



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

3.1 Die Gleichung $x^n = a$

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83532](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83532)

3 Potenzen mit reellen Zahlen als Exponenten

3.1 Die Gleichung $x^n = a$

Die ursprüngliche Aufgabe des Potenzierens besteht darin, bei gegebener Basis b und gegebenem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ den Wert der Potenz b^n zu bestimmen.

Man kann nun umgekehrt die Aufgabe stellen, zu gegebenem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ eine Basis x zu suchen, für welche die Potenz x^n einen vorgeschriebenen Wert a hat. Dazu muß man die Gleichung $x^n = a$ lösen.

Bekanntlich ist das Quadrat und allgemein jede Potenz mit geradem Exponenten nicht negativ. Daher ist $x^n = a$ sicher unlösbar, wenn n gerade und a negativ ist. So haben z. B. die Gleichungen $x^2 = -1$; $x^4 = -16$ und $x^{10} = -1000$ keine Lösung. Wir setzen daher zunächst $a \geq 0$ voraus.

Bei manchen Gleichungen kann man leicht Lösungen erraten, z. B.

$$x^4 = 16 \quad \text{Lösungen: } x_1 = 2, x_2 = -2$$

$$x^3 = 27 \quad \text{Lösung: } x_1 = 3$$

$$x^6 = 0 \quad \text{Lösung: } x_1 = 0.$$

Offenbar hat jede dieser drei Gleichungen *mindestens eine* nichtnegative Lösung. Tatsächlich läßt sich zeigen, daß jede Gleichung der Form $x^n = a$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a \geq 0$ *genau eine* nichtnegative Lösung hat. Zum Beweis dieser Behauptung brauchen wir eine Information über das Monotonieverhalten von Potenzen. Diese erhalten wir durch

Satz 44.1: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $0 \leq a < b \Leftrightarrow 0 \leq a^n < b^n$

Beweis: Die dritte binomische Formel

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

läßt sich auf dritte Potenzen erweitern zu

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

und sogar ganz allgemein auf n -te Potenzen zu

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad (\blacksquare)$$

was sich durch Ausmultiplizieren der rechten Seite verifizieren läßt:

$$\begin{aligned} \text{RS} &= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - \\ &\quad - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \dots - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n = a^n - b^n = \text{LS} \end{aligned}$$

Mit dieser Beziehung läßt sich Satz 44.1 leicht begründen.

Ist nämlich $0 \leq a < b$, dann ist der erste Faktor $(a - b)$ auf der rechten Seite von (\blacksquare) negativ, der zweite Faktor $(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} +$

$+b^{n-1}$) aber positiv, also gilt $RS < 0$ und damit auch $LS < 0$. Das heißt aber $a^n - b^n < 0$ und somit $a^n < b^n$.

Ist andererseits $0 \leq a^n < b^n$, dann gilt $LS < 0$ und somit auch $RS < 0$. Weil der zweite Faktor aber immer positiv ist, muß $(a - b)$ negativ sein, also ist $a < b$.

Damit kehren wir zu unserem eigentlichen Problem zurück und beweisen

Satz 45.1: Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \geq 0$ hat die Gleichung $x^n = a$ genau eine nichtnegative Lösung.

Beweis: Ist $a = 0$, dann ist $x = 0$ die einzige Lösung. Es sei also jetzt $a > 0$. Wir erläutern den Gedankengang des Beweises am Beispiel $x^3 = 35$. Das angewandte Verfahren läßt sich ohne weiteres auf andere Fälle übertragen.

Wir versuchen mit Hilfe einer Intervallschachtelung eine Lösung zu konstruieren. Nehmen wir dazu an, x_1 sei eine positive Lösung der Gleichung $x^3 = 35$, also $x_1^3 = 35$. Nach Satz 44.1 folgt aus $0 < u^3 < v^3$ die Ungleichung $0 < u < v$. Durch Anwendung dieser Schlußweise können wir für x_1 eine Folge von immer schärferen Ungleichungen angeben:

$$\begin{aligned} 3^3 = 27 < 35 < 64 = 4^3 & \Rightarrow 3 < x_1 < 4 \\ 3,2^3 = 32,768 < 35 < 35,937 = 3,3^3 & \Rightarrow 3,2 < x_1 < 3,3 \\ 3,27^3 = 34,965783 < 35 < 35,287552 = 3,28^3 & \Rightarrow 3,27 < x_1 < 3,28 \end{aligned}$$

usw.

