst werden kann; geometrisch aber existiert eine Strecke für die Seite des gesuchten Quadrats, nämlich die Diagonale des gegebenen Quadrats.  $\sqrt{2}$  war geboren!

THEODOROS von Kyrene (um 465 – um 385 v. Chr.) erkannte, wie uns PLATON (428–348 v. Chr.) in seinem um 368 verfaßten Dialog *Theätet* (147c–148b) berichtet, daß die Quadratwurzeln aus einer Nichtquadratzahl immer irrational sind; ihre Existenz konnte er an Quadraten bzw. rechtwinkligen Dreiecken nachweisen. Sein und PLATONS Schüler THEAITETOS (um 415 – 369 v. Chr.) entdeckte die höheren Irrationalitäten; das sind Zahlen, die auch durch Quadrieren nicht rational werden, wie  $\sqrt[3]{a}$  und auch oft  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ . EUKLID (um 300 v. Chr.) behandelt im 117 Sätze umfassenden Buch X seiner *Elemente* diese höheren Irrationalitäten erschöpfend. Anders ausgedrückt: Die Griechen verstanden mit Quadratwurzeln und 4. Wurzeln zu rechnen. Wie stand es aber mit den anderen Wurzeln? PLATON läßt THEAITETOS in dem angegebenen Dialog sagen, daß er auch mit Raumgrößen, d. h. mit kubischen Irrationalitäten entsprechend umgehen könne. In Wahrheit gelang dies den Griechen jedoch nicht. Das Delische Problem der Würfelverdopplung (Aufgabe 46/7) führt auf die Gleichung  $x^3 = 2$ , von der sich zwar genauso wie von  $x^2 = 2$  zeigen läßt, daß sie durch keine rationale Zahl lösbar ist (Aufgabe 54/1). Entscheidend aber war wohl, daß man, anders als bei der Quadratverdopplung, mit Zirkel und Lineal keine Strecke konstruieren konnte, die die Kante des doppelt so großen Würfels ist. Damit fehlte anscheinend für die Griechen trotz der im dreidimensionalen Raum mit Hilfe von Körpern durchgeführten Konstruktion des ARCHYTAS (um 375 v. Chr.) – siehe Aufgabe 46/7.b) – der Nachweis, daß  $\sqrt[3]{2}$  überhaupt existiert. Für PLATON blieb das Problem ungelöst; wir wissen seit ÉVARISTE GALOIS (1811–1832) – siehe Seite 118f. –, daß es mit Zirkel und Lineal unlösbar ist. Da die Griechen aber anscheinend nicht bereit waren, an die Existenz der 3. Wurzeln zu glauben – sie sind ja meist weder rationale Zahlen noch als Strecken konstruierbar –, wurden sie auch zahlentheoretisch nicht behandelt. Lediglich bei

HERON von Alexandria (um 62 n. Chr.), einem sehr dem Praktischen zugewandten Mathematiker, finden wir in seinem *Περί μέτρων* (lateinisch *metrica* – »Vermessungslehre« –) ein Verfahren zur näherungsweise Berechnung einer Kubikwurzel, vorgeführt an  $\sqrt[3]{100}$  (Aufgabe 54/2).

Im *Chiu Chang Suan Shu* – »Neun Bücher arithmetischer Technik« – aus der Han-Zeit (202 v. Chr. – 9 n. Chr.) wird ein sehr modernes Verfahren zum Ausziehen der Kubikwurzel gelehrt, das dazu benützt wird, bei gegebenem Würfelvolumen die Würfelmantellänge zu bestimmen. Bei den Indern lehrt ĀRYABHATA I (476 n. Chr. – ?) das exakte Berechnen kubischer Wurzeln in Vers 5 des *Ganita-pada* – »Abschnitt über die Rechenkunst« – seines 498 geschriebenen Werkes *Aryabhatiya*.

