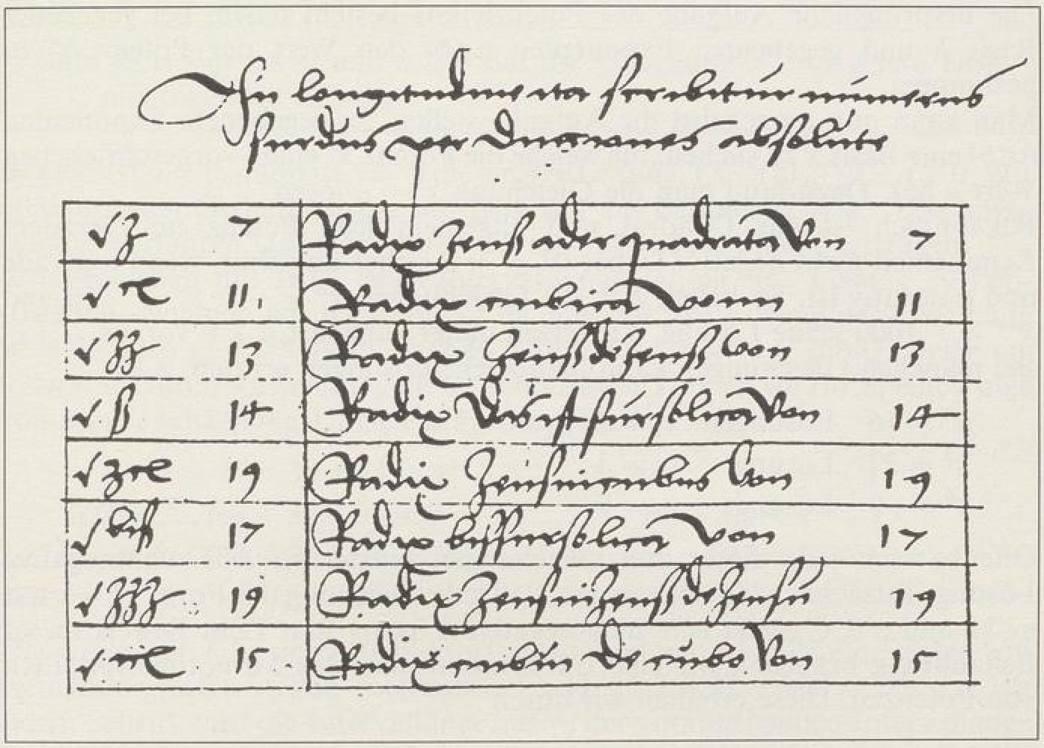
Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

3 Potenzen mit reellen Zahlen als Exponenten

3 Potenzen mit reellen Zahlen als Exponenten



ALGEBRAE Arabis Arithmetici viri Clarissimi Liber ad YLEM Geometram praeceptorem suum

»Das Buch des ALGEBRAS, des hochberühmten arabischen Mathematikers, an seinen Lehrer, den Geometer YLES«

Ein ansonsten unbekannter INITIUS ALGEBRAS soll dieses Buch über die *Gebra und Almuchabola* verfaßt haben. *Das Buch vom Ding der unwissenden Zahl* nennt es der Übersetzer und Kommentator. Man vermutet dahinter den Regensburger Magister Andreas ALEXANDER (um 1475 – nach 1504). YLES (= ELIAS) hielt man damals für den Verfasser eines Buchs mit dem Titel *Euklides*. – Abgebildet ist ein Ausschnitt aus fol. 126v des *Codex Dresden C 349*, geschrieben von Adam RIES (1492–1559) um 1517. Vorgeführt wird die Wurzelschreibweise irrationaler Zahlen, die durch einfaches Potenzieren rational werden, und es wird angegeben, wie die Wurzeln auszusprechen sind: $\sqrt{7}$ als *Radix zenß ader quadrata von 7*, $\sqrt[3]{11}$ als *Radix cubica vonn 11*, $\sqrt[4]{13}$ als *Radix zenß de zenß von 13*, $\sqrt[5]{14}$ als *Radix das ist sursolica von 14*, $\sqrt[6]{19}$ als *Radix zensuicubus von 19*, $\sqrt[7]{17}$ als *Radix bissursolica von 17*, $\sqrt[8]{19}$ als *Radix zensuizenß de zensu 19*, und schließlich $\sqrt[9]{15}$ als *Radix cubui de cubo von 15*. – Die auf Seite 53 in der 6. und 5. Textzeile von unten wiedergegebenen Zeichen stammen aus der gleichen Tabelle, aber in der Handschrift des *Codex Gotting. Philos. 30*, geschrieben 1545 bis 1548.

3 Potenzen mit reellen Zahlen als Exponenten

3.1 Die Gleichung $x^n = a$

Die ursprüngliche Aufgabe des Potenzierens besteht darin, bei gegebener Basis b und gegebenem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ den Wert der Potenz b^n zu bestimmen.
Man kann nun umgekehrt die Aufgabe stellen, zu gegebenem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ eine Basis x zu suchen, für welche die Potenz x^n einen vorgeschriebenen Wert a hat. Dazu muß man die Gleichung $x^n = a$ lösen.
Bekanntlich ist das Quadrat und allgemein jede Potenz mit geradem Exponenten nicht negativ. Daher ist $x^n = a$ sicher unlösbar, wenn n gerade und a negativ ist. So haben z. B. die Gleichungen $x^2 = -1$; $x^4 = -16$ und $x^{10} = -1000$ keine Lösung. Wir setzen daher zunächst $a \geqq 0$ voraus.
Bei manchen Gleichungen kann man leicht Lösungen erraten, z. B.

$x^4 = 16$ Lösungen: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$
$x^3 = 27$ Lösung: $x_1 = 3$
$x^6 = 0$ Lösung: $x_1 = 0$.

Offenbar hat jede dieser drei Gleichungen *mindestens eine* nichtnegative Lösung. Tatsächlich läßt sich zeigen, daß jede Gleichung der Form $x^n = a$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a \geqq 0$ *genau eine* nichtnegative Lösung hat. Zum Beweis dieser Behauptung brauchen wir eine Information über das Monotonieverhalten von Potenzen. Diese erhalten wir durch

Satz 44.1: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbf{0 \leqq a < b \Leftrightarrow 0 \leqq a^n < b^n}$

Beweis: Die dritte binomische Formel

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

läßt sich auf dritte Potenzen erweitern zu

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

und sogar ganz allgemein auf n-te Potenzen zu

$$\mathbf{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})}, \qquad (\blacksquare)$$

was sich durch Ausmultiplizieren der rechten Seite verifizieren läßt:

$$\begin{aligned} \text{RS} = {} & a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - \\ & - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \ldots - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n = a^n - b^n = \text{LS} \end{aligned}$$

Mit dieser Beziehung läßt sich Satz 44.1 leicht begründen.
Ist nämlich $0 \leqq a < b$, dann ist der erste Faktor $(a-b)$ auf der rechten Seite von $(\blacksquare)$ negativ, der zweite Faktor $(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} +$

$+ b^{n-1})$ aber positiv, also gilt RS < 0 und damit auch LS < 0. Das heißt aber $a^n - b^n < 0$ und somit $a^n < b^n$.
Ist andererseits $0 \leqq a^n < b^n$, dann gilt LS < 0 und somit auch RS < 0. Weil der zweite Faktor aber immer positiv ist, muß $(a - b)$ negativ sein, also ist $a < b$.

Damit kehren wir zu unserem eigentlichen Problem zurück und beweisen

Satz 45.1: Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \geqq 0$ hat die Gleichung $x^n = a$ genau eine nichtnegative Lösung.

Beweis: Ist $a = 0$, dann ist $x = 0$ die einzige Lösung. Es sei also jetzt $a > 0$. Wir erläutern den Gedankengang des Beweises am Beispiel $x^3 = 35$. Das angewandte Verfahren läßt sich ohne weiteres auf andere Fälle übertragen.
Wir versuchen mit Hilfe einer Intervallschachtelung eine Lösung zu konstruieren. Nehmen wir dazu an, x_1 sei eine positive Lösung der Gleichung $x^3 = 35$, also $x_1^3 = 35$. Nach Satz 44.1 folgt aus $0 < u^3 < v^3$ die Ungleichung $0 < u < v$. Durch Anwendung dieser Schlußweise können wir für x_1 eine Folge von immer schärferen Ungleichungen angeben:

$$\begin{aligned} 3^3 = 27 < 35 < 64 = 4^3 \quad &\Rightarrow \quad 3 < x_1 < 4 \\ 3{,}2^3 = 32{,}768 < 35 < 35{,}937 = 3{,}3^3 \quad &\Rightarrow \quad 3{,}2 < x_1 < 3{,}3 \\ 3{,}27^3 = 34{,}965783 < 35 < 35{,}287552 = 3{,}28^3 \quad &\Rightarrow \quad 3{,}27 < x_1 < 3{,}28 \end{aligned}$$

usw.

Das Verfahren läßt sich beliebig fortsetzen, und wir erhalten eine Folge von ineinandergeschachtelten Intervallen $[3; 4]$, $[3{,}2; 3{,}3]$, $[3{,}27; 3{,}28]$, … Bei jedem Schritt wird die Intervallänge auf $\frac{1}{10}$ der vorangehenden Intervallänge verkleinert; sie wird also beliebig klein. Es handelt sich somit um eine Intervallschachtelung. Diese bestimmt genau eine Zahl ξ, die allen Intervallen der Schachtelung angehört. Für ξ gelten demnach folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 3 < \xi < 4 \quad &\Rightarrow \quad 3^3 < \xi^3 < 4^3 \\ 3{,}2 < \xi < 3{,}3 \quad &\Rightarrow \quad 3{,}2^3 < \xi^3 < 3{,}3^3 \\ 3{,}27 < \xi < 3{,}28 \quad &\Rightarrow \quad 3{,}27^3 < \xi^3 < 3{,}28^3 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Offensichtlich stellt $[3^3; 4^3]$, $[3{,}2^3; 3{,}3^3]$, $[3{,}27^3; 3{,}28^3]$, … ebenfalls eine Intervallschachtelung dar. Diese wurde so konstruiert, daß die Zahl 35 allen Intervallen angehört. Da es aber zu einer Intervallschachtelung nur eine einzige innere Zahl gibt, gilt also: $\xi^3 = 35$. Damit wurde *eine* positive Lösung der Gleichung $x^3 = 35$ konstruiert. Ihre Dezimalentwicklung kann nach dem obigen Verfahren grundsätzlich mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden. Die Zahl ξ ist auch die *einzige* nichtnegative Lösung von $x^3 = 35$. Für jede von ξ verschiedene nichtnegative Zahl η gilt wegen Satz 44.1 nämlich

entweder $\eta < \xi \Rightarrow \eta^3 < \xi^3 = 35$
oder $\eta > \xi \Rightarrow \eta^3 > \xi^3 = 35$.

η kann also keine weitere Lösung der Gleichung $x^3 = 35$ sein.

Aufgaben

1. Bestimme die nichtnegativen Lösungen folgender Gleichungen:
   a) $x^2 = 81$ **b)** $x^4 = 81$ **c)** $x^3 = 125$
   d) $x^3 = 0{,}125$ **e)** $x^3 = 0{,}216$ **f)** $x^4 = 0{,}0625$
   g) $x^2 = 3^2 + 4^2$ **h)** $x^4 = 5^0 - 1$ **i)** $x^3 = 1 - 19 \cdot 3^{-3}$

2. Bestimme die nichtnegativen Lösungen folgender Gleichungen:
   a) $x^3 = 10^6$ **b)** $x^4 = (-10)^4$ **c)** $x^4 = (-2)^{12}$
   d) $x^2 = 10^{-4}$ **e)** $x^5 = (-2)^{-10}$ **f)** $x^4 - 1 = 0$
   g) $x^3 = 64 \cdot 10^3$ **h)** $x^3 = 3{,}43 \cdot 10^2$ **i)** $x^4 = 6{,}25 \cdot 10^6$
   k) $x^5 = 32 \cdot 10^{-5}$ **l)** $x^7 = 1{,}28 \cdot 10^{-5}$ **m)** $x^2 = 1{,}156 \cdot 10^{-9}$

•3. Bestimme die nichtnegativen Lösungen folgender Gleichungen:
   a) $x^2 = a^4$ **b)** $x^3 = b^6$ **c)** $x^4 = 81a^8$
   d) $x^2 = a^2$ **e)** $x^4 = b^{12}$ **f)** $x^6 = a^{-18}$

:4. Unter welchen Voraussetzungen haben die folgenden Gleichungen eine nichtnegative Lösung? Wie lautet sie?
   a) $x^3 = a^3$ **b)** $x^3 = (-a)^3$ **c)** $x^3 = -a^3$
   d) $x^5 = -32a^{15}$ **e)** $x^7 = 128 \cdot (-a)^{-14}$ **f)** $x^3 = (a-b)^{-3}$

5. Bestimme mit $\mathbb{R}_0^+$ als Grundmenge die Lösungsmenge der Gleichungen
   a) $x^3 = 8$ **b)** $x^3 = -8$ **c)** $x^5 = -(a^2+1)^5$
   d) $x^4 = -a^3 \cdot (-a)^5$ **e)** $x^6 = \dfrac{-a^2}{(-a)^8}$ **f)** $x^4 = -a^{-3} : (-a)^5$.

6. Schließe die nichtnegativen Lösungen der folgenden Gleichungen jeweils in ein Intervall der Länge 0,1 ein.
   a) $x^3 = 15$ **b)** $x^3 = 100$ **c)** $x^4 = 50$
   d) $x^3 = 0{,}05$ **e)** $x^4 = 0{,}0000998375$ **f)** $x^2 = \sqrt{2}$

7. **Das Delische Problem der Würfelverdopplung.** Das Problem, zu einem gegebenen Würfel der Kantenlänge a einen Würfel zu konstruieren, dessen Rauminhalt doppelt so groß wie der des gegebenen ist, führt für die Kante x des neuen Würfels auf die reine kubische Gleichung $x^3 = 2a^3$, eine Gleichung, die schon die Babylonier um 1900 v. Chr. allgemein als $x^3 = V$ (Keilschrifttafel BM 85200) behandelten.
   :**a)** Bestimme, beginnend mit dem Intervall $[1; 2]$, durch fortgesetzte Halbierung ein Intervall der Länge 2^{-10}, in dem die nichtnegative Lösung von $x^3 = 2$ liegt. Wie viele Dezimalstellen der Lösung sind damit gesichert?
   b) Die Aufgabe der Würfelverdopplung taucht bei den Griechen bereits in den Anfangszeiten der Mathematik auf. Eutokios (1. Hälfte des 6. Jh.s n. Chr.) überliefert uns in seinem Kommentar zu Archimedes' Schrift »Über Kugel und Zylinder« einen fälschlich dem Eratosthe-

NES* (um 284/274–um 202/194 v. Chr.) zugeschriebenen Brief an PTOLEMAIOS III. Darin wird berichtet, ein Tragödiendichter aus alter Zeit habe König MINOS von Kreta, als er feststellen mußte, daß das Grab für seinen Sohn GLAUKOS nach jeder Seite nur 100 Fuß messe, ausrufen lassen:**

»Zu klein entwarfst des königlichen Grabes Raum.
Noch mal so groß sei er! [Des Würfels] Schönheit nicht verfehl,
Vom Grabe jede Seite drum verdopple schnell!«

Dann wird erklärt, warum ein solches Vorgehen nicht zum Ziel führt, und berichtet, HIPPOKRATES VON CHIOS (wirkte zwischen 450 und 430 v. Chr.) sei es als erstem gelungen, »das Problem durch ein nicht minder schweres zu ersetzen«***: Man müsse lediglich zwischen die zwei Strecken a und b $(=2a)$ zwei mittlere Proportionalen einschalten, d.h. zwei Strecken x und y konstruieren, die der Bedingung $a:x = x:y \wedge x:y = y:b$ genügen. Anders ausgedrückt: Die vier Strecken bilden die stetige Proportion $a:x = x:y = y:b$.