Das Verfahren läßt sich beliebig fortsetzen, und wir erhalten eine Folge von ineinandergeschachtelten Intervallen $[3; 4]$, $[3,2; 3,3]$, $[3,27; 3,28]$, ... Bei jedem Schritt wird die Intervalllänge auf $\frac{1}{10}$ der vorangehenden Intervalllänge verkleinert; sie wird also beliebig klein. Es handelt sich somit um eine Intervallschachtelung. Diese bestimmt genau eine Zahl ξ , die allen Intervallen der Schachtelung angehört. Für ξ gelten demnach folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 3 < \xi < 4 & \Rightarrow 3^3 < \xi^3 < 4^3 \\ 3,2 < \xi < 3,3 & \Rightarrow 3,2^3 < \xi^3 < 3,3^3 \\ 3,27 < \xi < 3,28 & \Rightarrow 3,27^3 < \xi^3 < 3,28^3 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Offensichtlich stellt $[3^3; 4^3]$, $[3,2^3; 3,3^3]$, $[3,27^3; 3,28^3]$, ... ebenfalls eine Intervallschachtelung dar. Diese wurde so konstruiert, daß die Zahl 35 allen Intervallen angehört. Da es aber zu einer Intervallschachtelung nur eine einzige innere Zahl gibt, gilt also: $\xi^3 = 35$. Damit wurde *eine* positive Lösung der Gleichung $x^3 = 35$ konstruiert. Ihre Dezimalentwicklung kann nach dem obigen Verfahren grundsätzlich mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden. Die Zahl ξ ist auch die *einzige* nichtnegative Lösung von $x^3 = 35$. Für jede von ξ verschiedene nichtnegative Zahl η gilt wegen Satz 44.1 nämlich

$$\begin{aligned} \text{entweder } \eta < \xi & \Rightarrow \eta^3 < \xi^3 = 35 \\ \text{oder } \eta > \xi & \Rightarrow \eta^3 > \xi^3 = 35. \end{aligned}$$

η kann also keine weitere Lösung der Gleichung $x^3 = 35$ sein.

Aufgaben

1. Bestimme die nichtnegativen Lösungen folgender Gleichungen:

- | | | |
|----------------------|--------------------|--------------------------------|
| a) $x^2 = 81$ | b) $x^4 = 81$ | c) $x^3 = 125$ |
| d) $x^3 = 0,125$ | e) $x^3 = 0,216$ | f) $x^4 = 0,0625$ |
| g) $x^2 = 3^2 + 4^2$ | h) $x^4 = 5^0 - 1$ | i) $x^3 = 1 - 19 \cdot 3^{-3}$ |

2. Bestimme die nichtnegativen Lösungen folgender Gleichungen:

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $x^3 = 10^6$ | b) $x^4 = (-10)^4$ | c) $x^4 = (-2)^{12}$ |
| d) $x^2 = 10^{-4}$ | e) $x^5 = (-2)^{-10}$ | f) $x^4 - 1 = 0$ |
| g) $x^3 = 64 \cdot 10^3$ | h) $x^3 = 3,43 \cdot 10^2$ | i) $x^4 = 6,25 \cdot 10^6$ |
| k) $x^5 = 32 \cdot 10^{-5}$ | l) $x^7 = 1,28 \cdot 10^{-5}$ | m) $x^2 = 1,156 \cdot 10^{-9}$ |

•3. Bestimme die nichtnegativen Lösungen folgender Gleichungen:

- | | | |
|----------------|-------------------|--------------------|
| a) $x^2 = a^4$ | b) $x^3 = b^6$ | c) $x^4 = 81a^8$ |
| d) $x^2 = a^2$ | e) $x^4 = b^{12}$ | f) $x^6 = a^{-18}$ |

•4. Unter welchen Voraussetzungen haben die folgenden Gleichungen eine nichtnegative Lösung? Wie lautet sie?

- | | | |
|----------------------|---------------------------------|-----------------------|
| a) $x^3 = a^3$ | b) $x^3 = (-a)^3$ | c) $x^3 = -a^3$ |
| d) $x^5 = -32a^{15}$ | e) $x^7 = 128 \cdot (-a)^{-14}$ | f) $x^3 = (a-b)^{-3}$ |

5. Bestimme mit \mathbb{R}_0^+ als Grundmenge die Lösungsmenge der Gleichungen

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| a) $x^3 = 8$ | b) $x^3 = -8$ | c) $x^5 = -(a^2 + 1)^5$ |
| d) $x^4 = -a^3 \cdot (-a)^5$ | e) $x^6 = \frac{-a^2}{(-a)^8}$ | f) $x^4 = -a^{-3} : (-a)^5$ |