Bei den Arabern sollen die persischen Mathematiker ABU AL-WAFA (940–997), AL-BIRUNI (973–1051?) und Omar AL-HAYYAM (1048?–1131) Werke über das Berechnen auch höherer Wurzeln geschrieben haben, die aber nicht erhalten blieben. AL-HAYYAM behauptet in seiner *Algebra*, daß es ihm als erstem gelungen sei, beliebige hohe Wurzeln zu ziehen. Wir müssen daher annehmen, daß er über den binomischen Lehrsatz verfügte, d. h., daß er  $(a + b)^n$  für beliebige natürliche Exponenten berechnen konnte. Belegt ist dieser Lehrsatz im arabischen Raum aber erst um 1265 bei dem Perser Nasir al-Din AL-TUSI (1201–1274).\*



Petrus Apianus

Abb. 52.1 Petrus APIAN, eigentl. Peter BENNEWITZ oder BIENEWITZ (16. 4. 1495 Leisnig bei Leipzig – 21. 4. 1552 Ingolstadt) – Holzschnitt von Tobias STIMMER



Abb. 52.2 Titelblatt des Rechenbuchs von Peter APIAN aus dem Jahre 1527\*\*

\* In China war der Satz schon früher bekannt: YANG Hui bringt ihn 1261 in seiner *Untersuchung der Arithmetischen Regeln der Neun Bücher*, die auf QIA Xsian (um 1100) zurückgeht.

\*\* Links unten das *Arithmetische Dreieck* der Koeffizienten von  $(a + b)^n$ , das hier zum ersten Mal in Europa im Druck erschien. APIAN war seit 1527 Lektor für Mathematik an der Universität Ingolstadt.

Im Abendland werden im Gefolge der Araber Quadrat- und Kubikwurzeln gezogen. Peter APIAN (1495–1552) gibt 1527 in seiner *Eyn Newe Vnnd wolgegründte vnderweysung aller Kauffmanß Rechnung* Beispiele für höhere Wurzeln bis zur achten, ohne sein Verfahren zu erklären. Michael STIFEL (1487?–1567) ist schließlich im Abendland der erste, der 1544 in seiner *Arithmetica integra* mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes zeigt, wie man beliebig hohe Wurzeln ausrechnen kann. Und er führt es an einfachen Beispielen vor bis zur siebten (Aufgabe 57/4). Niccolò TARTAGLIA (1499–1557) gibt 1556 in seinem *General trattato di numeri, et misure* wider besseres Wissen das Verfahren als sein eigenes aus und zeigt es bis zur elften Wurzel. Dabei führt er auf vielen Seiten besonders ausführlich solche Fälle vor, bei denen das Verfahren zu keinem Ende kommt, weil der Radikand sich nicht als Potenz mit dem Wurzelexponenten als Hochzahl ausdrücken läßt.

Einfach sind die Verfahren zum Berechnen dritter und erst recht höherer Wurzeln nicht. Wir wollen sie dir daher gar nicht zeigen. Es bleibt uns aber noch die Aufgabe, dir von den Zeichen für die höheren Wurzeln zu berichten.

Sehr modern muten uns die Zeichen an, die Nicolas CHUQUET 1484 in seinem *Triparty en la science des nombres* für höhere Wurzeln verwendet; verbindet er doch das italienische Wurzelzeichen  $\sqrt{\phantom{x}}$  mit einer kleinen hochgestellten Zahl:  $\sqrt[2]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[5]{\phantom{x}}$  usw. Sogar  $\sqrt[30]{\phantom{x}}$  fanden wir noch bei ihm (Aufgabe 69/24) und zur großen Überraschung  $\sqrt[1]{\phantom{x}}$ .\*

