



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 2001

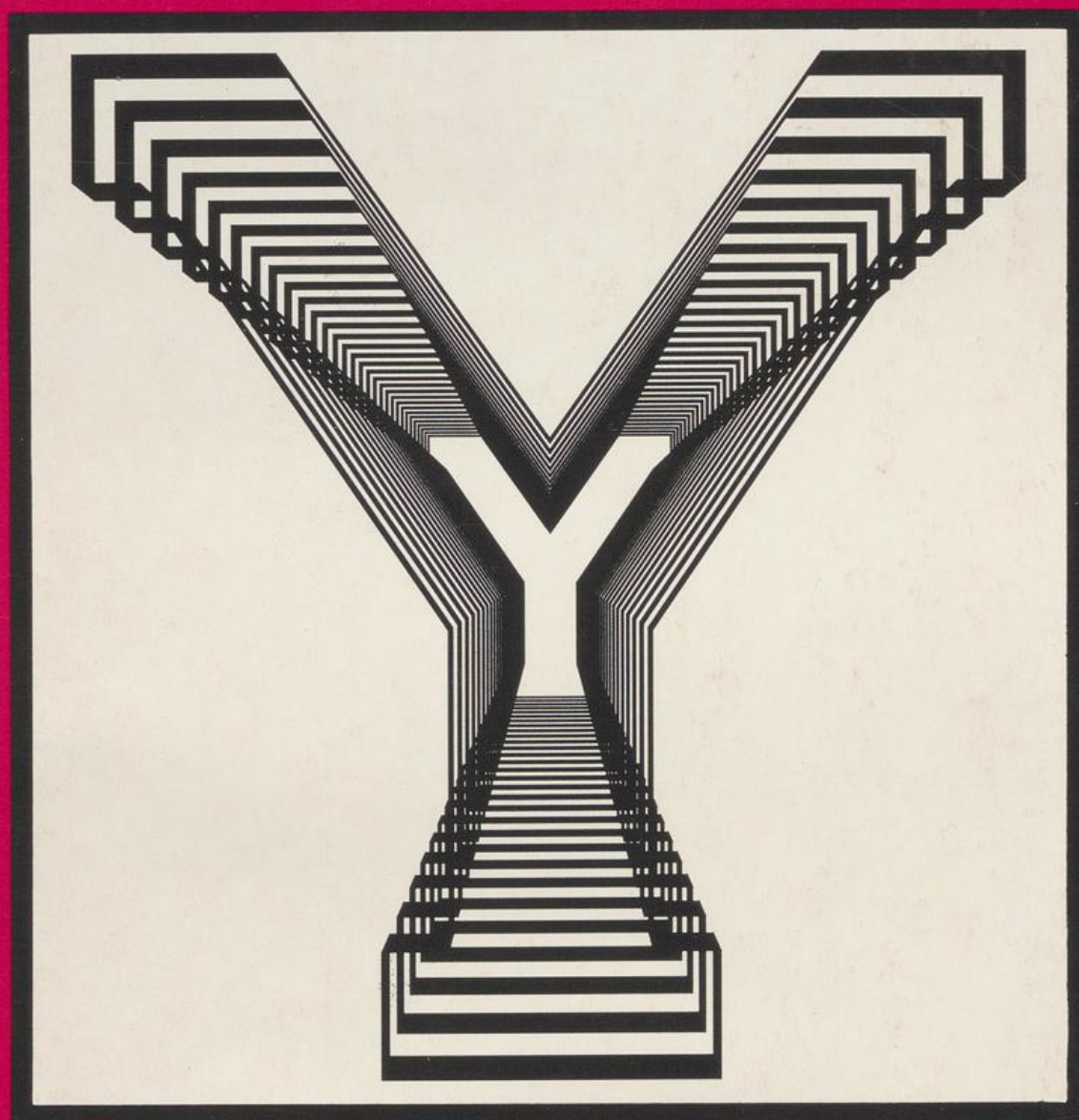
[urn:nbn:de:hbz:466:1-83559](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83559)

Barth · Federle · Haller

Algebra

8

Lösungen



Oldenbourg

Algebra

8

Lösungen

Friedrich Barth · Reinhold Federle

Rudolf Haller

Nichts ist getan, wenn noch
etwas zu tun übrig bleibt.

GAUSS

Oldenbourg

Algebra

8

Lösungen

Friedrich Barth · Reinhold Federle

Rudolf Haller

Das Papier ist aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff hergestellt, ist säurefrei und recyclingfähig.

© 1997 Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH, München
www.oldenbourg-bsv.de

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt.
Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen
Fällen bedarf deshalb der schriftlichen Einwilligung des
Verlags.

5. Auflage 2001 R
Druck 04 03 02 01 00
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Drucks.

Zeichnungen: Peter-Friedrich Kropf, Herrsching
Umschlag: Gert Krumbacher
Satz und Druck/Bindung: Tutte Druckerei GmbH,
Salzweg-Passau

ISBN 3-486-02648-8

Aufgaben zu 1.1

- 13/1. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{2, 3\}$ b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-0, 1\}$ c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$
d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
2. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$ b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$
d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-40\}$
3. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{4, 5\}$ b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-4, 5\}$ c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{6\}$
d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-306\}$
4. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1; 3\}$ b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 4\}$
c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-6; \frac{5}{4}\}$
d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; \frac{15}{16}\}$
5. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; -1; 0\}$ b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}\}$
c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; -0, 1; 0\}$
6. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0\}$ b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; \frac{3}{4}\}$
c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; -1\}$ d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{7}{8}; 0\}$
7. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; +3\}$ b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; +1\}$
c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-0, 2; 0, 2\}$ d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\}$
8. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\}$ b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 2\}$
c) $D = \mathbb{Q}$ d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0; 1\}$
9. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$ c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$
d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$
10. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0\}$ b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 0, 2\}$ c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{50\}$
11. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-6; 6\}$ b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{6}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{6}\}$
12. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-10; 10\}$ b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{15}; \frac{1}{15}\}$
13. a) $\frac{1}{x-1}$ b) $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$ c) $\frac{1}{x(3x+1)}$

Aufgaben zu 1.2

- 15/1. a) $37 \cdot 663 = 481 \cdot 51 = 24531$ gleich
b) $912 \cdot 73 = 66576$ $48 \cdot 1377 = 66096$ ungleich
c) $107 \cdot 1333 = 142631$ $43 \cdot 3417 = 146931$ ungleich
d) $16^2 \cdot (48^2 + 297) = 17^2 \cdot 48^2 = 665856$ gleich

- 15/2. a) $9x = 7 \cdot 18 \quad x = 14; \frac{18}{14}$
 b) $20x = 3 \cdot 16 \quad x = 2,4; \frac{12}{16}$
 c) $6x + 21 = 9 \cdot 5 \quad x = 4; \frac{15}{9}$
 d) $27x = 7x \quad x = 0; 0$
3. a) $3x = 25 \quad x = \frac{25}{3}; \frac{25}{15}$
 b) $18x = 45 \quad x = \frac{5}{2}; \frac{90}{5}$
 c) $15x - 20 = 25 \quad x = 3; \frac{5}{25}$
 d) $18 - 14x = -3 \quad x = \frac{3}{2}; -\frac{3}{6}$
4. Wenn die Zähler gleich sind.
5. Wenn die Nenner gleich sind, wenn die Zähler null (und die Nenner ungleich null) sind.
6. Zähler = 0; $\frac{0}{1} = \frac{0}{2}$
7. a) $x^3 + 2x^2 + x = x^3 + 2x^2 + x$ äquivalent
 b) $(x+1)(x-1)^2 = (x+1)(x-1)^2$ äquivalent
 c) $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ äquivalent
 d) $2x^3 - 8x^2 - 8x + 32 \neq 2x^3 - 32x$ nicht äquivalent

Aufgaben zu 1.3

- 18/1. a) $\frac{51}{68}$ b) $\frac{-42a}{-105b}$ c) $\frac{17x}{13x}$ d) $\frac{5p^2q}{2pq^2}$
 e) $\frac{18a^3 + 2a^2}{2a^3 - 6a^2}$ f) $\frac{10c^2d^2 + 5cd^3}{6c + 3d}$ g) $\frac{-(9u^2 - v^2)}{-9u^2 + 6uv - v^2}$
 h) $\frac{24n - 6nm^4}{28m^2 - 14m^4 - 4n^2 + 2n^2m^2}$ i) $\frac{35x^2 + 28xy - 120x - 96y}{15x^2 + 17xy + 4y^2}$
 k) $\frac{-7a^2 + 5ab + b^2}{-3 + 2ab}$
2. a) $\frac{29}{29}$ b) $\frac{-35}{-7}$ c) $\frac{-ab}{b}$ d) $\frac{3x^2y^3}{y^2}$
 e) $\frac{5u^3 - 80uv^2}{u + 4v}$ f) $\frac{0}{(3+z)^2}$
3. a) $\frac{1024}{16}$ b) $\frac{16(ab)^2}{-2b}$ c) $\frac{3q - 4p}{-1}$ d) $\frac{9 - 49n^2}{3 + 7n}$
4. a) $\frac{10a - 5b}{4a^2 - b^2}; \frac{14a^2 + 9ab + b^2}{4a^2 - b^2}; \frac{2a^2 - ab - b^2}{4a^2 - b^2} * \frac{8a^3 - 2ab^2 + 4a^2b - b^3}{4a^2 - b^2}$
 b) $\frac{q^3 + 2q^2 - q - 2}{pq^2 - p}; \frac{3p^2q - 3p^2}{pq^2 - p}; \frac{7p^2q + 7p^2 - 3pq^2 - 3pq}{pq^2 - p}; \frac{q^2 - 2q + 1}{pq^2 - p}$
 c) $\frac{45m^4n - 60m^3n^2 + 20m^2n^3}{27m^2 - 36mn + 12n^2}; \frac{54m^2 - 24n^2}{27m^2 - 36mn + 12n^2}; \frac{3m - 2n}{27m^2 - 36mn + 12n^2}; \frac{3a - 24b}{27m^2 - 36mn + 12n^2}$
5. a) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$ b) $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$ c) $\frac{10a^2 - 7ab - 12b^2}{25a^2 - 16b^2}$

- d) $\frac{8p^2 - 14pq + 3q^2}{4p^2 - 9q^2}$ e) $\frac{3r^2 + 5rs + 2s^2}{9r^2 - 4s^2}$ f) $\frac{2a^2 + 5a + 3}{a^2 - 1}$
- g) $\frac{-2x^2 - 3x + 9}{9 - x^2}$ h) $\frac{-30x - 8x^2 - 25}{4x^2 - 25}$
- 19/6. a) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$ b) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$ c) $\frac{2a^2 + ab - 6b^2}{a^2 + 4ab + 4b^2}$
- d) $\frac{p^2 - 2pq - 3q^2}{p^2 - 6pq + 9q^2}$ e) $\frac{10ar - 15r - 14as + 21s}{4a^2 - 12a + 9}$ f) $\frac{6x^2 - 17x + 5}{9x^2 - 6x + 1}$
7. a) $\frac{4x^2 - 45x + 81}{x^2 - 16x + 63}$ b) $\frac{2a^2 + 23a + 56}{a^2 + 5a - 24}$ c) $\frac{3u^2 - 38u + 99}{u^2 - 4u - 45}$
- d) $\frac{6z^2 + 11z - 2}{z^2 - 5z - 14}$ e) $\frac{12a^2 - 62a + 36}{42a^2 - 10a - 12}$ f) $\frac{18x^2 + 9x - 20}{21x^2 + 13x - 20}$
- g) $\frac{88x^2 - 105x + 27}{16x^2 - 46x + 15}$ h) $\frac{24u^2 + 61u - 8}{40u^2 - 53u + 6}$ i) $\frac{49r^4 + 14r^2 - 15}{56r^4 + 19r^2 - 15}$
- j) $\frac{24a^4 + 35a^2 - 49}{48a^4 - 2a^2 - 35}$ k) $\frac{16a^2 - 50ab - 21b^2}{56a^2 - 51ab - 27b^2}$ l) $\frac{63x^2 - 10xy - 25y^2}{36x^2 - 7xy - 15y^2}$
8. a) $11x - 7$ b) $-5x - 3$ c) $16x^2 - 4x^3$ d) $60z^2 + 125z + 10$
- e) $x^2 + 2x + 1$ f) $-x^2 + 25$
- g) 1. Z.: $14s^2 - 2st$; 2. Z.: $28s^2 - 4st + 21s - 3t$;
Nenner $-56s^2 - 8st - 42s - 6t$
9. a) $x = 0$ b) $x = 0$ c) $x = 0$ d) $x = 0$ e) $x = \frac{3}{2}$
- f) $x = \frac{2}{3}$
- 20/10. a) $\frac{14r^2 - 39rs + 27s^2}{10pr - 15ps - 6qr + 9qs}$ b) $\frac{10x^2 + 7xy - 12y^2}{35mx - 28my - 20nx + 16ny}$
- c) $\frac{4a^4 + 13a^2b^2 + 4a^3b + 9ab^3 - 9b^4}{8a^3 - 12a^2b + 18ab^2 - 27b^3}$ d) $\frac{30ap - 36aq - 45bp + 54bq}{24ap - 36bp - 30aq + 45bq}$
- e) $\frac{49x^4 - 119x^2y^2 + 72y^4}{35x^2u - 21x^2z - 40y^2u + 24y^2z}$ f) $\frac{4x^4y^2 - 6x^3y^3 - 18x^2y + 27xy^2}{14x^5y^3 - 63x^3y^2 - 8x^4y^4 + 36x^2y^3}$
- g) $\frac{16x^4 - 24x^2y + 9y^2}{92a^2x^2 - 69a^2y - 140bx^2 + 105by}$
11. a) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^3 - b^3}$ b) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^3 + b^3}$ c) $\frac{a^2 - ab}{a^4 - b^4}$ d) $\frac{a^2 + ab}{a^4 - b^4}$
12. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{-4a}{3b}$ c) $9(x + 1)$ d) $-2p$
13. a) $2v$ b) $\frac{2z}{3}$ c) $\frac{7}{4}$ d) $\frac{1}{3}$

- 20/14. a) x^3 b) $1:y^3$ c) $z:4$ d) $2(u-v)$
15. a) $\frac{8c^2}{3ab}$ b) $\frac{3p^2q^2r}{2}$ c) $\frac{3ac}{25}$ d) $\frac{11}{3uv}$
16. a) $\frac{4u-v}{2}$ b) $\frac{1}{4(4u-v)}$ c) $-y(5x-2y)$ d) $\frac{7p-4q}{25}$
- 21/17. a) a^4 b) a^{10} c) 1 d) $\frac{1}{a^7}$ e) $\frac{1}{a}$
18. a) $\frac{a}{d}$ b) $\frac{a}{b}$ c) qr d) $\frac{1}{x}$ e) $\frac{1}{4d}$ f) $\frac{1}{7y^2}$
- g) $\frac{3x}{2}$ h) $\frac{a}{8b}$ i) $\frac{2b^3}{3a^3}$ k) $\frac{5}{7}$ l) $\frac{15t^3}{17r^3s^3}$ m) $\frac{7p^3}{9bcx^2}$
19. a) $\frac{a+b}{c}$ b) $\frac{2x-3y}{4p+5q}$ c) $\frac{5r}{7s}$ d) $\frac{13x}{17}$ e) $\frac{a+b}{a-b}$
- f) $\frac{a+b}{a-b}$ g) $\frac{5y}{3x-5y}$ h) $\frac{3a}{7a+3}$ i) $\frac{10a^2+12ab}{5a-6b}$
20. a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{x-4y}{x-3y}$ c) 2 d) -2
21. a) $\frac{1}{4}$ b) $1,2$ c) $\frac{1-3b}{2a+5b}$ d) $\frac{3c}{7d}$
22. a) $\frac{1}{2x+1}$ b) $\frac{3y-2z}{3}$ c) $\frac{1}{8a-2}$ d) $\frac{15p+10q}{7}$
23. a) $\frac{8+5a}{8-5a}$ b) $\frac{1}{1000}$ c) -40 d) $\frac{24d-32}{3d+4}$
24. a) $\frac{x+y}{5}$ b) $a-3b$ c) $\frac{7a+2}{2}$ d) $1-x$
- 22/25. a) $\frac{4m+3n}{2m+1}$ b) $\frac{p+q}{5p+1}$ c) $\frac{4a-3}{4a^2b}$ d) $\frac{2u+w}{u+2w}$
26. a) 1 b) $\frac{x-y}{x}$ c) $x-1$ d) $\frac{x^2-x}{x+1}$
27. a) $u+v-w$ b) $\frac{2p-q-5r}{2}$ c) $\frac{m+n+1}{m-n-1}$ d) $\frac{a^2-4}{a-4}$
- e) $\frac{z-5y}{3m+2n}$
28. a) $5a-10b$ b) $\frac{x+y}{x-y}$ c) $\frac{z-3}{z-1}$ d) $\frac{z-3}{z+1}$
29. a) $\frac{a-3b}{a-5b}$ b) $\frac{p-4q}{p-3q}$ c) $\frac{r-3s}{r+5s}$ d) $\frac{x-3y}{x+6y}$

$$\begin{array}{llll}
 \text{e)} \frac{a+7b}{a+14b} & \text{f)} \frac{p-9q}{p-6q} & \text{g)} \frac{5r-3s}{4r-s} & \text{h)} \frac{2x+5y}{3x+4y} \\
 \text{i)} \frac{5p+7q}{5p-6q} & \text{j)} \frac{3u+2v}{8v-u} & \text{k)} \frac{8x-3y}{6x-7y} & \text{l)} \frac{a(8a-7b)}{b(6a+5b)} \\
 \text{m)} \frac{z(9x+2y)}{xy(5x-3y)} & \text{n)} \frac{3z(x+2y)}{y(x-2y)} & & \\
 23/30. \text{ a)} \frac{2x^2-9y^2}{7a^2-4b^2} & \text{b)} \frac{2au+b^2}{3a^2u+5b} & \text{c)} \frac{5a+3c}{3b-5c} & \text{d)} \frac{6x+5y}{2u-3v}
 \end{array}$$

Aufgaben zu 1.4

$$\begin{array}{llllll}
 25/1. & \text{a)} \text{ ja} & \text{b)} \text{ nein} & \text{c)} \text{ ja} & \text{d)} \text{ nein} & \text{e)} \text{ ja} & \text{f)} \text{ ja} \\
 2. & \text{a)} x=5 & \text{b)} x=7,5 & \text{c)} x=4 & \text{d)} x \neq \pm 1,5 & & \\
 3. & \text{a)} \frac{56}{192}; \frac{9}{192} & \text{b)} \frac{2}{12}; \frac{-34}{12} & \text{c)} \frac{-a^2}{2a}; \frac{3}{2a} & \text{d)} \frac{15}{3x^2}; \frac{x}{3x^2} & & \\
 & \text{e)} \frac{2u^2-2u}{3u-3}; \frac{5u}{3u-3} & \text{f)} \frac{4q}{12pq}; \frac{21p}{12pq} & & & & \\
 & \text{g)} \frac{2ac}{14c^3d^3}; \frac{7bd}{14c^3d^3} & \text{h)} \frac{xy-y}{10(x^2-1)}; \frac{2y^2}{10(x^2-1)} & & & & \\
 4. & \text{a)} \frac{c^2-d^2}{ac+ad+bc+bd}; \frac{a^2+2ab+b^2}{ac+ad+bc+bd} & \text{b)} \frac{15-3x}{6x^2-24}; \frac{2x+6}{6x^2-24} & & & & \\
 & \text{c)} \frac{4x^2}{24x^3-12x^2}; \frac{3x^2+15}{24x^3-12x^2} & \text{d)} \frac{3b}{3a^2-27}; \frac{ac+3c}{3a^2-27} & & & & \\
 & \text{e)} \frac{3z+2-2z^2}{z^3-2z^2-4z+8}; \frac{3z^2+6z}{z^3-2z^2-4z+8} & \text{f)} \frac{1}{n^4-9m^2n^2}; \frac{n^2-3mn}{n^4-9m^2n^2} & & & & \\
 26/4. & \text{g)} \frac{pq^2-pq+q^2-q}{p^2q(q^2-1)}; \frac{p^2q+p^2-pq-p}{p^2q(q^2-1)}; \frac{2p^2}{p^2q(q^2-1)} & & & & & \\
 & \text{h)} \frac{2ax^2+2a}{2y^2(x^4-1)}; \frac{bx^2y-by}{2y^2(x^4-1)}; \frac{2cy^2}{2y^2(x^4-1)} & & & & & \\
 & \text{i)} \frac{6a^2b^2(2a+3b)}{6ab(2a+3b)^2}; \frac{4a^2b}{6ab(2a+3b)^2}; \frac{3b(4a^2-9b^2)}{6ab(2a+3b)^2}; \frac{2a(2a+3b)^2}{6ab(2a+3b)^2} & & & & & \\
 5. & \text{a)} \text{HN} = 4a^2(4a^2-9) = 16a^4-36a^2 & \text{b)} \text{HN} = 5x^3y^2-5xy^2 & & & & \\
 & \text{c)} \text{HN} = 18(4m^2-n^2) = 72m^2-18n^2 & \text{d)} \text{HN} = 4(x+5)(x-7) = 4x^2-8x-140 & & & & \\
 & \text{e)} \text{HN} = 4(a+3b)(x^2+1)(x^2-1) = 4ax^4+12bx^4-4a-12b & & & & & \\
 & \text{f)} \text{HN} = (m^2-81n^2)(25n^2-m^2) = 106n^2m^2-m^4-2025n^4 & & & & &
 \end{array}$$

$$26/6. \quad a) \frac{10a^2b + 5ab^2}{4a^2 - b^2}; \quad \frac{2a^2 - ab}{4a^2 - b^2}; \quad \frac{6ab - 3b^2}{4a^2 - b^2};$$

zum Vergleich $HN = 3(4a^2 - b^2)(2a + b)$

$$b) \frac{3x^2 + 24x}{x^2 + 12x + 32}; \quad \frac{2x^2 + 8x}{x^2 + 12x + 32}; \quad \frac{-4x - x^2}{x^2 + 12x + 32};$$

zum Vergleich $HN = 3(x + 4)(x + 8)x^2$

$$c) \frac{294x - 588}{196x^2 - 784}; \quad \frac{-245x - 490}{196x^2 - 784}; \quad \frac{-4x^2 + 8x}{196x^2 - 784};$$

zum Vergleich $HN = 392 \cdot (x + 2)^2(x - 2)^2$

Zu 1.5. Text von Seite 29f. und Abbildung 30.1

Du sollst [dir] merken, dass ein jeglicher Bruch geschrieben und ausgesprochen wird durch zweierlei Zahlen, und wird die erste Zahl oben hingesezt und heißt der Zähler; denn durch diese Zahl wird gezählt, wie viele Teile man hat. Und wird unter diese Zahl quer ein Strichlein gemacht und unter das Strichlein die andere Zahl geschrieben; diese heißt der Nenner, weil sie nennt, welche Teile das sind oder welchen Namen die Teile haben, die durch die obere Zahl, d. h. den Zähler, gezählt worden sind.

Aufgaben zu 2.1

$$36/1. \quad a) \frac{2a}{x} \quad b) \frac{4a}{7b} \quad c) 2a - 3b \quad d) -x - y \quad e) 0$$

$$f) 3a - b \quad g) x + 5y \quad h) \frac{3(a+b)}{a-b} \quad i) \frac{x+y}{x-y}$$

$$2. \quad a) 2 \quad b) -33 \quad c) \frac{8r - 23s}{3s} \quad d) 4a + 5b \quad e) \frac{x+2y}{x-2y}$$

$$3. \quad a) 7a - 3b$$

$$37/3. \quad b) 3x - 8y \quad c) 3u + 8v \quad d) 8r - 3s$$

$$4. \quad a) 1 \quad b) \frac{2a-3}{2a+3} \quad c) 2x - y \quad d) 41p - 47q$$

Aufgaben zu 2.2

$$39/1. \quad a) \frac{a}{2} \quad b) -\frac{7}{36}p \quad c) \frac{3a-5b}{15} \quad d) \frac{9p+22q}{42}$$

$$2. \quad a) \frac{3a+7b}{ab} \quad b) \frac{16}{3a} \quad c) \frac{11n-6m}{8mn} \quad d) \frac{-1}{196z}$$

$$3. \quad a) \frac{24n-35}{28m} \quad b) \frac{-71u}{39vw} \quad c) \frac{7b^2+3a^2}{a^2b} \quad d) \frac{x^2-y^2}{xy}$$

- 39/4. a) $\frac{2b^3 + 2b + a^3}{6a^2b}$ b) $\frac{4a^2 + 3b^2}{48a^2b^2}$
- c) $\frac{28x^2y - 4x^2 - 1}{4x^4}$ d) $\frac{2m^2 + 3n^2}{12m^2n^3}$
5. a) $\frac{a+b}{b}$ b) $\frac{a^2 - b}{a}$ c) $\frac{1 - x^3}{x^2}$ d) $\frac{w^2 + u^2v^2}{u^2v}$
6. a) $\frac{(a+b)^2}{ab}$ b) $\frac{(c-d)^2}{cd}$ c) $\frac{(m-n)^2}{4mn}$ d) $\frac{(x+y)^2}{4}$
7. a) $\frac{4ab}{(a-b)}$ b) $\frac{2(x^2 + y^2)}{x+y}$ c) $\frac{2u(u+v)}{(u-v)}$
8. a) $\frac{2a^2}{a^2 - b^2}$ b) $\frac{1 - 4a + 2b + ab}{3b(4a - 1)}$ c) $\frac{1}{xy}$
9. a) $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ b) $\frac{x^2 - 2xy - y^2}{x^2 - y^2}$ c) $\frac{4ab}{a^2 - b^2}$ d) $\frac{2x}{x^2 - y^2}$
10. a) $\frac{5a^2 - 16b^2}{6a^2 - ab - 15b^2}$ b) $\frac{52u^2 - 50v^2}{24u^2 + 38uv - 7v^2}$
- 40/11. a) $\frac{-116ab}{36a^2 - 49b^2}$ b) 1
12. a) $\frac{2a - b + 4c}{9}$ b) $\frac{-15m - 2n}{23}$ c) $\frac{175p - 42q + 120}{630}$
- d) $\frac{7a - 19b}{144}$
13. a) $\frac{2}{a}$ b) $\frac{1 - 3n - m}{3mn}$ c) $\frac{9a^2 + 45b^2 + 5ab - 15a^2b}{15a^2b^2}$
- d) $\frac{-7x^3y^2 - 3xy^3 - 6y^3 - 14x^3}{42x^3y^4}$
14. a) $\frac{y}{6(a+b)}$, bis 2. Auflage: $\frac{6x + y - 6}{6(a+b)}$ b) $\frac{29}{84(5a - 3)}$
15. a) $\frac{32np - 91mq - 4nq}{49m^2 - 16n^2}$ b) $\frac{16ax - 11ay - bx + 2by}{(x - 2y)(2x - y)}$
16. a) $\frac{-49q^2 - 8p^2}{3pq(4p - 7q)}$ b) $\frac{y^2 - 3z^2 + 3yz}{3y^2z(8z^2 + 7y)}$
17. a) $\frac{2(8a^2 - 12a - 7)}{(4a + 7)(4a - 7)}$ b) $\frac{45x^2 + 31x + 5}{5(3x - 1)(3x + 1)}$
18. a) $\frac{-b(b+x)}{a(a+b)(a-b)}$ b) $\frac{5n - 8m}{10m(5m - 2n)}$
19. a) $\frac{1 - 3x}{2(6x - 1)^2}$ b) $\frac{z + 40}{22(5z + 2)^2}$