1) Zeige, daß x die Kante des gesuchten Würfels doppelten Volumens ist.
2) Welches Volumen hat ein Würfel, dessen Kante y ist?

c) ARCHYTAS VON TARENT (wirkte um 400–360 v. Chr.) konnte als erster die Strecken x und y konstruieren, indem er einen Zylinder mit einem Kegel und einem Torus zum Schnitt brachte. Die erste ebene Konstruktion führte MENAICHMOS (Mitte 4. Jh. v. Chr.) aus, indem er zwei Parabeln zum Schnitt brachte. Bei dieser Gelegenheit entdeckte er die Parabel als Kurve!

1) Leite aus der Bedingung des HIPPOKRATES die beiden Parabelgleichungen her.
2) Zeichne für $a = 1$ die beiden Parabeln und bestimme damit einen Näherungswert für die Lösung von $x^3 = 2$. (Einheit 5 cm)

d) In dem falschen ERATOSTHENES-Brief heißt es dann später, die Delier hätten auf Grund eines Orakelspruchs einen ihrer Altäre verdoppeln sollen und sich, als sie in dieselben Schwierigkeiten geraten waren, an die Geometer aus der Akademie um PLATON (428–348 v. Chr.) um Hilfe gewandt.

Uns nimmt wunder, daß das mathematische Problem zwei mythologische Ursprünge haben soll. Man ist heute der Überzeugung, daß die zweite Geschichte eine dichterische Erfindung des ERATOSTHENES ist, die man bereits viel früher, nämlich bei THEON VON SMYRNA (um 130 n. Chr.) findet:

* Der aus Kyrene stammende ERATOSTHENES wurde wegen seiner Vielseitigkeit zum Inbegriff griechischer Gelehrsamkeit: Er war Philosoph, Dichter, Grammatiker; als Historiker führte er die chronologische Zählung nach Olympiaden ein, als Geograph entwarf er eine Erdkarte mit Hilfe eines Koordinatennetzes aus Parallelkreisen und Meridianen und bestimmte den Erdumfang durch Ausmessen der Entfernung Assuan–Alexandria; als Mathematiker erfand er u.a. das »Sieb« (κόσκινον [kóskinon]) zur Aussonderung der Primzahlen. Als erster nannte er sich *Philologe* (φιλόλογος [philólogos]), d.h. Freund der Gelehrsamkeit.

** μικρὸν γ᾽ ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου·
δῑπλάσιος ἔστω· τοῦ καλοῦ δὲ μὴ σφαλεὶς
διπλαζ᾽ ἕκαστον κῶλον ἐν τάχει τάφου. (Sechsfüßiger Iambus)

*** HIPPOKRATES gilt als Erfinder des logischen Verfahrens der Zurückführung (ἀπαγωγή [apagogé]) eines Problems auf ein gleichwertiges anderes.

»Eratosthenes berichtet in der Schrift, die den Titel *Πλατωνικός* (Platonikós) trägt, daß zufolge eines Orakelspruches des Gottes an die Delier, des Inhalts, sie sollten zur Befreiung von der Pest einen Altar von doppelter Größe des bereits bestehenden errichten, die Architekten in große Verlegenheit geraten seien, als sie forschten, wie man einen Körper verdoppeln müsse; und sie seien schließlich gegangen, um in dieser Sache Platon um Rat zu fragen. Platon habe ihnen aber erklärt, daß der Gott nicht einen Altar von doppelter Größe nötig habe, ihnen vielmehr ein solches Orakel erteilt habe, um die Griechen zu tadeln, daß sie die Mathematik vernachlässigten und die Geometrie geringschätzten.«

Und so kam das Problem zu seinem Namen »Delisches Problem«.
Wozu aber diese Dichtung? Vermutlich wollte Eratosthenes auf seine große Erfindung aufmerksam machen, auf das Mesolabium*, mit dem man zu zwei beliebigen Strecken a und b die beiden mittleren Proportionalen erzeugen kann (Abbildung 48.1).
Zeige: Verschiebt man von den drei aneinanderliegenden kongruenten Rechtecken die beiden schraffierten so, daß die Punkte A, X, Y und B auf einer Geraden liegen, dann bilden a, x, y und b eine stetige Proportion.

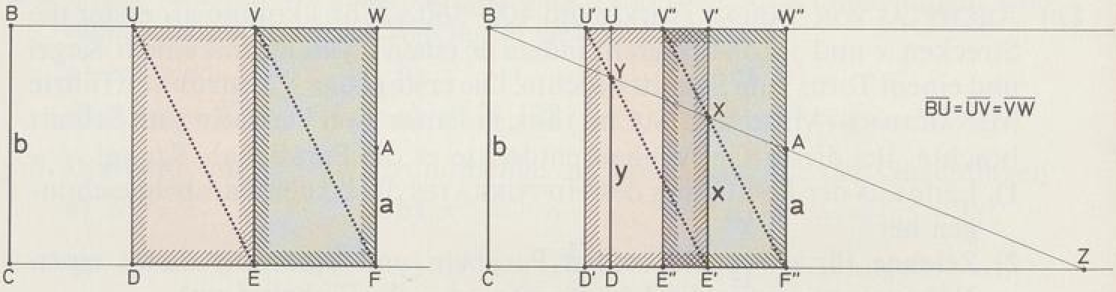


Abb. 48.1 Das Mesolabium des Eratosthenes

3.2 Die allgemeine Wurzel

Nach Satz 45.1 hat jede Gleichung der Form $x^n = a$ mit $a \geqq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ genau eine nichtnegative Lösung. Man bezeichnet sie mit dem Symbol $\sqrt[n]{a}$, gesprochen »n-te Wurzel aus a«. Wir halten dies fest in

Definition 48.1: Für $a \geqq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $\sqrt[n]{a}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$.

Die unter dem Wurzelzeichen stehende Zahl heißt **Radikand**, die auf das Wurzelzeichen geschriebene natürliche Zahl **Wurzelexponent**.

* griechisch μεσόλαβον (mesólabon), von μέσος (mésos) = *mittlerer* und λαβεῖν (labeı̃n) = *fassen, gewinnen*, also *Mittelgewinner*. Eratosthenes war auf seine Erfindung so stolz, daß er Ptolemaios III. Euergetes (reg. 246–221 v. Chr.) eine Säule errichtete, auf der er das Mesolabium in Bronze anbringen und den Beweis samt einem Epigramm einmeißeln ließ. Beide überlieferte uns Eutokios in dem falschen Eratosthenes-Brief.

Beispiele:

$\sqrt[3]{8} = 2$; denn 2 ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^3 = 8$. Ebenso gilt

$\sqrt[3]{64} = 4$ $\qquad$ $\sqrt[3]{27} = 3$ $\qquad$ $\sqrt[4]{625} = 5$

$\sqrt[5]{0{,}00032} = 0{,}2$ $\qquad$ $\sqrt[3]{0{,}343} = 0{,}7$ $\qquad$ $\sqrt[10]{1024} = 2$

$\sqrt[2]{16} = 4$ $\qquad$ $\sqrt[5]{0} = 0$ $\qquad$ $\sqrt[3]{a^6} = a^2$

$\sqrt[4]{a^4} = |a|$ $\qquad$ $\sqrt[2]{1{,}21} = 1{,}1$ $\qquad$ $\sqrt[6]{(-a)^6} = |a|$.

Wie man sieht, ist die früher eingeführte Quadratwurzel $\sqrt{a}$ ein Sonderfall der allgemeinen Wurzel, nämlich für den Wurzelexponenten $n = 2$. Es gilt also: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$. In der Regel läßt man jedoch bei der Quadratwurzel (aber nur bei dieser!) den Wurzelexponenten weg.
Wir fassen die Eigenschaften der allgemeinen Wurzel zusammen in

Satz 49.1: 1) $\sqrt[n]{a}$ ist definiert für nichtnegative Radikanden a und natürliche Wurzelexponenten n.
2) $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} \geqq 0}$ $\qquad$ **3)** $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$

Die Verwendung des Symbols $\sqrt[n]{a}$ beinhaltet bereits die Voraussetzungen $a \geqq 0$ und n natürliche Zahl; dies braucht also im folgenden nicht jedesmal besonders angegeben zu werden.
Auf Grund der allgemeinen Wurzeldefinition gilt für $a \geqq 0$ die Beziehung $\sqrt[1]{a} = a$. Auf das Zeichen $\sqrt[1]{\ }$ wird man also im allgemeinen verzichten können.
Für negatives a und gerades n ist a^n positiv und damit $\sqrt[n]{a^n}$ definiert. Nach Definition 48.1 bezeichnet man damit die positive Lösung der Gleichung $x^n = a^n$, also $-a = |a|$. Demnach gilt

Satz 49.2: Für $a \in \mathbb{R}$ und gerades n ist $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^n} = |a|}$.

Bei der Quadratwurzel ist dir dieser Sachverhalt schon längst bekannt; denn dort gilt

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\quad$ aber $\quad \sqrt{a^2} = |a|$.

Ausdrücke der Form $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ und $\sqrt[n]{a^m}$ lassen sich mit Hilfe von Satz 14.2 leicht berechnen, wenn n ein Teiler von m ist. So gilt z.B.

$\left(\sqrt[4]{5}\right)^{12} = \left(\sqrt[4]{5}\right)^{4\cdot 3} = \left(\left(\sqrt[4]{5}\right)^4\right)^3 = 5^3 = 125.$

$\sqrt[4]{5^{12}} = \sqrt[4]{5^{3\cdot 4}} = \sqrt[4]{(5^3)^4} = 5^3 = 125.$

Bei negativen Basen ist Satz 49.2 zu beachten:

$\sqrt[4]{(-5)^{12}} = \sqrt[4]{(-5)^{3\cdot 4}} = \sqrt[4]{[(-5)^3]^4} = |(-5)^3| = 5^3 = 125.$

Aufgaben

1. a) $\sqrt[3]{8}$ b) $\sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt[3]{125}$ d) $\sqrt[3]{343}$ e) $\sqrt[3]{216}$
f) $\sqrt[3]{729}$ g) $\sqrt[3]{512}$ h) $\sqrt[3]{1000}$ i) $\sqrt[4]{1}$ k) $\sqrt[4]{16}$
l) $\sqrt[5]{32}$ m) $\sqrt[6]{0}$ n) $\sqrt[4]{81}$ o) $\sqrt[5]{100000}$ p) $\sqrt[9]{512}$

2. a) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ b) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$ c) $\sqrt[5]{\frac{243}{1024}}$ d) $\sqrt{\frac{289}{324}}$ e) $\sqrt[6]{\frac{1}{729}}$
f) $\sqrt[3]{0{,}125}$ g) $\sqrt[5]{0{,}00032}$ h) $\sqrt[4]{0{,}0625}$ i) $\sqrt[7]{0{,}0000001}$ k) $\sqrt[5]{0{,}03125}$

3. a) $\sqrt{361} + 5\sqrt[3]{0{,}064} - 29\sqrt[9]{512}$ b) $4\sqrt[8]{\frac{1}{256}} - 12\sqrt[3]{\frac{27}{64}} + 0{,}4\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$

4. a) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$ b) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^5$ c) $\left(\sqrt[4]{11}\right)^8$ d) $\left(\sqrt{2}\right)^6$ e) $\left(\sqrt[6]{7}\right)^{18}$

5. a) $\left(\sqrt[4]{c}\right)^4$ b) $\left(\sqrt[7]{3a^2}\right)^7$ c) $\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}\right)^n$ d) $\left(\sqrt[n]{ab}\right)^{2n}$ e) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n^2+n}$

6. Für welche Werte von a und b sind die folgenden Wurzelausdrücke definiert? Führe, wenn notwendig, eine Fallunterscheidung durch.
a) $\sqrt[3]{a}$ b) $\sqrt[6]{a^{-1}}$ c) $\sqrt[5]{a^2}$ d) $\sqrt[5]{a^3}$ e) $\sqrt[10]{\frac{a^2}{b}}$
f) $\sqrt[n]{ab}$ •g) $\sqrt[n]{a^{-3}b^{n+3}}$ h) $\sqrt[k]{a^{1-2k}}$ •i) $\sqrt[4]{a^{n-1}b^n}$ k) $\sqrt[7]{\frac{a^{2n+1}}{b^{2n-1}}}$

•**7.** Berechne:
a) $\sqrt[5]{3^5} - \sqrt[4]{(-2)^4}$ b) $\sqrt[3]{(-7)^6} + \sqrt{(-3)^6} - 66\sqrt[4]{(-1)^{20}}$
c) $\sqrt[4]{a^4} - \sqrt[7]{b^7}$ d) $\sqrt[8]{a^{16}} + \sqrt[6]{a^{18}b^6} - \sqrt[3]{|a|^9 \cdot |b|^{15}}$

8. $\boldsymbol{\sqrt[3]{729\cdot 125} = \sqrt[3]{9^3\cdot 5^3} = \sqrt[3]{(9\cdot 5)^3} = 9\cdot 5 = 45}$. Löse analog:
a) $\sqrt{64\cdot 324}$ b) $\sqrt[3]{125\cdot 0{,}008}$
c) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}\cdot 0{,}00243}$ d) $\sqrt[4]{625\cdot 5\frac{1}{16}\cdot 0{,}0016}$
e) $\sqrt[3]{0{,}001\cdot(2{,}7\cdot 10^4)\cdot 0{,}125}$ •f) $\sqrt[6]{(6{,}4\cdot 10^{-11})\cdot(0{,}5)^{-6}\cdot(7{,}29\cdot 10^2)}$