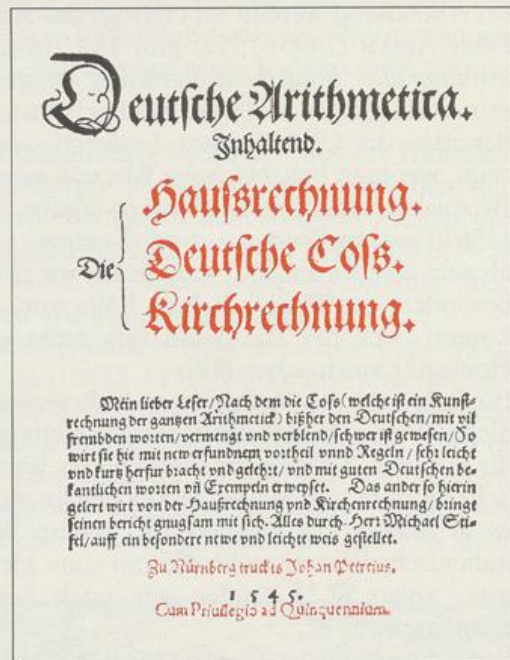
Wie schwerfällig ist dagegen Luca PACIOLI (um 1445–1517) in seiner *Summa* von 1494; er bildet » $\sqrt{\phantom{x}}$  quadrata de 9«, gelegentlich auch kürzer » $\sqrt{\phantom{x}}$  de 9« für  $\sqrt{9}$ , » $\sqrt{\phantom{x}}$  cuba de 8« für  $\sqrt[3]{8}$ , » $\sqrt{\phantom{x}}\sqrt{\phantom{x}}$  de 16« für  $\sqrt[4]{16}$  und natürlich – siehe Seite 37 – » $\sqrt{\phantom{x}}$  relata de 32« für  $\sqrt[5]{32}$ . GERONIMO CARDANO (1501–1576) bringt auch keine wesentliche Verbesserung, wenn er die Beifügungen abkürzt:  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ .cu.8 ist  $\sqrt[3]{8}$ ,  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ .ce.cu.81 ist  $\sqrt[3]{81}$ . Raffaele BOMBELLI (1526–1572) verwendet 1557/60 in seinem Manuskript der *L'Algebra* zwar  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ , wofür der Drucker aber 1572 lieber R.c. setzt.

Bekanntlich (siehe *Algebra* 9, Seite 35) hat sich der heute übliche Wurzelhaken aus dem Punkt des *Algorithmus de Surdis* des *Codex Dresden C 80* (vor 1486) entwickelt:  $\cdot 25$  ist  $\sqrt{25}$ . Folgerichtig bedeuten dort zwei Punkte die 4. Wurzel. Aber damit ist die Systematik schon zu Ende! Drei Punkte sind nicht, wie zu erwarten wäre, die 8. Wurzel, sondern die 3. Wurzel, und vier Punkte – welche Überraschung – die 9. Wurzel. Dieselbe Alogik übernimmt 1525 Christoff RUDOLFF in seine *Coß* – inzwischen ist dem Wurzelpunkt der Aufstrich beigefügt –, wenn er mit  $\sqrt{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$  die Quadratwurzel, die Kubikwurzel und die 4. Wurzel bezeichnet. Demgegenüber stellt die Schreibweise von Andreas ALEXANDER (um 1475 – nach 1504), dem Übersetzer und Bearbeiter einer lateinischen *Algebra* eines INITIUS ALGEBRAS, einen Fortschritt dar: Er setzt hinter den Punkt mit Aufstrich die cossischen Potenzzeichen  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[5]{\phantom{x}}$  usw.; mit  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[5]{\phantom{x}}$  usw. hat man eine systematische Bezeichnung für die höheren Wurzeln (siehe Seite 43). Michael STIFEL baut diese Schreibweise 1544 in seiner *Arithmetica integra* weiter aus. Einfacher und auch logisch überzeugend sind dagegen seine Zeichen aus seiner *Deutsche[n] Arithmetica* von 1545:  $\sqrt{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$  bedeuten Quadrat-, Kubik- bzw. 4. Wurzel, was bei  $\sqrt[6]{\phantom{x}}$  für die 6. Wurzel zur Unleserlichkeit führt, so daß er schließ-