- 40/20. a) $\frac{-xy}{z(13z-y)^2}$ b) $\frac{3a(b-3a)}{b(9a-b)(9a+b)}$
21. a) $\frac{11st-2s+28}{(t+2)(t-2)^2}$ b) $\frac{9r^2+112s^2}{4(r+4s)^2(r-4s)}$
22. a) $\frac{x(x+1)}{2(1-x)(x-3)}$ b) $\frac{3(y+2)}{2(y-1)(y+3)}$
23. a) $\frac{-a-3}{2a+3}$ b) $\frac{m}{2(m-2n)}$
24. a) $\frac{x(x^2-2x+4)}{x^4-16}$ b) $\frac{5(2y+3)}{(4y^2+9)(2y-3)}$
- 41/25. a) $\frac{8a^3}{(4a+5b)^2(4a-5b)}$ b) $\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2}$
26. a) $\frac{2(2b^3+2a^2b-a^3)}{ab(a-2b)^2}$ b) $\frac{(3y-2x)(4x^2+9y^2+6xy)}{6xy(2x+3y)^2}$
27. a) $\frac{-12m^3-13m^2-4m+4}{m^2(9m^2-4)}$ b) $\frac{u^3-125v^3+225uv^2}{uv(u^2-25v^2)}$
28. a) 1 b) 0
29. a) 1 b) $\frac{6ax}{9-25x^2}$
30. a) $\frac{a^2+b^2+4ab}{a^2-b^2}$ b) $\frac{2(2a-3b)}{2a+3b}$ c) $\frac{2(3p-4q)}{3p+4q}$
- d) $\frac{4a-b}{4a+b}$ e) $\frac{x+3y}{4x+5y}$ f) $\frac{1}{2(a-8)}$
31. a) $\frac{2n}{15(3n-2m)}$ b) $\frac{a-b}{(a+b)^2}$ c) $\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b-c)(a-b+c)}$
32. a) $\frac{2x}{3(2x-3)}$ b) $\frac{3}{2(5y-4)}$
33. a) $\frac{45a^2-28b^2-168ab}{0,6(3a+2b)(3a-2b)}$ b) $\frac{3a^2+4b^2-7ab}{30(3a-4b)}$
- 42/34. a) $\frac{5bx+4by-9ax}{12(x-2y)(x+2y)}$ b) $\frac{y(1-u-v)}{4(u+2v)^2}$
35. a) $\frac{-2}{3(x-7)}$ b) $\frac{-4a^2+b^2+14ab}{12ab(2a+b)}$
36. a) $\frac{a^4-2a^3-2a+1}{a^4-1}$ b) $\frac{1+2x^2-2x^3}{1-x^4}$
37. a) $\frac{-b(a+b)}{(9a^2-b^2)}$ b) $\frac{+1}{3b-2a}$ 38. a) $\frac{36-33x-5x^2}{2(x^2-9)}$ b) $\frac{9x^2+3xy-2y^2}{2y(9x^2-y^2)}$

$$42/39. \quad \text{a) } \frac{-1}{(x-1)^2} \quad \text{b) } \frac{-3y}{(3y+2z)^2} \quad 40. \quad \text{a) } \frac{48ab(a-3b)}{(9a^2-16b^2)^2} \quad \text{b) } \frac{3b-2a}{3b+2a}$$

$$41. \quad \text{a) } 0 \quad \text{b) } \frac{2a+5b}{2a-5b} \quad 42. \quad \frac{x(2x-2y-3a+2b)}{(3a-2b)(x^2-y^2)} \quad 43. \quad \frac{-1}{a+1}$$

$$43/44. \quad \frac{4a^2-b^2-8ab}{12ab(2a-3b)} \quad 45. \quad 0 \quad 46. \quad \frac{49}{(x-3)^2(x+4)^2} \quad 47. \quad 1$$

$$48. \quad \frac{p^3+q^3}{p^3-q^3} \quad 49. \quad \frac{x^2}{x^3+y^3}$$

$$50. \quad \frac{4}{4x^2-1}$$

$$51. \quad \frac{b(a^2+4ab+3b^2)}{(a-b)^2(a+b)^2}$$

$$52. \quad \frac{y(4x^3-xy^2-y^3)}{(2x-y)^2(2x+y)^2} \quad 53. \quad \frac{60ab}{9b^2-a^2}$$

$$54. \quad \frac{10a^2}{(a-b)(a+b)^2} \quad 55. \quad \frac{5}{1-4x^2}$$

$$56. \quad \frac{b(b+2a)}{(a+b)(a+2b)(a+3b)}$$

$$57. \quad \text{a) } 0 \quad \text{b) } 0$$

$$\text{c) } \frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{ab(a-b) + ac(c-a) + bc(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\text{d) } \frac{ab(a^2-b^2) + ac(c^2-a^2) + bc(b^2-c^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

Aufgaben zu 2.3

$$45/1. \quad \text{a) } \frac{a^2}{b^2} \quad \text{b) } 1 \quad \text{c) } \frac{14p^2}{15q^2} \quad \text{d) } \frac{14}{15}$$

$$2. \quad \text{a) } \frac{5}{2l} \quad \text{b) } \frac{121bc}{84ad} \quad \text{c) } \frac{1}{8xz} \quad \text{d) } \frac{10m^3}{9n^2}$$

$$3. \quad \text{a) } \frac{49a^2x^2}{169b^2y^2} \quad \text{b) } \frac{15n}{11m} \quad \text{c) } \frac{uw}{v} \quad \text{d) } \frac{6a^3bd^2}{5c^2}$$

$$4. \quad \text{a) } \frac{35ac}{3b} \quad \text{b) } \frac{42m^2}{11} \quad \text{c) } \frac{20xy^2}{3} \quad \text{d) } \frac{13u^2v}{3}$$

$$5. \quad \text{a) } 1 \quad \text{b) } -2 \quad \text{c) } \frac{20x}{3} \quad \text{d) } -\frac{b^2}{2}$$

$$6. \quad \text{a) } (a-b)^2 \quad \text{b) } (a+b)^2 \quad \text{c) } a^2-b^2 \quad \text{d) } -(a-b)^2$$

$$\text{e) } -(a+b)^2 \quad \text{f) } a^2-b^2$$

- 45/7. a) $\frac{6(1-3z)}{z-3}$ b) $\frac{4(2m-3)}{5}$ c) $\frac{6(1-u)}{u}$ d) $\frac{-3a}{2b^2}$
8. a) $\frac{2}{3x(x-2)}$ b) $\frac{3 \cdot (5m-n)(2m+1)}{n(5m+n)}$
9. a) $\frac{3b(7a-b)}{2}$ b) $\frac{6(a+b)}{(2x-y)^2}$
10. a) -1 b) $\frac{1}{(2x-3)(4x+3)}$ 11. a) $(5x-3)^2$ b) $\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$
- 46/12. a) $x+4$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 6
13. a) $\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}$ b) $\frac{49-25z^4}{z^2}$ 14. a) $\frac{1}{1+x}$ b) $-\frac{8u}{v}$
15. a) $\frac{p+q}{pq}$ b) $2n-m$
16. a) $\frac{(a+b)^2}{ab}$ b) $\frac{1}{ab}$ c) $\frac{-(a-b)^2}{ab}$ d) $-\frac{1}{ab}$
17. a) $\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$ b) $\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}$ c) $\frac{(14y-15x)^2}{441x^2y^2}$
18. a) $\frac{-(2a-3b)^2}{6ab}$ b) $\frac{16x^2-1225y^2}{196xy}$
19. a) $\frac{u^2+v^2}{u}$ b) $\frac{s(3r-2s)}{18r^2}$
- c) $(3y-4x)(3y+2x)$ d) $\frac{(2q-7p)(20q^2-21p^2)}{70pq^2}$
20. a) $\frac{(42y-5x)(27x+4y)}{18}$ b) $\frac{25a^2}{36(a-3b)^2}$
21. a) $\frac{(3c-2d)^2}{16c^2-9d^2}$ b) $\frac{25a^2}{36(a-3b)^2}$
- c) $\frac{p-5q}{4(p+5q)}$ d) $\frac{100a^4+225b^4}{144a^2b^2}$
22. a) $\frac{145a^4+320b^4-400a^2b^2}{144a^2b^2}$ b) $\frac{-91p^4+885p^2q^2-900q^4}{225p^2q^2}$
- c) $\frac{30a^4+33b^4-64a^2b^2}{72a^2b^2}$
- 47/23. a) $\frac{-x^2+xy-y^2}{xy(x+y)}$ b) $\frac{-(2y+x)}{x}$
24. a) $\frac{4(2m+n)(2n+m)}{3mn}$ b) $\frac{34xy}{4x^2-9y^2}$

$$47/25. \text{ a) } \frac{(1+z+z^2)^2}{z^2}$$

$$\text{b) } \frac{(x^2+2x+3)(x^2+2x-3)}{x^5}$$

$$26. \text{ a) } 0$$

$$\text{b) } \frac{(bx)^3 - (ay)^3}{abx^2y^2}$$

$$\text{c) } \frac{(x^3 - 2x^2r + 3xr^2 - 4r^3)(r^2 + 2rx + 3x^2)}{x^2r^3}$$

$$\text{d) } \frac{(a^3x^3 + 6a^2bxy^2 - 36b^3y^3) \cdot (b^3y^3 + 6ab^2x^2y - 36a^3x^3)}{36a^3b^3x^3y^3}$$

$$27. \text{ a) } 0 \quad \text{b) } 0 \quad \text{c) } 0$$

$$28. \text{ a) } a = b + g; \quad e = \frac{a}{b}; \quad d = \frac{a}{g}$$

$$d + e = \frac{a}{b} + \frac{a}{g} = \frac{a(b+g)}{bg} = \frac{a^2}{bg} = d \cdot e$$

Übersetzung von Abbildung 49.1:

Über das Teilen von Brüchen.

Ich führe die Regel über das Teilen auf die Regel über das Multiplizieren von Brüchen zurück, und zwar folgendermaßen:

Ich vertausche die Terme des Teilers miteinander, d. h. den Zähler setze ich unter den Bruchstrich und den Nenner setze ich über den Bruchstrich. Ist dies geschehen, so bleibt nichts anderes zu tun übrig, als dass du nach der oben angegebenen Multiplikationsregel verfährt.

Sei's nun, ich will $\frac{1}{2}$ durch $\frac{2}{3}$ teilen. Dann sieht das Beispiel zur Regel so aus: $\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$, macht $\frac{3}{4}$ als Quotienten.

So ist es auch, wenn ich $\frac{2}{3}$ durch $\frac{1}{2}$ teilen möchte. Das Beispiel sieht dann so aus: $\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}$, und das ergibt den Quotienten $\frac{4}{3}$ bzw. $1\frac{1}{3}$.

Und genauso geht es mit anderen.

Und ich weiß, wie bequem das Zurückführen der Teilungsregel vor sich geht und wie oft es das Gedächtnis entlastet, besonders bei der Durchführung von Beispielen, die der Algebra gemäß berechnet werden müssen.

Aufgaben zu 2.4

$$49/1. \text{ a) } \frac{1}{5} \quad \text{b) } \frac{x}{25} \quad \text{c) } \frac{9}{y} \quad \text{d) } 98$$

$$2. \text{ a) } \frac{3}{2} \quad \text{b) } \frac{2a}{b} \quad \text{c) } \frac{5}{4} \quad \text{d) } \frac{27x}{125y}$$

$$3. \text{ a) } \frac{1}{3a^3} \quad \text{b) } 2x^2y \quad \text{c) } \frac{4u^2}{27vw} \quad \text{d) } 9b^3$$

$$50/4. \text{ a) } \frac{16x^2}{25y^2} \quad \text{b) } \frac{162}{245} \quad \text{c) } \frac{4q}{125p^2} \quad \text{d) } \frac{15bc}{2a}$$

$$5. \text{ a) } \frac{15a^2v^4w}{32u} \quad \text{b) } \frac{32m^2n^3}{75x^4z^3}$$

- 50/6. a) $\frac{25}{6}$ b) $-\frac{5}{m}$ 7. a) $\frac{5r}{4t}$ b) $-\frac{16}{3y}$
8. a) $(a-3b)^2$ b) $\frac{2}{5(x+y)^2}$ 9. a) $\frac{6(m+5)^3}{m-5}$ b) $\frac{1}{3(x+5)^2}$
10. a) $\frac{3(5a-2b)}{4(c+7)}$ b) $\frac{4(w+3)}{3(2u+5v)}$
11. a) $-\frac{9(p+2q)(r+3)}{2}$ b) $-\frac{(9s-1)^2}{9s+1}$
12. a) $\frac{(x+1)(1-y)}{(x-1)(1+y)}$ b) $-\frac{1}{3}$
13. a) $\frac{bc}{a}$ b) $\frac{b}{ac}$ c) $\frac{c}{ab}$
14. a) $\frac{ux}{v^2}$ b) $\frac{uw^2}{v^2x}$ c) $\frac{v^2}{ux}$
15. a) 1 b) z^2
16. a) $\frac{x(x-3)}{6}$ b) $-\frac{2}{3}(2m+1)$
17. a) $\frac{3(x+y)}{28xy(x-y)}$ b) $\frac{2(a-b)}{39ab}$ c) $\frac{b^2}{4x^2}$ d) $\frac{8a^2(x+y)}{9b^2(a+b)}$
- 51/18. a) $\frac{7a^2+8c^3}{28a^2c^2}$ b) $\frac{30m-7n^2}{3mn^4}$ c) $\frac{6x-5x^2yz^2-16yz^4}{7y^2z}$
19. a) $-\frac{8}{r}$ b) $\frac{(1-p)q^2}{3q-8p}$ c) $\frac{21a+25b-3x-12}{3(x-4)}$
20. a) $\frac{9a}{8c}$ b) $\frac{7}{5(4q-7p)}$
21. a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{16ad(13bd+4ac)}{5(3bd-4ac)}$ c) $\frac{x^2+2x+4}{2(1-x)(x+2)^2}$
22. a) $\frac{(x^2y^2+1)(xy-1)}{y^3}$ b) $\frac{(x^2y^2+1)(xy+1)}{y^3}$
23. a) $\frac{ad+bc}{cd}$ b) $\frac{4x^2-3y^2}{6xy}$
24. a) $\frac{a^2+b^2+4a^2b}{ab(a-b)(a+b)}$ b) $\frac{5rt(2r-5t)-5t-3r}{15rt(2r-5t)}$
- c) $-\frac{1}{x}$, bis 2. Auflage: $\frac{(2x-3y)(4x^2+9y^2)-36x^2y^2}{6xy(4x^2+9y^2)}$

Aufgaben zu 2.5

53/1. a) $\frac{a}{c}$ b) $\frac{a^2}{b^2}$ c) 1 d) $\frac{1}{b}$ e) $\frac{a}{b^2}$

f) $\frac{a^2}{b}$ g) $\frac{ac}{b}$ h) ab i) $\frac{a}{b^2}$ j) a^3

2. a) $\frac{a}{6x}$ b) $\frac{14ab^2}{15xy}$ c) $\frac{20p^2r}{49sy^2}$ d) $\frac{20a^3p}{21qx^3}$

3. a) $\frac{ac+b}{cd}$ b) $\frac{ad}{bd-c}$ c) $\frac{ac+b}{ac-b}$

d) $\frac{acd+bd}{acd-c^2}$ e) $\frac{6+a}{3b}$ f) $\frac{15a}{25b-4c}$

4. a) $3a+2b$ b) $3a-2x$ c) $\frac{4}{5}$

5. a) $\frac{b(a+b)}{a}$ b) $\frac{b-a}{b}$ c) $\frac{a-b}{a+b}$

6. a) a b) $\frac{x-y}{x+y}$ c) $\frac{x+y}{x-y}$

54/7. a) a b) $\frac{2x}{x^2+1}$ c) $\frac{4a^2+9b^2}{12ab}$

8. a) $\frac{x+1}{x+2}$ b) $\frac{x+2}{2x+3}$ c) $\frac{2x+3}{3x+5}$

d) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ e) $\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+2x+1}$ f) $\frac{x^3+x^2+2x+1}{x^4+x^3+3x^2+2x+1}$

Aufgaben zu 3.1

58/1. a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) keine Lösung d) $\frac{3}{5}$

2. a) $\frac{3}{10}$ b) -7 c) $\frac{21}{10}$ d) 6

59/3. a) $\frac{3}{4}$ b) 4 c) keine Lösung

4. a) $-\frac{3}{8}$ b) 2 c) 4,92

5. a) 5 b) $\frac{1}{90}$ c) keine Lösung

6. a) 18 b) keine Lösung c) keine Lösung

7. a) -7 b) 19,5 c) $-\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{15}$

8. a) $\frac{51}{50}$ b) 30 c) $\frac{1}{6}$ d) 25

- 59/9. a) 3 b) -3 c) $\frac{4}{5}$
 d) keine Lösung e) keine Lösung f) 2,8
10. a) 3 b) 7 c) 4 11. a) 4 b) 3 c) 8
 d) 9 e) $\frac{9}{7}$ f) 2 d) 6 e) $\frac{155}{27}$ f) 5
- 60/12. a) keine Lösung b) -1
13. a) 4 b) 4 c) 2 d) 3
14. a) $\{0; 3\}$ b) $\{0; \frac{2}{4}\}$ c) $\{0; 1\}$ d) $\{0; \frac{3}{2}\}$
15. a) 2 b) 5 c) 4 d) 7
16. a) $\{0; 23\}$ b) $\{0; 453\}$ c) $\{0; 199\}$ d) $\{0; \frac{83}{4}\}$
17. a) 0 b) $\frac{3}{13}$ c) keine Lösung d) -1
18. a) $-\frac{2}{11}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{89}{418}$
 d) $-\frac{27}{7}$ e) 6 f) $\frac{3}{2}$
19. a) 0 b) $\{0; -4\}$ c) 0 20. a) $\{0; \frac{19}{33}\}$ b) 0
- 61/21. a) -3 b) $\{0; 3\}$
22. a) keine Lösung b) $\{-\frac{5}{3}; +\frac{5}{3}\}$
23. a) $\frac{29}{2}$ b) -2 24. a) 13 b) 13
25. a) $\{1; \frac{5}{3}\}$ b) 1 26. a) $\{-3; +3\}$ b) 4
27. keine Lösung 28. keine Lösung 29. $-\frac{5}{2}$

Aufgaben zu 3.2

- 63/1. -3
2. a) $\frac{3}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{11}{5}$
3. a) -2 b) $\frac{3}{5}$ c) $L = \{ \}$ d) $\frac{141}{76}$
4. a) 1 b) 3
5. a) $\frac{1}{2}$ b) $L = \{ \}$ c) $\frac{7}{2}$ d) $L = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{7}{3}\}$
6. a) 5 b) -1 c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{90}{19}$
7. a) $\frac{17}{10}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{23}{4}$

- 63/8. a) $\frac{4}{5}$ b) $L = \{ \}$ c) $L = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{5}{2}; 7\}$ d) 7
- 64/9. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) -4 d) $\frac{9}{2}$
10. a) 0 b) $L = \{ \}$
11. a) 2 b) 5 c) -18
12. a) $L = \{ \}$ b) 2 c) -3 d) $L = \mathbb{Q} \setminus \{-2; +3\}$
13. a) 1 b) 0 c) 5 d) $\frac{1}{8}$
14. a) $\frac{2}{29}$ b) -1
- 65/15. 2 16. 7 17. a) $-\frac{3}{2}$ b) $L = \{ \}$
18. a) 0 b) $L = \{-2; +2\}$ 19. $-\frac{35}{22}$ 20. $L = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\}$
21. a) 3 b) -8 22. a) $\frac{23}{2}$ b) 6
23. a) 9 b) $\frac{122}{13}$ 24. a) $-\frac{5}{3}$ b) $-\frac{28}{29}$
25. 3 26. 7
- 66/27. -7 28. $\frac{7}{6}$ 29. -1 30. 1
31. -3 32. $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$
33. 4 und 2 34. 314 und 111 35. $x = 5$
36. Sie ist heute 15 Jahre alt. 37. Er reicht 12 Std.
- 67/38. In 30 Tagen. 39. Es dauert $\frac{12}{5}$ Std., also genau 2 Std. und 24 min.
40. Es würde 15 min dauern. 41. Es dauert 20 Std.
42. Der Inhalt reicht für 12 Tage.
- 68/43. Sie brauchen noch 3 Tage. 44. Noch weitere 15 Tage.
45. Sie würden es zusammen in $\frac{36}{11}$ Std. schaffen.
46. a) 7 b) 6 c) 5 d) 1) $\frac{bc-ad}{d-c}$ 2) $\frac{bc-ad}{c-d}$ e) $\frac{bc-ad}{a-b+c-d}$
47. a) $\frac{12}{21}$ b) $\frac{14}{21}$ c) $\frac{24}{30}$ d) $\frac{15}{18}$

68/48. a) $\frac{36}{45}$ b) $\frac{25}{30}$ c) $\frac{25}{40}$

69/49. a) 1) 72 und 168 2) 84 und 156 3) 165 und 75
b) 48 und 20 c) 60 und 40 d) 45

Aufgaben zu 3.3

72/1. a) 2 : 3 b) 1 : 14 c) 25 : 2 d) 10 : 21
e) 8 : 5 f) 1 : 1 g) (-10) : 53 h) 1 : 4

2. a) 12 b) $\frac{125}{8}$ c) 3 d) 0
e) -2 f) $\frac{2}{3}$ g) -1 h) 0

3. a) $x = 18, y = 27$ b) $x = -6, y = -10$ c) $x = -7, y = 21$
d) $x = 7, y = -21$ e) $x = 11, y = 5$ f) $x = 20, y = 14$

4. a) 9 b) -15 c) $\frac{6}{5}$ d) $145,8 = \frac{729}{5}$

5. Wende Satz 70.1 an!

73/6. a) Wende Satz 70.1 an!

7. a) $x = 57$ b) $a : 3 = 3$ c) $a : b = c : d$
d) $a : b = c : d$ e) $a : 5 = 1 : 2$ f) $a : 3 = 8 : 11$
g) $x = 2a - 3b$

8. $\alpha = 35^\circ$ und $\beta = 55^\circ$

9. a) 24 und 28 b) 15 und 20 c) 12 und 16 d) 14

74/10. $125 : m = 200 : 250 \Leftrightarrow m = 156\frac{1}{4}$
 $125 : z = 200 : 80 \Leftrightarrow z = 50$
 $125 : w = 200 : 4 \Leftrightarrow w = 2,5$
 $125 : a = 200 : 600 \Leftrightarrow a = 375$
 $125 : z = 200 : 1 \Leftrightarrow z = \frac{5}{8}$
 $125 : w = 200 : \frac{3}{2} \Leftrightarrow w = \frac{15}{16}$

Antwort: Für den Teig braucht man dann 156,25 g Mehl, 50 g Zucker und 2,5 EL Weißwein, für den Belag 375 g Äpfel, $\frac{5}{8}$ g Zucker und $\frac{15}{16}$ EL Wasser.

Aufgaben zu 4.1

80/1. a) $1 - a^2$

b) $a + 3b - 2c$

c) $a + 2a^2$

d) $4m^2 - 1$

e) $6p - q$

f) $7a - 5b + 4c$

2. a) $a \neq 0: \frac{3a-2b}{a};$

b) $b \neq -1: 2b - 2$

$a = 0: \mathbb{Q}$

$b = -1: \mathbb{Q}$

c) $uv \neq 0: 3u$

d) $b \neq 0 \begin{cases} a \neq 0: \frac{bc}{a} \\ a = 0 \end{cases}$

$uv = 0: \mathbb{Q}$

$c \neq 0: \{ \}$
 $c = 0: \mathbb{Q}$

3. a) $1 - a^4$

b) $m \neq -\frac{1}{2}n: 4m^2 - n^2$

4. a) $b \neq 0 \begin{cases} a \neq 0: b \\ a = 0: \mathbb{Q} \end{cases}$

b) $p \neq -q \begin{cases} p \neq 0: \frac{1}{2}p \\ p = 0: \mathbb{Q} \end{cases}$

c) $abc \neq 0 \begin{cases} a \neq c: \frac{(bc-a^2)c}{b(c-a)} \\ a = c: \begin{cases} a^2 = bc: \mathbb{Q} \\ a^2 \neq bc: \{ \} \end{cases} \end{cases}$

5. a) $\frac{1}{3}(4a+2b)$

b) $-3m - n$

c) $a \neq 0: 5a + 3b$
 $a = 0: \mathbb{Q}$

d) $c = 0: \mathbb{Q}$

$c \neq 0 \begin{cases} d \neq 0: \frac{d-4c}{2d} \\ d = 0: \{ \} \end{cases}$

6. a) $p \neq 1: p - 1$

$p = 1: \mathbb{Q}$

b) $m \neq n: -1$

$m = n: \mathbb{Q}$

c) $a = 0: \{ \}$

d) $a \neq \frac{1}{2}: \frac{a}{(2a-1)^2}$

$a \neq 0 \begin{cases} a = -1: \mathbb{Q} \\ a \neq -1: \frac{1}{a} \end{cases}$