9. Berechne, falls möglich:

a) $\sqrt[4]{3^4}$ **b)** $\sqrt[4]{(-3)^4}$ **c)** $\sqrt[4]{(-3)^{-4}}$ **d)** $\sqrt[5]{3^5}$

e) $\sqrt[5]{(-3)^5}$ **f)** $\sqrt[5]{(-3)^{-5}}$ **g)** $\sqrt[5]{|-3|^5}$ **h)** $\sqrt[5]{|-3|^{-5}}$

i) $\sqrt[8]{(-1)^8}$ **j)** $\sqrt[8]{(-1)^{-8}}$ **k)** $\sqrt[8]{-1^{-8}}$ **l)** $\sqrt[8]{(-\frac{1}{100})^{-4}}$

•m) $\sqrt[9]{(-\frac{27}{8})^{-6}}$ **•n)** $\sqrt[5]{(\frac{32}{243})^2}$ **•o)** $\sqrt[3]{(\frac{27}{125})^2}$ **p)** $\sqrt[6]{(-\frac{9}{25})^3}$

10. Die folgenden Gleichungen sind vom Typ $x^n = a$. Gib jeweils alle Lösungen an. Welche von ihnen kann als $\sqrt[n]{a}$ geschrieben werden?

a) $x^3 = 8$ **b)** $x^3 = -8$ **c)** $x^4 = 625$ **d)** $x^4 = -16$

e) $x^7 = 0$ **f)** $x^5 = -243$ **g)** $x^5 = 2^{10}$ **h)** $x^7 = 0{,}5^{-14}$

**3.3 Zur Geschichte der allgemeinen Wurzel

Die Entdeckung der Inkommensurabilität zweier Strecken und damit letztlich der Irrationalzahl durch die PYTHAGOREER um die Mitte des 5. Jh.s v. Chr. gehört zu den Großtaten der griechischen Mathematik. Erinnern wir uns: Die Aufgabe, ein Quadrat zu finden, dessen Flächeninhalt doppelt so groß wie der eines gegebenen Quadrats ist, führt auf die Gleichung $x^2 = 2$, die durch keine rationale Zahl gelöst werden kann; geometrisch aber existiert eine Strecke für die Seite des gesuchten Quadrats, nämlich die Diagonale des gegebenen Quadrats. $\sqrt{2}$ war geboren!
THEODOROS von Kyrene (um 465 – um 385 v. Chr.) erkannte, wie uns PLATON (428–348 v. Chr.) in seinem um 368 verfaßten Dialog *Theätet* (147c–148b) berichtet, daß die Quadratwurzeln aus einer Nichtquadratzahl immer irrational sind; ihre Existenz konnte er an Quadraten bzw. rechtwinkligen Dreiecken nachweisen. Sein und PLATONS Schüler THEAITETOS (um 415 – 369 v. Chr.) entdeckte die höheren Irrationalitäten; das sind Zahlen, die auch durch Quadrieren nicht rational werden, wie $\sqrt{\sqrt{a}}$ und auch oft $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. EUKLID (um 300 v. Chr.) behandelt im 117 Sätze umfassenden Buch X seiner *Elemente* diese höheren Irrationalitäten erschöpfend. Anders ausgedrückt: Die Griechen verstanden mit Quadratwurzeln und 4. Wurzeln zu rechnen. Wie stand es aber mit den anderen Wurzeln? PLATON läßt THEAITETOS in dem angegebenen Dialog sagen, daß er auch mit Raumgrößen, d.h. mit kubischen Irrationalitäten entsprechend umgehen könne. In Wahrheit gelang dies den Griechen jedoch nicht. Das Delische Problem der Würfelverdopplung (Aufgabe 46/**7**) führt auf die Gleichung $x^3 = 2$, von der sich zwar genauso wie von $x^2 = 2$ zeigen läßt, daß sie durch keine rationale Zahl lösbar ist (Aufgabe 54/**1**). Entscheidend aber war wohl, daß man, anders als bei der Quadratverdopplung, mit Zirkel und Lineal keine Strecke konstruieren konnte, die die Kante des doppelt so großen Würfels ist. Damit fehlte anscheinend für die Griechen trotz der im dreidimensionalen Raum mit Hilfe von Körpern durchgeführten Konstruktion des ARCHYTAS (um 375 v. Chr.) – siehe Aufgabe 46/**7.b**) – der Nachweis, daß $\sqrt[3]{2}$ überhaupt existiert. Für PLATON blieb das Problem ungelöst; wir wissen seit Évariste GALOIS (1811–1832) – siehe Seite 118f. –, daß es mit Zirkel und Lineal unlösbar ist. Da die Griechen aber anscheinend nicht bereit waren, an die Existenz der 3. Wurzeln zu glauben – sie sind ja meist weder rationale Zahlen noch als Strecken konstruierbar –, wurden sie auch zahlentheoretisch nicht behandelt. Lediglich bei

Heron von Alexandria (um 62 n. Chr.), einem sehr dem Praktischen zugewandten Mathematiker, finden wir in seinem *Περὶ μέτρων* (lateinisch *metrica* – »Vermessungslehre« –) ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung einer Kubikwurzel, vorgeführt an $\sqrt[3]{100}$ (Aufgabe 54/**2**).

Im *Chiu Chang Suan Shu* – »Neun Bücher arithmetischer Technik« – aus der Han-Zeit (202 v. Chr. – 9 n. Chr.) wird ein sehr modernes Verfahren zum Ausziehen der Kubikwurzel gelehrt, das dazu benützt wird, bei gegebenem Würfelvolumen die Würfelkantenlänge zu bestimmen. Bei den Indern lehrt Āryabhata I (476 n. Chr. – ?) das exakte Berechnen kubischer Wurzeln in Vers 5 des *Ganita-pada* – »Abschnitt über die Rechenkunst« – seines 498 geschriebenen Werkes *Aryabhatiya*.

Bei den Arabern sollen die persischen Mathematiker Abu al-Wafa (940–997), al-Biruni (973–1051?) und Omar al-Hayyam (1048?–1131) Werke über das Berechnen auch höherer Wurzeln geschrieben haben, die aber nicht erhalten blieben. Al-Hayyam behauptet in seiner *Algebra*, daß es ihm als erstem gelungen sei, beliebig hohe Wurzeln zu ziehen. Wir müssen daher annehmen, daß er über den binomischen Lehrsatz verfügte, d. h., daß er $(a+b)^n$ für beliebige natürliche Exponenten berechnen konnte. Belegt ist dieser Lehrsatz im arabischen Raum aber erst um 1265 bei dem Perser Nasir al-Din al-Tusi (1201–1274).*

Abb. 52.1 Petrus Apian, eigentl. Peter Bennewitz oder Bienewitz (16.4.1495 Leisnig bei Leipzig – 21.4.1552 Ingolstadt) – Holzschnitt von Tobias Stimmer

Abb. 52.2 Titelblatt des Rechenbuchs von Peter Apian aus dem Jahre 1527**

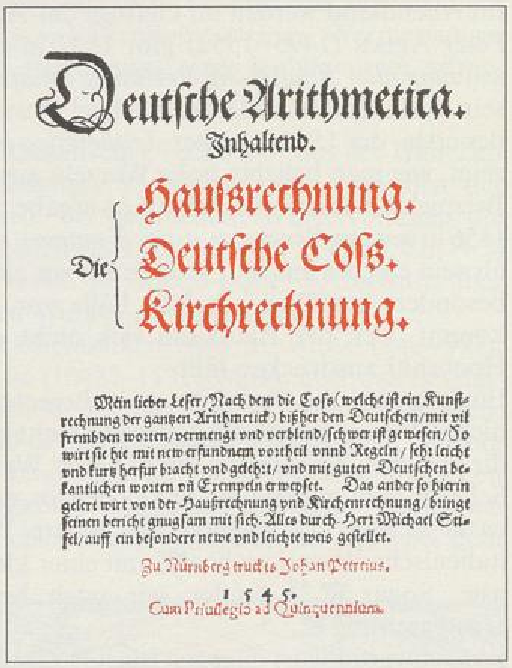
* In China war der Satz schon früher bekannt: Yang Hui bringt ihn 1261 in seiner *Untersuchung der Arithmetischen Regeln der Neun Bücher*, die auf Qia Xsian (um 1100) zurückgeht.

** Links unten das *Arithmetische Dreieck* der Koeffizienten von $(a+b)^n$, das hier zum ersten Mal in Europa im Druck erschien. Apian war seit 1527 Lektor für Mathematik an der Universität Ingolstadt.

Im Abendland werden im Gefolge der Araber Quadrat- und Kubikwurzeln gezogen. Peter Apian (1495–1552) gibt 1527 in seiner *Eyn Newe Vnnd wolgegründte underweysung aller Kauffmanß Rechnung* Beispiele für höhere Wurzeln bis zur achten, ohne sein Verfahren zu erklären. Michael Stifel (1487?–1567) ist schließlich im Abendland der erste, der 1544 in seiner *Arithmetica integra* mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes zeigt, wie man beliebig hohe Wurzeln ausrechnen kann. Und er führt es an einfachen Beispielen vor bis zur siebten (Aufgabe 57/**4**). Niccolò Tartaglia (1499–1557) gibt 1556 in seinem *General trattato di numeri, et misure* wider besseres Wissen das Verfahren als sein eigenes aus und zeigt es bis zur elften Wurzel. Dabei führt er auf vielen Seiten besonders ausführlich solche Fälle vor, bei denen das Verfahren zu keinem Ende kommt, weil der Radikand sich nicht als Potenz mit dem Wurzelexponenten als Hochzahl ausdrücken läßt.
Einfach sind die Verfahren zum Berechnen dritter und erst recht höherer Wurzeln nicht. Wir wollen sie dir daher gar nicht zeigen. Es bleibt uns aber noch die Aufgabe, dir von den Zeichen für die höheren Wurzeln zu berichten.
Sehr modern muten uns die Zeichen an, die Nicolas Chuquet 1484 in seinem *Triparty en la science des nombres* für höhere Wurzeln verwendet; verbindet er doch das italienische Wurzelzeichen ℞. mit einer kleinen hochgestellten Zahl: ℞.^{2}, ℞.^{3}, ℞.^{4}, ℞.^{5} usw. Sogar ℞.^{30} fanden wir noch bei ihm (Aufgabe 69/**24**) und zur großen Überraschung ℞.^{1}.*
Wie schwerfällig ist dagegen Luca Pacioli (um 1445–1517) in seiner *Summa* von 1494; er bildet »℞. quadrata de 9«, gelegentlich auch kürzer »℞. de 9« für $\sqrt{9}$, »℞. cuba de 8« für $\sqrt[3]{8}$, »℞.℞. de 16« für $\sqrt[4]{16}$ und natürlich – siehe Seite 37 – »℞. relata de 32« für $\sqrt[5]{32}$.
Geronimo Cardano (1501–1576) bringt auch keine wesentliche Verbesserung, wenn er die Beifügungen abkürzt: ℞.cu.8 ist $\sqrt[3]{8}$, ℞.ce.cu.81 ist $\sqrt[6]{81}$. Raffaele Bombelli (1526–1572) verwendet 1557/60 in seinem Manuskript der *L'Algebra* zwar ℞^{3}, wofür der Drucker aber 1572 lieber R.c. setzt.
Bekanntlich (siehe *Algebra 9*, Seite 35) hat sich der heute übliche Wurzelhaken aus dem Punkt des *Algorithmus de Surdis* des *Codex Dresden C 80* (vor 1486) entwickelt: ·25 ist $\sqrt{25}$. Folgerichtig bedeuten dort zwei Punkte die 4. Wurzel. Aber damit ist die Systematik schon zu Ende! Drei Punkte sind nicht, wie zu erwarten wäre, die 8. Wurzel, sondern die 3. Wurzel, und vier Punkte – welche Überraschung – die 9. Wurzel. Dieselbe Alogik übernimmt 1525 Christoff Rudolff in seine *Coß* – inzwischen ist dem Wurzelpunkt der Aufstrich beigefügt –, wenn er mit √, √√√, √√ die Quadratwurzel, die Kubikwurzel und die 4. Wurzel bezeichnet. Demgegenüber stellt die Schreibweise von Andreas Alexander (um 1475 – nach 1504), dem Übersetzer und Bearbeiter einer lateinischen *Algebra* eines Initius Algebras, einen Fortschritt dar: Er setzt hinter den Punkt mit Aufstrich die cossischen Potenzzeichen ζ, ce, ζζ, ß usw.; mit √ζ, √ce, √ζζ, √ß usw. hat man eine systematische Bezeichnung für die höheren Wurzeln (siehe Seite 43). Michael Stifel baut diese Schreibweise 1544 in seiner *Arithmetica integra* weiter aus. Einfacher und auch logisch überzeugend sind dagegen seine Zeichen aus seiner *Deutsche*[n] *Arithmetica* von 1545: z√, ʒ√, ʒʒ√ bedeuten Quadrat-, Kubik- bzw. 4. Wurzel, was bei ʒʒʒ√ für die 6. Wurzel zur Unleserlichkeit führt, so daß er schließ-

* Erstaunlich ist das systematische Denken Chuquets; schreibt er doch: »Man muß wissen, daß es unendlich viele Arten von Wurzeln gibt; denn einige sind zweite Wurzeln, andere dritte, andere vierte, andere fünfte und so fort ohne Ende. Erste Wurzeln finden sich aber nirgends. Und dennoch sollte man sie zur Fortsetzung der Ordnung einführen. Es ist zweckmäßig zu sagen, daß für jede Zahl die erste Wurzel aus einer Zahl die Zahl selbst ist, d. h. z. B., die erste Wurzel aus 12 ist 12. Man kann sie schreiben, indem man bei ℞. eine 1 hochstellt, also als ℞.^{1}12.«

lich, aber nur einmal **11 ⁄38** für $\sqrt[11]{38}$ schreibt. Leider verfolgt er diesen Einfall nicht weiter! Simon STEVIN (1548–1620) ist mit seinen für uns schon gut verständlichen Symbolen $\sqrt{②}$, $\sqrt{③}$ und $\sqrt{④}$ aus seiner *L'Arithmétique* (1585) einen guten Schritt weiter. 1629 kommt dann der Flame Albert GIRARD (1595–1632) in seiner *Invention nouvelle en l'algèbre* auf die Idee, den Wurzelexponenten in die Öffnung des Wurzelhakens zu schreiben, ohne diese neuen Symbole $\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$ ständig zu benützen. Natürlich haben sie sich erst langsam durchgesetzt. Im 18. Jh. werden sie Allgemeingut.



Deutsche Arithmetica.
Inhaltend.
Die Haußrechnung.
Deutsche Coß.
Kirchrechnung.