\* Erstaunlich ist das systematische Denken CHUQUETS; schreibt er doch: »Man muß wissen, daß es unendlich viele Arten von Wurzeln gibt; denn einige sind zweite Wurzeln, andere dritte, andere vierte, andere fünfte und so fort ohne Ende. Erste Wurzeln finden sich aber nirgends. Und dennoch sollte man sie zur Fortsetzung der Ordnung einführen. Es ist zweckmäßig zu sagen, daß für jede Zahl die erste Wurzel aus einer Zahl die Zahl selbst ist, d. h. z. B., die erste Wurzel aus 12 ist 12. Man kann sie schreiben, indem man bei  $\sqrt{\phantom{x}}$  eine 1 hochstellt, also als  $\sqrt[1]{12}$ .«

lich, aber nur einmal  $\sqrt[3]{38}$  für  $\sqrt[11]{38}$  schreibt. Leider verfolgt er diesen Einfall nicht weiter! SIMON STEVIN (1548–1620) ist mit seinen für uns schon gut verständlichen Symbolen  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{2}$  und  $\sqrt[4]{2}$  aus seiner *L'Arithmétique* (1585) einen guten Schritt weiter. 1629 kommt dann der Flamen ALBERT GIRARD (1595–1632) in seiner *Invention nouvelle en l'algèbre* auf die Idee, den Wurzelexponenten in die Öffnung des Wurzelhakens zu schreiben, ohne diese neuen Symbole  $\sqrt[2]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[5]{\phantom{x}}$  ständig zu benutzen. Natürlich haben sie sich erst langsam durchgesetzt. Im 18. Jh. werden sie Allgemeingut.

Abb. 54.1 Titelblatt der *Deutsche[n] Arithmetica* des MICHAEL STIFEL (1487? Esslingen – 19.4.1567 Jena) von 1545



### Aufgaben

- Zeige, daß  $\sqrt[3]{2}$  irrational ist. Führe dazu die Annahme,  $\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}$  mit  $a, b \in \mathbb{N}$  zu einem Widerspruch.
  - Zeige, daß die fünfte Wurzel aus einer Primzahl irrational ist.
- Die von HERON von Alexandria (um 62 n. Chr.) in seinen *Métrika* an Hand von  $\sqrt[3]{100}$  vorgeführte näherungsweise Berechnung einer Kubikwurzel läßt sich folgendermaßen allgemein formulieren.

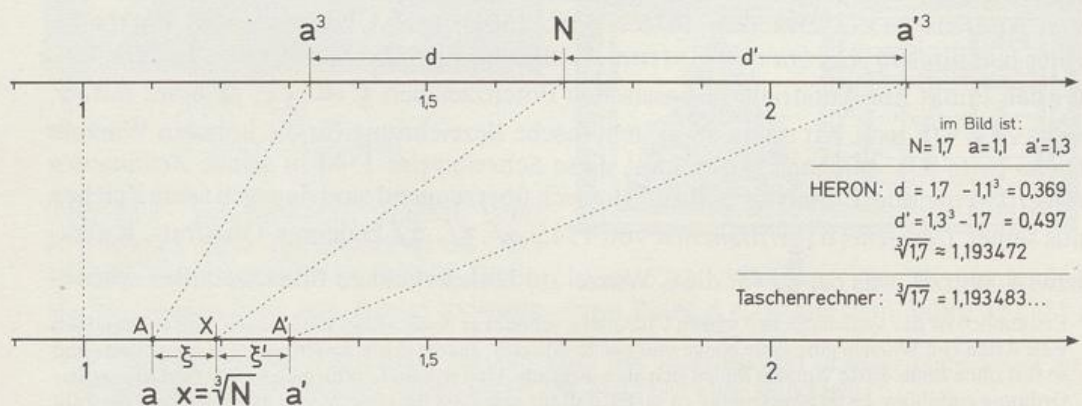


Abb. 54.1 Zum Verfahren von HERON,  $\sqrt[3]{N}$  zu berechnen

Um  $\sqrt[3]{N} =: x$  näherungsweise zu berechnen, wählt man zwei Zahlen  $a$  und  $a'$ , die sich (höchstens) um 1 unterscheiden und deren Kuben die Zahl  $N$  einschließen:  $a^3 < N < a'^3$ .