$a = \frac{1}{2}: \{ \}$

7. a) $ab \neq 0 \begin{cases} a \neq -b: a \\ a = -b: \mathbb{Q} \end{cases}$

b) $|m| \neq 1 \begin{cases} m \neq 3: 2m + 2 \\ m = 3: \mathbb{Q} \end{cases}$

8. a) $\frac{3}{2}p$

b) $a \neq -b: 2$
 $a = -b: \mathbb{Q}$

$$\text{c) } a \neq 2b: \frac{3a+b}{2b-a}$$

$$a = 2b \begin{cases} a = 0: \mathbb{Q} \\ a \neq 0: \{ \} \end{cases}$$

$$\text{d) } m \neq 1: 1-m$$

$$m = 1: \mathbb{Q}$$

$$80/9. \text{ a) } s \neq 0: 2r-s$$

$$s = 0: \mathbb{Q}$$

$$\text{b) } b \neq 0 \begin{cases} a \neq 3: \frac{a+3}{b} \\ a = 3: \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$10. \text{ a) } a \neq -b: b-a$$

$$a = -b: \mathbb{Q}$$

$$\text{b) } p = 2q: \mathbb{Q}$$

$$p \neq 2q \begin{cases} r \neq 0: \frac{p-2q}{r} \\ r = 0: \{ \} \end{cases}$$

$$\text{c) } b = 0: \mathbb{Q}$$

$$b \neq 0 \begin{cases} a = 0: \{ \} \\ a \neq 0: \frac{2a-b}{2a} \end{cases}$$

$$\text{d) } 1-m^2$$

$$11. \text{ a) } m \neq 0: 8$$

$$\text{b) } n \neq 0: \frac{1}{8}(n-3)$$

$$12. \text{ a) } 2a \neq -b: \frac{8a^2+4ab+2b^2}{2a+b}$$

$$\text{b) } 3p \neq -5q: -\frac{(3p-5q)^2}{3p+5q}$$

$$2a = -b \begin{cases} a \neq 0: \{ \} \\ a = 0: \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$3p = -5q \begin{cases} p = 0: \mathbb{Q} \\ p \neq 0: \{ \} \end{cases}$$

$$81/13. \text{ a) } ab \neq 0: \frac{a^2+b^2}{a}$$

$$\text{b) } 2|m| \neq |n|: -\left(\frac{2m+n}{2m-n}\right)^2$$

Aufgaben zu 4.2

$$82/1. \text{ a) } D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$b \neq 0 \begin{cases} a \neq 0: \frac{a}{b} \\ a = 0: \{ \} \end{cases}$$

$$b = 0 \begin{cases} a \neq 0: \{ \} \\ a = 0: D \end{cases}$$

$$\text{b) } D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$$

$$b \neq 0 \begin{cases} a \neq 0: \frac{a+b}{b} \\ a = 0: \{ \} \end{cases}$$

$$b = 0 \begin{cases} a \neq 0: \{ \} \\ a = 0: D \end{cases}$$

$$\text{c) } D = \mathbb{Q} \setminus \{b\}$$

$$b \neq 0 \begin{cases} a \neq 0: \frac{a+b^2}{b} \\ a = 0: \{ \} \end{cases}$$

$$b = 0 \begin{cases} a \neq 0: \{ \} \\ a = 0: D \end{cases}$$

$$2. \text{ a) } D = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$$

$$a \neq 1: \frac{1+a}{1-a}$$

$$a = 1: \{ \}$$

$$\text{b) } D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$a \neq -b: 1$$

$$a = -b: D$$

$$\text{c) } D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$a \neq 0: -a$$

$$83/3. \text{ a) } D = \mathbb{Q} \setminus \{-a; a\}$$

$$a = 0 \vee a = 1: D$$

$$a \neq 0 \wedge a \neq 1: \{ \}$$

$$\text{b) } D = \mathbb{Q} \setminus \{-a; a\}$$

$$a \neq 0 \begin{cases} a \neq -2: 0 \\ a = -2: \mathbb{Q} \setminus \{-2; 2\} \end{cases}$$

$$a = 0: \{ \}$$

83/4. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{a\}$

$$a \neq b \begin{cases} b \neq 0: \frac{a^2}{b} \\ b = 0: \{ \} \end{cases}$$

b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{a\}$

$$a \neq 2b \begin{cases} a \neq b: \{ \} \\ a = b: D \end{cases}$$

5. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-a; a\}$

$$a = 0: D$$

$$a \neq 0: \{ \}$$

b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2b; 2b\}$

$$a + b \neq 0 \begin{cases} b \neq \pm \frac{1}{8}: \frac{1}{4} \\ b = \pm \frac{1}{8}: \{ \} \end{cases}$$

$$a + b = 0: D$$

6. a) $a = 0: D = \mathbb{Q}; L = \{ \}$

$$a \neq 0: D = \mathbb{Q} \setminus \left\{ -\frac{1}{2a} \right\}; L = \left\{ -\frac{1}{3a} \right\}$$

b) $b \neq 0: D = \mathbb{Q} \setminus \{a; b\}$

$$a \neq b \begin{cases} a \neq 0: a + b \\ a = 0: \{ \} \end{cases}$$

$$a = b: D$$

7. a) $(a, b) \neq (0, 0): a = 0, b \neq 0: D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, L = \{-1\}$

$$a \neq 0, b = 0: D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, L = \{-1\}$$

$$a \neq 0, b \neq 0: D = \mathbb{Q} \setminus \left\{ -\frac{a}{b}; \frac{b}{a} \right\} \begin{cases} a \neq \pm b: L = \{-1\} \\ a = \pm b: L = \{ \} \end{cases}$$

b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-b; b\}$

$$a \neq 0 \wedge a \neq \pm \frac{1}{2b}: \frac{1}{2a}$$

$$a = 0 \vee a = \pm \frac{1}{2b}: \{ \}$$

8. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-a; a\}$

$$b \neq 0: \{ \}$$

$$b = 0: D$$

b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-a; a\}$

$$b \neq -1 \begin{cases} a = 0: \{ \} \\ a \neq 0: \begin{cases} b \neq -\frac{1}{2}: \frac{ab}{1+b} \\ b = -\frac{1}{2}: \{ \} \end{cases} \end{cases}$$

$$b = -1 \begin{cases} a = 0: D \\ a \neq 0: \{ \} \end{cases}$$

9. $a \neq 0: D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}a; \frac{1}{2}a\}$

$$a \neq \frac{1}{2}: a$$

$$a = \frac{1}{2}: D$$

10. $a = 0: D = \mathbb{Q}, L = \{ \}$

$$a \neq 0: D = \mathbb{Q} \setminus \left\{ -\frac{1}{a}; \frac{1}{a} \right\}; L = \left\{ -\frac{1}{2a} \right\}$$

11. $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{4}b; \frac{1}{4}b\}$

$$b \neq 0 \begin{cases} b \neq -2 \wedge b \neq 2: -\frac{1}{b} \\ b = -2 \vee b = 2: \{ \} \end{cases}$$

$$b = 0: \{ \}$$

12. $a = 0: D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, L = \{ \}$

$$a \neq 0: D = \mathbb{Q} \setminus \left\{ 0; \frac{1}{a} \right\}$$

$$a \neq -\frac{1}{2} \wedge a \neq \frac{1}{2}: 4a$$

$$a = -\frac{1}{2} \vee a = \frac{1}{2}: \{ \}$$

83/13. $a \neq b: D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$b = 0: D$

$b \neq 0: a = -b: D$

$a \neq -b: a = 0: \{ \}$

$a \neq 0: a$

14. $a \neq 0: D = \mathbb{Q} \setminus \{-a; \frac{1}{3}a; a\}$

$a = 1: D$

$a \neq 1: \{ \}$

15. $a \neq 0: D = \mathbb{Q} \setminus \{-a; 0; a\}$

$L = \{-3a\}$

16. $D = \mathbb{Q} \setminus \{-a(a+1); -2a, -a\}$

$L = \{ \}$

17. $a \neq 0 \wedge c \neq 0: D = \mathbb{Q} \setminus \{-c-a, -a, -c, c-a\}$

$a = -c: -a$

$a \neq -c: a = c: \{ \}$

$a \neq c: -\frac{a^2 + c^2}{a + c}$

Aufgaben zu 5.1

90/1.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) y	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
b) y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
c) y	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
d) y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2. Die Zuordnung ist in jedem Fall eindeutig; $D = \mathbb{N}$.

a) $f(x) = \frac{x}{2}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = x^2$

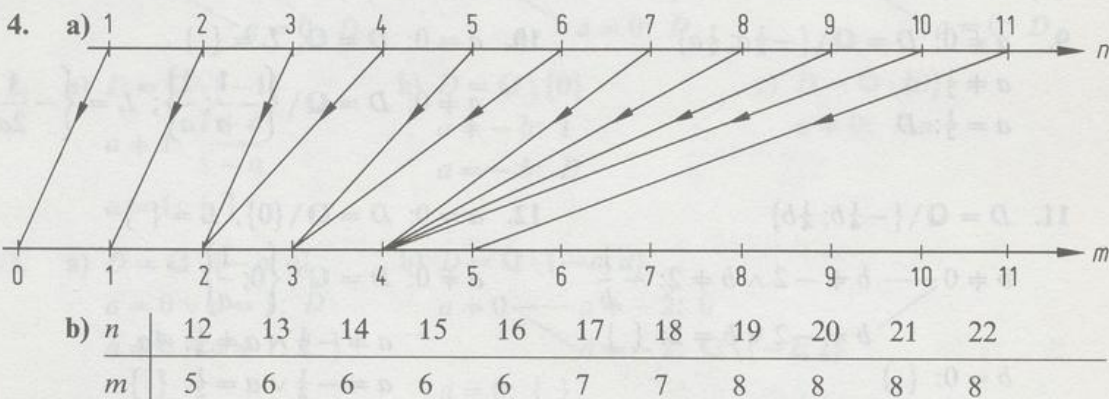
d) $f(x) = x$

3. a) kein Fixelement

b) 1 ist Fixelement

c) 1 ist Fixelement

d) jedes $x \in D$ ist Fixelement



n	23	24	25	26	27	28	29	30
m	9	9	9	9	9	9	10	10

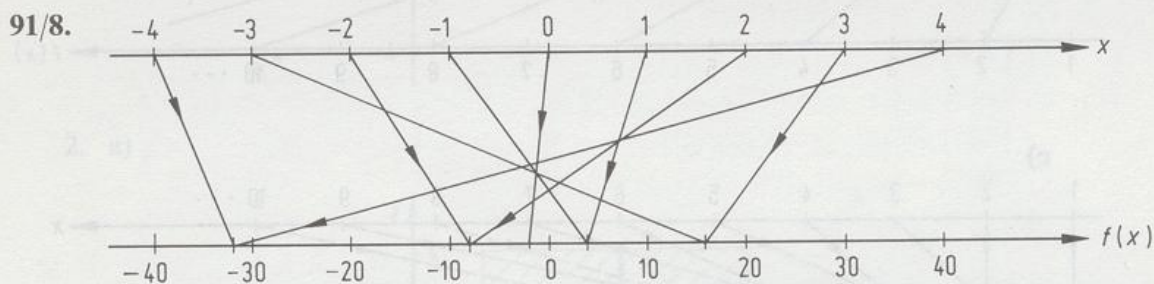
- 90/5. a) Eindeutige Zuordnung; $D = \text{Menge aller Dreiecke}$; $W = \{180^\circ\}$
 b) Eindeutige Zuordnung; $D = \text{Menge aller Dreiecke}$; $W = \{360^\circ\}$
 c) Eindeutige Zuordnung; $D = \text{Menge aller Vierecke}$; $W = \{360^\circ\}$
 d) Eindeutige Zuordnung; $D = \text{Menge aller Vierecke}$; $W = \{360^\circ\}$
 e) $n \mapsto (n-2) \cdot 180^\circ$, eindeutige Zuordnung;
 $D = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$; $W = \{180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, \dots\}$.
 f) $n \mapsto n \cdot 180^\circ - (n-2) \cdot 180^\circ$, also $n \mapsto 360^\circ$, eindeutige Zuordnung;
 $D = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$; $W = \{360^\circ\}$.

6.

x	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
y	3	2	17	2	19	2	3	2	23	2	5

7.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
a) $f(x)$	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11
b) $f(x)$	$-\frac{5}{17}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	-1	-1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{17}$
c) $f(x)$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$
d) $f(x)$	-32	16	-8	4	-2	4	-8	16	-32



9. a) $W = \mathbb{Q}_0^-$ b) $W = \mathbb{Q}$ c) $W = [2; +\infty[$
 d) $W = \mathbb{Q}$ e) $W = \mathbb{Q}^+$ f) $W =]0; 1]$

10. a) $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$; $D =]0^\circ; 90^\circ[$; $W =]0^\circ; 180^\circ[$
 b) $\gamma^* = 2\alpha$; $D =]0^\circ; 90^\circ[$; $W =]0^\circ; 180^\circ[$

11.

x	1	2	3	4	5
a) $\text{ggT}(x; 2x)$	1	2	3	4	5
b) $\text{kgV}(x; 2x)$	2	4	6	8	10
c) $\text{ggT}(2; x)$	1	2	1	2	1
d) $\text{kgV}(2; x)$	2	2	6	4	10

Wertemengen:

a) $W = \mathbb{N}$; jedes $x \in D$ ist Fixelement

b) $W =$ Menge der pos. geraden Zahlen; es gibt kein Fixelement

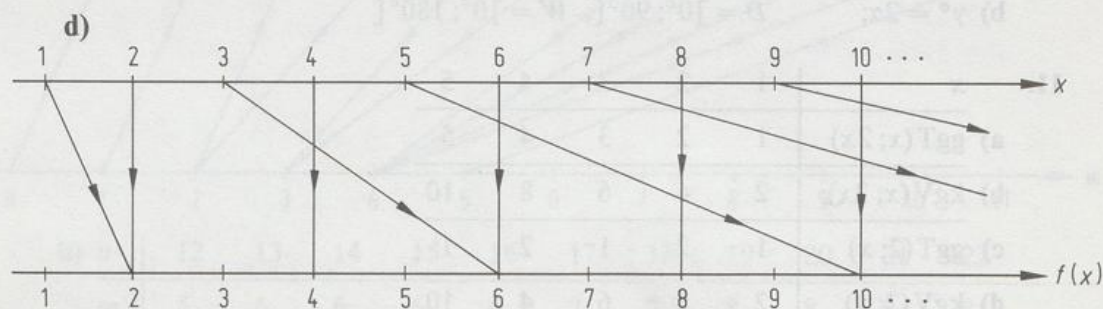
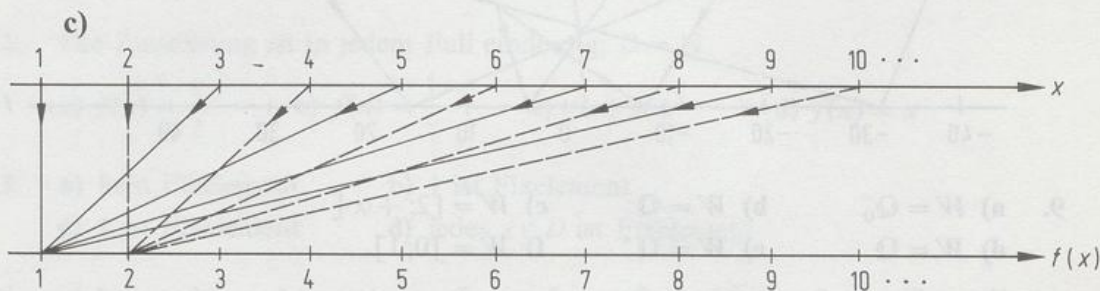
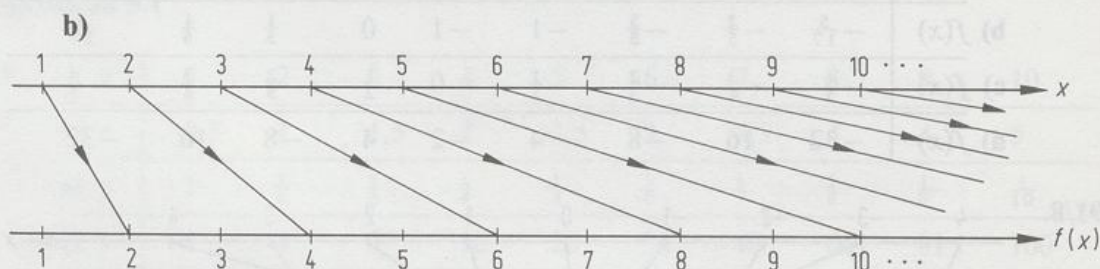
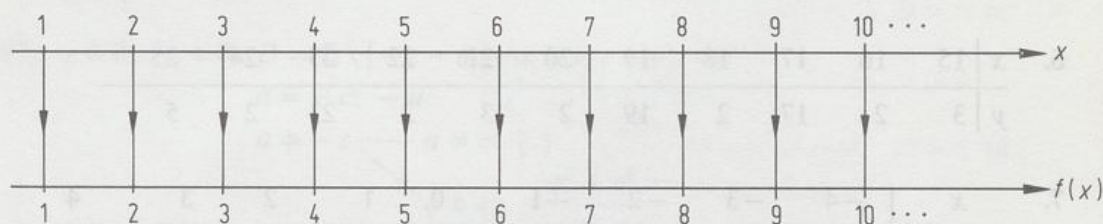
c) $W = \{1; 2\}$, denn

$$\text{ggT}(2; x) = \begin{cases} 2, & \text{falls } x \text{ eine gerade Zahl} \\ 1, & \text{falls } x \text{ eine ungerade Zahl; 1 und 2 sind Fixelemente} \end{cases}$$

d) $W =$ Menge der pos. geraden Zahlen, denn

$$\text{kgV}(2; x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ eine gerade Zahl} \\ 2x, & \text{falls } x \text{ eine ungerade Zahl; jede gerade Zahl ist Fixelement} \end{cases}$$

91/12. a)



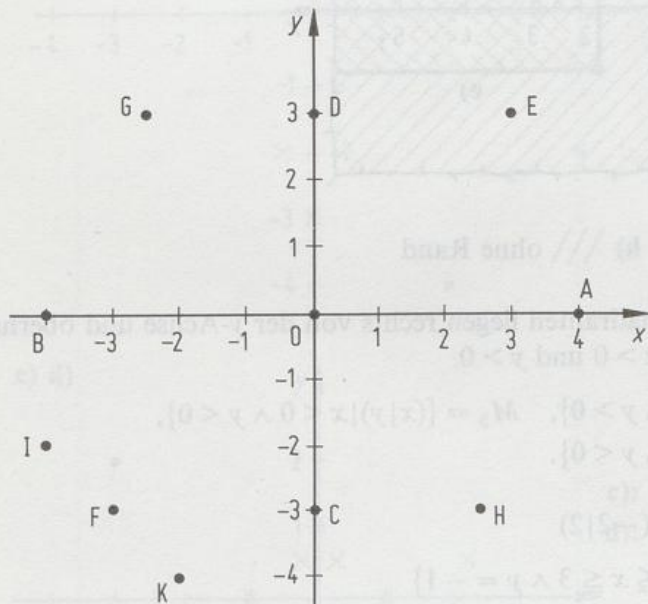
- 91/13. a) Funktion b) keine Funktion c) keine Funktion
 d) Funktion e) Funktion f) keine Funktion

14. a) $s = v \cdot t \Rightarrow y = 15x$ b) $t = \frac{s}{v} \Rightarrow y = \frac{x}{15}$

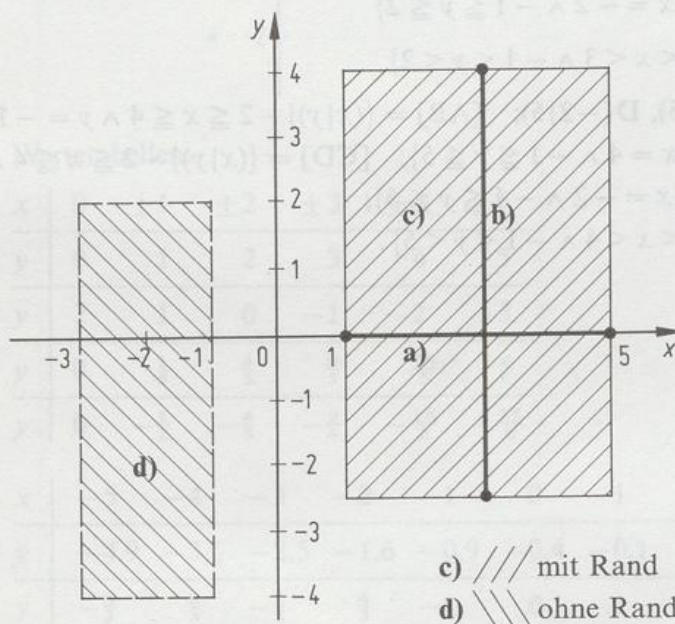
92/15. a) $I = \frac{U}{R}$ (z.B. $I = \frac{U}{100 \Omega}$) b) $R = \frac{U}{I}$ (z.B. $R = \frac{220 \text{ V}}{I}$)

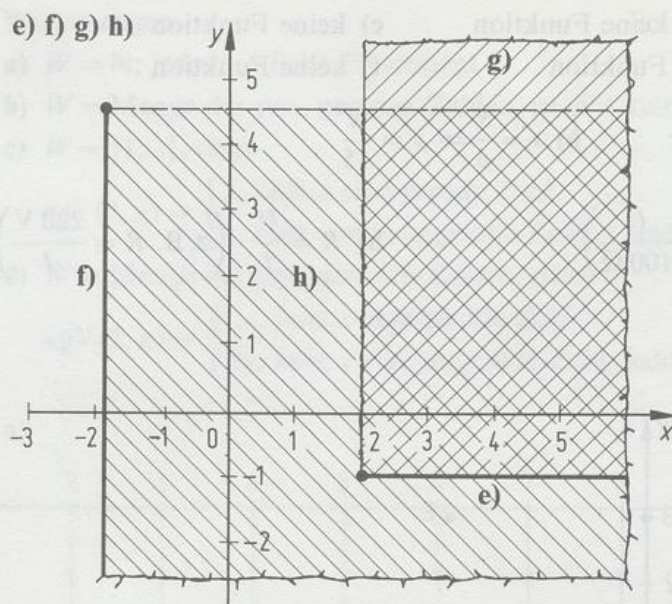
Aufgaben zu 5.2

100/1.



2. a)





g) /// mit Rand h) \\\ ohne Rand

100/3. a) Die Punkte des 1. Quadranten liegen rechts von der y -Achse und oberhalb der x -Achse; daher gilt $x > 0$ und $y > 0$.

b) $M_2 = \{(x|y) | x < 0 \wedge y > 0\}$, $M_3 = \{(x|y) | x < 0 \wedge y < 0\}$,
 $M_4 = \{(x|y) | x > 0 \wedge y < 0\}$.

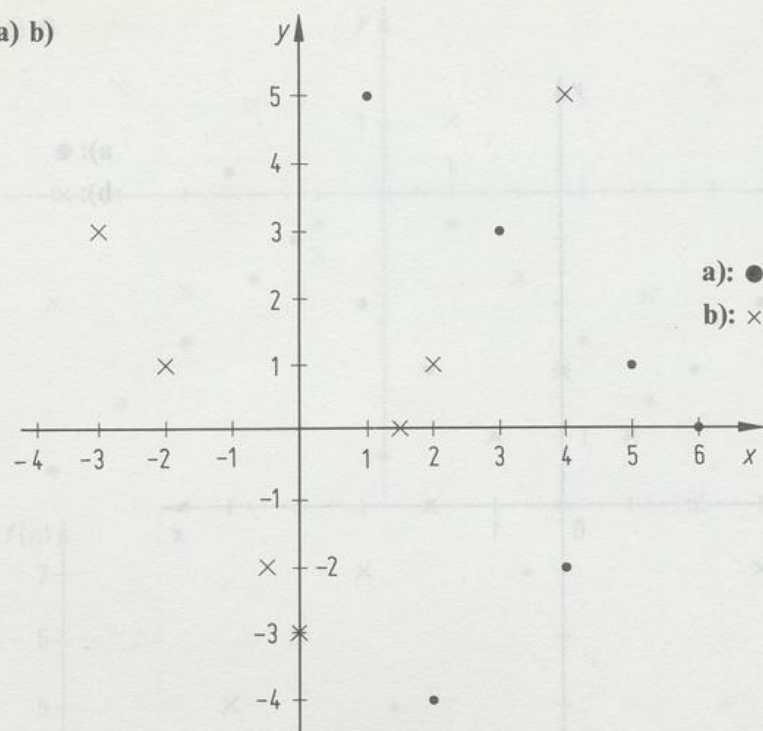
4. a) B(3|-1), C(3|2), D(-2|2)

b) $[AB] = \{(x|y) | -2 \leq x \leq 3 \wedge y = -1\}$
 $[BC] = \{(x|y) | x = 3 \wedge -1 \leq y \leq 2\}$
 $[CD] = \{(x|y) | -2 \leq x \leq 3 \wedge y = 2\}$
 $[DA] = \{(x|y) | x = -2 \wedge -1 \leq y \leq 2\}$

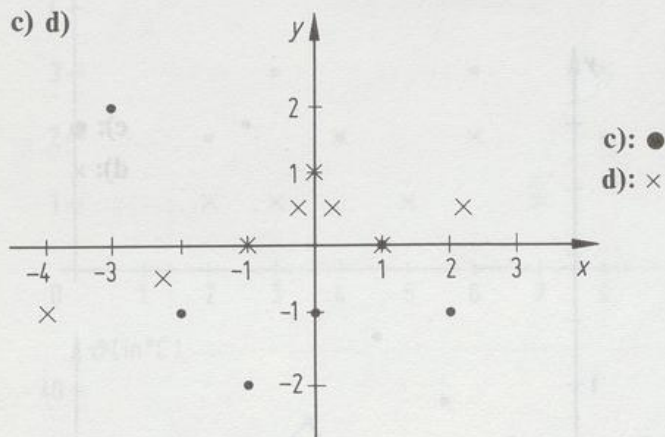
c) $I = \{(x|y) | -2 < x < 3 \wedge -1 < y < 2\}$

d) B(4|-1), C(4|5), D(-2|5); $[AB] = \{(x|y) | -2 \leq x \leq 4 \wedge y = -1\}$,
 $[BC] = \{(x|y) | x = 4 \wedge -1 \leq y \leq 5\}$, $[CD] = \{(x|y) | -2 \leq x \leq 4 \wedge y = 5\}$,
 $[DA] = \{(x|y) | x = -2 \wedge -1 \leq y \leq 5\}$;
 $I = \{(x|y) | -2 < x < 4 \wedge -1 < y < 5\}$.