Mein lieber Leser/Nach dem die Coß(welche ist ein Kunstrechnung der gantzen Arithmetick) bißher den Deutschen/mit vil frembden worten/vermengt vnd verblend/schwer ist gewesen/So wirt sie hie mit new erfundnem vortheil vnnd Regeln / sehr leicht vnd kurtz herfur bracht vnd gelehrt/ vnd mit guten Deutschen bekantlichen worten vñ Exempeln erweyset. Das ander so hierin gelert wirt von der Haußrechnung vnd Kirchenrechnung/ bringt seinen bericht gnugsam mit sich. Alles durch Herr Michael Stifel/auff ein besondere newe vnd leichte weis gestellet.

Zu Nürnberg truckts Johan Petreius.
1 5 4 5.
Cum Priuilegio ad Quinquennium.

Abb. 54.1 Titelblatt der *Deutsche*[n] *Arithmetica* des Michael STIFEL (1487? Esslingen – 19.4.1567 Jena) von 1545

Aufgaben

1. a) Zeige, daß $\sqrt[3]{2}$ irrational ist. Führe dazu die Annahme, $\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ zu einem Widerspruch.

b) Zeige, daß die fünfte Wurzel aus einer Primzahl irrational ist.

2. Die von HERON von Alexandria (um 62 n. Chr.) in seinen *Μέτρικα* an Hand von $\sqrt[3]{100}$ vorgeführte näherungsweise Berechnung einer Kubikwurzel läßt sich folgendermaßen allgemein formulieren.

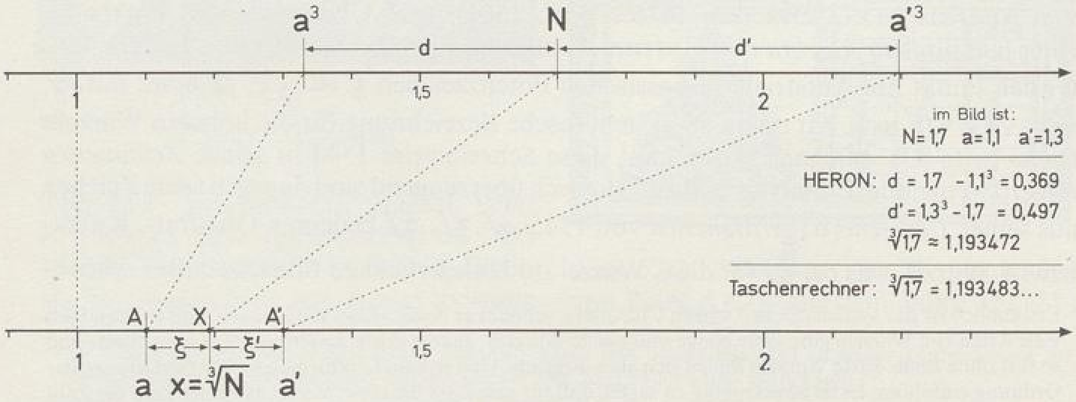


Abb. 54.1 Zum Verfahren von HERON, $\sqrt[3]{N}$ zu berechnen

Um $\sqrt[3]{N} =: x$ näherungsweise zu berechnen, wählt man zwei Zahlen a und a', die sich (höchstens) um 1 unterscheiden und deren Kuben die Zahl N einschließen: $a^3 < N < a'^3$.
Die Abstände $d := N - a^3$ und $d' := a'^3 - N$ sind dann bekannt. Die Aufgabe ist gelöst, wenn man einen der Abstände der Wurzeln, nämlich $\xi := x - a$ bzw. $\xi' := a' - x$, oder deren Verhältnis kennt. Dazu formt man um:

$$d = x^3 - a^3 = (x-a)^3 + 3ax(x-a) = \xi^3 + 3ax\xi \qquad (1)$$
$$d' = a'^3 - x^3 = (a'-x)^3 + 3a'x(a'-x) = \xi'^3 + 3a'x\xi' \qquad (2)$$

Da ξ und ξ' kleiner als 1 sind, werden die Kuben ξ^3 und ξ'^3 klein, können also vernachlässigt werden:

$$d \approx 3ax\xi \qquad (1')$$
$$d' \approx 3a'x\xi' \qquad (2')$$

X teilt die Strecke [AA′] im Verhältnis $\xi : \xi'$. Daher gilt $\xi = \overline{\mathrm{AX}} = \dfrac{\xi}{\xi+\xi'} \cdot \overline{\mathrm{AA'}}$. Aus (1′) und (2′) errechnet man $\dfrac{\xi}{\xi+\xi'} = \dfrac{a'd}{a'd+ad'}$ und erhält schließlich

$$\boxed{\sqrt[3]{N} \approx a + \frac{a'd}{a'd+ad'}\,(a'-a)}$$

a) Verifiziere die Gleichungen (1) und (2).

b) Leite aus (1′) und (2′) die Näherungsformel her. *Hinweis*: Multipliziere die Gleichungen mit a' bzw. a.

c) HERON schließt $\sqrt[3]{100}$ in zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen ein und erhält den Näherungswert $4\frac{9}{14}$. Bestätige dies und berechne den relativen Fehler dieser Näherung bezogen auf den Wert, den dein Taschenrechner liefert.

d) Bestimme nach dem Verfahren von HERON
1) $\sqrt[3]{2}$, **2)** $\sqrt[3]{65}$, **3)** $\sqrt[3]{120}$, **4)** $\sqrt[3]{330}$.

e) Bestimme einen Näherungswert für $\sqrt[3]{0{,}8}$ mit
1) $a = 0$ und $a' = 1$, **2)** $a = 0{,}8$ und $a' = 1$.

3. a) Für $|\alpha| \leqq 1$ gilt $\sqrt[n]{1+\alpha} \approx 1 + \dfrac{\alpha}{n}$. Begründe diese Näherungsformel durch folgende Überlegung: Setze $\sqrt[n]{1+\alpha} = 1 + \xi$ und erhebe beide Seiten zur n-ten Potenz. Beim Ausrechnen der rechten Seite kann man alle zweiten und höheren Potenzen von ξ weglassen, da sie im Vergleich zu ξ klein sind.

b) Leite für $N > 0$ mit Hilfe von **a)** die folgende Näherung her:

$$\boxed{\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n + b} \approx a + \frac{b}{na^{n-1}}}$$

c) Für $n = 2$ erhält man aus **b)** die Näherungsformel $\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a}$, die sich bereits auf der altbabylonischen Keilschrifttafel VAT 6598 (um 1600 v. Chr.) und auch in HERONS *Περὶ μέτρων* findet.

Für $n = 3$ erhält man die Näherungsformel $\sqrt[3]{a^3+b} \approx a + \frac{b}{3a^2}$, die 1539 Geronimo CARDANO (1501–1576) in seiner *Practica Arithmeticae* an Hand von $\sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{8+3}$ zeigt.* Niccolò TARTAGLIA (1499–1557) hält sie für falsch, da man mit ihr für $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8+16}$ einen zu großen Wert erhält.

1) Bestimme die Näherungswerte für die angegebenen Wurzeln.
2) In der Näherungsformel kann b auch negativ gewählt werden. Berechne damit einen Näherungswert für $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{27-3}$.

d) Bestimme näherungsweise

1) $\sqrt[3]{2}$, **2)** $\sqrt[3]{65}$, **3)** $\sqrt[3]{100}$, **4)** $\sqrt[3]{120}$, **5)** $\sqrt[3]{330}$, **6)** $\sqrt[3]{0{,}8}$.

• **e)** Wende auf die in **d)** erhaltenen Näherungswerte nochmals die Näherungsformel von CARDANO an, d.h., nimm den dort erhaltenen Näherungswert als neuen Startwert a, berechne das neue b und den neuen Näherungswert.

⁝ **f)** Zeige, daß die wiederholte Anwendung der Näherungsformel von CARDANO zur Iterationsformel

$$\boxed{x_{k+1} = \frac{N + 2x_k^3}{3x_k^2}}$$

führt, die Näherungswerte für $\sqrt[3]{N}$ liefert. Berechne damit die ersten vier Näherungen der in **c)** und **d)** angegebenen Wurzeln. Wie groß ist der relative Fehler gegenüber dem Wert, den dein Taschenrechner liefert?

g) Bestimme mit Hilfe von **b)** Näherungswerte für

1) $\sqrt[4]{2}$ **2)** $\sqrt[4]{65}$ **3)** $\sqrt[4]{100}$ **4)** $\sqrt[4]{5000}$ **5)** $\sqrt[4]{0{,}8}$.

h) Ersetze in **g)** $\sqrt[4]{}$ durch $\sqrt[5]{}$.

i) Ersetze in **g)** $\sqrt[4]{}$ durch $\sqrt[7]{}$.

* Weil man Vers 5 des *Ganita-pada* früher falsch verstand, glaubte man, ĀRYABHATA I habe mit dieser Formel Kubikwurzeln näherungsweise berechnet. Tatsächlich gab er aber ein Verfahren zur genauen Berechnung der Kubikwurzeln an.

j) Ersetze in **g)** $\sqrt[4]{}$ durch $\sqrt[11]{}$.

k) Zeige analog zu **f)**, daß

$$\boxed{x_{k+1} = \frac{N + (n-1)x_k^n}{n x_k^{n-1}}}$$

ein Iterationsverfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt[n]{N}$ darstellt.

l) Berechne mit der Iterationsformel aus **k)** Näherungswerte für die

1) in **g)**, **2)** in **h)**, **3)** in **i)**, **4)** in **j)**

angegebenen Wurzeln. Rechne so lange, bis dein Taschenrechner keinen neuen Wert mehr anzeigt.

4. Michael Stifel (1487?–1567) zeigt seine Regel zur Berechnung von höheren Wurzeln 1544 in der *Arithmetica integra* an Hand folgender Beispiele:

1) $\sqrt{6765201}$ **2)** $\sqrt[3]{238328}$ **3)** $\sqrt[5]{916132832}$

4) $\sqrt[7]{3521614606208}$ **5)** $\sqrt[8]{45949729863572161}$

a) Berechne die unter **1)** angegebene Wurzel mit dem Divisionsverfahren.

b) Berechne die Wurzeln unter **2)** bis **5)**. Überlege dabei zuerst, wie viele Stellen vor dem Komma das Ergebnis haben kann, und starte dann das Iterationsverfahren aus Aufgabe **3.k)** mit einer Zahl, die bis auf die vorderste Ziffer nur Nullen enthält.

5. Michael Stifel (1487?–1567) zeigt seine Regel zur Berechnung von höheren Wurzeln 1545 in der *Deutsche*[n] *Arithmetica* an Hand folgender Beispiele:

1) $\sqrt[4]{47458321}$ **2)** $\sqrt[7]{280648260320646639744}$

3) $\sqrt[11]{7516865509350965248}$

Berechne sie nach dem Vorgehen in Aufgabe **4.b)**.

3.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Das Rechnen mit allgemeinen Wurzeln ist sehr unhandlich. Wir haben keine Rechenregeln dafür hergeleitet, weil sich erfreulicherweise im Laufe der Entwicklung gezeigt hat, daß man die allgemeinen Wurzeln als Potenzen mit rationalen Exponenten auffassen kann, was den Umgang mit ihnen wesentlich erleichtert.
Wir lassen zunächst einmal probeweise Stammbrüche als Exponenten einer

Potenz zu. Für $a \geqq 0$ ist $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ gemäß Definition 48.1. Will man $\sqrt[n]{a}$ als Potenz a^r ausdrücken, dann muß gelten $(a^r)^n = a$. Wenn für den Exponenten r auch die Rechenregeln für Potenzen gelten – das wollen wir schließlich erreichen –, dann erhalten wir $(a^r)^n = a^{rn}$ und damit $a^{rn} = a = a^1$. Also muß $rn = 1$ sein, d.h., $r = \frac{1}{n}$. Diese Überlegung führt zu

> **Definition 58.1:** Für $a \geqq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:
> $$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$$

Wegen $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = a^1$ gilt also nach obiger Definition auch $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^1 = a^{\frac{n}{n}}$. Diese Beziehung regt dazu an, das Potenzsymbol auf beliebige rationale Exponenten $\frac{m}{n}$ zu erweitern durch

> **Definition 58.2:** Für $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt:
> $$a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Bemerkungen:

1) Ist $\frac{m}{n} > 0$, dann darf auch $a = 0$ sein. Es gilt $0^{\frac{m}{n}} = 0$.
2) Die Voraussetzung $a \geqq 0$ bzw. $a > 0$ wird im folgenden nicht immer besonders hervorgehoben. Sie ist bereits im Symbol $a^{\frac{m}{n}}$ enthalten.

Definition 58.2 gewährleistet, daß die Regel II für das Potenzieren einer Potenz auch dann gültig bleibt, wenn man zuerst mit einem Stammbruch und dann mit einer ganzen Zahl potenziert. Es ist nämlich $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n}\cdot m}$. Nun läßt sich aber der Bruch $\frac{m}{n}$ auch als $m \cdot \frac{1}{n}$ schreiben. Daher sollte $(a^m)^{\frac{1}{n}}$ ebenfalls $a^{\frac{m}{n}}$ sein. Tatsächlich gilt

> **Satz 58.1:** Für $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt:
> $$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$$
> in Wurzelschreibweise
> $$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Beweis: Für $x = a^{\frac{1}{n}}$ gilt nach Definition 48.1 in Verbindung mit Definition 58.1 $x^n = a$ und damit $(x^n)^m = a^m \Leftrightarrow (x^m)^n = a^m$. Setzen wir $y := x^m$, so lautet die letzte Gleichung $y^n = a^m$. Ihre einzige nichtnegative Lösung ist $y = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$. Andererseits gilt jedoch $y = x^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Eine unmittelbare Folgerung des soeben bewiesenen Satzes ist

> **Satz 59.1:** Ist $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$, dann ist $a^{\frac{m}{n}}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a^m$.

Beweis: Nach Definition 48.1 in Verbindung mit Definition 58.1 hat die Gleichung $x^n = a^m$ die Lösung $(a^m)^{\frac{1}{n}}$, was aber nach Satz 58.1 gleich $a^{\frac{m}{n}}$ ist.

Abschließend stellt sich noch die Frage, ob sich $a^{\frac{m}{n}}$ ändert, wenn der Bruch im Exponenten erweitert oder gekürzt wird, ob also z. B. $a^{\frac{2}{3}}$ dasselbe ist wie $a^{\frac{4}{6}}$. Nun gilt aber: Potenziert man die Gleichung $x^n = a^m$ mit $k \in \mathbb{N}$, so erhält man die Gleichung $x^{kn} = a^{km}$ mit der einzigen nichtnegativen Lösung $a^{\frac{km}{kn}}$. Potenzieren ist eine Gewinnumformung, d.h., die Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind auch Lösungen der potenzierten Gleichung. Da beide Gleichungen genau eine nichtnegative Lösung haben, gilt also

> **Satz 59.2:** Für $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ und $n, k \in \mathbb{N}$ gilt
> $$\boldsymbol{a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}}},$$
> d.h., eine Potenz mit positiver Basis ändert ihren Wert nicht, wenn der Exponent erweitert oder gekürzt wird.