Die Abstände  $d := N - a^3$  und  $d' := a'^3 - N$  sind dann bekannt. Die Aufgabe ist gelöst, wenn man einen der Abstände der Wurzeln, nämlich  $\xi := x - a$  bzw.  $\xi' := a' - x$ , oder deren Verhältnis kennt. Dazu formt man um:

$$d = x^3 - a^3 = (x - a)^3 + 3ax(x - a) = \xi^3 + 3ax\xi \quad (1)$$

$$d' = a'^3 - x^3 = (a' - x)^3 + 3a'x(a' - x) = \xi'^3 + 3a'x\xi' \quad (2)$$

Da  $\xi$  und  $\xi'$  kleiner als 1 sind, werden die Kuben  $\xi^3$  und  $\xi'^3$  klein, können also vernachlässigt werden:

$$d \approx 3ax\xi \quad (1')$$

$$d' \approx 3a'x\xi' \quad (2')$$

$X$  teilt die Strecke  $[AA']$  im Verhältnis  $\xi : \xi'$ . Daher gilt  $\xi = \overline{AX} = \frac{\xi}{\xi + \xi'} \cdot \overline{AA'}$ . Aus (1') und (2') errechnet man  $\frac{\xi}{\xi + \xi'} = \frac{a'd}{a'd + ad'}$  und erhält schließlich

$$\sqrt[3]{N} \approx a + \frac{a'd}{a'd + ad'} (a' - a)$$

- Verifiziere die Gleichungen (1) und (2).
  - Leite aus (1') und (2') die Näherungsformel her. *Hinweis:* Multipliziere die Gleichungen mit  $a'$  bzw.  $a$ .
  - HERON schließt  $\sqrt[3]{100}$  in zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen ein und erhält den Näherungswert  $4\frac{9}{14}$ . Bestätige dies und berechne den relativen Fehler dieser Näherung bezogen auf den Wert, den dein Taschenrechner liefert.
  - Bestimme nach dem Verfahren von HERON
    - $\sqrt[3]{2}$ ,    2)  $\sqrt[3]{65}$ ,    3)  $\sqrt[3]{120}$ ,    4)  $\sqrt[3]{330}$ .
  - Bestimme einen Näherungswert für  $\sqrt[3]{0,8}$  mit
    - $a = 0$  und  $a' = 1$ ,    2)  $a = 0,8$  und  $a' = 1$ .
3. a) Für  $|\alpha| \leq 1$  gilt  $\sqrt[n]{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{n}$ . Begründe diese Näherungsformel durch folgende Überlegung: Setze  $\sqrt[n]{1 + \alpha} = 1 + \xi$  und erhebe beide Seiten zur  $n$ -ten Potenz. Beim Ausrechnen der rechten Seite kann man alle zweiten und höheren Potenzen von  $\xi$  weglassen, da sie im Vergleich zu  $\xi$  klein sind.
- b) Leite für  $N > 0$  mit Hilfe von a) die folgende Näherung her:

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{na^{n-1}}$$

- c) Für  $n = 2$  erhält man aus b) die Näherungsformel  $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$ , die sich bereits auf der altbabylonischen Keilschrifttafel VAT 6598 (um 1600 v. Chr.) und auch in HERONS *Περὶ μέτρων* findet.

Für  $n = 3$  erhält man die Näherungsformel  $\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + \frac{b}{3a^2}$ , die 1539 Geronimo CARDANO (1501–1576) in seiner *Practica Arithmeticae* an Hand von  $\sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{8 + 3}$  zeigt.\* Niccolò TARTAGLIA (1499–1557) hält sie für falsch, da man mit ihr für  $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 + 16}$  einen zu großen Wert erhält.

- 1) Bestimme die Näherungswerte für die angegebenen Wurzeln.
- 2) In der Näherungsformel kann  $b$  auch negativ gewählt werden.

Berechne damit einen Näherungswert für  $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{27 - 3}$ .