100/5. a) b)



c) d)



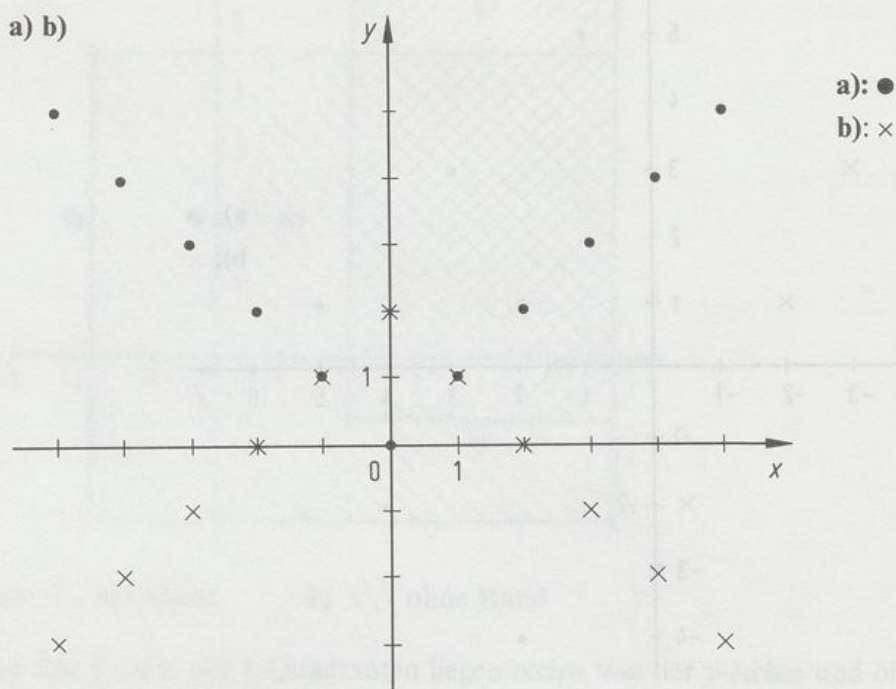
101/6. Wertetabellen:

x	0	±1	±2	±3	±4	±5
a) y	0	1	2	3	4	5
b) y	2	1	0	-1	-2	-3
c) y	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{16}{5}$	5
e) y	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{16}{5}$	$-\frac{25}{6}$

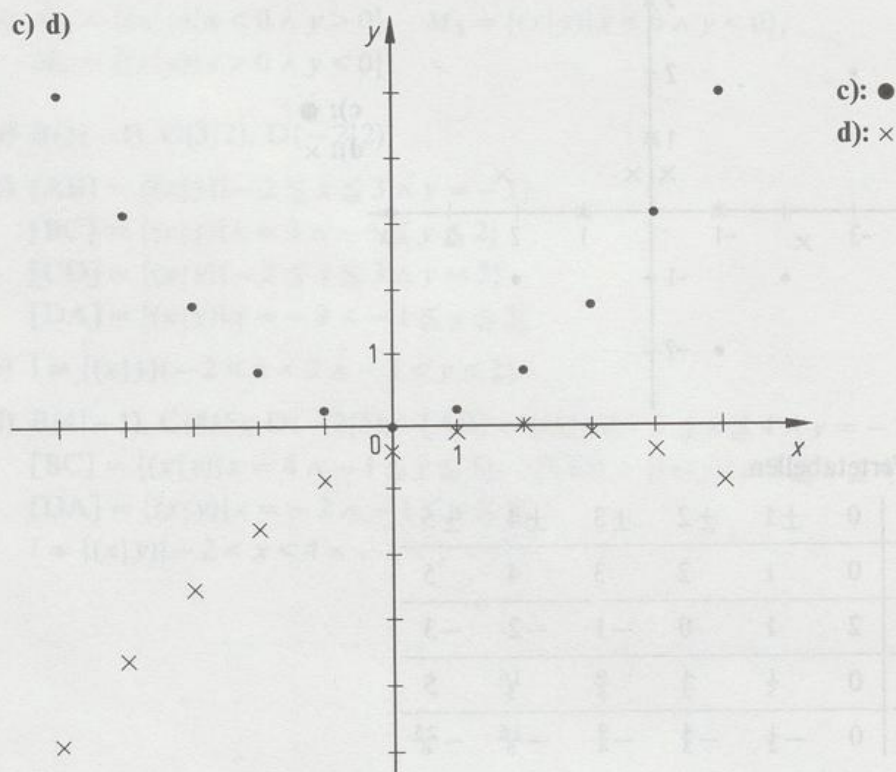
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
d) y	-4,9	-3,6	-2,5	-1,6	-0,9	-0,4	-0,1	0	-0,1	-0,4	-0,9
f) y	$-\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	-1	0	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$

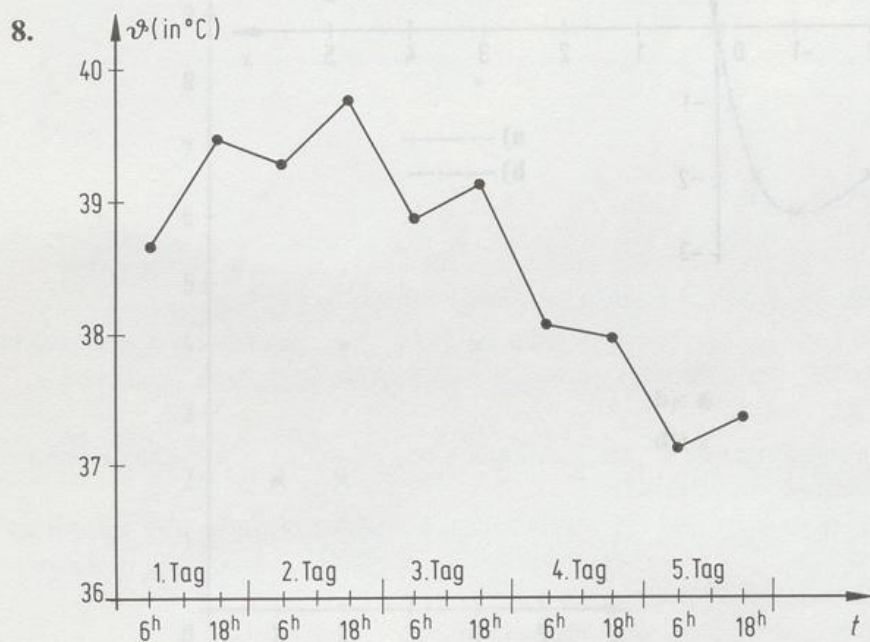
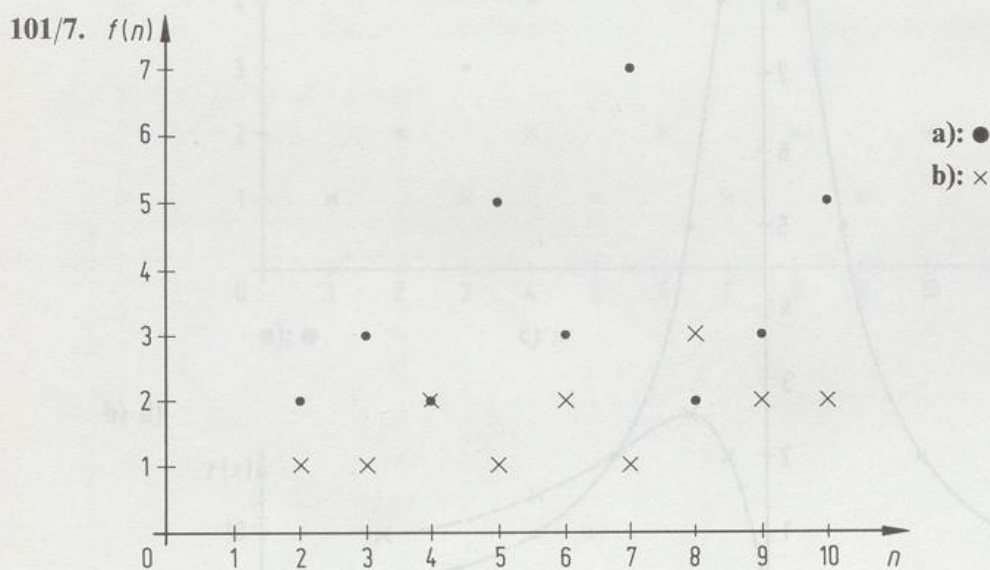
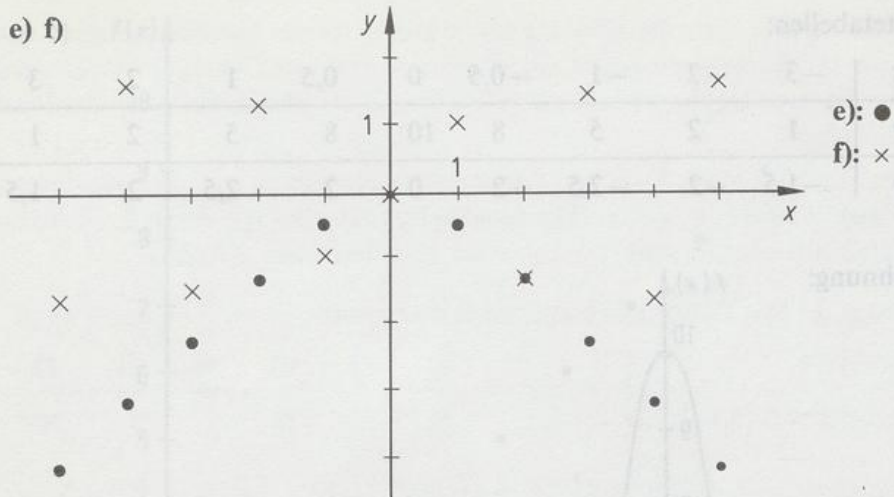
Zeichnungen:

a) b)



c) d)

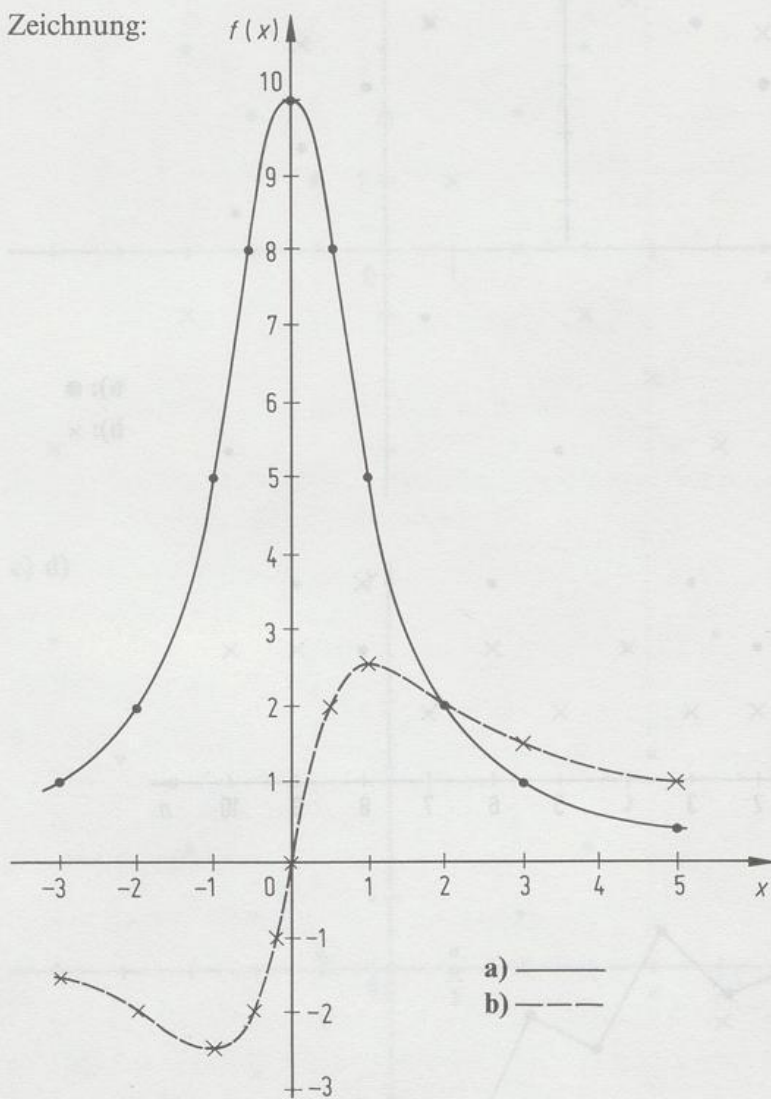




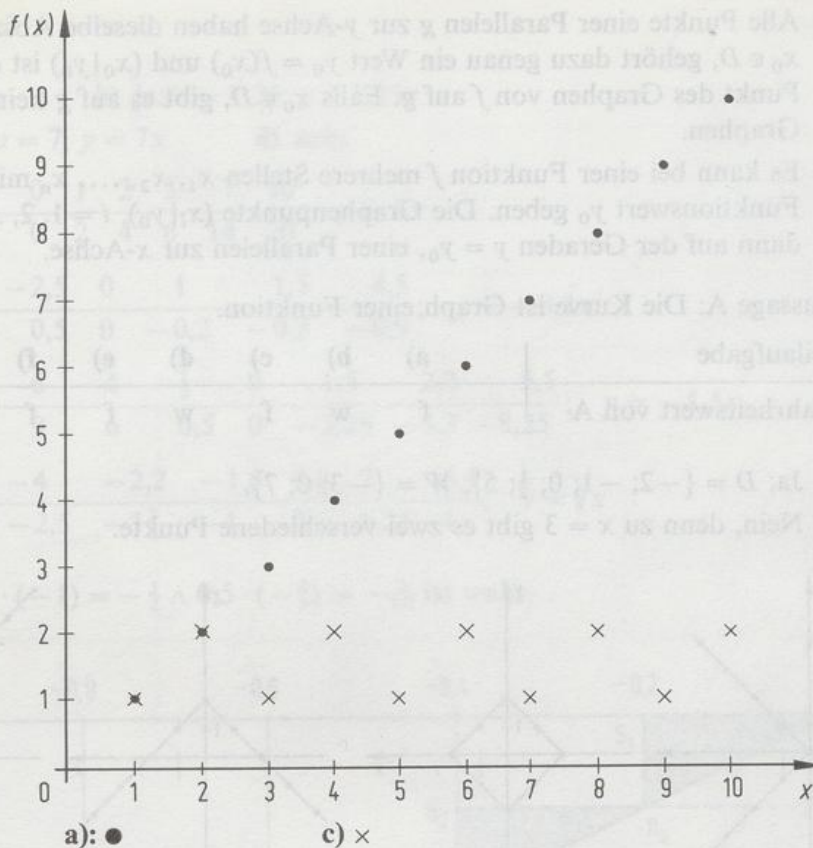
102/9. Wertetabellen:

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	5
a) y	1	2	5	8	10	8	5	2	1	$\frac{5}{13}$
b) y	-1,5	-2	-2,5	-2	0	2	2,5	2	1,5	$\frac{25}{26}$

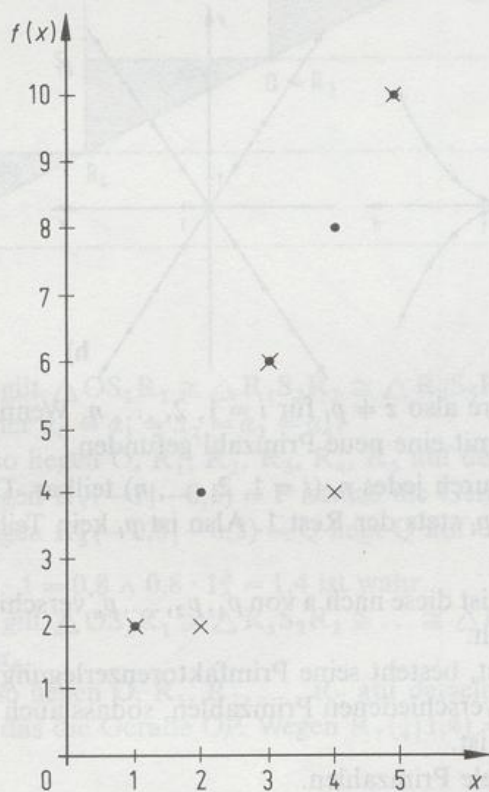
Zeichnung:



102/10. a) c)



b) d)



102/11. a) Alle Punkte einer Parallelen g zur y -Achse haben dieselbe Abszisse x_0 . Falls $x_0 \in D$, gehört dazu genau ein Wert $y_0 = f(x_0)$ und $(x_0 | y_0)$ ist der einzige Punkt des Graphen von f auf g . Falls $x_0 \notin D$, gibt es auf g keinen Punkt des Graphen.

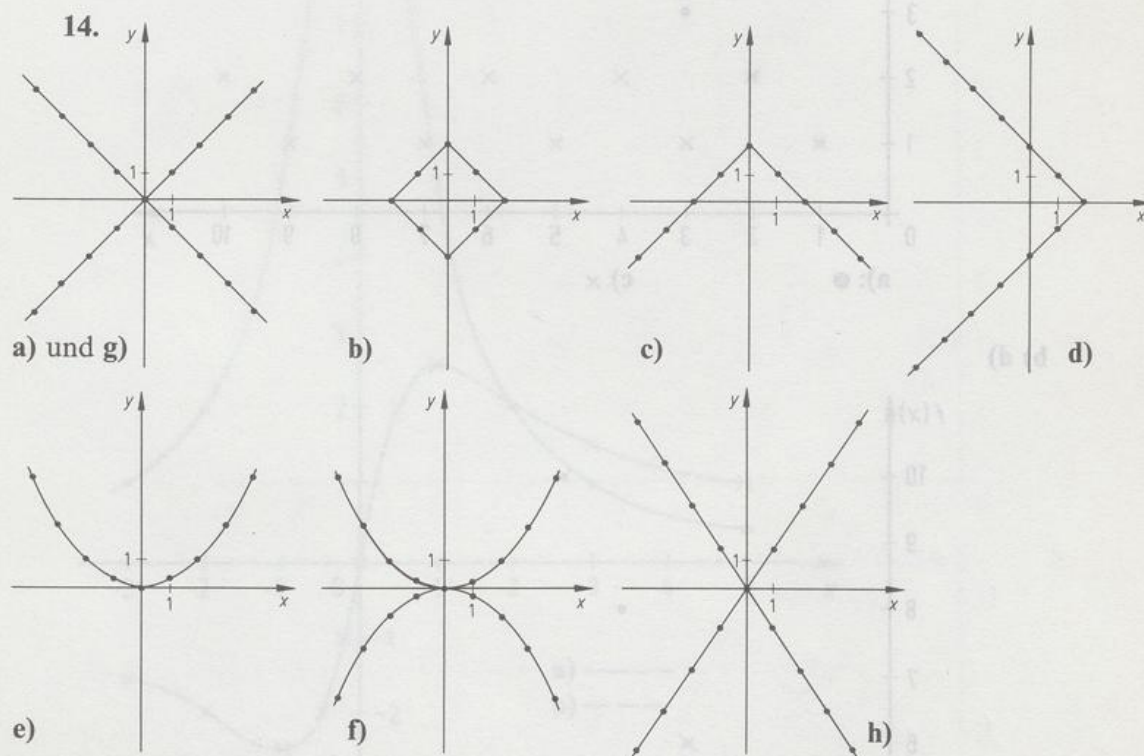
b) Es kann bei einer Funktion f mehrere Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit demselben Funktionswert y_0 geben. Die Graphenpunkte $(x_i | y_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, liegen dann auf der Geraden $y = y_0$, einer Parallelen zur x -Achse.

12. Aussage A: Die Kurve ist Graph einer Funktion.

Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
Wahrheitswert von A	f	w	f	w	f	f	w	w

13. a) Ja; $D = \{-2; -1; 0; \frac{1}{2}; 5\}$, $W = \{-3; 0; 7\}$.

b) Nein, denn zu $x = 3$ gibt es zwei verschiedene Punkte.



103/15. a) Es gilt $z > p_i$, insbesondere also $z \neq p_i$ für $i = 1, 2, \dots, n$. Wenn z eine Primzahl ist, hat man somit eine neue Primzahl gefunden.

b) $z - 1 = p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ ist durch jedes p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) teilbar. Daher bleibt beim Teilen von z durch p_i stets der Rest 1. Also ist p_i kein Teiler von z ($i = 1, 2, \dots, n$).

c) Wenn z eine Primzahl ist, ist diese nach a von $p_1, p_2, \dots, p_n$ verschieden und die Annahme damit falsch.

Wenn z keine Primzahl ist, besteht seine Primfaktorenzerlegung nach b aus lauter von $p_1, p_2, \dots, p_n$ verschiedenen Primzahlen, sodass auch in diesem Fall die Annahme falsch ist.

Also gibt es unendlich viele Primzahlen.

Aufgaben zu 5.3

107/1. a) nein b) ja; $a = 1,25$; $y = 1,25x$

c) ja; $a = 7$; $y = 7x$ d) nein

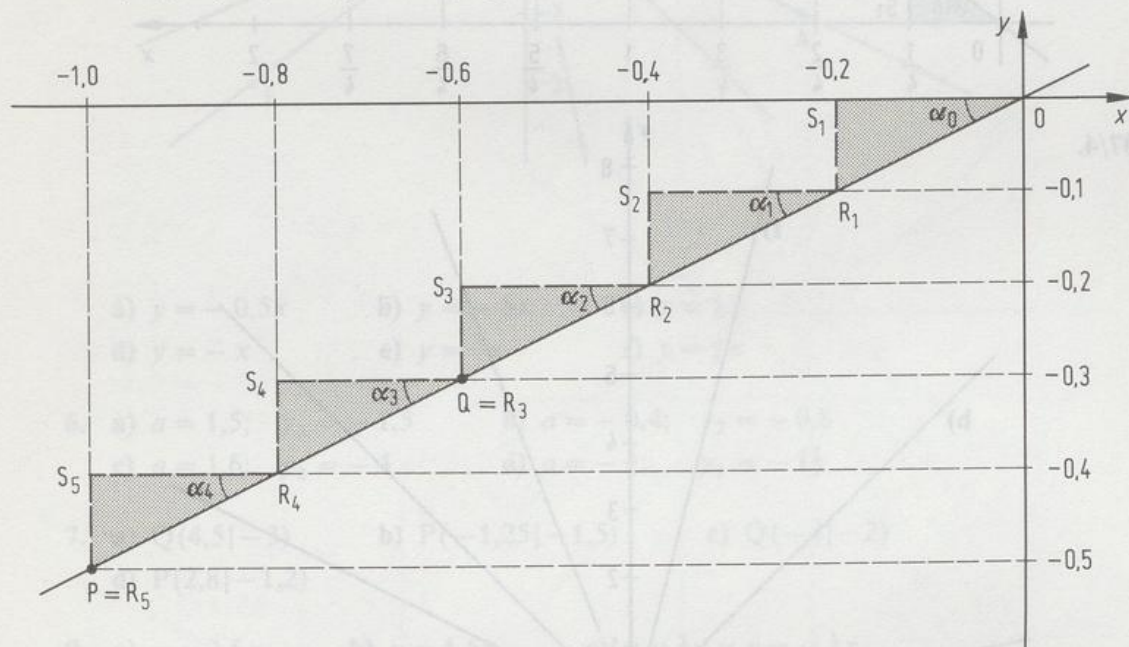
2. a) $\begin{array}{c|cccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 7 & 10 \\ y & 0 & 2 & 4 & 6 & 14 & 20 \end{array}; y = 2x$

b) $\begin{array}{c|ccccc} x & -2,5 & 0 & 1 & 1,5 & 4,5 \\ y & 0,5 & 0 & -0,2 & -0,3 & -0,9 \end{array}; y = -0,2x$

c) $\begin{array}{c|ccccccc} x & -6 & -4 & -\frac{1}{3} & 0 & 1,5 & 2,2 & 5,5 \\ y & 9 & 6 & 0,5 & 0 & -2,25 & -3,3 & -8,25 \end{array}; y = -1,5x$

d) $\begin{array}{c|cccccc} x & -4 & -2,2 & -1,6 & 0,8 & 2 & 6,4 \\ y & -2,5 & -1\frac{3}{8} & -1 & 0,5 & 1,25 & 4 \end{array}; y = \frac{5}{8}x$

3. a) $0,5 \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \wedge 0,5 \cdot (-\frac{3}{5}) = -\frac{3}{10}$ ist wahr.



Es gilt $\triangle OS_1R_1 \cong \triangle R_1S_2R_2 \cong \triangle R_2S_3R_3 \cong \triangle R_3S_4R_4 \cong \triangle R_4S_5R_5$ (sws),
daher $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$.

Also liegen O, R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_5 auf derselben Geraden.

Wegen $R_5(-1|-0,5) = P$ ist das die Gerade OP.

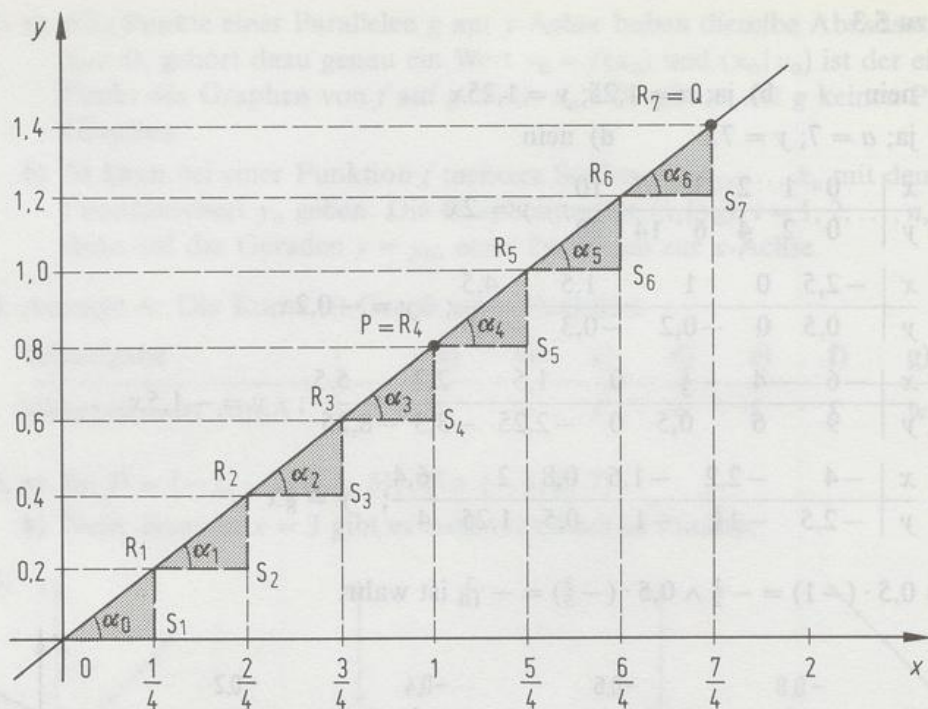
Wegen $R_3(-0,6|-0,3) = Q$ liegt Q auf OP.

b) $0,8 \cdot 1 = 0,8 \wedge 0,8 \cdot 1\frac{3}{4} = 1,4$ ist wahr.

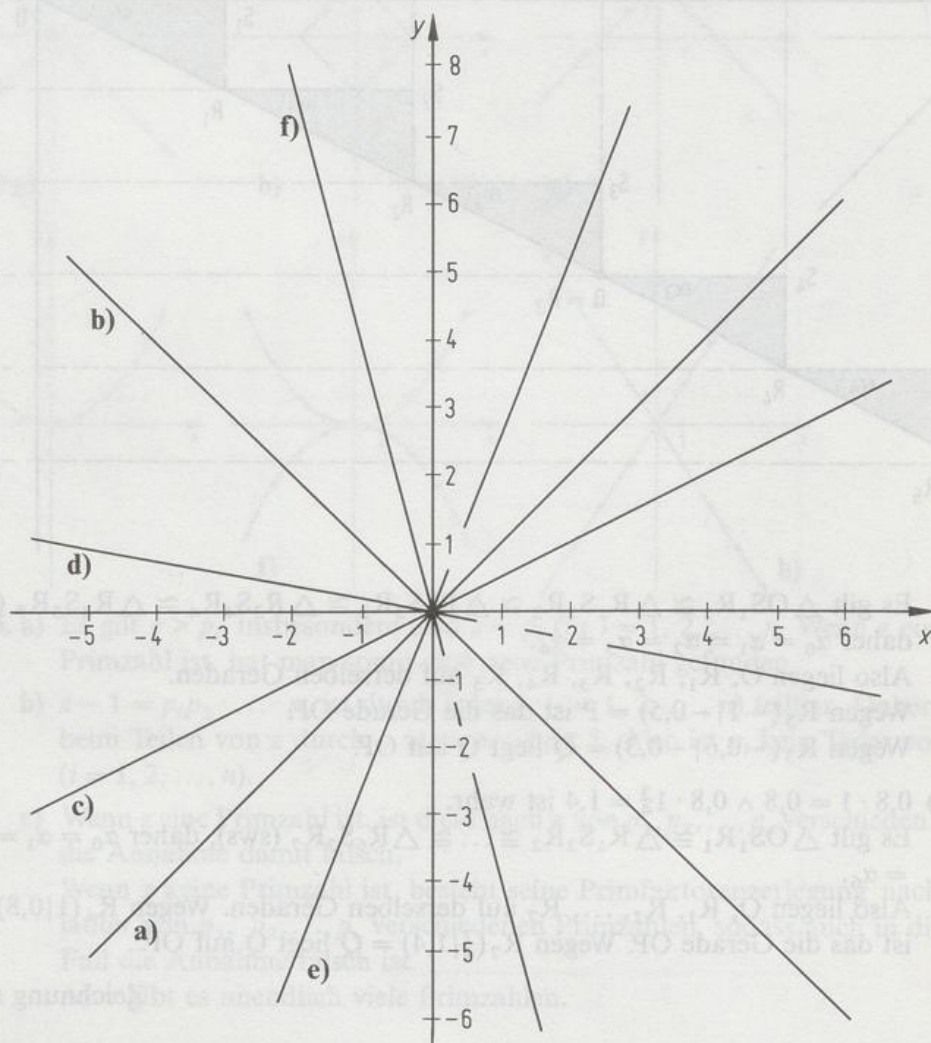
Es gilt $\triangle OS_1R_1 \cong \triangle R_1S_2R_2 \cong \dots \cong \triangle R_6S_7R_7$ (sws), daher $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_6$.

Also liegen O, R_1 , R_2 , ..., R_7 auf derselben Geraden. Wegen $R_4(1|0,8) = P$ ist das die Gerade OP. Wegen $R_7(\frac{7}{4}|1,4) = Q$ liegt Q auf OP.