Die Einschränkung in Satz 59.2 auf *positive* Basen ist wichtig! Zur Warnung diene folgende »Schlußkette«:

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = [(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$$

Das zweite Gleichheitszeichen wurde zu Unrecht gesetzt, weil gebrochene Exponenten nur bei positiver Basis verwendet werden dürfen.

Beachte: $\sqrt[3]{(-5)^2}$ ist definiert, und es gilt $\sqrt[3]{(-5)^2} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$. Die Umformung $\sqrt[3]{(-5)^2} = (-5)^{\frac{2}{3}}$ ist nicht zulässig. Die rechte Seite ist nämlich nicht definiert, weil die Basis negativ ist.

Noch mehr Vorsicht ist aber am Platz, wenn Variable im Spiel sind. So kann $\sqrt[4]{x^2}$ in $\mathbb{R}$ nicht in $x^{\frac{2}{4}}$ verwandelt werden, weil $x^{\frac{2}{4}}$ nur in $\mathbb{R}_0^+$ definiert ist. Richtig kann man $\sqrt[4]{x^2}$ wegen $x^{2n} = |x|^{2n}$ nur auf folgende Art in $\mathbb{R}$ vereinfachen:

$\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4]{|x|^2} = |x|^{\frac{2}{4}} = |x|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x|}$.

Aufgaben

1. Berechne:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ **b)** $27^{-\frac{1}{3}}$ **c)** $64^{-\frac{1}{2}}$ **d)** $64^{\frac{1}{3}}$ **e)** $32^{\frac{1}{5}}$

f) $625^{-\frac{1}{4}}$ **g)** $729^{\frac{1}{6}}$ **h)** $128^{\frac{1}{7}}$ **i)** $343^{-\frac{1}{3}}$ **k)** $1024^{\frac{1}{10}}$

2. a) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ **b)** $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$ **c)** $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$ **d)** $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$ **e)** $\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$

f) $0{,}125^{-\frac{1}{3}}$ **g)** $(6\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ **h)** $0{,}000729^{\frac{1}{6}}$ **i)** $3{,}375^{-\frac{1}{3}}$ **k)** $(5\frac{1}{16})^{\frac{1}{4}}$

3. a) $8^{\frac{2}{3}}$ **b)** $9^{-\frac{3}{2}}$ **c)** $27^{\frac{4}{3}}$ **d)** $16^{\frac{3}{4}}$ **e)** $125^{-\frac{5}{3}}$

f) $64^{\frac{5}{6}}$ **g)** $243^{-\frac{3}{5}}$ **h)** $100^{\frac{5}{2}}$ **i)** $1000^{-\frac{2}{3}}$ **k)** $1024^{\frac{7}{10}}$

4. a) $(\frac{4}{25})^{\frac{3}{2}}$ **b)** $(4\frac{17}{27})^{-\frac{2}{3}}$ **c)** $0{,}0256^{\frac{5}{4}}$ **d)** $(4\frac{12}{125})^{\frac{2}{3}}$ **e)** $0{,}01024^{-\frac{2}{5}}$

f) $0{,}01^{-\frac{3}{2}}$ **g)** $0{,}343^{\frac{4}{3}}$ **h)** $0{,}00001^{\frac{6}{5}}$ **i)** $0{,}0016^{-\frac{3}{4}}$ **k)** $(11\frac{25}{64})^{\frac{5}{6}}$

5. a) $49^{0,5}$ **b)** $32^{-0,2}$ **c)** $81^{0,25}$ **d)** $1024^{-0,1}$ **e)** $25^{1,5}$
f) $256^{0,125}$ **g)** $243^{-0,8}$ **h)** $625^{-0,75}$ **i)** $1024^{0,9}$ **k)** $256^{-0,875}$

6. Vergleiche die Werte von

a) $(2^{-2})^3$ und 2^{-2^3} **b)** $(2^{-3})^2$ und 2^{-3^2}
c) $(3^{-2})^2$ und 3^{-2^2} **d)** $(2^2)^{-3}$ und $2^{2^{-3}}$
e) $(2^3)^{-2}$ und $2^{3^{-2}}$ **f)** $(3^2)^{-2}$ und $3^{2^{-2}}$
g) $(2^{-2})^{-3}$ und $2^{-2^{-3}}$ **h)** $(2^{-3})^{-2}$ und $2^{-3^{-2}}$
i) $(3^{-2})^{-2}$ und $3^{-2^{-2}}$ **j)** $3^{(-2)^{-2}}$ und $3^{-(2^{-2})}$.

7. Schreibe als Potenz mit möglichst einfacher Grund- und Hochzahl:

a) $\sqrt[7]{2}$ **b)** $\sqrt[5]{4}$ **c)** $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ **d)** $\sqrt[10]{128}$ **e)** $\sqrt[4]{\frac{8}{343}}$

f) $\sqrt[6]{625}$ **g)** $\sqrt[9]{0{,}125}$ **h)** $\sqrt[12]{\frac{81}{256}}$ **i)** $\sqrt[8]{0{,}000064}$ **k)** $\sqrt[15]{\frac{243}{100000}}$

8. Gib die maximale Definitionsmenge des jeweiligen Terms an und vereinfache ihn, falls möglich.

a) $\sqrt[6]{x^4}$ und $\sqrt[4]{x^6}$

b) $\sqrt[8]{x^2}$, $\sqrt[8]{x^3}$, $\sqrt[8]{x^4}$, $\sqrt[8]{x^5}$, $\sqrt[8]{x^6}$ und $\sqrt[8]{x^7}$

c) $\sqrt{x^8}$, $\sqrt[3]{x^8}$, $\sqrt[4]{x^8}$, $\sqrt[5]{x^8}$, $\sqrt[6]{x^8}$ und $\sqrt[7]{x^8}$

9. Welche der folgenden Ausdrücke sind äquivalent? (*Anleitung*: Überlege, für welche Werte von a die Ausdrücke jeweils definiert sind.)

a) $\sqrt{a}$ und $a^{\frac{1}{2}}$ **b)** $\sqrt[3]{a^2}$ und $a^{\frac{2}{3}}$ **c)** $\sqrt[3]{a^4}$ und $|a|^{\frac{4}{3}}$

d) $\sqrt[5]{\frac{1}{a^6}}$ und $a^{-\frac{6}{5}}$ **e)** $\sqrt[3]{a^5}$ und $a^{\frac{5}{3}}$ **f)** $\sqrt[6]{a^4}$ und $a^{\frac{2}{3}}$

g) $\sqrt[7]{|a|^{-3}}$ und $a^{-\frac{3}{7}}$ **h)** $\sqrt[7]{a^{-3}}$ und $|a|^{-\frac{3}{7}}$ **i)** $\sqrt[7]{\frac{1}{a^4}}$ und $|a|^{-\frac{4}{7}}$

k) $\sqrt[3]{1+2a+a^2}$ und $(1+a)^{\frac{2}{3}}$ **l)** $\sqrt[4]{a^2+2ab+b^2}$ und $|a+b|^{\frac{1}{2}}$

m) $\sqrt[6]{(b^2-2ab+a^2)^2}$ und $(a-b)^{\frac{2}{3}}$

•**10.** Gib für folgende Ausdrücke die Potenzschreibweise an:

a) $\sqrt[3]{a}$ **b)** $\sqrt[5]{x^2}$ **c)** $\sqrt[4]{y^3}$ **d)** $\sqrt[6]{\frac{1}{z^4}}$ **e)** $\sqrt{m^{-3}}$

f) $\sqrt[7]{\frac{1}{x^6}}$ **g)** $\sqrt[3]{|a|}$ **h)** $\sqrt[4]{|a|^{-3}}$ **i)** $\sqrt[10]{|x|\cdot x^6}$ **k)** $\sqrt[12]{\frac{y^{10}}{|y|}}$

11. Vereinfache und fasse zusammen:

a) $2^{\frac{3}{4}}+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}+3\cdot 2^{\frac{6}{8}}$ **b)** $\frac{6}{4^{-\frac{2}{3}}}-\sqrt[6]{256}-5\cdot 4^{\frac{6}{9}}$

c) $2a^{\frac{2}{3}}-5a^{\frac{6}{9}}+4a^{\frac{4}{6}}$ **d)** $\frac{3}{x^{0,2}}+10x^{-\frac{1}{5}}-11\cdot\sqrt[15]{\frac{1}{x^3}}$

⁝**12.** Welche Lösungsmengen haben folgende Gleichungen?

a) $x^{\frac{1}{2}}-3=0$ **b)** $3\cdot x^{\frac{2}{3}}=2-x^{\frac{2}{3}}$ **c)** $x^{1,5}-x^{-\frac{1}{6}}=0$

d) $x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{3}{4}}+2=0$ **e)** $x^{0,2}=3$ **f)** $x^{\frac{3}{4}}=\sqrt{2\sqrt{2}}$

g) $x^{\frac{4}{3}}=4$ **h)** $x^{\frac{1}{3}}=-1$ **i)** $3=x^{0,17}$

**3.5 Zur Geschichte der gebrochenen Exponenten

In Buch V, Definition 9 und 10, seiner *Elemente* bezeichnet EUKLID (um 300 v. Chr.) $(a:b)^2$ bzw. $(a:b)^3$ als das zweifache bzw. dreifache Verhältnis von a und b (Aufgabe 63/**1** und **2**). ARCHIMEDES (um 287–212 v. Chr.) erweitert in seiner Schrift *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* (perí sphaíras kai kylíndru) – »Über Kugel und Zylinder« – diese Sprechweise und bezeichnet $(a:b)^{\frac{3}{2}}$ als das anderthalbfache Verhältnis (ἡμιόλιος λόγος) [hemiólios lógos]) von a und b, ein Ausdruck, den Johannes KEPLER (1571–1630) – vgl. Aufgabe 84/**10** – und sogar noch 1718 Isaac NEWTON (1643–1727) benützt. Dieses Verhältnis ist in unserer Deutung die früheste Form einer Potenz mit gebrochenem Exponenten. Wann und wo ARCHIMEDES' Bezeichnung Früchte trug, können wir nicht entscheiden, da zu viele griechische und arabische Werke im Laufe der Zeit verlorengingen, so auch die *Proportionenlehre* des AL-KINDI († um 874), die im 14. Jh. noch in lateinischer Übersetzung vorhanden war! Der erste, der nach unserer Kenntnis mit gebrochenen Exponenten recht sicher rechnen konnte, war Nicole ORESME (1320/25–1382), und zwar in seinen Werken *Tractatus proportionum* – »Abhandlung über Verhältnisse« – und *Algorismus proportionum* – »Rechnen mit Verhältnissen« –, beide um 1360 entstanden. Michael STIFEL (1487?–1567) greift die Idee 1544 in seiner *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – auf und erweitert sie, wie wir später sehen werden (Aufgabe 67/**8**). Aber niemand erkennt den Fortschritt. Simon STEVIN (1548 bis 1620) benützt zwar 1585 in seiner *L'Arithmétique* $(\frac{1}{2})$ als Symbol für $\sqrt{x}$ und $(\frac{2}{3})$ für $\sqrt[3]{x^2}$, scheut sich aber davor, diese Symbole wirklich zu verwenden. Albert GIRARD (1595–1632) kommt 1629 in seiner *Invention nouvelle en l'algèbre* auf die Idee, die Exponenten vor die Basen zu schreiben; dabei findet sich neben (1)18 für 18^1 auch $(\frac{3}{2})49$ für $49^{\frac{3}{2}}$. Im oben (Seite 41 f.) zitierten Brief Isaac NEWTONS (1643–1727) vom 13. Juni 1676 können wir nun die damals ausgelassene Stelle nachtragen:
»so schreibe ich für $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$ usw.

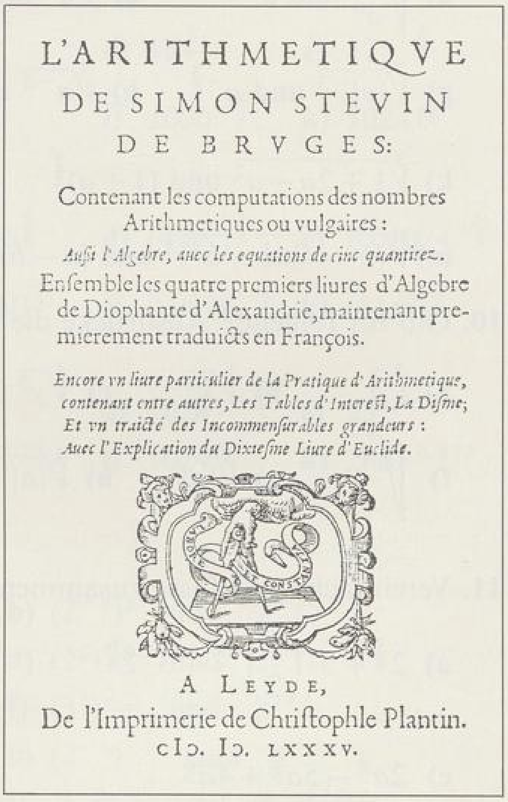

L'ARITHMETIQVE
DE SIMON STEVIN
DE BRVGES:
Contenant les computations des nombres Arithmetiques ou vulgaires :
Auſſi l'Algebre, auec les equations de cinc quantitez.
Enſemble les quatre premiers liures d'Algebre de Diophante d'Alexandrie, maintenant premierement traduicts en François.
Encore vn liure particulier de la Pratique d'Arithmetique, contenant entre autres, Les Tables d'Intereſt, La Diſme; Et vn traicté des Incommenſurables grandeurs : Auec l'Explication du Dixieſme Liure d'Euclide.
A LEYDE,
De l'Imprimerie de Chriſtophle Plantin.
cIↃ. IↃ. LXXXV.