6. SchlieÙe die nichtnegativen Lösungen der folgenden Gleichungen jeweils in ein Intervall der Länge 0,1 ein.

- | | | |
|-----------------|-------------------------|---------------------|
| a) $x^3 = 15$ | b) $x^3 = 100$ | c) $x^4 = 50$ |
| d) $x^3 = 0,05$ | e) $x^4 = 0,0000998375$ | f) $x^2 = \sqrt{2}$ |

7. **Das Delische Problem der Würfelverdopplung.** Das Problem, zu einem gegebenen Würfel der Kantenlänge a einen Würfel zu konstruieren, dessen Rauminhalt doppelt so groß wie der des gegebenen ist, führt für die Kante x des neuen Würfels auf die reine kubische Gleichung $x^3 = 2a^3$, eine Gleichung, die schon die Babylonier um 1900 v. Chr. allgemein als $x^3 = V$ (Keilschrifttafel BM 85200) behandelten.

- a) Bestimme, beginnend mit dem Intervall $[1; 2]$, durch fortgesetzte Halbierung ein Intervall der Länge 2^{-10} , in dem die nichtnegative Lösung von $x^3 = 2$ liegt. Wie viele Dezimalstellen der Lösung sind damit gesichert?
- b) Die Aufgabe der Würfelverdopplung taucht bei den Griechen bereits in den Anfangszeiten der Mathematik auf. EUTOKIOS (1. Hälfte des 6. Jh.s n. Chr.) überliefert uns in seinem Kommentar zu ARCHIMEDES' Schrift »Über Kugel und Zylinder« einen fälschlich dem ERATOSTHE-

NES* (um 284/274–um 202/194 v. Chr.) zugeschriebenen Brief an PTOLEMAIOS III. Darin wird berichtet, ein Tragödiendichter aus alter Zeit habe König MINOS von Kreta, als er feststellen mußte, daß das Grab für seinen Sohn GLAUKOS nach jeder Seite nur 100 Fuß messe, ausrufen lassen:**

»Zu klein entwarfst des königlichen Grabes Raum.
Noch mal so groß sei er! [Des Würfels] Schönheit nicht verfehl,
Vom Grabe jede Seite drum verdopple schnell!«

Dann wird erklärt, warum ein solches Vorgehen nicht zum Ziel führt, und berichtet, HIPPOKRATES VON CHIOS (wirkte zwischen 450 und 430 v. Chr.) sei es als erstem gelungen, »das Problem durch ein nicht minder schweres zu ersetzen«***: Man müsse lediglich zwischen die zwei Strecken a und b ($= 2a$) zwei mittlere Proportionale einschalten, d.h. zwei Strecken x und y konstruieren, die der Bedingung $a : x = x : y \wedge x : y = y : b$ genügen. Anders ausgedrückt: Die vier Strecken bilden die stetige Proportion $a : x = x : y = y : b$.

1) Zeige, daß x die Kante des gesuchten Würfels doppelten Volumens ist.

2) Welches Volumen hat ein Würfel, dessen Kante y ist?

•c) ARCHYTAS VON TARENT (wirkte um 400–360 v. Chr.) konnte als erster die Strecken x und y konstruieren, indem er einen Zylinder mit einem Kegel und einem Torus zum Schnitt brachte. Die erste ebene Konstruktion führte MENAICHMOS (Mitte 4. Jh. v. Chr.) aus, indem er zwei Parabeln zum Schnitt brachte. Bei dieser Gelegenheit entdeckte er die Parabel als Kurve!

1) Leite aus der Bedingung des HIPPOKRATES die beiden Parabelgleichungen her.

2) Zeichne für $a = 1$ die beiden Parabeln und bestimme damit einen Näherungswert für die Lösung von $x^3 = 2$. (Einheit 5 cm)

•d) In dem falschen ERATOSTHENES-Brief heißt es dann später, die Delier hätten auf Grund eines Orakelspruchs einen ihrer Altäre verdoppeln sollen und sich, als sie in dieselben Schwierigkeiten geraten waren, an die Geometer aus der Akademie um PLATON (428–348 v. Chr.) um Hilfe gewandt.

Uns nimmt wunder, daß das mathematische Problem zwei mythologische Ursprünge haben soll. Man ist heute der Überzeugung, daß die zweite Geschichte eine dichterische Erfindung des ERATOSTHENES ist, die man bereits viel früher, nämlich bei THEON VON SMYRNA (um 130 n. Chr.) findet:

* Der aus Kyrene stammende ERATOSTHENES wurde wegen seiner Vielseitigkeit zum Inbegriff griechischer Gelehrsamkeit: Er war Philosoph, Dichter, Grammatiker; als Historiker führte er die chronologische Zählung nach Olympiaden ein, als Geograph entwarf er eine Erdkarte mit Hilfe eines Koordinatennetzes aus Parallelkreisen und Meridianen und bestimmte den Erdumfang durch Ausmessen der Entfernung Assuan–Alexandria; als Mathematiker erfand er u.a. das »Sieb« (κόσκινον [kóskinon]) zur Aussonderung der Primzahlen. Als erster nannte er sich *Philologe* (φιλόλογος [philólogos]), d.h. Freund der Gelehrsamkeit.

