Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

1.3 Polynomdivision

urn:nbn:de:hbz:466:1-83532

1.3 Polynomdivision*

Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren von Polynomen hast du im Laufe der letzten Jahre gelernt, ferner auch, wie man ein Polynom durch ein Polynom ersten Grades dividiert. Dieses Verfahren soll jetzt auf Divisorpolynome höheren Grades erweitert werden. Dabei beschränken wir uns zunächst auf den Fall, daß Dividend und Divisor nur eine, und zwar die gleiche Variable enthalten.

Beispiel 1:

$(12x^5 + 12x - 54x^3 - 11x^2 - 12 - 10x^4) : (2x^2 - 6 - 3x) =$

Die Division wird sich leichter durchführen lassen, wenn man die Polynome zuerst in gleicher Weise ordnet, und zwar nach fallenden Potenzen der Variable.

$(12x^5 - 10x^4 - 54x^3 - 11x^2 + 12x - 12) : (2x^2 - 3x - 6) =$

Man beginnt nun bei der vorliegenden Ordnung die Division mit den jeweils höchsten Potenzen, also mit $12x^5 : 2x^2$, und erhält $6x^3$. Das Ergebnis $6x^3$ schreibt man rechts vom Gleichheitszeichen als ersten Summanden des Quotienten an und multipliziert damit dann den Divisor $2x^2 - 3x - 6$. Man erhält als Produkt $12x^5 - 18x^4 - 36x^3$. Dieses wird vom Dividendenpolynom subtrahiert. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis sich als Rest entweder null oder ein Polynom ergibt, dessen Grad niedriger ist als der Grad des Divisorpolynoms.

$$\begin{array}{l}
(12x^5 - 10x^4 - 54x^3 - 11x^2 + 12x - 12) : (2x^2 - 3x - 6) = 6x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \\
\underline{-(12x^5 - 18x^4 - 36x^3)\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad 8x^4 - 18x^3 - 11x^2 + 12x - 12 \\
\qquad\quad \underline{-(8x^4 - 12x^3 - 24x^2)\qquad\quad} \\
\qquad\qquad\qquad -6x^3 + 13x^2 + 12x - 12 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(-6x^3 + 9x^2 + 18x)\quad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 4x^2 - 6x - 12 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-(4x^2 - 6x - 12)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Falls sich nicht null als Rest ergibt, muß das Restpolynom durch das Divisorpolynom dividiert und der Bruchterm zum Ergebnis auf der rechten Seite addiert werden, damit das Gleichheitszeichen zu Recht besteht. Dies entspricht dem Vorgehen bei der Division ganzer Zahlen:

$18 : 7 = 2$ Rest 4, d.h., $18 : 7 = 2 + \frac{4}{7} = 2\frac{4}{7}$.

Hierzu nun

* Die Division von Polynomen erscheint nicht vor dem 16. Jh. Als erster bewältigte sie Michael STIFEL (1487?–1567) in seiner *Arithmetica integra* 1544.

Beispiel 2:

$$
\begin{array}{l}
(x^6 - x^3 - x^2 - 2) : (x^3 + x - 3) = x^3 - x + 2 + \dfrac{-5x+4}{x^3+x-3} \\
\underline{-(x^6 + x^4 - 3x^3)} \\
\quad -x^4 + 2x^3 - x^2 - 2 \\
\quad \underline{-(-x^4 \qquad - x^2 + 3x)} \\
\qquad 2x^3 - 3x - 2 \\
\qquad \underline{-(2x^3 + 2x - 6)} \\
\qquad\quad -5x + 4
\end{array}
$$

Nun wenden wir uns dem Fall zu, daß mehr als eine Variable vorkommen. Dann wählt man eine der Variablen aus und ordnet wie in den obigen Beispielen nach fallenden Potenzen dieser Variable. Die Durchführung der Division zeigt