Abb. 62.1 Titelblatt der *L'Arithmétique* des Simon STEVIN aus dem Jahre 1585*

* Die Arithmetik | des Simon Stevin | aus Brügge. | Enthaltend die Rechnungen mit arithmetischen oder gewöhnlichen Zahlen: | Auch die Algebra, mit Gleichungen mit 5 Unbekannten. | Zusammen mit den ersten vier Büchern der Algebra | des Diophant von Alexandria, jetzt | erstmals ins Französische übersetzt. | Dazu noch ein besonderes Buch über die Handhabung der Arithmetik, | enthaltend unter anderen die Zinstafeln, den Zehnten, | und eine Abhandlung über die inkommensurablen Größen: | Mit der Erklärung des zehnten Buchs von Euklid. | Zu Leiden | aus der Druckerei des Christophle Plantin. | 1585.
Das Motto in der Vignette lautet: Labore et constantia – Durch Arbeit und Beständigkeit

$a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{5}{3}}$«. In diesem Brief teilt NEWTON auch den allgemeinen binomischen Lehrsatz mit, nämlich die Berechnung von $\overline{P+PQ}\}^{\frac{m}{n}}$, d.h. von $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ durch eine unendliche Reihe. John WALLIS (1616–1703) hat ihn 1685 durch Aufnahme in seinen *Treatise of Algebra* bekanntgemacht. In NEWTONS *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* von 1687 wird von gebrochenen Exponenten, auch in allgemeiner Form, Gebrauch gemacht. Klipp und klar formuliert aber als erster 1706 William JONES (1675–1749) in seiner *Synopsis Palmariorum Matheseos*: »$\sqrt[r]{a^n}$ is more Naturally express'd by $a^{\frac{n}{r}}$.« Dort wird auch das Rechnen mit gebrochenen Exponenten gründlich behandelt.

Aufgaben

1. Definition 9 aus Buch V der *Elemente* von EUKLID lautet: »Wenn drei Größen in stetiger Proportion stehen, dann sagt man von der ersten, daß sie zur dritten zweimal im Verhältnis stehe wie zur zweiten.«
   Modern ausgedrückt: $a:b = b:c \Rightarrow a:c = (a:b)^2$.

   Beweise die Richtigkeit der aufgestellten Beziehung.

2. Definition 10 aus Buch V der *Elemente* von EUKLID lautet: »Wenn vier Größen in stetiger Proportion stehen, dann sagt man von der ersten, daß sie zur vierten dreimal im Verhältnis stehe wie zur zweiten und ähnlich immer der Reihe nach je nach der vorliegenden Proportion.«
   Modern ausgedrückt: $a:b = b:c = c:d \Rightarrow a:d = (a:b)^3$.

   Beweise die Richtigkeit der aufgestellten Beziehung.

3.6 Das Rechnen mit Potenzen mit rationalen Exponenten

Definition 58.2 für Potenzen mit rationalen Exponenten ist erst dann voll gerechtfertigt, wenn man mit den so definierten Potenzen nach denselben Regeln rechnen kann wie mit Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.
Wir überprüfen das der Reihe nach:

I. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Gilt $a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}}$ für $a > 0$ und $p, q \in \mathbb{Z}$; $m, n \in \mathbb{N}$?

Wir betrachten zunächst Exponenten mit gleichnamigen Brüchen.

Nach Definition 58.2 gilt $a^{\frac{p}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^p$ und $a^{\frac{q}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^q$.
Damit können wir schreiben

$$a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^p \cdot \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^q = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{p+q} = a^{\frac{p+q}{m}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{m}}.$$

Sind die Exponenten ungleichnamig, dann erweitern wir:

$$a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{pn}{mn}} \cdot a^{\frac{qm}{mn}} = a^{\frac{pn+qm}{mn}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}}.$$

II. Potenzieren einer Potenz

Gilt $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{pq}{mn}}$ für $a > 0$ und $p, q \in \mathbb{Z}$; $m, n \in \mathbb{N}$?

Für $q \geqq 2$ gilt $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{q} = a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{\frac{p}{m}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{p}{m}+\cdots+\frac{p}{m}} = a^{\frac{pq}{m}}$.
Offenbar ist dies auch für $q = 1$ und $q = 0$ richtig.

Für $q = -1$ gilt $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{-1} = \dfrac{1}{a^{\frac{p}{m}}} = \dfrac{1}{\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{p}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{-p} = a^{\frac{-p}{m}}$. Dabei wendet man der Reihe nach Definition 24.2, Satz 58.1, Satz 25.2 und Definition 58.2 an.

Ist $q \leqq -2$, dann erhält man $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{q} = \left[\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{-q}\right]^{-1} = \left[a^{\frac{-pq}{m}}\right]^{-1} = a^{\frac{pq}{m}}$.

Betrachten wir nun $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{\frac{q}{n}} = \left(\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{pq}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} =: x$, dann gilt $x^{n} = a^{\frac{pq}{m}}$ und somit $x^{nm} = a^{pq}$.

Das aber bedeutet nach Satz 59.1, daß $x = a^{\frac{pq}{mn}}$ ist, was zu beweisen war.

III. Potenzieren eines Produkts

Gilt $(a \cdot b)^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot b^{\frac{p}{m}}$ für $a, b > 0$ *und* $p \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$?

Nennen wir die linke Seite x und die rechte y, dann gilt

$x^{m} = (ab)^{p} = a^{p} \cdot b^{p}$ und wegen II

$y^{m} = \left(a^{\frac{p}{m}} \cdot b^{\frac{p}{m}}\right)^{m} = \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^{m} \cdot \left(b^{\frac{p}{m}}\right)^{m} = a^{p} \cdot b^{p}$.

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung dieser Gleichung gilt $x = y$.

IV. Potenzieren eines Quotienten

Gilt $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{p}{m}} = \dfrac{a^{\frac{p}{m}}}{b^{\frac{p}{m}}}$ für $a, b > 0$ *und* $p \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$?

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{m}} = (ab^{-1})^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot (b^{-1})^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot b^{\frac{-p}{m}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot b^{-\frac{p}{m}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}}{b^{\frac{p}{m}}}.$$

V. Division von Potenzen mit gleicher Basis

Gilt $\dfrac{a^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{q}{n}}} = a^{\frac{p}{m}-\frac{q}{n}}$ für $a > 0$ und $p, q \in \mathbb{Z}$; $m, n \in \mathbb{N}$?

$$\frac{a^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{q}{n}}} = a^{\frac{p}{m}} \cdot \left(a^{\frac{q}{n}}\right)^{-1} = a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{-\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m}+\left(-\frac{q}{n}\right)} = a^{\frac{p}{m}-\frac{q}{n}}.$$

Damit ist gezeigt, daß die Rechengesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten auch für die neu definierten Potenzen mit rationalen Exponenten gelten. Wir merken uns:

Satz 65.1: Für $a, b > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt

I. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ **V.** $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

II. $(a^r)^s = a^{rs}$

III. $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$ **IV.** $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

Bemerkung: Satz 65.1 gilt auch für $a = 0$ bzw. $b = 0$, solange kein Nenner null wird oder nicht der undefinierte Term 0^0 entsteht.

Beispiele:

zu I: $a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)} = a^{-\frac{2}{6}} = a^{-\frac{1}{3}}$

zu II: $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{8}} = a^{\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}} = a^{\frac{3}{4}}$

zu III: $(3a)^{\frac{4}{7}} = 3^{\frac{4}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}}$

zu IV: $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{4}{7}} = \frac{a^{\frac{4}{7}}}{2^{\frac{4}{7}}} = 2^{-\frac{4}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}}$

zu V: $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}}$

Beachte: Bei allen Umformungen ist darauf zu achten, daß die auftretenden Basen nicht negativ sind. Zur Verdeutlichung dienen die folgenden **Beispiele:**

zu II:

1) $(a^3)^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$. Hier ist nur $a \in \mathbb{R}_0^+$ möglich, die Umformung also problemlos.

2) $(a^2)^{\frac{1}{6}} = (|a|^2)^{\frac{1}{6}} = |a|^{\frac{2}{6}} = |a|^{\frac{1}{3}}$, falls $a \in \mathbb{R}$ gilt, was bei $(a^2)^{\frac{1}{6}}$ tatsächlich möglich ist.

zu III:

Bei $(a \cdot b)^{\frac{5}{3}}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$$(a \cdot b)^{\frac{5}{3}} = \begin{cases} a^{\frac{5}{3}} \cdot b^{\frac{5}{3}} \text{ für } a,\ b \in \mathbb{R}_0^+ \\ (-a)^{\frac{5}{3}} \cdot (-b)^{\frac{5}{3}} \text{ für } a,\ b \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Dafür schreibt man kurz:

$$(a \cdot b)^{\frac{5}{3}} = |a|^{\frac{5}{3}} \cdot |b|^{\frac{5}{3}} \text{ für } a,\ b \in \mathbb{R} \wedge a \cdot b \geqq 0.$$

Aufgaben

1. **a)** $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$ **b)** $4^{\frac{3}{4}} \cdot 4^{-\frac{1}{4}}$ **c)** $27^{\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{1}{6}}$ **d)** $125^{\frac{5}{6}} \cdot 125^{0,5}$

e) $256^{\frac{1}{12}} \cdot 256^{\frac{7}{24}} \cdot 256^{-\frac{1}{4}}$ **f)** $5^{1,5} \cdot 5^{-\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}$ **g)** $341^{-0,5} \cdot 341^{\frac{5}{7}} \cdot 341^{-\frac{3}{14}}$

2. **a)** $\dfrac{9^{\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ **b)** $216^{-\frac{1}{4}} : 216^{\frac{5}{12}}$ **c)** $\dfrac{32^{0,3}}{32^{0,5}}$ **d)** $17^{\frac{7}{6}} : 17^{-\frac{3}{4}}$

3. **a)** $a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$ **b)** $x^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}}$ **c)** $b^{0,25} \cdot b^{\frac{1}{3}}$ **d)** $y^{\frac{11}{8}} \cdot y^{-1,5} \cdot y^{\frac{3}{4}}$

e) $\dfrac{a^{-2}}{a^{\frac{3}{5}}}$ **f)** $\dfrac{m^{1,6} \cdot m^{\frac{1}{3}}}{m}$ **g)** $\dfrac{x^{4,5}}{x^{\frac{11}{4}} \cdot x^{\frac{5}{6}}}$ **h)** $\dfrac{z^{-2} \cdot z^{\frac{13}{3}}}{z^{1,5} \cdot z^{-\frac{1}{6}}}$

4. **a)** $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6$ **b)** $\left(25^{\frac{3}{4}}\right)^{-2}$ **c)** $\left(16^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$ **d)** $\left(243^{-\frac{3}{4}}\right)^{-1,6}$

e) $(a^{-1})^{\frac{1}{2}}$ **f)** $(b^{0,4})^{\frac{5}{6}}$ **g)** $\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{8}}$ **h)** $\left[\left(z^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{-0,8}$

5. **a)** $(16 \cdot 64)^{\frac{3}{4}}$ **b)** $(125 \cdot 17)^{-\frac{1}{3}}$ **•c)** $(96 \cdot 54 \cdot 144)^{\frac{2}{5}}$

d) $\left(\dfrac{16}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$ **e)** $\left(\dfrac{64}{81}\right)^{-\frac{2}{3}}$ **f)** $\left(\dfrac{24 \cdot 36}{18 \cdot 216}\right)^{\frac{5}{4}}$

6. Alle vorkommenden Variablen seien positiv.

a) $(ab^2)^{\frac{5}{2}}$ **b)** $(x^6 y^2)^{\frac{3}{4}}$ **c)** $(u^8 v^{-6})^{0,25}$ **d)** $(a^{-3} b^9 c)^{-\frac{2}{3}}$

e) $\left(\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{z^2}\right)^{\frac{1}{4}}$ **f)** $\left(\dfrac{x^{-0,6} \cdot z^{1,2}}{y^{1,2}}\right)^{\frac{5}{3}}$ **g)** $\left(\dfrac{(ab)^{\frac{3}{5}}}{a^4 b^{-0,4}}\right)^{-2,5}$ **h)** $\left(\dfrac{p^{\frac{1}{6}} \cdot q^{-0,3}}{q^{\frac{1}{5}}(p^{-1} r^{0,5})^{\frac{1}{2}}}\right)^6$

•7. Hieronymus DE HANGEST († 1538), ein Kanonikus und Universitätsprofessor aus Paris, schreibt 1508 in seinem *Liber proportionum* folgende Gleichungen. Untersuche, ob sie stimmen.

a) $2^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ **b)** $\frac{3}{2} : 2^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$ **c)** $2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 72^{\frac{1}{6}}$ **d)** $3^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{6}}$

8. Michael STIFEL behandelt 1544 in seiner *Arithmetica integra* die folgenden Gleichungen. Untersuche, ob die erste stimmt, und löse die beiden anderen.*

a) $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{27}{8}$ **b)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} = \frac{729}{64}$ **⁚c)** $\left(\frac{27}{8}\right)^{x} = \frac{2187}{128}$

9. a) $\left(\frac{a^3 b}{c}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{ab^2}{c^2}\right)^{\frac{4}{5}}$ mit $a, b, c > 0$ **b)** $\left(12m^{\frac{3}{4}}n^{\frac{1}{2}}\right) : \left(36m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$

10. a) $\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}\right)^2$ **b)** $\left(y^{\frac{3}{5}} + y^{-\frac{2}{5}}\right) \cdot \left(y^{-\frac{3}{5}} - y^{\frac{2}{5}}\right)$ **c)** $\left(s^{\frac{7}{2}} + t^{0,75}\right)\left(t^{\frac{3}{4}} - s^{3,5}\right)$

11. Ordne das Ergebnis nach fallenden Potenzen:
$\left(a^{\frac{7}{8}} - 2a^{-\frac{3}{4}} + 3a^{-\frac{7}{6}}\right) \cdot \left(a^{\frac{23}{24}} - 2a^{-\frac{13}{12}} + 3a^{-\frac{3}{2}}\right)$

Zu den Aufgaben 12 bis 46:
Schreibe die Wurzeln mit Hilfe gebrochener Exponenten und löse dann die Aufgabe. Verwende im Ergebnis ggf. wieder das Wurzelzeichen. Die Grundmengen für die vorkommenden Variablen seien jeweils maximal, also z. B. $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}_0^+$ oder $\mathbb{R}$.

12. a) $\sqrt[5]{2^{10}}$ **b)** $\sqrt[4]{\sqrt{0,00000256}}$ **c)** $\sqrt[10]{\sqrt[3]{531441}}$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{6^{60}}}}$

13. a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ **b)** $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ **d)** $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$
e) $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{8}$ **f)** $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{12}$ **g)** $\sqrt[10]{2} \cdot \sqrt[10]{4} \cdot \sqrt[10]{8} \cdot \sqrt[10]{16}$

⁝14. Berechne die in Aufgabe 57/**4** angegebene 8. Wurzel mit Hilfe des Divisionsverfahrens. Beachte dabei $\sqrt[8]{} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}$.