- d) Bestimme näherungsweise
- 1)  $\sqrt[3]{2}$ ,    2)  $\sqrt[3]{65}$ ,    3)  $\sqrt[3]{100}$ ,    4)  $\sqrt[3]{120}$ ,    5)  $\sqrt[3]{330}$ ,    6)  $\sqrt[3]{0,8}$ .
- e) Wende auf die in d) erhaltenen Näherungswerte nochmals die Näherungsformel von CARDANO an, d.h., nimm den dort erhaltenen Näherungswert als neuen Startwert  $a$ , berechne das neue  $b$  und den neuen Näherungswert.
- f) Zeige, daß die wiederholte Anwendung der Näherungsformel von CARDANO zur Iterationsformel

$$x_{k+1} = \frac{N + 2x_k^3}{3x_k^2}$$

führt, die Näherungswerte für  $\sqrt[3]{N}$  liefert. Berechne damit die ersten vier Näherungen der in c) und d) angegebenen Wurzeln. Wie groß ist der relative Fehler gegenüber dem Wert, den dein Taschenrechner liefert?

- g) Bestimme mit Hilfe von b) Näherungswerte für
- 1)  $\sqrt[4]{2}$     2)  $\sqrt[4]{65}$     3)  $\sqrt[4]{100}$     4)  $\sqrt[4]{5000}$     5)  $\sqrt[4]{0,8}$ .
- h) Ersetze in g)  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$  durch  $\sqrt[5]{\phantom{x}}$ .
- i) Ersetze in g)  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$  durch  $\sqrt[7]{\phantom{x}}$ .

\* Weil man Vers 5 des *Ganita-pada* früher falsch verstand, glaubte man, ĀRYABHATA I habe mit dieser Formel Kubikwurzeln näherungsweise berechnet. Tatsächlich gab er aber ein Verfahren zur genauen Berechnung der Kubikwurzeln an.

j) Ersetze in g)  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$  durch  $\sqrt[11]{\phantom{x}}$ .

• k) Zeige analog zu f), daß

$$x_{k+1} = \frac{N + (n-1)x_k^n}{nx_k^{n-1}}$$

ein Iterationsverfahren zur näherungsweise Berechnung von  $\sqrt[n]{N}$  darstellt.

• l) Berechne mit der Iterationsformel aus k) Näherungswerte für die  
1) in g), 2) in h), 3) in i), 4) in j)  
angegebenen Wurzeln. Rechne so lange, bis dein Taschenrechner  
keinen neuen Wert mehr anzeigt.

• 4. Michael STIFEL (1487?–1567) zeigt seine Regel zur Berechnung von  
höheren Wurzeln 1544 in der *Arithmetica integra* an Hand folgender  
Beispiele:

1)  $\sqrt[4]{6765201}$     2)  $\sqrt[3]{238328}$     3)  $\sqrt[5]{916132832}$

4)  $\sqrt[7]{3521614606208}$     5)  $\sqrt[8]{45949729863572161}$

• a) Berechne die unter 1) angegebene Wurzel mit dem Divisionsverfahren.

• b) Berechne die Wurzeln unter 2) bis 5). Überlege dabei zuerst, wie viele  
Stellen vor dem Komma das Ergebnis haben kann, und starte dann das  
Iterationsverfahren aus Aufgabe 3.k) mit einer Zahl, die bis auf die  
vorderste Ziffer nur Nullen enthält.

• 5. Michael STIFEL (1487?–1567) zeigt seine Regel zur Berechnung von  
höheren Wurzeln 1545 in der *Deutsche[n] Arithmetica* an Hand folgender  
Beispiele:

1)  $\sqrt[4]{47458321}$     2)  $\sqrt[7]{280648260320646639744}$

3)  $\sqrt[11]{7516865509350965248}$

Berechne sie nach dem Vorgehen in Aufgabe 4.b).

### 3.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Das Rechnen mit allgemeinen Wurzeln ist sehr unhandlich. Wir haben keine Rechenregeln dafür hergeleitet, weil sich erfreulicherweise im Laufe der Entwicklung gezeigt hat, daß man die allgemeinen Wurzeln als Potenzen mit rationalen Exponenten auffassen kann, was den Umgang mit ihnen wesentlich erleichtert.

Wir lassen zunächst einmal probeweise Stammbrüche als Exponenten einer