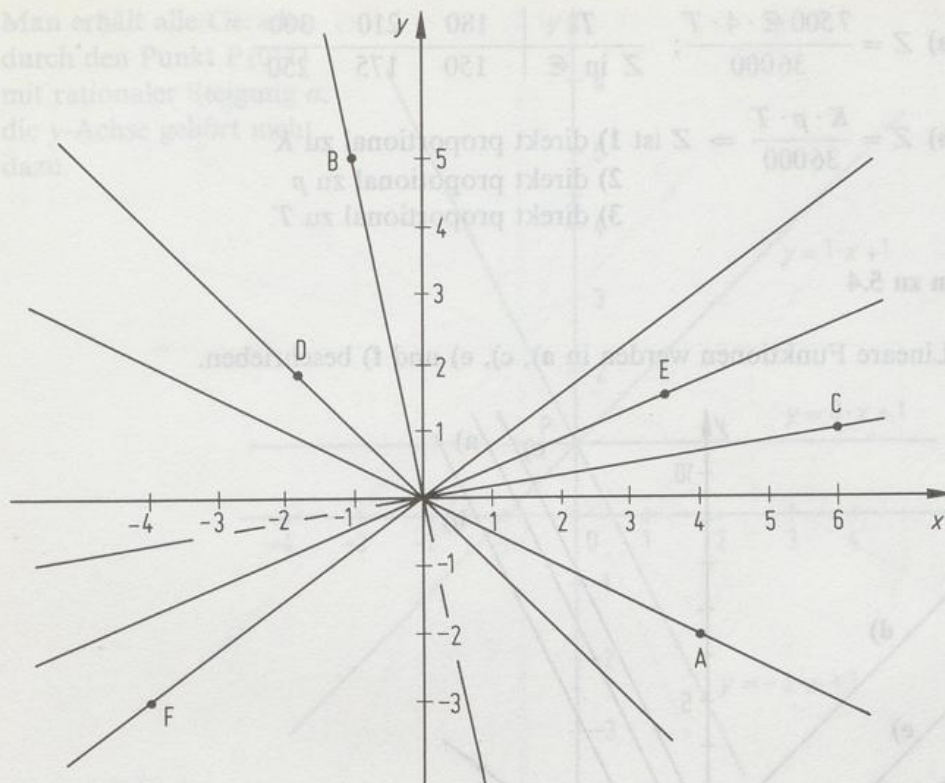
Zeichnung s. S. 34



107/4.



108/5.



- a) $y = -0,5x$ b) $y = -5x$ c) $y = \frac{1}{6}x$
 d) $y = -x$ e) $y = \frac{3}{7}x$ f) $y = \frac{3}{4}x$
6. a) $a = 1,5; y_2 = -1,5$ b) $a = -0,4; y_2 = -0,8$
 c) $a = 1,6; y_2 = -4$ d) $a = -\frac{5}{6}; y_2 = -1\frac{1}{9}$
7. a) $Q(4,5|-3)$ b) $P(-1,25|-1,5)$ c) $Q(-\frac{3}{7}|-2)$
 d) $P(2,8|-1,2)$
8. a) $y = 2,5x$ b) $y = 1,5x$ c) $y = \frac{1}{3}x \vee y = -\frac{1}{3}x$
9. a) in 1 Min. $\frac{1}{12} \text{ m}^3 = 83\frac{1}{3} \text{ l Wasser}$, in 1 Tag 120 m^3 , in 1 Woche 840 m^3 ;
 b) in $4\frac{4}{5}$ Min. = 4 Min. 48 Sek.;
 c) in 40,5 h.
10. a) $y = 0,4x$ b) $z = 8x$
 c) $(z = a_1 \cdot y \wedge y = a_2 \cdot x) \Rightarrow z = (a_1 \cdot a_2) \cdot x$
11. a) $s = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$ b) $b = 0,082 \frac{1}{\text{km}} \cdot s$
 c) $b = 0,082 \frac{1}{\text{km}} \cdot 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t = 6,56 \frac{1}{\text{h}} \cdot t$

109/12. a) $Z = \frac{7500 \text{ €} \cdot 4 \cdot T}{36000}$;

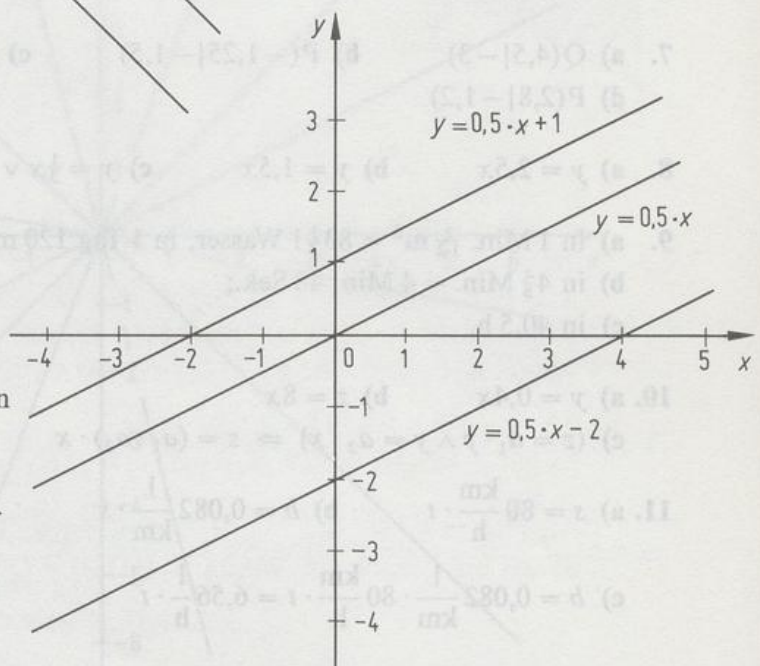
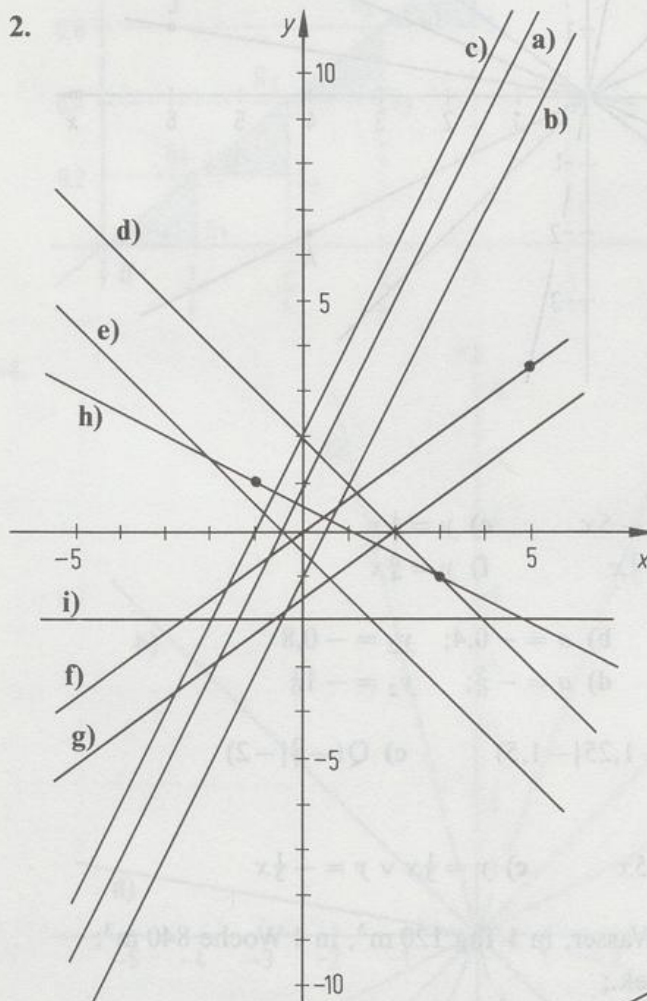
T	180	210	300
$Z \text{ in €}$	150	175	250

- b) $Z = \frac{K \cdot p \cdot T}{36000} \Rightarrow Z$ ist 1) direkt proportional zu K
 2) direkt proportional zu p
 3) direkt proportional zu T .

Aufgaben zu 5.4

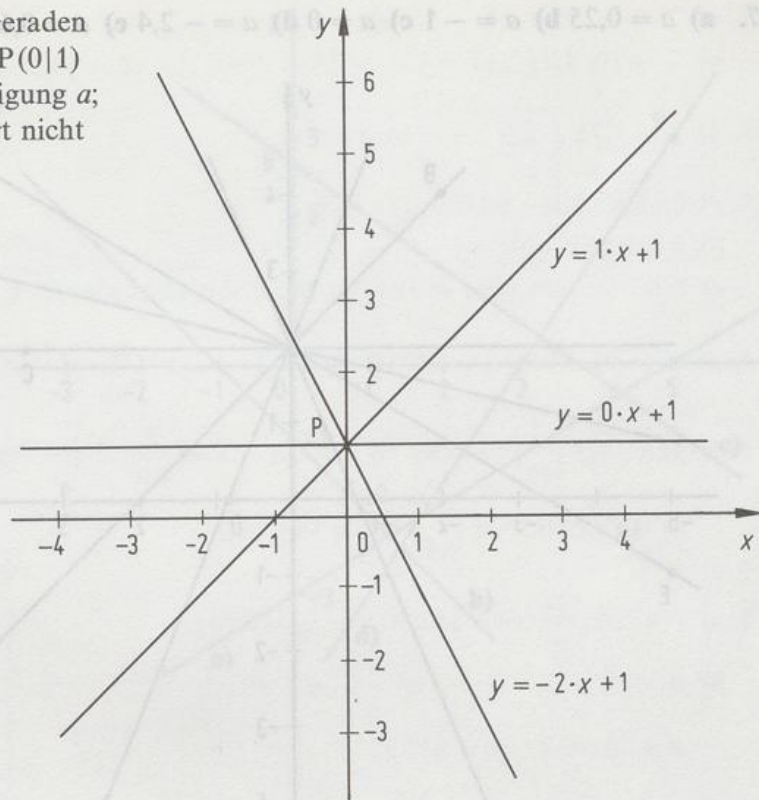
113/1. Lineare Funktionen werden in a), c), e) und f) beschrieben.

2.



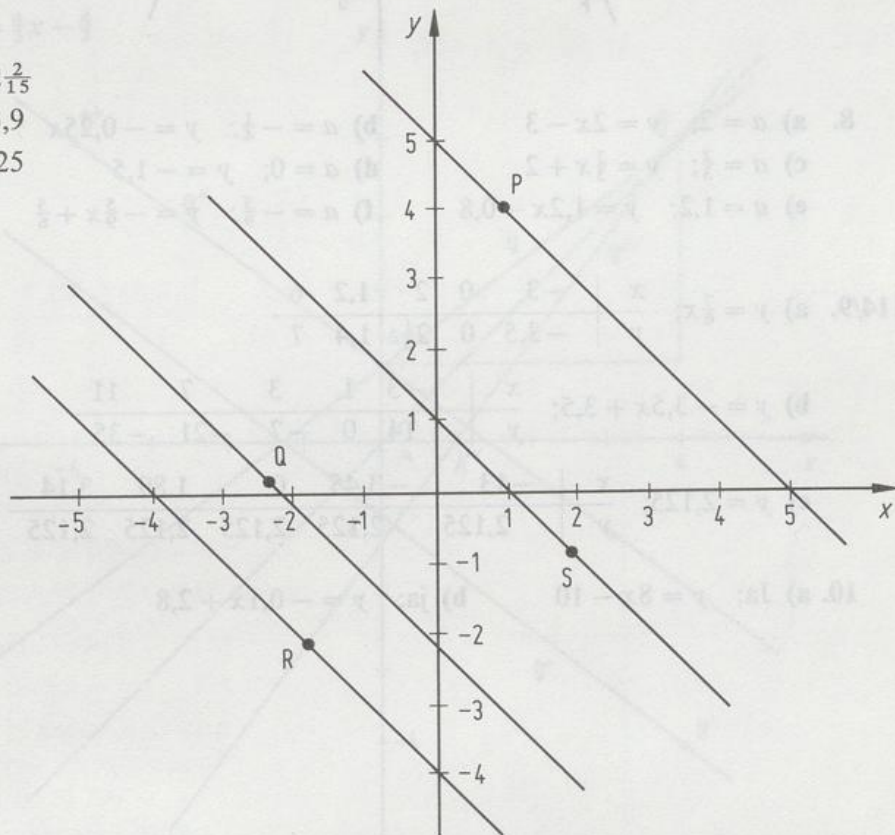
3. Die Menge der Graphen besteht aus den Parallelen zu $g: y = 0,5x$ durch die Punkte $(0|b)$, $b \in \mathbb{Q}$, der y -Achse.

- 113/4. Man erhält alle Geraden durch den Punkt $P(0|1)$ mit rationaler Steigung a ; die y -Achse gehört nicht dazu.

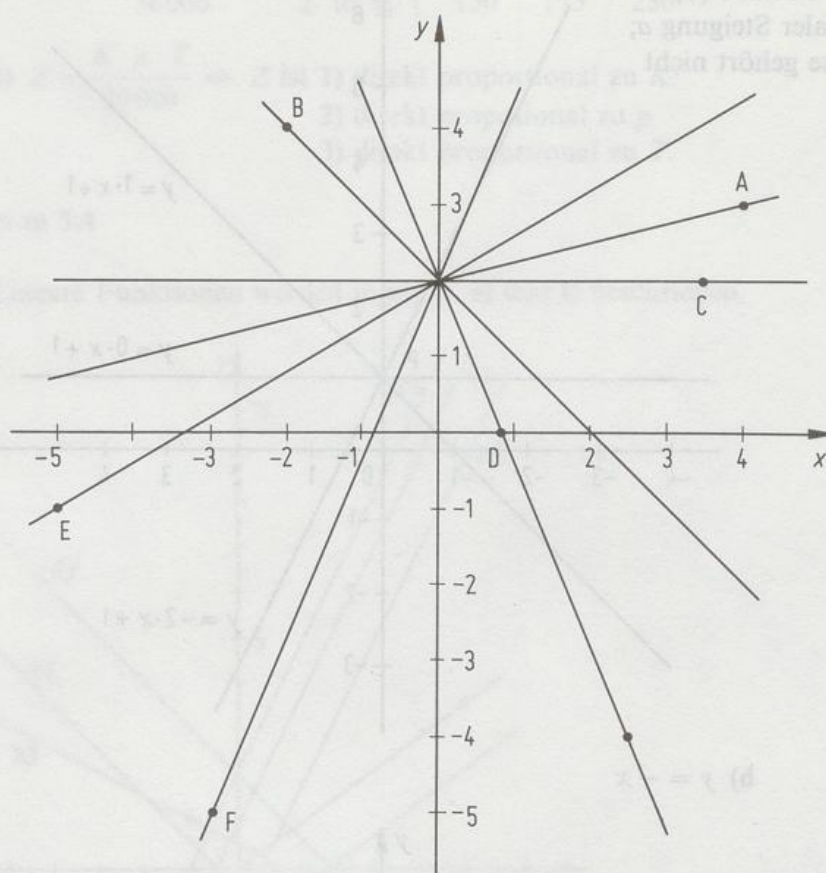


5. a) $y = x$ b) $y = -x$

6. a) $b = 5$
 b) $b = -2\frac{2}{15}$
 c) $b = -3,9$
 d) $b = 1,025$



113/7. a) $a = 0,25$ b) $a = -1$ c) $a = 0$ d) $a = -2,4$ e) $a = 0,6$ f) $a = 2\frac{1}{3}$



8. a) $a = 2$; $y = 2x - 3$ b) $a = -\frac{1}{4}$; $y = -0,25x$
 c) $a = \frac{2}{3}$; $y = \frac{2}{3}x + 2$ d) $a = 0$; $y = -1,5$
 e) $a = 1,2$; $y = 1,2x - 0,8$ f) $a = -\frac{5}{9}$; $y = -\frac{5}{9}x + \frac{5}{6}$

114/9. a) $y = \frac{7}{6}x$;

x	-3	0	2	1,2	6
y	-3,5	0	$2\frac{1}{3}$	1,4	7

b) $y = -3,5x + 3,5$;

x	-3	1	3	7	11
y	14	0	-7	-21	-35

c) $y = 2,125$;

x	-13	-3,45	0	1,89	3,14
y	2,125	2,125	2,125	2,125	2,125

10. a) Ja; $y = 8x - 10$ b) ja; $y = -0,1x + 2,8$

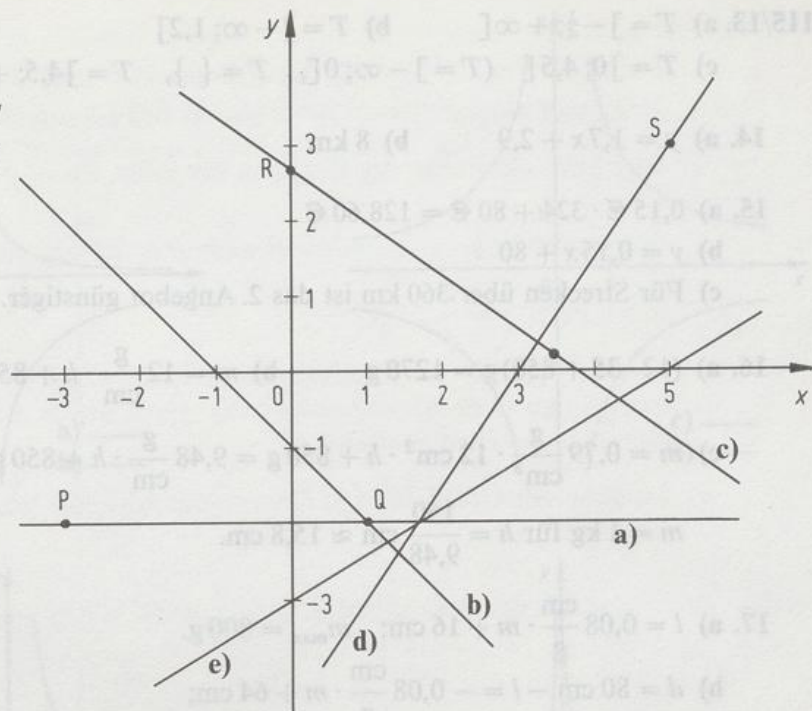
114/11. a) $y = -2$

b) $y = -x - 1$

c) $y = -\frac{5}{7}x + 2,7$

d) $y = 1,5x - 4,5$

e) $y = 0,6x - 3$

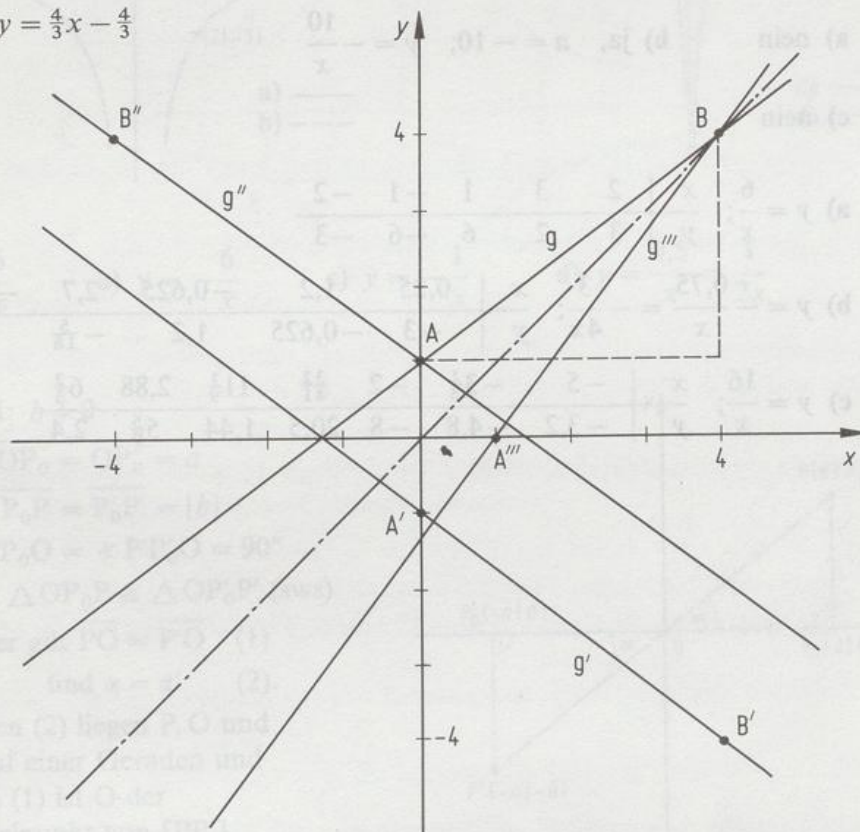


12. a) $g: y = \frac{3}{4}x + 1$

b) $g': y = -\frac{3}{4}x - 1$

c) $g'': y = -\frac{3}{4}x + 1$

d) $g''': y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$



115/13. a) $T =]-\frac{1}{4}; +\infty[$ b) $T =]-\infty; 1,2]$

c) $T =]0; 4,5[$ ($T =]-\infty; 0[$, $T = \{ \}$, $T =]4,5; +\infty[$)

14. a) $y = 1,7x + 2,9$ b) 8 km

15. a) $0,15 \text{ €} \cdot 324 + 80 \text{ €} = 128,60 \text{ €}$

b) $y = 0,15x + 80$

c) Für Strecken über 360 km ist das 2. Angebot günstiger.

16. a) $(12 \cdot 35 + 850) \text{ g} = 1270 \text{ g}$ b) $m = 12 \frac{\text{g}}{\text{cm}} \cdot h + 850 \text{ g}$

c) $m = 0,79 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 12 \text{ cm}^2 \cdot h + 850 \text{ g} = 9,48 \frac{\text{g}}{\text{cm}} \cdot h + 850 \text{ g};$

$m = 1 \text{ kg}$ für $h = \frac{150}{9,48} \text{ cm} \approx 15,8 \text{ cm}.$

17. a) $l = 0,08 \frac{\text{cm}}{\text{g}} \cdot m + 16 \text{ cm}; \quad m_{\max} = 800 \text{ g}.$

b) $d = 80 \text{ cm} - l = -0,08 \frac{\text{cm}}{\text{g}} \cdot m + 64 \text{ cm};$

$d = 10 \text{ cm} \Rightarrow m = 675 \text{ g}.$

Aufgaben zu 5.5

118/1. a) nein b) ja, $a = -10; \quad y = -\frac{10}{x}$

c) nein

2. a) $y = \frac{6}{x};$

x	2	3	1	-1	-2
y	3	2	6	-6	-3

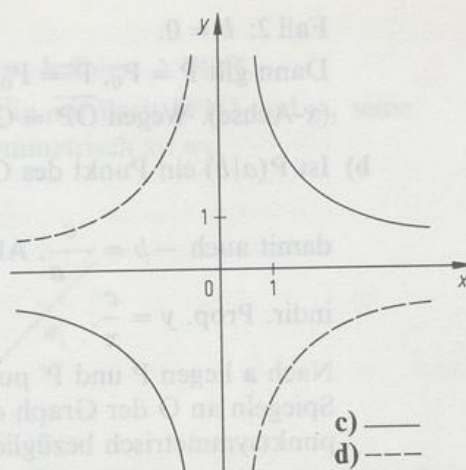
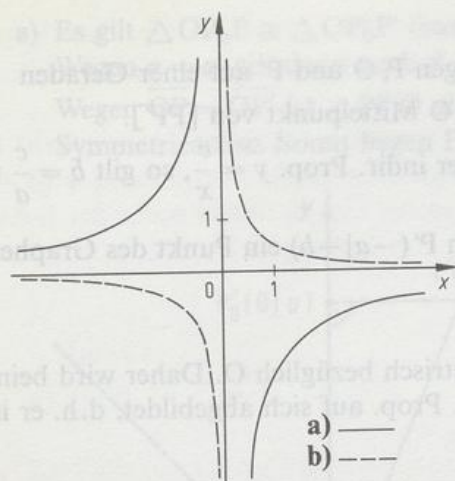
b) $y = -\frac{0,75}{x} = -\frac{3}{4x};$

x	0,25	1,2	-0,625	2,7	$-\frac{1}{600}$
y	-3	-0,625	1,2	$-\frac{5}{18}$	450

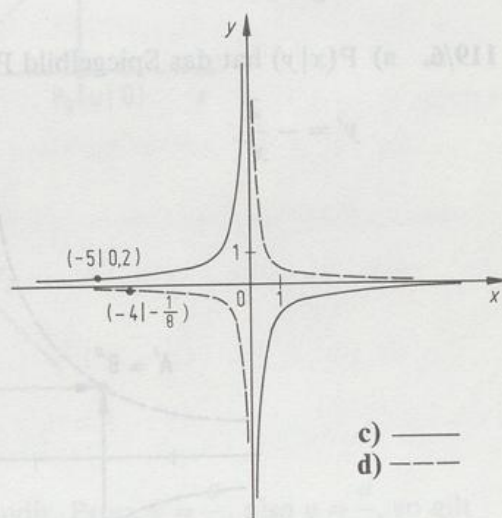
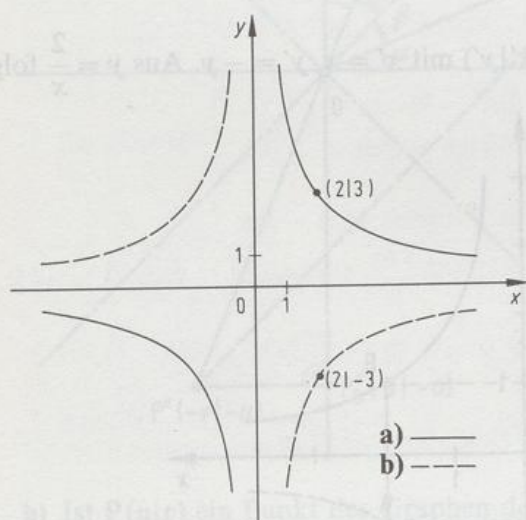
c) $y = \frac{16}{x};$

x	-5	$-3\frac{1}{3}$	-2	$\frac{32}{41}$	$11\frac{1}{9}$	2,88	$6\frac{2}{3}$
y	-3,2	-4,8	-8	20,5	1,44	$5\frac{5}{9}$	2,4

118/3.



119/4.



a) $y = \frac{6}{x}$ b) $y = -\frac{6}{x}$ c) $y = -\frac{1}{x}$ d) $y = \frac{0,5}{x} = \frac{1}{2x}$

5. a) Fall 1: $b \neq 0$

Aus $\overline{OP_0} = \overline{OP'_0} = a$

$\overline{P_0P} = \overline{P'_0P'} = |b|$

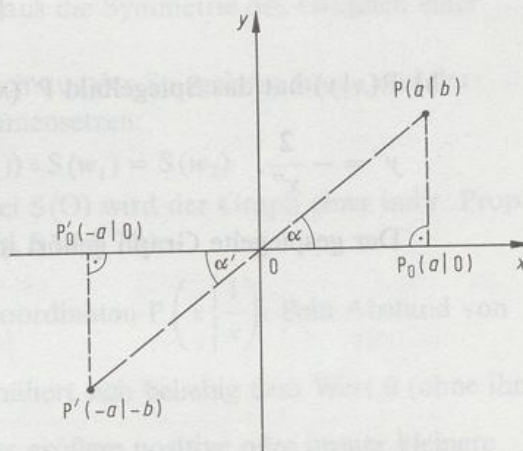
$\angle PP_0O = \angle P'P'_0O = 90^\circ$

folgt $\triangle OP_0P \cong \triangle OP'_0P'$ (sws)

Daher gilt $\overline{PO} = \overline{P'O}$ (1)

und $\alpha = \alpha'$ (2).

Wegen (2) liegen P, O und P' auf einer Geraden und nach (1) ist O der Mittelpunkt von [PP'].



Fall 2: $b = 0$.