15. a) $\sqrt[3]{2a^2} \cdot \sqrt[3]{32a}$ **b)** $\sqrt[3]{0,5a^4} \cdot \sqrt[3]{2a^2}$ **c)** $\sqrt[4]{2a^2} \cdot \sqrt[4]{8a^{10}}$
d) $\sqrt[5]{ab^3} \cdot \sqrt[5]{a^3 b} \cdot \sqrt[5]{ab}$ **e)** $\sqrt[6]{x^5 y^2} \cdot \sqrt[6]{x^2 y^7} \cdot \sqrt[6]{x^{-1} y^3}$
f) $\sqrt[4]{\sqrt{2}m^7 n^{-3}} \cdot \sqrt[4]{4m^{-2}n} \cdot \sqrt[4]{2\sqrt{2}m^3 n^{-2}}$

* STIFEL schreibt natürlich keine Gleichungen mit unbekannten Exponenten, sondern fragt nach dem wievielfachen Verhältnis (im Sinne von ARCHIMEDES [vgl. Seite 62]), das zwischen den Brüchen besteht.

16. a) $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^6}}$ b) $\sqrt[6]{\frac{x^{12}}{y^{18}}}$ c) $\sqrt[4]{\frac{16n^{12}}{m^8}}$ d) $\sqrt[5]{\frac{p^5q^{10}}{r^{20}}}$

e) $\sqrt[4]{(a^5b):(ab^9)}$ f) $\sqrt[7]{(256x^3y^{12}):(2x^{-4}y^5)}$ g) $\sqrt[3]{\left(\frac{(9u)^2v}{w^5}\right)^2:\left(\frac{3vw}{u}\right)^5}$

17. a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{64}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{16}}$ d) $\frac{\sqrt[4]{62{,}5}}{\sqrt[4]{1000}}$

18. a) $\frac{\sqrt[5]{a^7}}{\sqrt[5]{a^2}}$ b) $\frac{\sqrt[7]{b^3}}{\sqrt[7]{b^{10}}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{ab^5}}{\sqrt[4]{ab}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{40a^2b}}{\sqrt[3]{5a^5b^4}}$

19. Vereinfache durch teilweises Radizieren.

Beispiel: $\sqrt[5]{320} = (2^5 \cdot 10)^{\frac{1}{5}} = 2 \cdot 10^{\frac{1}{5}} = 2 \cdot \sqrt[5]{10}$

a) $\sqrt[3]{54}$ b) $\sqrt[5]{160}$ c) $\sqrt[4]{160}$ d) $\sqrt{176}$ e) $\sqrt[6]{7290}$

f) $\sqrt[4]{1250}$ g) $\sqrt{62{,}5}$ h) $\sqrt[3]{1{,}715}$ i) $\sqrt[5]{0{,}243}$ k) $\sqrt{13{,}31}$

20. Beispiel: $\sqrt[6]{a^{32}} = (a^{30} \cdot a^2)^{\frac{1}{6}} = |a|^5 \cdot |a|^{\frac{1}{3}} = |a|^5 \cdot \sqrt[3]{|a|}$

a) $\sqrt{a^3}$ b) $\sqrt[4]{a^7}$ c) $\sqrt[5]{a^6b^{10}}$ d) $\sqrt[3]{a^{11}b^8}$ e) $\sqrt[10]{a^{13}b^{25}c^7}$

f) $\sqrt[3]{(a-b)^5}$ g) $\sqrt[3]{(a+b)^4}$ h) $\sqrt[5]{(a-2b)^8 \cdot (b+c)^7}$

21. Mache die Nenner rational.

Beispiel: $\frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{5}}} = \frac{1 \cdot 2^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{3}{5}}} = \frac{2^{\frac{3}{5}}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{8}$

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ d) $\sqrt[6]{\frac{1}{32}}$

e) $\frac{5}{\sqrt[4]{5}}$ f) $\frac{6}{\sqrt[5]{27}}$ g) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ h) $6 \cdot \sqrt[4]{\frac{13}{108}}$

22. a) $\sqrt[4]{\frac{3}{8a^3}}$ b) $\sqrt[4]{\frac{11}{8a}}$ •c) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$:d) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

:e) $\sqrt[5]{\frac{(a+b)}{(a-b)^4}}$ f) $\frac{ab^2}{\sqrt[7]{a^5b^{12}}}$ g) $\frac{4a^2b}{\sqrt[4]{8a^2b^3}}$ •h) $\sqrt[3]{\frac{6b}{16a^2(a+b)^{10}}}$

23. **a)** $\sqrt{4^7}$ **b)** $\sqrt[4]{81^3}$ **c)** $\sqrt[5]{32^4}$ **d)** $\sqrt[3]{343^2}$ **e)** $\sqrt[10]{1024^9}$
f) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2$ **g)** $\left(\sqrt[4]{9}\right)^2$ **h)** $\left(\sqrt[5]{4}\right)^3$ **i)** $\left(\sqrt{12}\right)^3$ **j)** $\left(\sqrt[6]{0{,}216}\right)^4$

24. **a)** Nicolas Chuquet († 1488) zeigt 1484 auf folio 48v in seinem *Triparty*, daß sich mehrfache Wurzeln durch eine einzige Wurzel darstellen lassen:

℞.^{2} ℞.^{3} 13. = ℞.^{6} 13. bzw. ℞.^{3} ℞.^{2} ℞.^{5} 12. = ℞.^{30} 12.,

in unserer Schreibweise

$$\sqrt{\sqrt[3]{13}} = \sqrt[6]{13} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{12}}} = \sqrt[30]{12}.$$

Zeige die Richtigkeit.

b) Drücke durch eine einzige Wurzel aus:

1) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ **2)** $\sqrt[5]{\sqrt{b^3}}$ **3)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$ **4)** $\sqrt{\sqrt{\sqrt[5]{2ab}}}$ **5)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}$

25. Beweise: Die Reihenfolge ineinandergeschachtelter Wurzeln kann man beliebig vertauschen. Es gilt zum Beispiel: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}} = \sqrt[k]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}.$

26. Vereinfache unter Anwendung des Satzes aus Aufgabe **25**:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[4]{32}}$ **c)** $\sqrt{\sqrt[7]{9}}$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{512}}}$
e) $\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}$ **f)** $\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^4}}$ **g)** $\sqrt[3]{\sqrt[10]{x^9}}$ **h)** $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{10}}}}$

27. **a)** $\sqrt[6]{a^3}$ **b)** $\sqrt[4]{a^6}$ **c)** $\sqrt[6]{a^{12}b^3}$ **d)** $\sqrt[24]{a^{18}b^{30}c^6}$

28. **a)** $\sqrt[6]{8}$ **b)** $\sqrt[4]{9}$ **c)** $\sqrt[9]{64}$ **d)** $\sqrt[12]{216}$
e) $\sqrt[8]{729}$ **f)** $\sqrt[10]{625}$ **g)** $\sqrt[6]{0{,}0081}$ **h)** $\sqrt[12]{2{,}56 \cdot 10^{-6}}$

29. Zeige, daß sich sowohl das Produkt als auch der Quotient der Wurzeln $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[m]{b}$ stets durch eine einzige Wurzel darstellen lassen.

30. Drücke durch eine einzige Wurzel aus:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}$ **b)** $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2}$ **c)** $\sqrt[3]{2} : \sqrt[4]{3}$ **d)** $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[5]{5}$
e) $\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[6]{7}$ **f)** $\left(\sqrt{2} : \sqrt[4]{5}\right) \cdot \sqrt[1]{3}$ **g)** $\sqrt{3} : \left(\sqrt[4]{2} : \sqrt[5]{\tfrac{2}{9}}\right)$

31. Drücke durch eine einzige Wurzel aus:

a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ **b)** $\sqrt[3]{y} : \sqrt[4]{y^2}$ **c)** $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

d) $\sqrt[6]{a^{-5}} : \sqrt[4]{a^{-3}}$ **e)** $\sqrt{b} \cdot \sqrt[5]{b^{-2}} \cdot \sqrt[10]{b}$ **f)** $\left(\sqrt{n} \cdot \sqrt[4]{n^3}\right) : \sqrt[10]{n^0}$

32. $\mathbf{\sqrt[3]{2\sqrt[4]{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4 \cdot 3}} = \sqrt[12]{48}}$

Drücke ebenso durch eine einzige Wurzel aus:

a) $\sqrt{2\sqrt{3}}$ **b)** $\sqrt[3]{\dfrac{5}{\sqrt{5}}}$ **c)** $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}$ **d)** $\sqrt{2\sqrt[5]{\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}}}$

e) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ **f)** $\sqrt[5]{b^{-4} \cdot \sqrt[4]{b}}$ **g)** $\sqrt[4]{a^3 b \sqrt[6]{a^5 b^3}}$ **h)** $\sqrt[5]{a^m \sqrt[3]{a^n \sqrt{a^p}}}$

:33. a) $2\sqrt[3]{864} - 5\sqrt{33\tfrac{4}{5}} - 5\sqrt[3]{0{,}256} + 36\sqrt{\tfrac{225}{180}} - 8\sqrt[3]{7\tfrac{13}{16}}$

b) $\sqrt[3]{648} - 6\sqrt{\tfrac{32}{3}} - 18\sqrt[3]{\tfrac{64}{243}} + 32\sqrt{1\tfrac{19}{128}} + 20\sqrt[3]{0{,}192}$

:34. a) $\left(4\sqrt[3]{54} - \tfrac{5}{4}\sqrt[3]{256} + \sqrt[3]{500}\right)\left(3\sqrt[3]{108} - 5\sqrt[3]{128}\right)$

b) $\left(6\sqrt[4]{432} - \sqrt[4]{243}\right)\left(4\sqrt[4]{768} + 3\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}} - 5\sqrt[4]{48}\right)$

35. a) $\sqrt[8]{4} + 9\sqrt[4]{\tfrac{32}{81}} - 8\sqrt[12]{\tfrac{1}{512}}$ **b)** $\sqrt[9]{8} + 5\sqrt[3]{0{,}128} + 3\sqrt[6]{\tfrac{4}{729}}$

36. a) $8\sqrt[8]{\tfrac{1}{16}} - 3\sqrt[3]{\sqrt{512}} + \sqrt[5]{4\sqrt{2}}$ **b)** $6\sqrt[6]{\tfrac{1}{81}} + 2\sqrt{3\sqrt[3]{243}} - 3\sqrt{2\sqrt[3]{1{,}25}}$

37. a) $5\sqrt[8]{a^6} + 3\sqrt[4]{a^7} - 8\sqrt[12]{a^9}$ **b)** $3\sqrt[12]{a^8} + 4\sqrt[3]{a^5} - 7\sqrt[15]{a^{10}}$

• 38. a) $\dfrac{3b}{a^2}\sqrt[4]{\dfrac{a^{13}}{b}} - \dfrac{2b^2}{a}\sqrt[12]{\dfrac{a^{27}}{b^{15}}}$ **b)** $\dfrac{x}{y} \cdot \sqrt[15]{\dfrac{x^{48}}{y^3}} + \dfrac{2y^2}{x^3} \cdot \sqrt[5]{\dfrac{x^{26}}{y^6}}$

39. a) $\dfrac{\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[3]{a}} + \dfrac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}} + 2\dfrac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[12]{a^{11}}}{\sqrt{a}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[12]{a^5}} + \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a}} - 3\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a^3}}$

40. a) $\sqrt[3]{x^3\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x^2\sqrt{x\sqrt{x^5}}}$ **b)** $\sqrt{y^3\sqrt{y\sqrt{y}}} : \sqrt[3]{y^2\sqrt[3]{y^2}}$

41. a) $\left(\sqrt[6]{\dfrac{a^4c^5}{b^3}} : \sqrt[4]{\dfrac{a^2b}{c^3}}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{b\sqrt{b}}}{\sqrt[4]{a^2c^5}}$ **b)** $\left(\sqrt[4]{\dfrac{bc^3}{a^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[6]{b^5c}}\right) : \sqrt[3]{\dfrac{ac}{b}}$

42. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen. Unterscheide dabei, wenn nötig, die Fälle $x \geqq 0$ und $x < 0$.

a) $4\sqrt{x} - \sqrt[6]{64x^3} = 6$ **b)** $\sqrt[9]{8x^3} + \sqrt[3]{\dfrac{x}{4}} - 6 = 0$

c) $4 \cdot \sqrt[4]{x^2} - 2 \cdot \sqrt[12]{x^6} = 6$ **d)** $2\sqrt[4]{x^2} = 7\sqrt[6]{x^3} - 20$

e) $a\sqrt{bx}+b\sqrt[4]{a^2x^2}=ab(a-b),\quad 0<b<a$

f) $ax+b\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x^6}}=b^2-a^2,\ 0<a<b$

g) $2\sqrt[3]{a^2x^3\sqrt[4]{ab^3}}+\sqrt[4]{a^3bx^4}-\sqrt{a^3b}=0,\quad a>0,\ b>0$

h) $x\sqrt[3]{ab^2\sqrt[4]{a^2b}}-3\sqrt[4]{a^2b^3x^4}+\sqrt{a^2b^3}=0,\quad a>0,\ b>0$

i) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{x}=x$

k) $x^{-1}\cdot\sqrt{x\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x^{-1}}$

Aus Wilhelm Winter: *Algebra / Lehrbuch mit Aufgabensammlung für Schulen* (1. Auflage 1890), womit der Vater des dritten der Autoren der vorliegenden *Algebra 10* Algebra lernte, stammen die Aufgaben **43** bis **46**.*

43. $\sqrt[3]{x^2\sqrt{\frac{1}{x}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{x\sqrt{x}}}\cdot\sqrt[3]{x^2\sqrt{x\sqrt{\frac{1}{x}}}}$

44. $\sqrt{\dfrac{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}}:\sqrt{\dfrac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt{a\sqrt[4]{a}}\sqrt{\sqrt{a\sqrt{a}}}}}$

45. $$\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}\sqrt{\dfrac{x\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x}}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}}}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\sqrt{\dfrac{x\sqrt{x\sqrt{x}}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}}}$$

46. $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[4]{x}}}\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt{x}-x}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\sqrt{x}+x}}}$

* Wilhelm Winter (6.1.1851 Neuburg a.d. Donau – 26.11.1941 München) begann seine Tätigkeit als Lehrer für Mathematik und Naturkunde 1875 in Straubing, wurde noch im gleichen Jahr nach Kaiserslautern versetzt, dann 1886 als K. Gymnasialprofessor nach Regensburg und 1896 nach Neuburg an der Donau. Von 1902 bis 1919 wirkte er am K. Wilhelmsgymnasium in München. Wegen seiner Verdienste wurde er 1908 zum K. Studienrat ernannt. [K. = königlich]

47. Die wohltemperierte Stimmung. Unter *Stimmung* versteht man in der Musik die Festlegung der absoluten und relativen Tonhöhe. Erstere wurde im Mai 1939 in London auf der Internationalen Stimmtonkonferenz so festgelegt, daß der Kammerton a^1 die Frequenz 440 Hz besitzt.* Die relative Tonhöhe wird durch die Angabe des *Intervall*s beschrieben, worunter man in der Musik sowohl den Tonhöhenabstand wie auch das Verhältnis der Schwingungszahlen (kurz: das Schwingungsverhältnis) versteht. Eine Oktave ist durch das Schwingungsverhältnis 2 : 1 festgelegt. Zu Beginn des 18. Jh.s wurde die Oktave in 12 gleich große Intervalle eingeteilt. Jedes solche Intervall heißt *Halbtonschritt*, die erzeugte Stimmung *gleichschwebende Temperatur*** oder *wohltemperierte Stimmung*. Sie hat sich im Abendland durchgesetzt und bildet auch die Grundlage der Zwölftonmusik.

a) Wie groß sind ein Halbton- und ein Ganztonschritt?

b) Der Kammerton a^1 bildet mit den Tönen a^2, a^3, … aufsteigende bzw. mit den Tönen a, A, A_1, … absteigende Oktaven. Berechne die Frequenzen der aufgeführten Töne.

c) Berechne die Frequenzen aller im Intervall $a^1 - a^2$ auftretenden Halbtöne und runde sie auf ganze Zahlen.

d) In der *reinen Stimmung*, die heute nur noch von theoretischem Interesse ist, versteht man unter einer Quarte bzw. einer Quinte das Intervall 4 : 3 bzw. 3 : 2.