** μικρὸν γ' ἔλεξας βασιλικῶς σηκὸν τάφου·
διπλάσιος ἔστω τοῦ καλοῦ δὲ μὴ σφαλῆς
διπλαζ', ἕκαστον κῶλον ἐν τάχει τάφου. (Sechsfüßiger Iambus)

*** HIPPOKRATES gilt als Erfinder des logischen Verfahrens der Zurückführung (ἀπαγωγή [apagogé]) eines Problems auf ein gleichwertiges anderes.

»ERATOSTHENES berichtet in der Schrift, die den Titel *Πλατωνικός* (Platonikós) trägt, daß zufolge eines Orakelspruches des Gottes an die Delier, des Inhalts, sie sollten zur Befreiung von der Pest einen Altar von doppelter Größe des bereits bestehenden errichten, die Architekten in große Verlegenheit geraten seien, als sie forschten, wie man einen Körper verdoppeln müsse; und sie seien schließlich gegangen, um in dieser Sache PLATON um Rat zu fragen. PLATON habe ihnen aber erklärt, daß der Gott nicht einen Altar von doppelter Größe nötig habe, ihnen vielmehr ein solches Orakel erteilt habe, um die Griechen zu tadeln, daß sie die Mathematik vernachlässigten und die Geometrie geringschätzten.«

Und so kam das Problem zu seinem Namen »Delisches Problem«. Wozu aber diese Dichtung? Vermutlich wollte ERATOSTHENES auf seine große Erfindung aufmerksam machen, auf das Mesolabium*, mit dem man zu zwei beliebigen Strecken a und b die beiden mittleren Proportionalen erzeugen kann (Abbildung 48.1).

Zeige: Verschiebt man von den drei aneinanderliegenden kongruenten Rechtecken die beiden schraffierten so, daß die Punkte A, X, Y und B auf einer Geraden liegen, dann bilden a , x , y und b eine stetige Proportion.

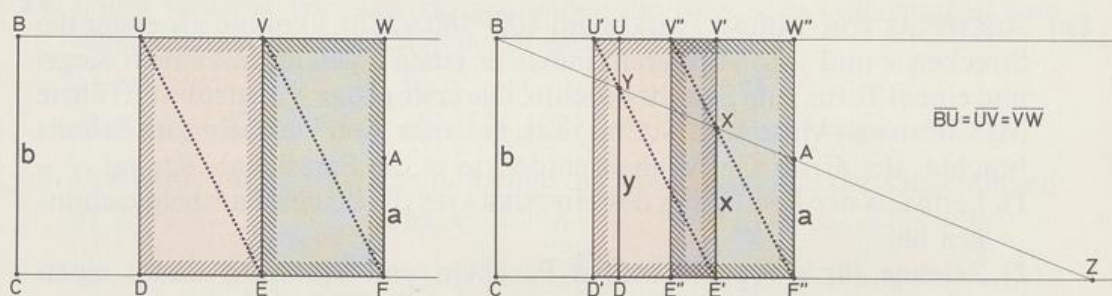


Abb. 48.1 Das Mesolabium des ERATOSTHENES

3.2 Die allgemeine Wurzel

Nach Satz 45.1 hat jede Gleichung der Form $x^n = a$ mit $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ genau eine nichtnegative Lösung. Man bezeichnet sie mit dem Symbol $\sqrt[n]{a}$, gesprochen » n -te Wurzel aus a «. Wir halten dies fest in

Definition 48.1: Für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $\sqrt[n]{a}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$.

Die unter dem Wurzelzeichen stehende Zahl heißt **Radikand**, die auf das Wurzelzeichen geschriebene natürliche Zahl **Wurzelexponent**.

* griechisch *mesólabon* (mesólabon), von *mésos* (mésos) = *mittlerer* und *labéin* (labéin) = *fassen, gewinnen*, also *Mittelgewinner*. ERATOSTHENES war auf seine Erfindung so stolz, daß er PTOLEMAIOS III. EUERGETES (reg. 246–221 v. Chr.) eine Säule errichtete, auf der er das Mesolabium in Bronze anbringen und den Beweis samt einem Epigramm einmeißeln ließ. Beide überlieferte uns EUTOKIOS in dem falschen ERATOSTHENES-Brief.