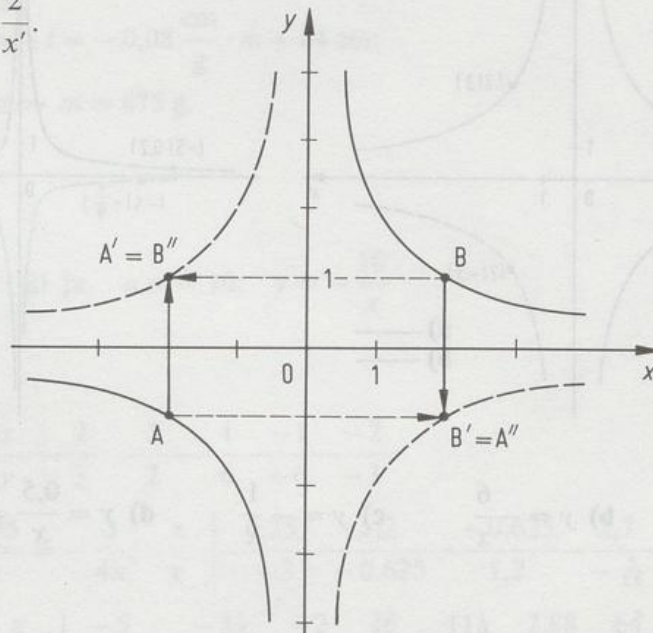
Dann gilt $P = P_0$, $P' = P'_0$; daher liegen P , O und P' auf einer Geraden (x -Achse). Wegen $\overline{OP} = \overline{OP'} = a$ ist O Mittelpunkt von $[PP']$.

- b) Ist $P(a|b)$ ein Punkt des Graphen der indir. Prop. $y = \frac{c}{x}$, so gilt $b = \frac{c}{a}$ und damit auch $-b = \frac{c}{-a}$. Also ist auch $P'(-a|-b)$ ein Punkt des Graphen der indir. Prop. $y = \frac{c}{x}$.

Nach a) liegen P und P' punktsymmetrisch bezüglich O . Daher wird beim Spiegeln an O der Graph einer indir. Prop. auf sich abgebildet, d.h. er ist punktsymmetrisch bezüglich O .

- c) Ja; denn der Graph ist eine Gerade durch O , die beim Spiegeln an O auf sich abgebildet wird.

- 119/6. a) $P(x|y)$ hat das Spiegelbild $P'(x'|y')$ mit $x' = x$, $y' = -y$. Aus $y = \frac{2}{x}$ folgt $y' = -\frac{2}{x'}$.



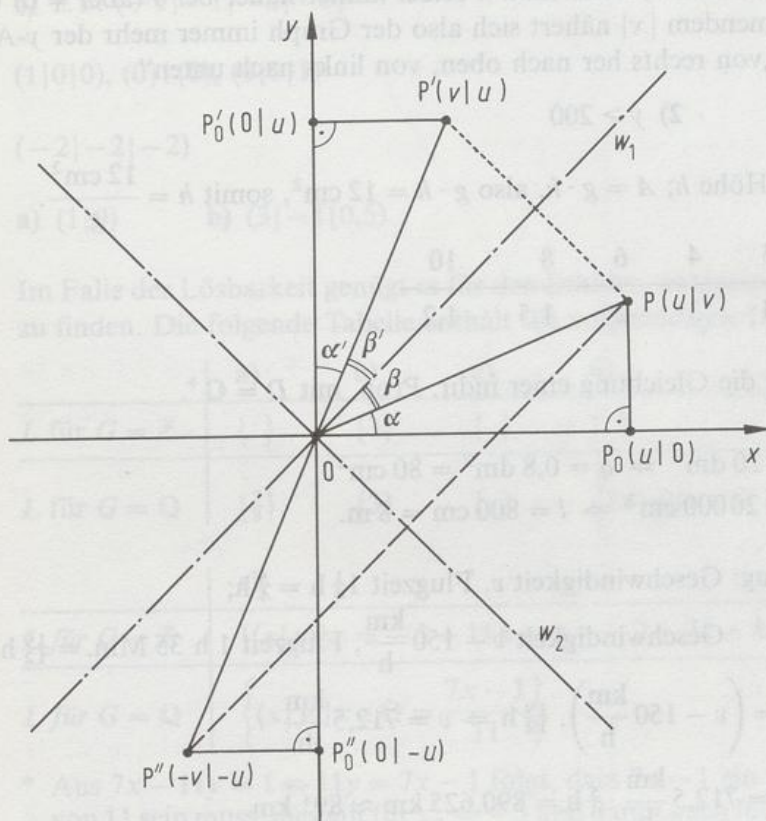
- b) $P(x|y)$ hat das Spiegelbild $P''(x''|y'')$ mit $x'' = -x$, $y'' = y$. Aus $y = \frac{2}{x}$ folgt $y'' = -\frac{2}{x''}$.

Der gespiegelte Graph gehört in beiden Fällen zur Funktion $f^*: x \mapsto -\frac{2}{x}$.

119/7. a) Es gilt $\triangle OP_0P \cong \triangle OP'_0P'$ (sws).

Wegen $\alpha = \alpha'$ gilt dann auch $\beta = \beta'$, d.h. w_1 halbiert $\angle POP'$.

Wegen $OP = OP'$ ist $\triangle PP'O$ gleichschenkelig mit Basis $[PP']$ und w_1 seine Symmetrieachse. Somit liegen P und P' symmetrisch zu w_1 .



b) Ist $P(u|v)$ ein Punkt des Graphen der indir. Prop. $y = \frac{a}{x}$, also $v = \frac{a}{u}$, so gilt

auch $u = \frac{a}{v}$; d.h., $P'(v|u)$ ist ebenfalls ein Punkt des Graphen dieser indirekten Proportionalität.

c) 1. Weg: Wie bei a zeigt man, dass $P(u|v)$ und $P''(-v|-u)$ symmetrisch zu w_2 liegen. Analog zu b folgt daraus die Symmetrie des Graphen einer indir. Prop. bezüglich w_2 .

2. Weg: Die Spiegelung an w_2 lässt sich aus der Spiegelung an w_1 und der Punktspiegelung an O zusammensetzen:

$$S(O) \circ S(w_1) = (S(w_2) \circ S(w_1)) \circ S(w_1) = S(w_2)$$

Sowohl bei $S(w_1)$ als auch bei $S(O)$ wird der Graph einer indir. Prop. auf sich abgebildet (vgl. Aufg. 5 und 7b).

8. a) Ein Punkt P des Graphen hat die Koordinaten $P\left(x \mid \frac{1}{x}\right)$. Sein Abstand von

der x -Achse ist also $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$. Er nähert sich beliebig dem Wert 0 (ohne ihn zu erreichen), wenn man für x immer größere positive oder immer kleinere

negative Zahlen einsetzt. Mit wachsendem $|x|$ nähert sich also der Graph immer mehr der x -Achse, und zwar „nach rechts hin von oben, nach links von unten“.

Der Abstand des Graphenpunktes P von der y -Achse ist $|x|$. Er nähert sich beliebig dem Wert 0, wenn man x selbst immer näher bei 0 (aber $\neq 0$) wählt. Mit abnehmendem $|x|$ nähert sich also der Graph immer mehr der y -Achse, und zwar „von rechts her nach oben, von links nach unten“.

- b) 1) $x > 200$ 2) $y > 200$

119/9. Grundlinie g , Höhe h ; $A = g \cdot h$, also $g \cdot h = 12 \text{ cm}^2$, somit $h = \frac{12 \text{ cm}^2}{g}$.

g (in cm)	3	4	6	8	10
h (in cm)	4	3	2	1,5	1,2

$h = \frac{12 \text{ cm}^2}{g}$ ist die Gleichung einer indir. Prop. mit $D = \mathbb{Q}^+$.

120/10. a) $25 \text{ dm} \cdot q = 20 \text{ dm}^3 \Rightarrow q = 0,8 \text{ dm}^2 = 80 \text{ cm}^2$.

b) $25 \text{ cm}^2 \cdot l = 20000 \text{ cm}^3 \Rightarrow l = 800 \text{ cm} = 8 \text{ m}$.

11. Verkehrsflugzeug: Geschwindigkeit v , Flugzeit $1\frac{1}{4} \text{ h} = \frac{5}{4} \text{ h}$;

Sportflugzeug: Geschwindigkeit $v - 150 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, Flugzeit $1 \text{ h } 35 \text{ Min.} = \frac{19}{12} \text{ h}$.

Es gilt: $v \cdot \frac{5}{4} \text{ h} = \left(v - 150 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \cdot \frac{19}{12} \text{ h} \Rightarrow v = 712,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Flugstrecke: $s = 712,5 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{5}{4} \text{ h} = 890,625 \text{ km} \approx 891 \text{ km}$.

12. Der Preis für 1 Lot Brot ist direkt proportional zum Weizenpreis. Daher gilt

$$\frac{1 \text{ Pf}}{9 \text{ Lot}} : 14 = \frac{1 \text{ Pf}}{x \text{ Lot}} : 30 \Rightarrow x = 4\frac{1}{5}$$

Das 1-Pf-Brot muss dann $4\frac{1}{5}$ Lot schwer sein.

Aufgaben zu 6.1

124/1. Zahlenpaar	(0 0)	(2 -5)	(4 3)	(3 4)	(0 \frac{1}{3})	(-\frac{1}{2} 0)	(-\frac{1}{2} \frac{1}{3})	(\frac{1}{2} 0)
Lösung?	nein	nein	ja	nein	ja	ja	nein	nein

2. $(1|8)$, $(5|20)$, $(-7|-16)$, $(\frac{1}{3}|6)$, $(-\frac{5}{3}|0)$, $(0|5)$, $(1,2|8,6)$, $(\frac{7}{30}|5,7)$

3. Tripel	(0 0 0)	(4 3 5)	(4 5 3)	(5 4 3)	(-2 5 -12)
Lösung?	nein	ja	ja	nein	ja

Tripel $(-2|-12|5)$ $(2|12|5)$ $(2|12|-9)$

Lösung? ja nein ja

124/4. $(0|0|0)$, $(0|1|-6)$, $(1|1|1)$, $(-2\frac{5}{7}|-1|-13)$, $(5|-2,5|50)$, $(\frac{1}{3}|\frac{1}{2}|-\frac{2}{3})$, $(\frac{1}{3}|-\frac{2}{3}|6\frac{1}{3})$, $(\frac{4}{21}|\frac{1}{3}|-\frac{2}{3})$.

5. a) z.B. $(1|2|3|9\frac{1}{3})$ b) z.B. $(1|-2|3|12)$ c) z.B. $(1|1|2|7)$
d) z.B. $(-1|-1|-2|-3)$

6. $(1|0|0)$, $(0|1|0)$, $(0|0|1)$

7. $(-2|-2|-2)$

8. a) $(1|0)$ b) $(3|-1|0,5)$

9. Im Falle der Lösbarkeit genügt es für den Schüler, wenigstens eine spezielle Lösung zu finden. Die folgende Tabelle enthält die vollständigen Lösungsmengen.

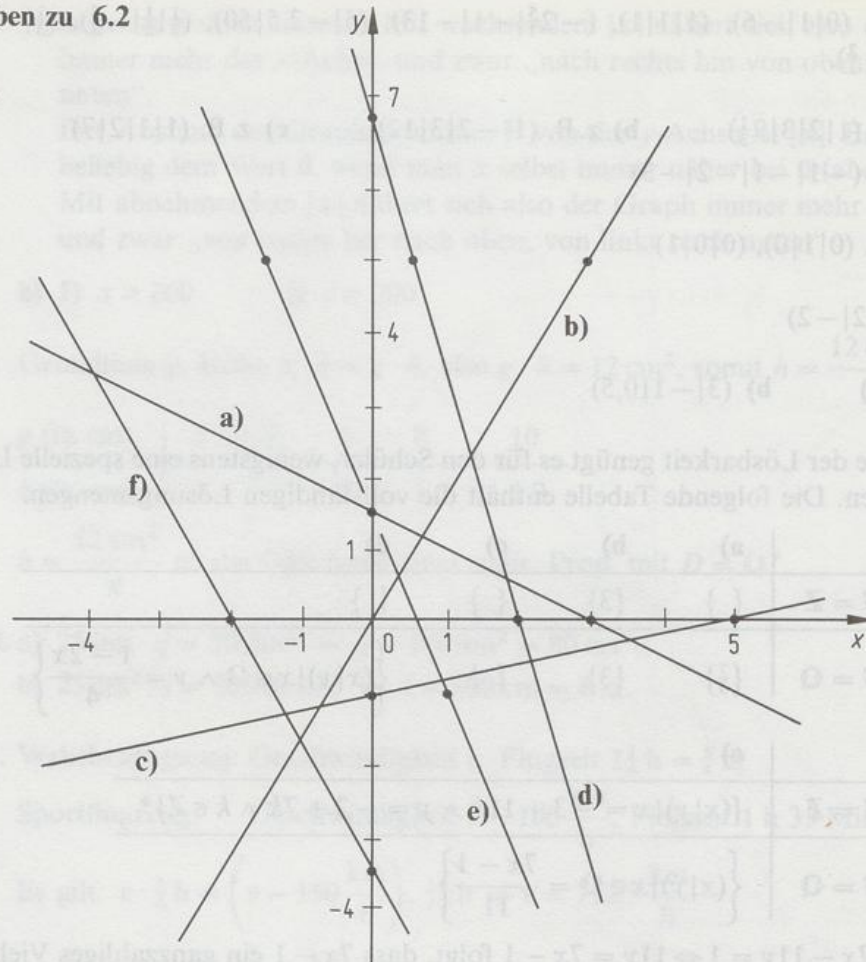
	a)	b)	c)	d)
L für $G = \mathbb{Z}$	$\{ \}$	$\{3\}$	$\{ \}$	$\{ \}$
L für $G = \mathbb{Q}$	$\{\frac{7}{3}\}$	$\{3\}$	$\{ \}$	$\left\{ (x y) \mid x \in \mathbb{Q} \wedge y = \frac{1-2x}{4} \right\}$
	e)			
L für $G = \mathbb{Z}$	$\{(x y) \mid x = -3 + 11k \wedge y = -2 + 7k \wedge k \in \mathbb{Z}\}^*$			
L für $G = \mathbb{Q}$	$\left\{ (x y) \mid x \in \mathbb{Q} = \frac{7x-1}{11} \right\}$			

* Aus $7x - 11y = 1 \Leftrightarrow 11y = 7x - 1$ folgt, dass $7x - 1$ ein ganzzahliges Vielfaches von 11 sein muss; dies gilt für $x_0 = -3$ und damit auch für $x_k = -3 + k \cdot 11, k \in \mathbb{Z}$

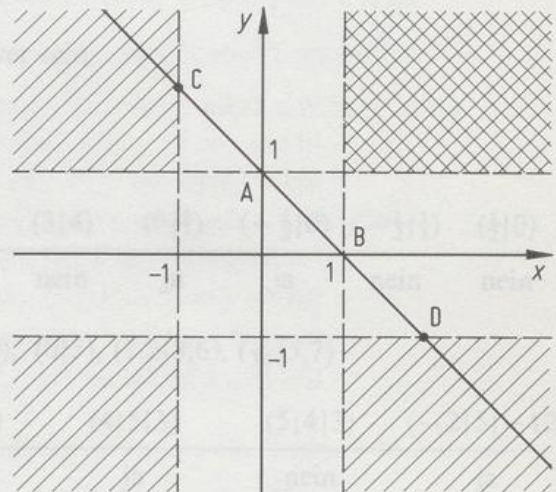
(und nur für diese x -Werte!). Dazu gehört $y_k = \frac{7x_k - 1}{11} = -2 + 7k$.

Aufgaben zu 6.2

127/1.



2. $(s|0)$ liegt auf der x -Achse,
 $(0|t)$ auf der y -Achse.
3. Es muss $c = 0$ gelten.
4. a) Ja; dazu gehören die Punkte zwischen A und B.
b) Nein; es gibt keine Punkte der Geraden im 3. Quadranten.
c) Nein; es gibt keine Geradenpunkte in dem doppelt schraffierten Gebiet (einschließlich Rand).
d) Ja; dazu gehören die Geradenpunkte links oberhalb von C bzw. rechts unterhalb von D.



127/5. $x = 1$ hat die Lösungsmenge

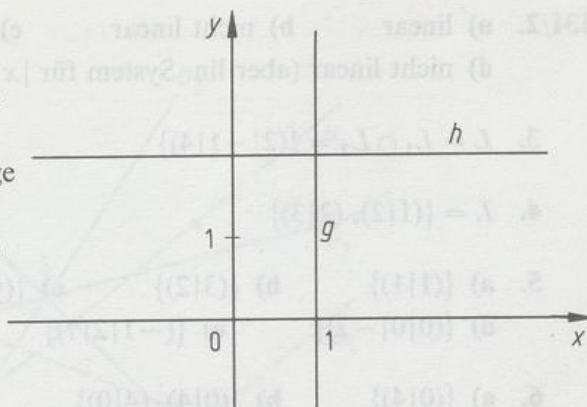
$$L_1 = \{1\}.$$

$x + 0 \cdot y = 1$ hat die Lösungsmenge

$$L_2 = \{(x|y) | x = 1 \wedge y \in \mathbb{Q}\}.$$

g veranschaulicht die Lösungsmenge der Gleichung $x + 0 \cdot y = 1$,

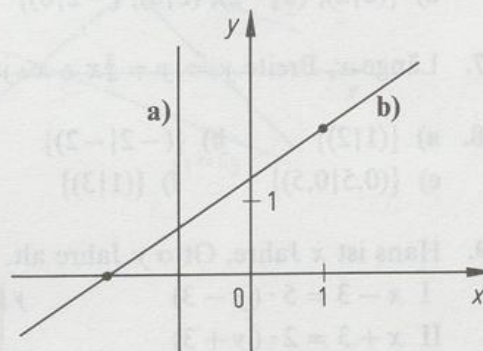
h die Lösungsmenge der Gleichung $0 \cdot x + y = 2$.



6. Die Gleichung ist äquivalent zu

a) $x + 1 = 0$ (d.h. $x + 0 \cdot y + 1 = 0$)

b) $2x - 3y + 4 = 0$



7. a) $\{(x|y|z) | x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q} \wedge z = -x - y\}$

b) $\{(x|y|z) | x = -3y + 7z + 8 \wedge y \in \mathbb{Q} \wedge z \in \mathbb{Q}\}$

c) $\{(x|y|z) | x = y + 2z \wedge y \in \mathbb{Q} \wedge z \in \mathbb{Q}\}$

d) $\{(x|y) | x \in \mathbb{Q} \wedge y = \frac{8x+6}{11}\}$

e) $\{(x|y) | x = -0,4y + 2,9 \wedge y \in \mathbb{Q}\}$

128/8. a) für 2 Unbekannte

b) für 3 Unbekannte

9. a) $\{(x|y) | x \neq 1 \wedge y = 4x - 5\}$

b) $\{(x|y) | x = \frac{1}{8}y \wedge y \neq -\frac{3}{2}\} = \{(x|y) | x \neq -\frac{3}{16} \wedge y = 8x\}$

c) $\{(x|y) | x \neq 1 \wedge y = -x - 1\}$

d) $\{(x|y) | x \in \mathbb{Q} \wedge y = 2x - 1\}$

Aufgaben zu 6.3

131/1. a) I $x - 2y = -3$

II $2x - 4y = -5$

b) I $5x + 3y - 8z = 10$

II $2x - y = 7$

III $y - z = 0$

c) I $2x + 4y = 1$

II $x - 3y = 7$

III $5x + y = 11$

d) I $w + x = 0$

II $w + x + y = 0$

III $w + x + y + z = 0$

- 131/2. a) linear b) nicht linear c) linear
d) nicht linear (aber lin. System für $|x|$ und $|y|$)

3. $L = L_1 \cap L_2 = \{(2|-1|4)\}$

4. $L = \{(1|2), (2|3)\}$

5. a) $\{(1|1)\}$ b) $\{(3|2)\}$ c) $\{(\frac{5}{3}|\frac{3}{2})\}$
d) $\{(0|0|-2)\}$ e) $\{(-1|2|7)\}$ f) $\{(2|0|-2)\}$

6. a) $\{(0|4)\}$ b) $\{(0|4), (4|0)\}$ c) $\{(0|2), (0|-2)\}$
d) $\{(0|2), (0|-2), (2|0), (-2|0)\}$ e) $\{(1|-1)\}$ f) $\{(-4|-\frac{1}{4}), (\frac{4}{5}|\frac{5}{4})\}$

7. Länge x , Breite $y \Rightarrow y = \frac{3}{4}x \wedge x \cdot y = 12$; $L = \{(4|3)\}$, da $x > 0, y > 0$.

132/8. a) $\{(1|2)\}$ b) $\{(-2|-2)\}$ c) $\{(2|-1)\}$ d) $\{(0,5|-3)\}$
e) $\{(0,5|0,5)\}$ f) $\{(1|3)\}$

9. Hans ist x Jahre, Otto y Jahre alt.

I $x - 3 = 5 \cdot (y - 3)$

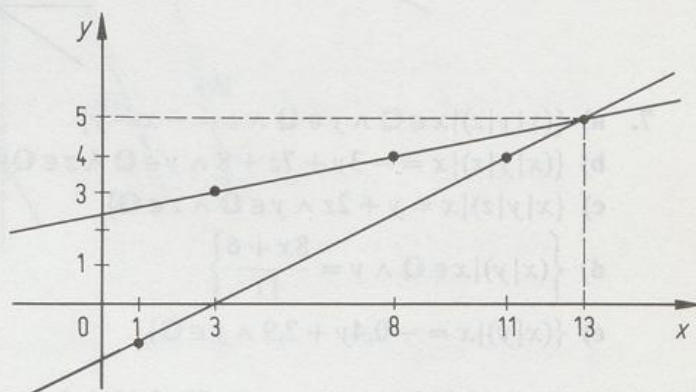
II $x + 3 = 2 \cdot (y + 3)$

I' $x - 5y = -12$

II' $x - 2y = 3$

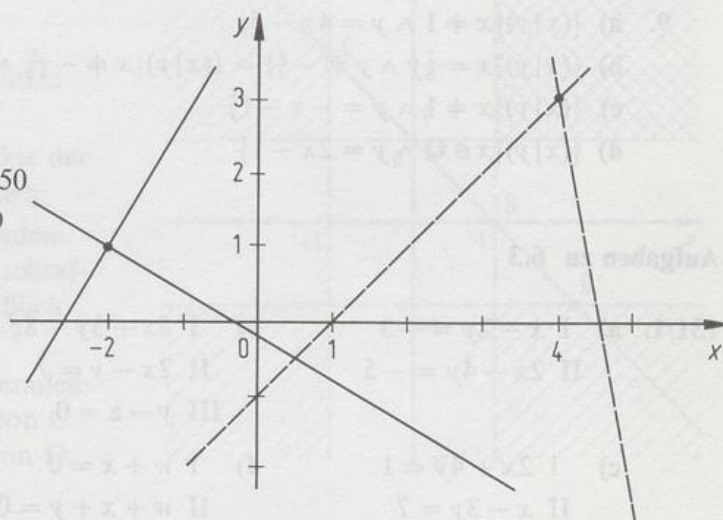
$L = \{(13|5)\}$

Hans ist 13,
Otto 5 Jahre alt.

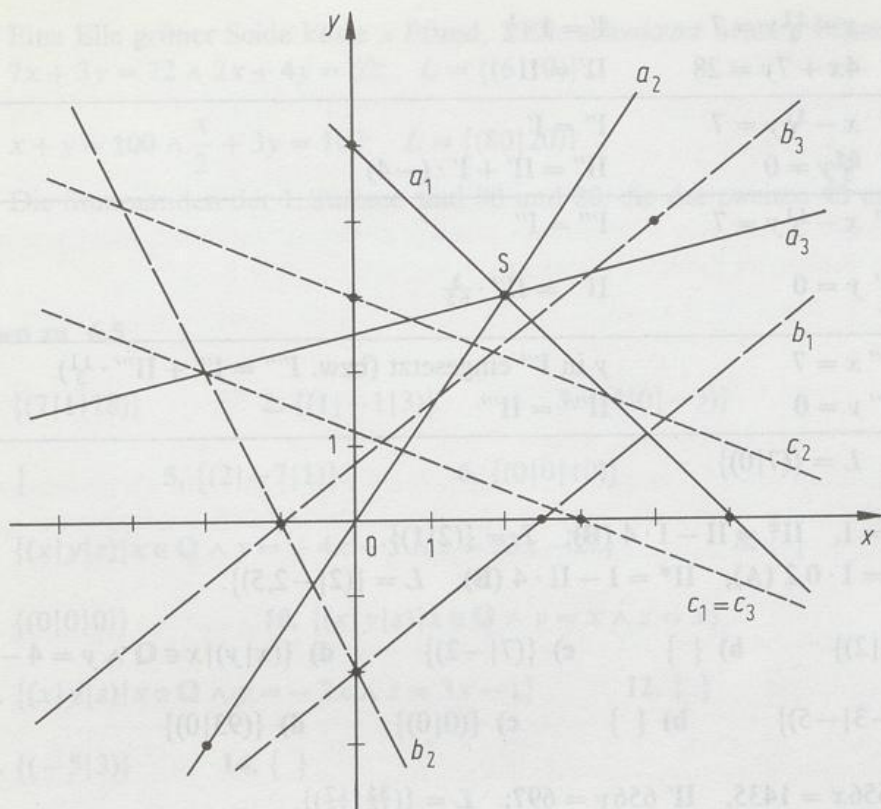


10. I $3x + 5y = -1$
II $5x - 3y = -13$
 $L = \{(-2|1)\}$

11. I $(10x + y) + (x + y) = 50$
II $10y + x = 10x + y - 9$
I' $11x + 2y = 50$
II' $9x - 9y = 9$
 $L = \{(4|3)\}$;
die Zahl heißt 43.



zu Aufgabe 10. — zu Aufgabe 11. ----



a) $L = \{(2|3)\}$; die Geraden a_1, a_2, a_3 schneiden sich in $S(2|3)$.

b) $L = \{ \}$, da $b_1 \parallel b_3 \wedge b_1 \neq b_3$.

c) $L = \{ \}$, da $c_1 \parallel c_2 \wedge c_1 \neq c_2$. $c_3 = c_1(!)$.