1) Berechne die Frequenz desjenigen Tons, der mit a^1 eine reine Quarte bzw. eine reine Quinte bildet. Wie heißen diese Töne?

2) Welche Frequenz haben diese Töne in der wohltemperierten Stimmung?

e) Zeige, daß in der wohltemperierten Stimmung 12 Quinten genau 7 Oktaven ergeben. Gilt dies auch in der reinen Stimmung?

* Der Name *Kammerton* rührt davon her, daß er die absolute Tonhöhe der Stimmung für die Kammermusik festlegte im Gegensatz zum früher tieferen Opern- und höheren Chorton. Der Ausdruck *Kammermusik* wurde um 1600 in Italien als *musica da camera* geprägt; sie umfaßte alle für die höfische »Kammer«, d. h. die Hofhaltung, bestimmten weltlichen Musikarten. *Kammer* bedeutet ursprünglich das fürstliche Privatgemach, seit dem 12. Jh. die fürstliche Finanzverwaltung; das Wort leitet sich über das lateinische *camera* vom griechischen καμάρα (kamára) = *Raum mit gewölbter Decke* ab.

** temperatura (lat.) = gehörige Mischung, gehörige Beschaffenheit

3.7 Potenzen mit irrationalen Exponenten

Die Potenz a^x hat bis jetzt nur einen Sinn, wenn x eine rationale Zahl ist. So ist z. B. $3^{\sqrt{2}}$ immer noch ein sinnloses Symbol. Man kann jedoch den Potenzbegriff in naheliegender Weise auf irrationale Exponenten so ausweiten, daß die Rechengesetze für Potenzen auch für diesen Fall Gültigkeit behalten.
Wie wir wissen, läßt sich jede irrationale Zahl als unendliche nichtperiodische Dezimalzahl verstehen. So ist z. B.

$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,37\ldots$
$\pi = 3{,}141\,592\,653\,59\ldots$*

Das bedeutet, daß es zu jeder Irrationalzahl ϱ eine unendliche Folge von endlichen Dezimalzahlen r_i $(i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ gibt, die der Irrationalzahl ϱ beliebig nahe kommen.
Für $\varrho = \sqrt{2}$ sieht eine solche Folge so aus:

$r_1 = 1;\quad r_2 = 1{,}4;\quad r_3 = 1{,}41;\quad r_4 = 1{,}414;\quad \ldots$

Wir bilden nun die Folge der Zahlen $3^{r_1}, 3^{r_2}, 3^{r_3}, 3^{r_4}, \ldots$, deren Näherungswerte bis zu der Stelle angegeben sind, die sich beim nächsten Schritt ändert:

$$\begin{aligned}
3^1 &= 3\\
3^{1,4} &= 4{,}6\\
3^{1,41} &= 4{,}70\\
3^{1,414} &= 4{,}727\\
3^{1,414\,2} &= 4{,}728\,73\\
3^{1,414\,21} &= 4{,}728\,78\\
3^{1,414\,213} &= 4{,}728\,801\\
3^{1,414\,213\,5} &= 4{,}728\,804\,0\\
3^{1,414\,213\,56} &= 4{,}728\,804\,37\\
3^{1,414\,213\,562} &= 4{,}728\,804\,385\\
3^{1,414\,213\,562\,3} &= 4{,}728\,804\,387\,4\\
3^{1,414\,213\,562\,37} &= 4{,}728\,804\,387\,82
\end{aligned}$$

Es hat den Anschein, als ob die Folge der Zahlen 3^{r_i} die Dezimalentwicklung einer reellen Zahl aufbauen würde. Man kann tatsächlich zeigen, daß dem so ist. Der Beweis hierfür überschreitet aber unsere Möglichkeiten. Der durch diese Dezimalentwicklung entstehenden reellen Zahl gibt man das Zeichen $3^{\sqrt{2}}$.
Die vorstehende Überlegung führt durch Verallgemeinerung zur Definition der Potenz mit irrationalem Exponenten:

* David und Gregory Chudnovsky von der Columbia-Universität in New York haben, einer Pressenotiz vom 21.9.1989 zufolge, die Zahl π auf 1 Milliarde Stellen nach dem Komma berechnet.

Definition 74.1: Ist ϱ eine Irrationalzahl mit der Folge der rationalen Näherungszahlen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ und ist a positiv, dann ist a^ϱ diejenige Zahl, der sich die Folge $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$ beliebig nähert. Ferner gelte $0^\varrho := 0$ für $\varrho > 0$.

Bemerkung: Man kann zeigen, daß die Definition von a^ϱ unabhängig von der Wahl der Folge ist, mit der man ϱ annähert.

Mit der vorstehenden Definition ist nun das Symbol a^x für jede reelle Zahl x definiert. Man vergesse jedoch nicht, daß bis auf wenige Ausnahmen, nämlich $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, die Basis a positiv sein muß.

Die Frage, ob $3^{\sqrt{2}}$ rational oder irrational ist, ist schwer zu entscheiden. Seltsamerweise kann man aber ohne Schwierigkeit zeigen, daß es sogar Fälle gibt, bei denen die irrationale Potenz einer Irrationalzahl eine rationale Zahl liefert. Ist nämlich $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ rational, dann haben wir einen solchen Fall. Ist aber $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ irrational, dann bilden wir $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ und erhalten $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$, also eine rationale Zahl. Somit ist entweder $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ oder $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ ein Beispiel für eine Potenz mit irrationaler Basis und irrationalem Exponenten, die einen rationalen Wert hat.

Bei der vorstehenden Überlegung haben wir so getan, als ob die Rechengesetze für Potenzen mit rationalen Exponenten auch für Potenzen mit irrationalen Exponenten gelten würden. Das ist tatsächlich der Fall, was sich aber nur mit einigem Aufwand zeigen läßt. Wir begnügen uns daher mit einem Beispiel und zeigen die Gültigkeit der Regel I für die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis.
Sind ϱ bzw. σ durch die Folge $r_1, r_2, r_3, \ldots$ bzw. $s_1, s_2, s_3, \ldots$ definiert, dann definiert $r_1 + s_1, r_2 + s_2, r_3 + s_3, \ldots$ die reelle Zahl $\varrho + \sigma$. Dem Produkt $a^\varrho \cdot a^\sigma$ ist die Folge $a^{r_1} \cdot a^{s_1}, a^{r_2} \cdot a^{s_2}, a^{r_3} \cdot a^{s_3}, \ldots$ zugeordnet. Das ist aber wegen der Gültigkeit von Regel I für rationale Exponenten die Folge $a^{r_1+s_1}$, $a^{r_2+s_2}$, $a^{r_3+s_3}$, …, die nach Definition 74.1 die Zahl $a^{\varrho+\sigma}$ liefert. Somit gilt $a^\varrho \cdot a^\sigma = a^{\varrho+\sigma}$.

**Zur Geschichte

Das Bewußtsein, daß der Begriff der Potenz mit irrationalen Exponenten einer eigenen Definition bedarf, entwickelte sich erst im letzten Jahrhundert, als man den Begriff der reellen Zahl präzisierte. Immerhin notierte aber Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) auf dem ihm zugegangenen Brief Isaac NEWTONS (1643–1727) vom 13. Juni 1676 (siehe Seite 62f.) neben dem Ausdruck $\overline{P + PQ}\}^{\frac{m}{n}}$: »Potest *m* vel *n* etiam esse fractus vel irrationalis, quod magni est momenti.« [Es kann *m* oder *n* gebrochen oder irrational sein, was von großer Bedeutung ist.] Irrationale Exponenten benützt NEWTON tatsächlich im Brief vom 24. Oktober 1676 an OLDENBURG, der wiederum zur Weiterleitung an LEIBNIZ bestimmt ist:

Als Beispiel führt er die Gleichung $(x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}})^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = y$ an. Beide Briefe veröffentlichte John Wallis (1616–1703) im 3. Band seiner *Opera mathematica* 1699, der bereits 1655 in seiner *Arithmetica infinitorum* irrationale Exponenten in seine Betrachtung einbezogen hatte.

Aufgaben

1. a) Welche Zahl liefert dein Taschenrechner für

1) $2^{\sqrt{5}}$ **2)** $10^{\sqrt{7}}$ **3)** $\sqrt{2}^{\sqrt{11}}$ **4)** π^{π} ?

•**b)** Berechne für die Zahlen aus **a)** jeweils die ersten fünf Zahlen der Näherungsfolge nach dem Vorgehen auf Seite 73.

2. Berechne:

a) $2^{1+\sqrt{2}} \cdot 2^{1-\sqrt{2}}$ **b)** $5^{1+\sqrt{3}} : 5^{3\sqrt{\frac{1}{3}}}$ **c)** $9^{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}} \cdot 9^{\frac{1}{2}(3-\sqrt[3]{3})}$

d) $(3^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}$ **e)** $\left(10^{\sqrt[3]{2}}\right)^{\sqrt[3]{4}}$ **f)** $(5^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$

3. Vereinfache und bestimme die Werte der folgenden Potenzen auf Tausendstel gerundet.

a) $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{8}}}$ **b)** $\left(3^{-\sqrt[3]{9}}\right)^{\sqrt[3]{24}}$ **c)** $\left(1{,}21^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{\frac{1}{12}}}$

4. Vereinfache:

a) $a^{3-5\sqrt{2}} \cdot a^{5\sqrt{2}+1}$ **b)** $x^{\sqrt{3}-1} \cdot x^{\sqrt{3}+1}$ **c)** $y^{\sqrt{10}} : y^{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}$

d) $(\sqrt{c^{\sqrt{2}}})^{\sqrt{2}}$ **e)** $(a^{\sqrt[3]{4}}b)^{\sqrt[3]{2}}$ **f)** $[(\sqrt[4]{a})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}}$

g) $\left[\sqrt[3]{m^{\sqrt{3}}} : \left(m^{\sqrt{3}} \cdot m^{\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)\right]^{\sqrt{3}}$

5. Bestimme die Lösungsmengen.

a) $5^{x^3} = 125$ **b)** $2^x = 4^{1,5}$ **c)** $3^x = 27^{\sqrt{2}}$

d) $17^{x^3} = 1$ **e)** $2^{3x-1} = \frac{1}{16}$ **f)** $4^{1-x^3} = 128$

g) $16^{x^2} = 8$ **h)** $(\sqrt{11})^{x^2+2} - 21 = 100$ •**i)** $(\frac{2}{3})^{\sqrt[3]{x^2}-3} = 2{,}25$

6. Löse folgende Gleichungen und gib auf Hundertstel gerundete Näherungswerte der Lösungen an.

a) $x^{\sqrt{7}} = 3$ **b)** $x^{-\pi} = \sqrt{2}$ **c)** $(\sqrt[3]{x})^{\sqrt{3}} = 10$

d) $x^{2\sqrt{2}} - x^{\sqrt{2}} = 0$ **e)** $x^{\sqrt{5}} + x^{-\sqrt{5}} = 6$:**f)** $2x^{\sqrt{2}} - 9x^{\sqrt{\frac{1}{2}}} + 4 = 0$

Zu Seite 77:
Links unten vertritt ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) die philosophia naturalis, d. h. die Physik, und rechts unten SENECA (4–65) die philosophia moralis, die Ethik. Die vier Kirchenväter AUGUSTINUS (354–430), Bischof von Karthago, GREGOR I. DER GROSSE (um 540–604), Papst von 590 bis 604, HIERONYMUS (um 347–420), ein asketischer Mönch, der seit dem 13. Jh. mit dem Kardinalshut dargestellt wird, und AMBROSIUS (339?–397), Bischof von Mailand, repräsentieren die philosophia divina, die Theologie. Im Kreis steht zentral, mit Zepter, Buch und Krone, die philosophia triceps humanarum rerum, die dreigesichtige Philosophie der menschlichen Dinge, entsprechend der auf PLATON (428–348 v. Chr.) zurückgehenden Einteilung des Lernens in Physik, Logik und Ethik. Die sieben Damen zu ihren Füßen symbolisieren die sieben *Artes liberales*, die Sieben Freien Künste, die eigentlich die Sieben Künste der Freien heißen müßten, da sie im alten Rom von den freien Bürgern studiert wurden, ohne einem Broterwerb zu dienen. Eingeführt hat diese Studienfächer (= *disciplinae*) der große Gelehrte Marcus Terentius VARRO (116–27 v. Chr.); ihre Siebenzahl ist bereits bei SENECA belegt. BOETHIUS (um 480–524?) und CASSIODORUS (um 490–um 583) fassen die vier aus pythagoreischen Zeiten stammenden Sachfächer Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie zum *Quadrivium* (Viererweg) zusammen. Im 9. Jh. werden schließlich die drei Fächer des elementarlogischen Unterrichts, nämlich Grammatik, Rhetorik und Dialektik (die hier durch die Logik dargestellt wird), zum *Trivium* (Dreierweg) zusammengefaßt. Gelehrt wurden die Artes Liberales in der mittelalterlichen Universität an der deshalb so genannten Artistenfakultät. Sie bildeten die Grundlage für ein Studium der Jurisprudenz, Medizin oder Theologie. – Die Arithmetik rechnet auf dem Rechenbrett, und die Geometrie hält einen Zirkel hoch. Die Astronomie hält eine Armillarsphäre (armilla [lat.] = Ring) in den Händen, die bis ins 17. Jh. zur Darstellung der Haupthimmelskreise der astronomischen Koordinatensysteme diente. Zu den mathematischen Wissenschaften gehört auch die Musik als Lehre von zahlenmäßigen Gesetzen, die die Tonintervalle und den Rhythmus beherrschen.