Beispiel 3:

$$
\begin{array}{l}
(6x^4 + 13ax^3 + 2a^2x^2 - a^3x - 2a^4) : (2x^2 + 3ax - 2a^2) = 3x^2 + 2ax + a^2 \\
\underline{-(6x^4 + \ 9ax^3 - 6a^2x^2)} \\
\quad 4ax^3 + 8a^2x^2 - a^3x - 2a^4 \\
\quad \underline{-(4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x)} \\
\qquad 2a^2x^2 + 3a^3x - 2a^4 \\
\qquad \underline{-(2a^2x^2 + 3a^3x - 2a^4)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Hätte man in Beispiel 3 die Polynome nicht nach x, sondern nach a geordnet, so hätte sich

$(-2a^4 - a^3x + 2a^2x^2 + 13ax^3 + 6x^4) : (-2a^2 + 3ax + 2x^2) = a^2 + 2ax + 3x^2$

ergeben, wie du leicht nachrechnen kannst.

Aufgaben

1. a) $(x^3 - 4x^2 + 10x - 12) : (x - 2)$

b) $(-6x^3 + 23x^2 - 23x + 56) : (7 - 2x)$

c) $(10a^4 + 13a^3 - 3a^2 + 2a + 3) : (2a + 3)$

d) $(\frac{9}{25}x^3 - \frac{603}{100}x^2 + \frac{13}{20}x - \frac{5}{2}) : (0{,}3x - 5)$

e) $(84x^2 - 68x + 8) : (2x - \frac{4}{3})$

2. a) $(10x^4 + 15x^3 + 23x^2 - 9x + 9) : (10x^2 - 5x + 3)$

b) $(4x^4 - 17x^2 + 4) : (4x^2 - 1)$

c) $(64a^4 - 8a^3 - 80a^2 + 5a + 25) : (8a^2 - 5)$

d) $(-3b^4 + 8b^3 - 14b^2 + 8b - 3) : (-b^2 + 2b - 3)$

3. a) $(x^5 + 2x^4 - x^3 - x^2 - 2x + 1) : (x^2 + 2x - 1)$
b) $(-2x^6 + 12x^3 + 8x^2 + 16x - 10) : (2x^3 + 4x - 2)$
c) $(-2x^6 + 12x^3 + 8x^2 + 16x - 10) : (-x^3 + 2x + 5)$
d) $(2x^6 - 3x^5 + 11x^4 + 11x^3 - 11x^2 + 14x) : (x^2 - 2x + 7)$
e) $(-0{,}06x^5 + 0{,}13x^4 - 0{,}29x^3 + 0{,}62x^2 - 0{,}3x + 1) : (0{,}3x^2 - 0{,}2x + 1)$

4. a) $(a^2b^2 + 2a^2b + a^2 + 2ab^2 + 4ab + 2a + b^2 + 2b + 1) : (ab + a + b + 1)$
b) $(-a^3 + 3a^2b - 2a^2 - ab^2 + 4ab - a - b^3 + 2b^2 + b - 2) :$
$: (-a^2 + 2ab + b^2 - 1)$
•**c)** $((a-1)x^4 - (3a-4)ax^3 + 3a^2(a-2)x^2 + a^3(a+2)x + a^4) : (ax + a - x)$
d) $(a^3bc - 2a^2b^2c + 2a^2bc^2 + ab^3c - 2ab^2c^2 + abc^3) : (a - b + c)$
e) $(9x^4 - 4a^2x^2 + 4a^3x - a^4) : (3x^2 - 2ax + a^2)$

5. a) $[(16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1) : (2x - 1)] : (2x - 1)$
b) $(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1) : (4x^2 - 4x + 1)$
c) $(x^3 + y^3) : (x + y)$
d) $(x^3 - y^3) : (x - y)$
e) $(x^5 - 1) : (x - 1)$
f) $(128x^7 - 1) : (2x - 1)$
g) $(1 - 0{,}008x^6) : (10 - 2x^2)$

6. Divisionen, die nicht aufgehen:
a) $(2x^5 + 2x^4 - x^3 - x^2 - 2x + 1) : (x^3 + 2x - 1)$
b) $(12x^3 + 8x^2 + 16x - 10) : (2x^3 + 4x - 1)$
c) $(-2x^6 - 10) : (-x^3 + 2x + 5)$
d) $(11x^3 - 11x^2 + 14x) : (x^2 - 2x + 7)$
e) $(8x^3 + 2x^2 - 3x + 1) : (2x + 1)$