Aufgaben zu 6.4

144/1. a) $I' \quad x + \frac{3}{2}y = 1 \quad I' = I \cdot \frac{1}{2}$

$II' \quad 4x - 9y = -1 \quad II' = II$

$I'' \quad x + \frac{3}{2}y = 1 \quad I'' = I'$

$II'' \quad -15y = -5 \quad II'' = II' + I' \cdot (-4)$

$I''' \quad x + \frac{3}{2}y = 1 \quad I''' = I''$

$II''' \quad y = \frac{1}{3} \quad II''' = II'' \cdot (-\frac{1}{15})$

$I'''' \quad x = \frac{1}{2} \quad I'''' + II''' \cdot (-\frac{3}{2})$

$II'''' \quad y = \frac{1}{3}$

$L = \{(\frac{1}{2}|\frac{1}{3})\}$

b) $I' \quad x - \frac{11}{3}y = 7$	$I' = I \cdot \frac{1}{3}$
$II' \quad 4x + 7y = 28$	$II' = II$
$I'' \quad x - \frac{11}{3}y = 7$	$I'' = I'$
$II'' \quad \frac{65}{3}y = 0$	$II'' = II' + I' \cdot (-4)$
$I''' \quad x - \frac{11}{3}y = 7$	$I''' = I''$
$II''' \quad y = 0$	$II''' = II'' \cdot \frac{3}{65}$
$I'''' \quad x = 7$	y in I''' eingesetzt (bzw. $I'''' = I''' + II''' \cdot \frac{11}{3}$)
$II'''' \quad y = 0$	$II'''' = II'''$
$L = \{(7 0)\}$	

144/2. a) $I^* = I, \quad II^* = II - I \cdot 4 \quad (\mathbf{B}); \quad L = \{(2|1)\}.$

b) $I^* = I \cdot 0,2 \quad (\mathbf{A}), \quad II^* = I - II \cdot 4 \quad (\mathbf{B}); \quad L = \{(2|-2,5)\}.$

3. a) $\{(1|2)\} \quad \mathbf{b)} \quad \{ \} \quad \mathbf{c)} \quad \{(7|-2)\} \quad \mathbf{d)} \quad \{(x|y) | x \in \mathbb{Q} \wedge y = 4 - \frac{2}{3}x\}$

4. a) $\{(-3|-5)\} \quad \mathbf{b)} \quad \{ \} \quad \mathbf{c)} \quad \{(0|0)\} \quad \mathbf{d)} \quad \{(93|0)\}$

5. a) $I' \quad 656x = 1435, \quad II' \quad 656y = 697; \quad L = \{(\frac{35}{16} | \frac{17}{16})\}.$

b) Das Additionsverfahren liefert „ $0 = 0$ “, da die beiden Gleichungen äquivalent sind; es gilt $I = II \cdot \frac{8}{3}$, das System besitzt unendlich viele Lösungen.

$$L = \left\{ (x|y) | x \in \mathbb{Q} \wedge y = \frac{2-6x}{9} \right\}$$

6. a) $\text{Det.} = -25; \quad L = \{(4|-3)\} \quad \mathbf{b)} \quad \text{Det.} = 0; \quad L = \{ \}$

c) $\text{Det.} = 9,6; \quad L = \{(0,5|-4)\}$

d) $\text{Det.} = 0; \quad L = \{(x|y) | x \in \mathbb{Q} \wedge y = -\frac{11}{21}x\}$

145/7. $\{(6|\frac{5}{9})\} \quad \mathbf{8.} \quad \{(\frac{5}{7}|\frac{4}{7})\} \quad \mathbf{9.} \quad \{(20|3)\}$

10. $\{(\frac{3}{2}|- \frac{3}{4})\} \quad \mathbf{11.} \quad \{(2|0)\} \quad \mathbf{12.} \quad \{(2,5|1,4)\}$

13. $\{(\frac{1}{2}|\frac{2}{3})\} \quad \mathbf{14.} \quad \{(\frac{2}{7}|\frac{6}{5})\} \quad \mathbf{15.} \quad \{(0,75|5,5)\} \quad \mathbf{16.} \quad \{ \}$

17. a) $x - y = 0$	b) $x - 2y = 0$	c) $x - y = -3$
$x + 2y = 6$	$x + 2y = 6$	$x + 2y = 6$
A(2 2)	B(3 1,5)	C(0 3)

18. a) $(-1|2) \quad \mathbf{b)} \quad \text{kein Schnittpunkt, } g_1 \parallel g_2 \wedge g_1 \neq g_2;$

c) $(4|15) \quad \mathbf{d)} \quad (2,34|-7,2)$

19. $\frac{1}{4}x + y = 7 \wedge x + y = 10; \quad L = \{(4|6)\}.$

Die Breite beträgt 4, die Länge 6 Handbreiten.

145/20. Eine Elle grüner Seide koste x Pfund, 1 Elle schwarzer Seide y Pfund.

$$7x + 3y = 72 \wedge 2x + 4y = 52; \quad L = \{(6|10)\}.$$

21. $x + y = 100 \wedge \frac{x}{2} + 3y = 100; \quad L = \{(80|20)\}.$

Die Summanden der 1. Summe sind 80 und 20, die der zweiten 40 und 60.

Aufgaben zu 6.5

148/1. $\{(7|1|18)\}$

2. $\{(1|-1|3)\}$

3. $\{(4|0|-5)\}$

4. $\{ \}$

5. $\{(2|-7|1)\}$

6. $\{(0|0|10)\}$

7. $\{(x|y|z)|x \in \mathbb{Q} \wedge y = -4x + 5 \wedge z = 23x - 22\}$

8. $\{ \}$

9. $\{(0|0|0)\}$

10. $\{(x|y|z)|x \in \mathbb{Q} \wedge y = x \wedge z = x\}$

11. $\{(x|y|z)|x \in \mathbb{Q} \wedge y = -2x \wedge z = 3x - 1\}$

12. $\{ \}$

13. $\{(-5|3)\}$

14. $\{ \}$

149/15. $\{(1|-2|0|-1)\}$

16. $\{(2|0,5|2|-0,5)\}$

17. $\{(0|1|-2)\}$

18. $\{(x|y|z|w)|x = 2w \wedge y = w + 2 \wedge z = 3w - 1 \wedge w \in \mathbb{Q}\}$

19. a) $\{(15|5|25)\}$

b) $\{(45|37,5|22,5)\}$

20. $A = 11, \quad B = 4, \quad C = 5$

21. x Hähne, y Hennen, z Küken; $x, y, z \in \mathbb{N}$

I $x + y + z = 100$

II $5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100$

I' $x + y + z = 100$

II' $14x + 8y = 200 \quad (\text{II}' = \text{II} \cdot 3 - \text{I})$

II' $\Leftrightarrow 7x + 4y = 100 \Leftrightarrow 7x = 100 - 4y$

$\Leftrightarrow 7x = 4 \cdot (25 - y) \quad (*)$

Aus (*) folgt: x muss ein Vielfaches von 4 sein,

$25 - y$ muss ein Vielfaches von 7 sein.

Damit findet man folgende Tripel:

x	4	8	12
y	18	11	4
z	78	81	84

Die Probe zeigt, dass es sich um 3 Lösungen handelt; bereits CHANG Ch'iuchien gibt alle drei Lösungen an.

149/22. Es seien x Ochsen, y Schweine, z Kälber und w Geißen.

Dann muss gelten:

I. $x + y + z + w = 100$

II. $4x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}w = 100$

mit $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ (d.h. jede Art von Tieren soll tatsächlich dabei sein!).

Dieses System hat eine Vielzahl von Lösungen. Um sie zu finden, leitet man aus I, II eine einfachere Gleichung mit nur 3 Variablen her, z. B.

$4 \cdot \text{II} - \text{I}: 15x + 5y + z = 300$

$$\Leftrightarrow x = 20 - \frac{5y + z}{15} \quad (*)$$

Man erkennt aus (*), dass $x \leq 19$ gelten muss und dass z ein Vielfaches von 5 und $5y + z$ ein Vielfaches von 15 sein muss. Tatsächlich existieren zu jedem $x \in \{1, 2, \dots, 19\}$ Lösungen. Einige Beispiele:

Fall $x = 1$: (*) $\Leftrightarrow 5y + z = 285$ (1)

Beim Lösen von (1) ist $5|z$ und $w > 0$ zu beachten. Man erhält:

z	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47
w	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2

w ist jeweils so gewählt, dass I erfüllt ist. Man zeigt leicht, dass die 10 Wertequadrupel auch II erfüllen. Es genügt, dies etwa für $(1|56|5|38)$ zu zeigen, und dann nachzuweisen, dass der Term $4x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}w$ beim Übergang zum nächsten Quadrupel sich nicht ändert.

Da $\Delta x = 0$, $\Delta y = -1$, $\Delta z = 5$, $\Delta w = -4$ ist tatsächlich

$4 \cdot \Delta x + \frac{3}{2} \cdot \Delta y + \frac{1}{2} \Delta z + \frac{1}{4} \cdot \Delta w = 0$.

Fall $x = 14$: (*) $\Leftrightarrow 5y + z = 90$ (2)

(2) liefert folgende Werte für y, z, w :

z	5	10	15	20	25	30	...	75	80
y	17	16	15	14	13	12	...	3	2
w	64	60	56	52	48	44	...	8	4

Wie oben zeigt man leicht, dass alle 16 Quadrupel Lösungen sind.

Fall $x = 19$: (*) $\Leftrightarrow 5y + z = 15$ (3)

(3) liefert die beiden Lösungen $(19|1|10|70)$ und $(19|2|5|74)$.

Zu den verschiedenen x -Werten gibt es also unterschiedliche Anzahlen $n(x)$ von Lösungen, und zwar gilt:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$n(x)$	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	16	14	11	8	5	2

Die Aufgabe hat also 222 Lösungen!

Adam RIES gibt als Lösung an: 12 Ochsen, 20 Schweine, 20 Kälber und 48 Geißen.

Aufgaben zu 6.6

- 152/1. $\{(5|6)\}$ 2. $\{(12|8)\}$ 3. $\{(10|15)\}$ 4. $\{ \}$
 5. $\{(-8|5|1)\}$ 6. $\{(x|y|z)|x \neq 0 \wedge y = -2x \wedge z = -3x\}$
 7. $\{(\frac{1}{2}|\frac{1}{4})\}$ 8. $\{(\frac{2}{5}|\frac{5}{3})\}$
 153/9. $\{(3|4)\}$ 10. $\{(5|0)\}$ 11. $\{(1|-1)\}$ 12. $\{ \}$
 13. $\{(25|18)\}$ 14. $\{(1|\frac{1}{2}|\frac{1}{3})\}$ 15. $\{(-3|7|11)\}$

Aufgaben zu 6.7.1

- 153/1. Erste Zahl 3, zweite 5. 2. Erste Zahl $\frac{7}{3}$, zweite $-\frac{3}{5}$.
 3. Erste Zahl 3, zweite 1. 4. Erste Zahl 18, zweite 63.
 5. Die Zahl heißt 24.
 154/6. Die Zahl heißt 364. 7. Die Zahl heißt 447.
 8. Die Zahl heißt 45. (Quersumme muss 9 sein!)
 9. Die Zahl heißt 385. (Alternierende Quersumme muss 0 sein!)
 10. Neue Zahlen: 7436 und 4367; ursprüngliche Zahl: 436; angehängte Ziffer: 7.
 11. $\frac{4}{9}$ 12. $\frac{10}{11}$ 13. Erste Zahl $\frac{1}{3}$, zweite $\frac{1}{2}$.
 14. $x = \frac{7}{3}y = 2\frac{1}{3}y$; somit ist $\frac{1}{3}y = 37$; $y = 111$; $x = 259$.
 15. $\frac{10x+y}{10y+x} = \frac{8}{3} \wedge \frac{10y+x-1}{y} = 13 \Rightarrow x = 7, y = 2$. Die Zahl heißt 72.
 16. Die Einerziffer muss 5, die Zehnerziffer (wegen der Größe der Quersumme!) 7 heißen. Mit x, y als Tausender- bzw. Hunderterziffer gilt dann:
 $x + y = 14 \wedge (1000x + 100y + 75) + (5700 + 10y + x) = 12661 \Rightarrow x = 6, y = 8$.
 Die Zahl heißt 6875.
 17. 324 18. Erste Zahl 6, zweite 3.
 155/19. $x^2 - y^2 = 93 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 1 \cdot 93 \vee (x-y)(x+y) = 3 \cdot 31$
 1. Fall: $x - y = 1 \wedge x + y = 93 \Rightarrow L_1 = \{(47|46)\}$
 2. Fall: $x - y = 3 \wedge x + y = 31 \Rightarrow L_2 = \{(17|14)\}$
 20. $x + y = z + 20 \wedge y + z = x + 30 \wedge z + x = y + 40$; $L = \{(30|25|35)\}$.

Aufgaben zu 6.7.2

155/21. 90 Personen; anfangs 47 im 1. und 43 im 2. Raum.

22. 20 und 25 Schüler

23. Zu Beginn 14 Damen und 21 Herren

24. Gewinn 120 000 €; davon 72 000 € für Karl, 48 000 € für Otto.

25. Einlagen: x € von Kunze, y € von Link

$$2x = 3y + 5000 \wedge \frac{x - 22500}{y - 13500} = \frac{x}{y}$$

Einlagen: Kunze 25 000 €, Link 15 000 €; Grundkapital 40 000 €.

Gewinne: Kunze 2 500 €, Link 1 500 €.

26. 45 Kisten waren auf dem kleinen, 60 auf dem großen Wagen.

156/27. Im 1. Fass waren 44 l, im 2. Fass 52 l Petroleum.

28. Es sind 25 Hühner und 10 Kühe.

$$29. x + y + z = 100 \wedge 40x + 12y + 7z = 1000 \Rightarrow y = 60 - \frac{33x}{5} \quad (*)$$

Wegen $x, y, z \in \mathbb{N}$ hat (*) nur die Lösung $x = 5, y = 27$; dazu $z = 68$.

Somit sind es 5 Bücher zu 40 €, 27 zu 12 € und 68 zu 7 €.

30. Anteile der 4 Personen: x Dr., y Dr., z Dr., $9900 \text{ Dr.} - (x + y + z) \text{ Dr.}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } 9900 - (x + y + z) = (x + y + z) + 300 \\ \text{II. } z = x + y + 300 \\ \text{III. } y = \frac{8}{7}x \end{array} \right\} L = \{(1050 | 1200 | 2550)\}$$

1050 Dr. erhält die 1., 1200 Dr. die 2., 2550 Dr. die 3. und 5100 Dr. die 4. Person.

Aufgaben zu 6.7.3

156/31. Die 1. Sorte kostet 8 €/kg, die 2. Sorte 12 €/kg.

32. Man muss 7,5 kg von der 1. und 2,5 kg von der 2. Sorte mischen.

33. Es waren 150 g Wasser und 37,5 g Salz, also 187,5 g einer 20%igen Salzlösung.

34. Es waren 200 g der 1. und 300 g der 2. Lösung.

35. Die Dichte der 1. Lösung ist 1,05 g/cm³, die der 2. Lösung 1,12 g/cm³.

157/36. Mit x kg Sauerstoff, y kg Stickstoff gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I } x + y = 0,00129 \cdot 50 \cdot 40 \cdot 25 \\ \text{II } \frac{x}{0,00143} + \frac{y}{0,00125} = 50 \cdot 40 \cdot 25 \end{array} \right\} L = \{(15\frac{8}{9} | 48\frac{11}{18})\}$$

Es sind etwa 15,9 kg Sauerstoff und 48,6 kg Stickstoff.

37. Der Feingehalt der 1. Sorte ist 350, der der 2. Sorte 600.

38. Es waren 2,7 g Legierung vom Feingehalt 820.

39. x M(inen) Gold, y M Kupfer, z M Zinn, $(60 - (x + y + z))$ M Eisen.

$$x + y = 40 \wedge x + z = 45 \wedge y + z = 24; \quad L = \{(30,5 | 9,5 | 14,5)\}.$$

Man braucht 30,5 M Gold, 9,5 M Kupfer, 14,5 M Zinn und 5,5 M Eisen.

Aufgaben zu 6.7.4

157/40. Klaus legt in 1 Stunde 4,8 km, Heinz 4,2 km zurück.

41. Geschwindigkeit des Schleppzugs 14,5 km/h, Geschwindigkeit der Donau 5,5 km/h.

158/42. Geschwindigkeit des Schwimmers 0,9 m/s, Geschwindigkeit des Flusses 1,6 m/s.

43. Geschwindigkeit des Flugzeugs 330 m/s (= 1188 km/h), Geschwindigkeit des Windes 10 m/s.

Die Schallmauer wurde nicht durchbrochen.

44. Geschwindigkeit des Lastwagens 90 km/h, Geschwindigkeit des Personenwagens 120 km/h.

45. Klaus fährt mit 25 km/h, Otto mit 21 km/h.

46. Geschwindigkeit des schnelleren Läufers 7,35 m/s, die des anderen 6,65 m/s.

47. Klaus läuft 9 m/s, Peter 8 m/s. Der Treffpunkt ist 320 m vom Startpunkt entfernt.

48. Das kleinere Rad hat 12, das größere 20 Zähne.

$$\left. \begin{array}{l} \text{159/49. Umfang des Treibrads: } x \text{ m} \\ \text{Umfang des Laufrads: } y \text{ m} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{I } \frac{441}{y} - \frac{441}{x} = 112 \\ \text{II } 3x = 7y \Leftrightarrow \frac{3}{y} - \frac{7}{x} = 0 \end{array}$$

Lineares System für $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$: $x = 5,25; y = 2,25$.

Auf 10,5 km macht das Treibrad 2000 Umdrehungen.

Aufgaben zu 6.7.5

159/50. a) $\alpha = \beta = 63^\circ$, $\gamma = 54^\circ$. b) $\alpha = \beta = 7,2^\circ$, $\gamma = 165,6^\circ$.

51. $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 54^\circ$, $\gamma = 81^\circ$.

52. Umfangswinkel 36° , Zentriwinkel 72° .

53. $\alpha = 81^\circ$, $\beta = 132^\circ$, $\gamma = 99^\circ$, $\delta = 48^\circ$.

54. Die Basis ist 7,5 cm, die Schenkel sind 12,5 cm lang.

55. Länge 30 cm, Breite 21 cm.

56. Die parallelen Seiten sind 5,6 cm und 8 cm lang.

57. $b = 40$ cm, $d = 44$ cm.

58. $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, $c = 12$ cm, $d = 14$ cm.

59. Die 1. Seite ist 4 cm, die 2. Seite 3 cm lang.

160/60. Länge des Rechtecks 10 cm, Breite 7 cm.

61. Die Rechtecksseiten sind 2 dm und 8 dm lang.

62. Die Seiten des ursprünglichen Rechtecks sind 6,5 cm und 7,8 cm lang.

Aufgaben zu 6.7.6

160/63. A hat x Gulden, B y Gulden; $x + \frac{y}{3} = 15 \wedge \frac{x}{4} + y = 15$.

A hat $10\frac{10}{11}$ Gulden, B $12\frac{3}{11}$ Gulden.

64. 1 kg Zucker kostet 1,20 €, 1 kg Mehl 1,30 €.

65. Kapital 4600 €, Rückzahlungsrate 920 €.

66. 1. Kapital 13000 €, 2. Kapital 11000 €.

67. Einkaufspreis 248 €/t, Verkaufspreis 310 €/t.

68. Monatlicher Grundpreis 2,10 €; Arbeitspreis zuletzt 0,15 €/kWh.

161/69. 1. Dose: 136 g netto; $11\frac{1}{5}\%$ Tara;
2. Dose: 544 g netto; $5\frac{5}{9}\%$ Tara.

70. Es sind 81 cm^3 Kohle und 18 cm^3 Granit.

161/71. Der Vater ist 35 Jahre, der Sohn 8 Jahre alt.

72. Hans ist 7 Jahre, Otto 17 Jahre alt.

73. Heute sei Mary x Jahre, Ann y Jahre alt. Die Angaben des 2. Satzes beziehen sich auf drei verschiedene Zeitpunkte; sie mögen t_1 Jahre vor, bzw. t_2 Jahre nach bzw. t_3 Jahre vor der Gegenwart liegen. Dann gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I } x + y = 48 \\ \text{II } x = 2(y - t_1) \\ \text{III } x - t_1 = \frac{1}{2}(y + t_2) \\ \text{IV } y + t_2 = 3(x - t_3) \\ \text{V } x - t_3 = 3(y - t_3) \end{array} \right\} \Rightarrow x = 30, y = 18, t_1 = 3, t_2 = 36, t_3 = 12$$

Heute ist Mary 30 Jahre und Ann 18 Jahre alt.

74. Aus den Angaben folgt nur $y = 2x - 20$ mit $x < y$, wenn x und y das Alter der Schwestern in Jahren bedeuten. Man kann weiter folgern, dass beide über 20 Jahre alt sein müssen. Ganzzahlige Lösungen: (21|22), (22|24), (23|26), ..., (35|50), ...

75. Mit Telefonnummer x und Alter y Jahre erhält man $100x + y = 6362832$. Wegen $x, y \in \mathbb{N}$ und $y < 100$ folgt daraus $x = 63628$ und $y = 32$.

162/76. Mit Tagesnummer x , Monatsnummer y und Jahreszahl z erhält man $x + 100y + 10000z = 19760417$.

Wegen $x \leq 31$, $y \leq 12$ und $x, y, z \in \mathbb{N}$ folgt daraus $x = 17$, $y = 4$, $z = 1976$.

77. Karl hatte sich um 3 m, Fritz um 7 m verschätzt. Die richtige Entfernung ist 82 m.

78. Es fließen stündlich $150\,000 \text{ m}^3$ Wasser zu. Eine Turbine benötigt pro Stunde $40\,000 \text{ m}^3$ Wasser.

79. Die stündliche Fördermenge einer Pumpe sei das x -fache, der stündliche Verbrauch das y -fache des Fassungsvermögens. Dann gilt:

$$\frac{1}{2} + 1 \cdot x - 1 \cdot y = \frac{2}{5} \wedge \frac{2}{5} + 4x - 2y = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{2}{5}, y = \frac{3}{10}.$$

Der Behälter wäre nach $(\frac{4}{5} : \frac{3}{10}) \text{ h} = 2 \text{ h } 40 \text{ Min.}$ leer.

Eine Pumpe braucht $(1 : \frac{2}{5}) \text{ h} = 2\frac{1}{2} \text{ h}$ zum Füllen des Speichers.

80. Eine Garbe aus guter bzw. mittelmäßiger bzw. schlechter Ernte liefert einen Ertrag von $9\frac{1}{4}$ Tou bzw. $4\frac{1}{4}$ Tou bzw. $2\frac{3}{4}$ Tou.

163/81. Pro Stunde fertigt die 1. Arbeiterin 6 Stück, die zweite 7 Stück.

82. Die Stichweite der 1. Naht ist 2 mm, die der zweiten 2,5 mm.

83. Auf einer Längsseite stehen 22, auf einer Breitseite 15 Pfosten.

84. Bei der 1. Planung seien x Längs- und y Querreihen vorgesehen. Dann gilt:

$$\frac{42}{x} = \frac{126}{y} \wedge (x+1) \cdot (y+2) = xy + 32 \Rightarrow x = 6, y = 18.$$

Endgültig werden $(6+1) \cdot (18+2)$ Bäume, also 140 Bäume, gepflanzt.

$$163/85. \quad x + y + 73 = 2(x + z + y + z)$$

$$x + z + 73 = 3(y + z + x + y)$$

$$y + z + 73 = 4(x + y + x + z)$$

$$x = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{13}{2}; \quad z = \frac{33}{2}$$

Der erste Reisende besitzt $\frac{1}{2}$ Gulden, der zweite $6\frac{1}{2}$ Gulden, der dritte $16\frac{1}{2}$ Gulden.

164/ VITRUV: *De architectura libri decem* – Aus der Vorrede zu Buch IX

9. Archimedis vero cum multa miranda inventa et varia fuerint, ex omnibus etiam infinita sollertia id, quod exponam, videtur esse expressum. Hiero enim minor Syracusis auctus regia potestate, rebus bene gestis cum auream coronam votivam diis immortalibus in quodam fano constituisset ponendam, manupretio locavit faciendam et aurum ad sacram adpendit redemptori. Is ad tempus opus manu factum subtiliter regi adprovabit et ad sacram pondus coronae visus est praestitisse. 10. Posteaquam indicium est factum dempto auro tantundem argenti in id coronarium opus admixtum esse, indignatus Hiero se contemptum esse neque inveniens, qua ratione id furtum reprehenderet, rogavit Archimeden, uti in se sumeret sibi de eo cogitationem. Tunc is, cum haberet eius rei curam, casu venit in balineum, ibique cum in solium descenderet, animadvertit, quantum corporis sui in eo insideret, tantum aquae extra solium effluere. Itaque cum eius rei rationem explicationis ostendisset, non est moratus, sed exsiluit gaudio motus de solio et nudus vadens domum versus significabat clara voce invenisse, quod quaereret; nam currens identidem graece clamabat εὕρηκα, εὕρηκα! 11. Tum vero ex eo inventionis ingressu duas fecisse dicitur massas aequo pondere, quo etiam fuerat corona, unam ex auro et alteram ex argento. Cum ita fecisset, vas amplum ad summa labra implevit aquae, in quo demisit argenteam massam. Cuius quanta magnitudo in vasum depressa est, tantum aquae effluxit. Ita exempta massa quanto minus factum fuerat, refudit sextario mensus, ut eodem modo, quo prius fuerat, ad labra aequaretur. Ita ex eo invenit, quantum [ad] certum pondus argenti ad certam aquae mensuram responderet. 12. Cum id expertus esset, tum auream massam similiter pleno vaso demisit et ea exempta, eadem ratione mensura addita invenit ex aquae numero sextantum minore, quanto minus magno corpore eodem pondere auri massa esset quam argenti. Postea vero repleto vaso in eadem aqua ipsa corona demissa invenit plus aquae defluxisse in coronam quam in auream eodem pondere massam, et ita ex eo quod fuerit plus aquae in corona quam in massa ratiocinatus reprehendit argenti in auro mixtionem et manifestum furtum redemptoris.

165/ Was ist gleich, was ist ungleich?

G = Gewicht, V = Volumen, A = Auftriebskraft, ϱ = Dichte,

links: Gewicht G_G des Goldes = Gewicht G_K der Krone

$$\varrho_G V_G = \varrho_K V_K \quad (I)$$

rechts: $G_G - A_G > G_K - A_K$

$$A_G < A_K$$

$$\varrho_W V_G < \varrho_W V_K \quad W = \text{Wasser}$$

$$V_G < V_K \quad (II)$$

d. h., der Goldklumpen hat kleineres Volumen als die Krone.

Aus I und II folgt

$$\varrho_G > \varrho_K$$

d. h., die Dichte des Goldes ist größer als die Dichte der Krone; sie besteht somit nicht aus reinem Gold, sondern aus einer Legierung.

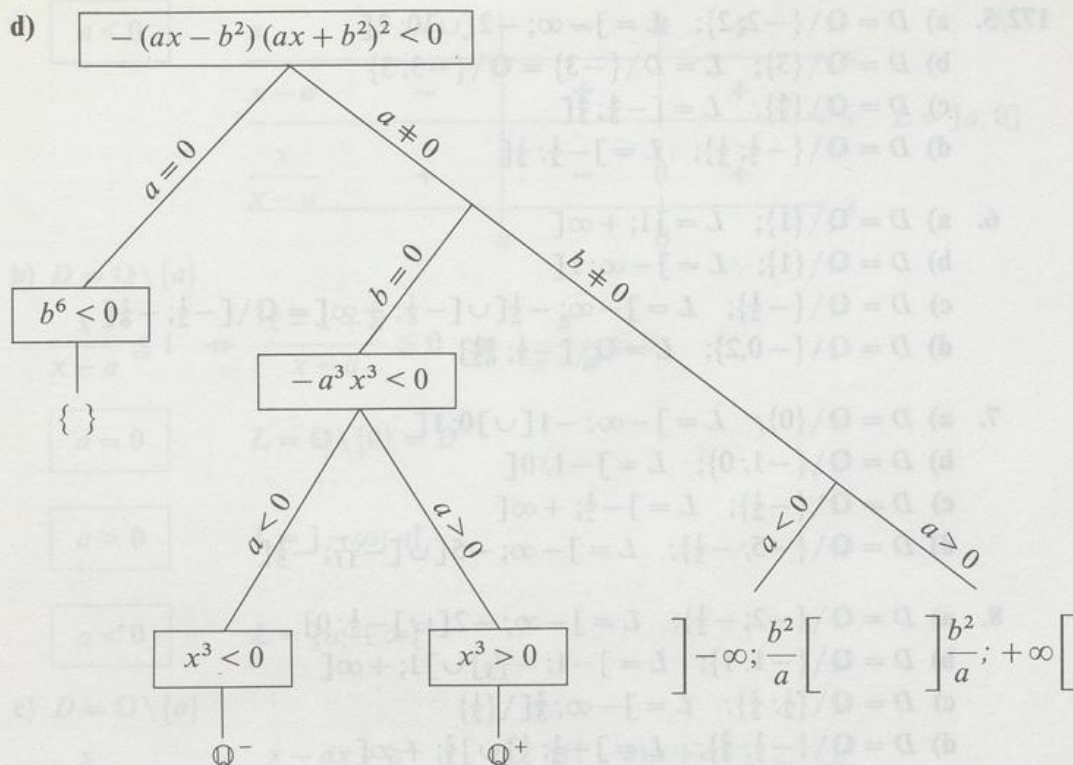
Aufgaben zu 7.1

Vorbemerkung: Wir bezeichnen die Nullstelle mit x_0 , die Steigung mit m .

- 168/1. a) $x_0 = \frac{5}{2}$; $m = 2 > 0$; $L =] - \infty; \frac{5}{2}[$
 b) $x_0 = -4$; $m = -3 < 0$; $L =] - \infty; -4[$
2. a) $x_0 = 6$; $m = -\frac{5}{9} < 0$; $L =] - \infty; 6[$
 b) $x_0 = \frac{27}{8}$; $m = \frac{19}{9} > 0$; $L =] \frac{27}{8}; +\infty[$
3. a) $x_0 = \frac{7}{80}$; $m = 5,6 > 0$; $L = [\frac{7}{80}; +\infty[$
 b) $x_0 = 1000$; $m = -0,001 < 0$; $L =] - \infty; 1000]$
4. a) $x_0 = \frac{8}{3}$; $m = 3 > 0$; $L =] - \infty; \frac{8}{3}[$
 b) $x_0 = -\frac{49}{12}$; $m = 1$; $L = [-\frac{49}{12}; +\infty[$
5. a) $L = \mathbb{Q}$
 b) $L = \{ \}$

Aufgaben zu 7.2

- 170/1. a) $]2; 5[$ b) $] - \infty; 0[\cup] \frac{1}{3}; +\infty[$
 c) $[-1; 1]$ d) $[-2; 4]$
2. a) $\mathbb{Q} \setminus \{-2\}$ b) $\{ \}$ c) $\mathbb{Q}$ d) $\{7\}$ e) $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$
 f) $] - \infty; 3[$
3. a) $\{ \}$ b) $\mathbb{Q} \setminus [-\frac{1}{3}; \frac{5}{2}]$ c) $[-9; 4]$ d) $[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}]$
4. a) $]1; 2[\cup]3; +\infty[$ b) $] - \frac{9}{2}; 0[\cup]7; +\infty[$
 c) $] - \infty; -1,2] \cup [0,1; 1,2]$ d) $[0; \frac{1}{2}] \cup [2; +\infty[$
5. a) $] - \infty; -\frac{3}{2}[\cup]0; +\infty[\setminus \{\frac{3}{2}\}$ b) $] - \frac{1}{6}; \frac{2}{3}[\cup]8; 100[$ c) $\{-1000; 0\}$
6. a) $[0; 3]$ b) 3. binomische Formel anwenden! $] - \frac{6}{5}; \frac{6}{5}[$
 c) $] - \infty; -\frac{17}{13}[\cup]0; \frac{17}{13}[$ d) $x(x+2)(x-5) \leq 0$; $] - \infty; -2] \cup [0; 5]$
7. a) $a < b$: $]a; b[$
 $a = b$: $\{ \}$
 $a > b$: $]b; a[$



Aufgaben zu 7.3

171/1. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}; L = \mathbb{Q}^-$ b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}; L =]-1; +\infty[$

c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}; L =]-\infty; 3[$

d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{5}{2}\}; L =]-\frac{5}{2}; +\infty[$

e) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{2}{3}\}; L =]-\infty; -\frac{2}{3}[$

f) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-4\}; L =]-4; +\infty[$

2. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}; L = \mathbb{Q} \setminus [-1; 1]$

b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{5\}; L = \mathbb{Q} \setminus [3; 5]$

c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{2}{3}\}; L = D$

d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}; L = \mathbb{Q} \setminus]\frac{1}{2}; 1]$

e) $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{6}\}; L =]\frac{1}{6}; 6[$

f) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-0,3\}; L =]-0,3; 4]$

172/3. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}; L = \mathbb{Q} \setminus [-\frac{1}{2}; 0]$

b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}; L =]-\frac{8}{3}; -2[$

c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0,4\}; L =]-\infty; 0,4[$

4. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 0\}; L = \mathbb{Q} \setminus [-2; 0]$

b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 2\}; L =]-3; 2[$

c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}; L = \{ \}$

d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}; L = D$

- 172/5. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 2\}$; $L =]-\infty; -2[\cup]0; 2[$
 b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$; $L = D \setminus \{-3\} = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\}$
 c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{4}{3}\}$; $L = [-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}[$
 d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$; $L =]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$
6. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$; $L =]1; +\infty[$
 b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$; $L =]-\infty; 1[$
 c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$; $L =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup [-\frac{1}{6}; +\infty[= \mathbb{Q} \setminus [-\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}[$
 d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-0, 2\}$; $L = \mathbb{Q} \setminus [-\frac{1}{5}; \frac{11}{62}]$
7. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $L =]-\infty; -1[\cup]0; 1[$
 b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0\}$; $L =]-1; 0[$
 c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$; $L =]-\frac{1}{2}; +\infty[$
 d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-5; -\frac{1}{5}\}$; $L =]-\infty; -5[\cup [-\frac{7}{11}; -\frac{1}{5}[$
8. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; -\frac{1}{2}\}$; $L =]-\infty; -2[\cup]-\frac{1}{2}; 0[$
 b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$; $L =]-1; -\frac{1}{13}[\cup]1; +\infty[$
 c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\}$; $L =]-\infty; \frac{2}{3}[\setminus \{\frac{1}{2}\}$
 d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\}$; $L =]-\frac{1}{2}; \frac{1}{5}[\cup]\frac{2}{3}; +\infty[$
9. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0\}$; $L =]-1; -\frac{1}{2}] \cup \mathbb{Q}^+$
 b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$; $L =]-1; 1[\cup]3; +\infty[$
 c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 3\}$; $L = [-3; 0[\cup]3; +\infty[$
 d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$; $L =]-1; 1[$
10. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $L = D$
 b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 2\}$; $L =]-\infty; -2[\cup [-\frac{2}{5}; 0[$
 c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-4; 0; 2\}$; $L =]-4; 0[\cup]2; 8[$
 d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{2}{5}; 0; \frac{2}{5}\}$; $L =]-\frac{2}{5}; -\frac{2}{11}[\cup]0; \frac{2}{5}[$

173/11. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{a\}$

$a = 0$

$L = \{ \}$

$a > 0$

x	-	0	+	+	x
$x - a$	-		-	+	x
$\frac{x}{x - a}$	+	0	-	+	x

$L = [0; a[$

0

a

$$a < 0$$

x	-	-	0	+	x
$x-a$	-	+		+	x
$\frac{x}{x-a}$	+	-	0	+	x

a 0

$L =]a; 0]$

b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{a\}$

$$\frac{x}{x-a} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x-x+a}{x-a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{x-a} \leq 0$$

$$a = 0$$

$$L = \mathbb{Q} \setminus \{0\} = D$$

$$a > 0$$

$$L =]-\infty; a[$$

$$a < 0$$

$$L =]a; +\infty[$$

c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{a\}$

$$\frac{x}{x-a} \leq a \Leftrightarrow \frac{x-ax+a^2}{x-a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(1-a)x+a^2}{x-a} \geq 0 \quad (*)$$

$$a = 0$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x}{x} \leq 0 \Rightarrow L = \{ \}$$

$$a = 1$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \leq 0 \Rightarrow L =]-\infty; 1[$$

$$a \neq 0 \wedge a \neq 1$$

Die Nullstelle des Zählers ist $\frac{a^2}{a-1}$. Nun ist zu unterscheiden, ob $\frac{a^2}{a-1} \geq a$ oder $\frac{a^2}{a-1} < a$ ist.

$$\text{Dazu lösen wir } \frac{a^2}{a-1} \geq a \Leftrightarrow \frac{a^2 - a^2 + a}{a-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{a-1} \geq 0$$

a	-	+	+	a
$a-1$	-	-	+	a
$\frac{a}{a-1}$	+	-	+	a

0 1

$$\text{Also } \frac{a}{a-1} \geq 0 \Leftrightarrow (-\infty < a < 0 \vee 1 < a < +\infty)$$

$$\frac{a^2}{a-1} \geq a$$

1. Fall: $-\infty < a < 0$

$(1-a)x + a^2$	-	-	0	+	+	x
$x - a$	-	+	+	+	+	x
$\frac{(1-a)x + a^2}{x - a}$	+	-	+	+	+	x

$$L = \left[a; \frac{a^2}{a-1} \right]$$

2. Fall: $1 < a < +\infty$

$(1-a)x + a^2$	+	+	+	0	-	x
$x - a$	-	-	+	+	+	x
$\frac{(1-a)x + a^2}{x - a}$	-	-	+	0	-	x

$$L = \mathbb{Q} \setminus \left[a; \frac{a^2}{a-1} \right[$$

$$\frac{a^2}{a-1} < a \Leftrightarrow 0 < a < 1$$

$(1-a)x + a^2$	-	0	+	+	+	+	x
$x - a$	-	-	-	-	+	+	x
$\frac{(1-a)x + a^2}{x - a}$	+	0	-	-	+	+	x

$$L = \left[\frac{a^2}{a-1}; a \right[$$

Ergebnis: Man erhält insgesamt für L in Abhängigkeit von a :

$$\left[a; \frac{a^2}{a-1} \right] \quad \{ \} \quad \left[\frac{a^2}{a-1}; a \right[\quad] - \infty; 1[\quad \mathbb{Q} \setminus \left[a; \frac{a^2}{a-1} \right[$$

173/12. a) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$

$$1 > \frac{1}{x+3} \wedge \frac{1}{x+3} > 0,1$$

$$L = (]-\infty; -3[\cup]-2; +\infty[) \cap]-3; 7[=]-2; 7[$$

b) $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{5}{3}\}; \quad L =]2; 5[$

c) $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \quad L = \mathbb{Q} \setminus]-1; \frac{1}{2}[$

d) $D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}; \quad L = \mathbb{Q} \setminus [-10; \frac{1}{2}[$

13. a) 1. Fall: $0 < a < b \quad \parallel \cdot \frac{1}{ab} > 0$

$$0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

2. Fall: $a < 0 < b \quad \parallel \cdot \frac{1}{ab} < 0$

$$\frac{1}{b} > 0 > \frac{1}{a}$$

3. Fall: $a < b < 0 \quad \parallel \cdot \frac{1}{ab} > 0$

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$$

Also gilt der Satz: Haben a und b gleiches Vorzeichen, dann gilt

$$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Haben a und b ungleiches Vorzeichen, dann gilt

$$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

b) 1) $0 < 1 < \frac{1}{x} \Rightarrow 1 > x; \quad L =]0; 1[,$ da x offensichtlich positiv sein muss.

2) $\frac{1}{x} < -3 < 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}; \quad L =]-\frac{1}{3}; 0[,$ da x offensichtlich negativ sein muss.

3) $10 < \frac{3}{2x} \Rightarrow \frac{1}{10} > \frac{2x}{3} \Rightarrow \frac{3}{20} > x; \quad L =]0; \frac{3}{20}[$, da offensichtlich $x > 0$.

4) 1. Fall: $0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow x > 1; \quad L_1 =]1; +\infty[$
 2. Fall: $\frac{1}{x} < 0 < 1 \Rightarrow x < 0; \quad L_2 = \mathbb{Q}^-$
 $\left. \begin{array}{l} \text{1. Fall: } 0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow x > 1; \quad L_1 =]1; +\infty[\\ \text{2. Fall: } \frac{1}{x} < 0 < 1 \Rightarrow x < 0; \quad L_2 = \mathbb{Q}^- \end{array} \right\} \Rightarrow L = \mathbb{Q} \setminus [0; 1]$

5) 1. Fall: $-3 < \frac{1}{2x} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} > 2x; \quad L_1 =]-\infty; -\frac{1}{6}[$
 2. Fall: $-3 < 0 < \frac{1}{2x} \Rightarrow x > 0; \quad L_2 = \mathbb{Q}^+$
 $\left. \begin{array}{l} \text{1. Fall: } -3 < \frac{1}{2x} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} > 2x; \quad L_1 =]-\infty; -\frac{1}{6}[\\ \text{2. Fall: } -3 < 0 < \frac{1}{2x} \Rightarrow x > 0; \quad L_2 = \mathbb{Q}^+ \end{array} \right\} \Rightarrow L = \mathbb{Q} \setminus [-\frac{1}{6}; 0]$

6) 1. Fall: $0 < \frac{1}{x-1} < 4 \Leftrightarrow x-1 > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x > \frac{5}{4}; \quad L_1 =]\frac{5}{4}; +\infty[$

2. Fall: $\frac{1}{x-1} < 0 < 4 \Rightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1; \quad L_2 =]-\infty; 1[$

Also $L = \mathbb{Q} \setminus [1; \frac{5}{4}]$

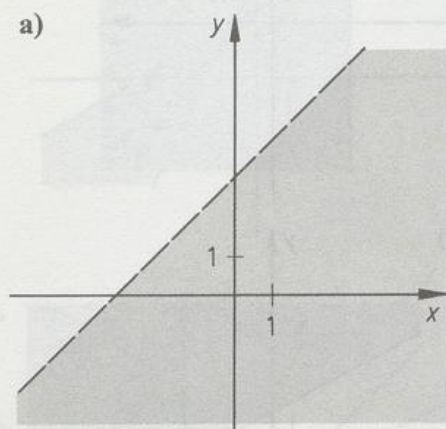
Aufgaben zu 7.4

- 176/1. a) $\{0\}$ b) $\{-1; 1\}$ c) $\{\}$ d) $\{-2\frac{3}{7}; 2\frac{3}{7}\}$
 e) $\{-19; 19\}$ f) $\{\}$ g) $\{-2; 2\}$ h) $\{0\}$
 i) $\{-0,5; 2,5\}$ k) $\{-10; 2\}$ l) $\{-\frac{5}{2}\}$ m) $\{-3; \frac{39}{7}\}$
2. a) $] -1; 1[$ b) $] -\infty; -2] \cup [2; +\infty[$
 c) $[2; 4]$ d) $] -\infty; -\frac{15}{4}[\cup] -\frac{4}{5}; +\infty[$
3. a) $] \frac{1}{7}; +\infty[$ b) $] -\infty; 2]$ e) $[\frac{1}{8}; +\infty[$
 d) $\{\}$ e) $\{\}$ f) $\mathbb{Q}$
4. a) $] -3; -1[\cup] 1; 3[$ b) $[-1; 2] \cup [4; 7]$
 c) $\{\}$ d) $] -\frac{3}{2}; +\infty[$
 e) $] -\infty; -2[$ f) $] \frac{7}{11}; \frac{5}{3}] \cup [3; +\infty[$
5. a) $\mathbb{Q} \setminus] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ b) $[-\frac{1}{5}; 5]$
 c) $\{\}$ d) $] -\infty; -2] \cup [0; 2]$
 e) $[\frac{9}{2}; +\infty[$ f) $\{\}$
6. a) $] -\infty; -1[\cup [1; +\infty[$ b) $] -\infty; -1[$
 c) $] -\infty; -3]$ d) $\{\}$
7. a) $] -3; -1[\cup] 1; +\infty[$ b) $] -\infty; \frac{2}{3}[\cup] \frac{4}{5}; +\infty[$
 c) $\mathbb{Q}$
8. a) $] -\infty; -1[\cup] 1; +\infty[$ b) $[\frac{3}{10}; +\infty[$
 c) $[-\frac{19}{11}; -1] \cup [-\frac{11}{19}; 1]$

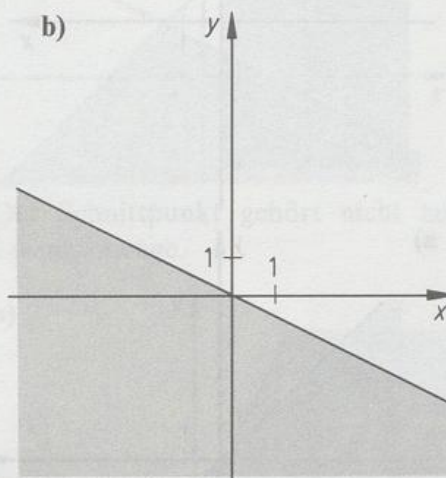
Aufgaben zu 7.5.1

Vorbemerkung: Die Lösungsmenge ist gerastert angegeben. Gehört die Gerade dazu, ist sie ausgezogen, andernfalls gestrichelt.

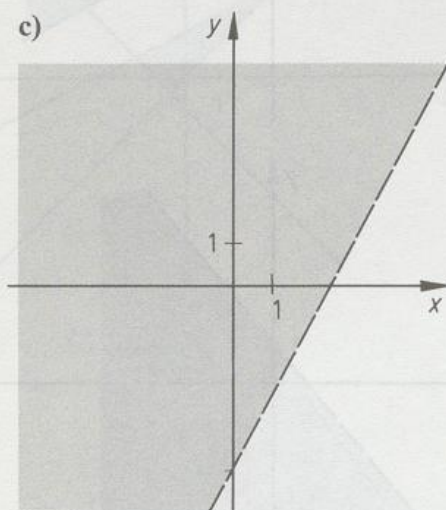
179/1. a)



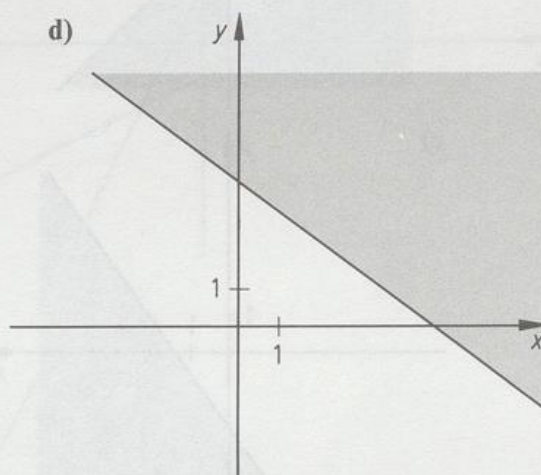
b)



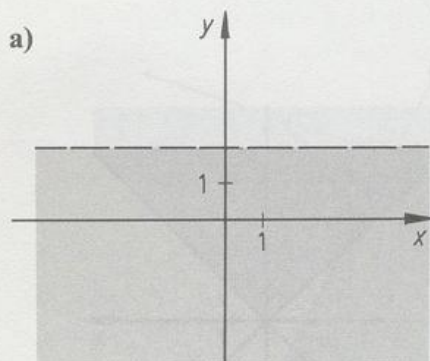
c)



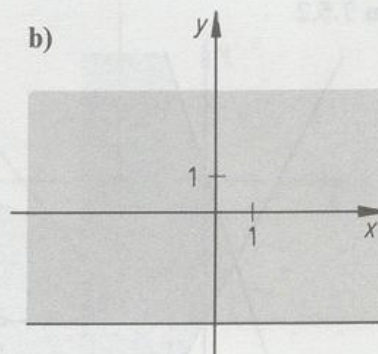
d)

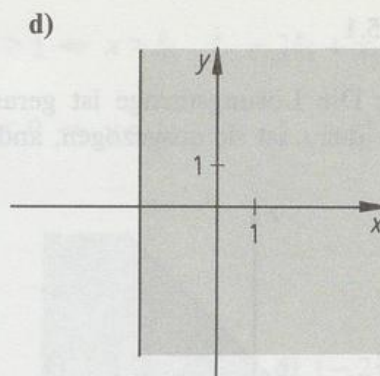
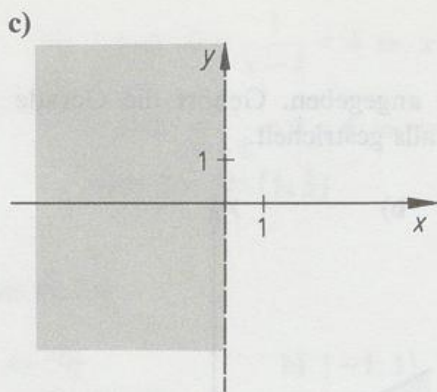


2. a)

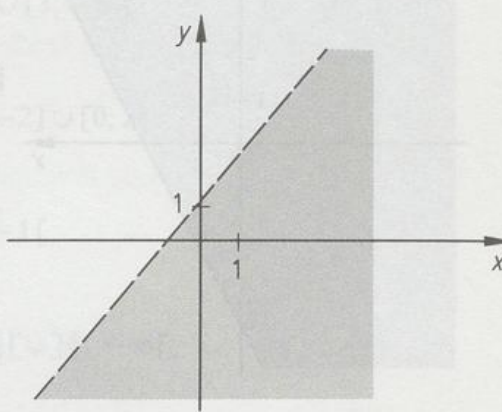
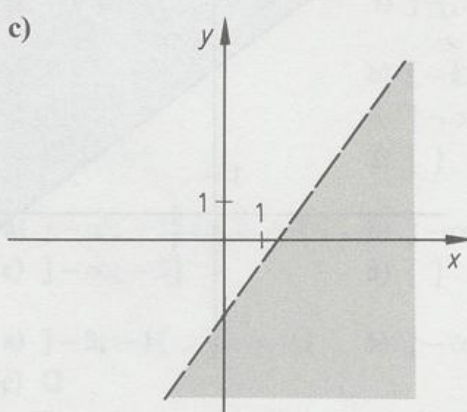
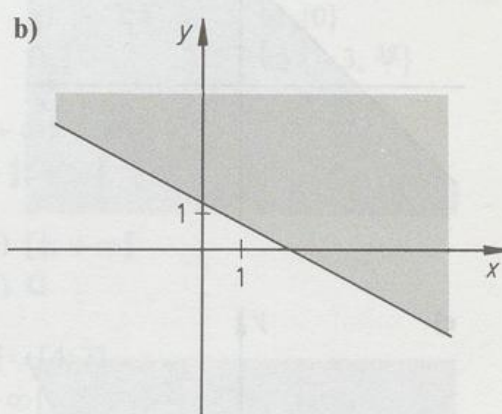
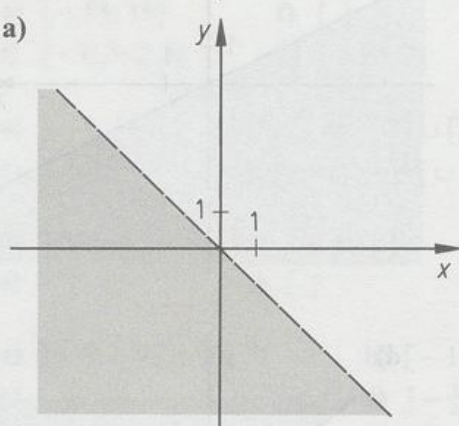


b)



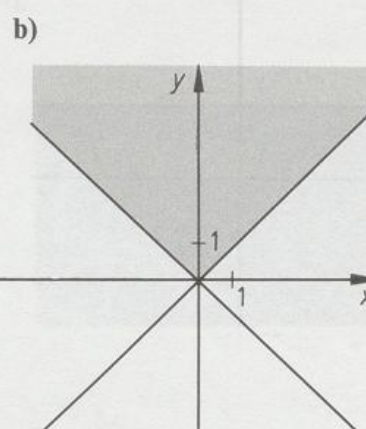
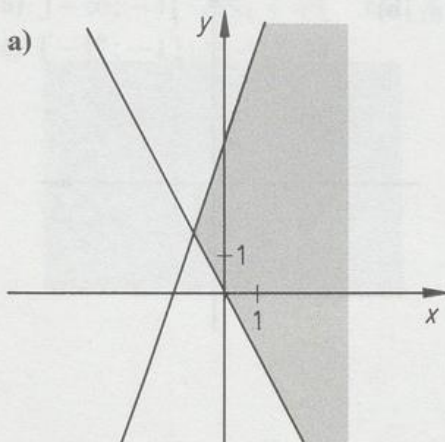


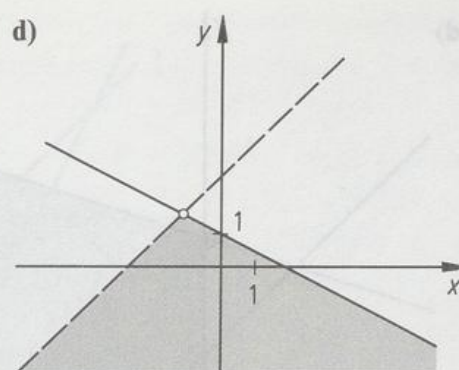
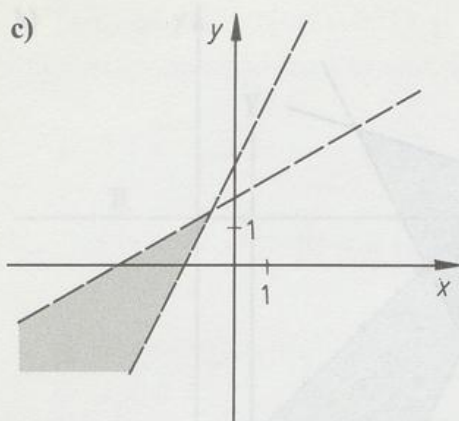
179/3. a)



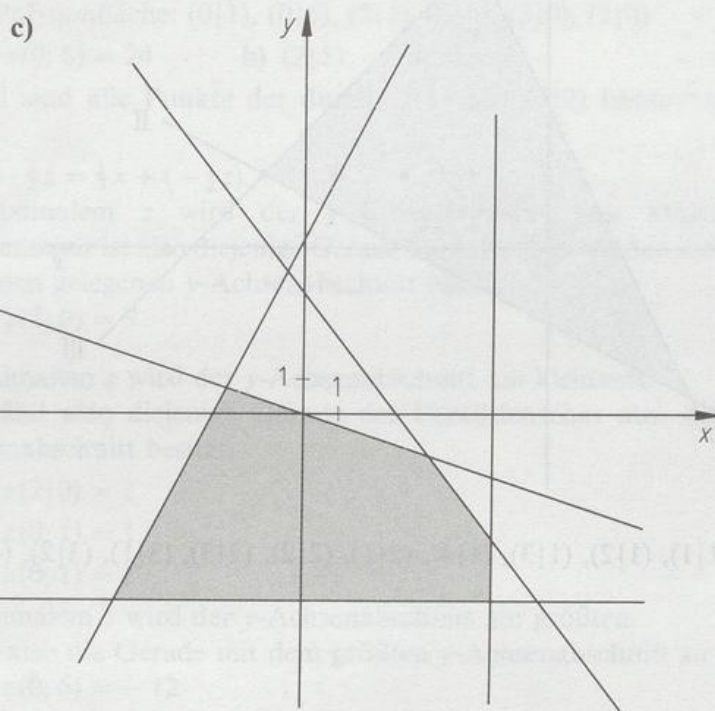
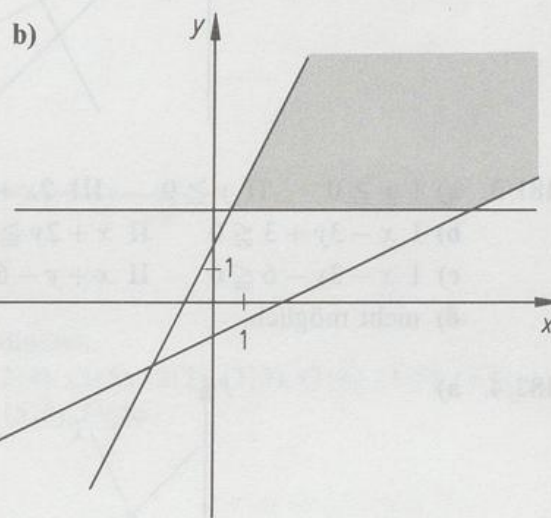
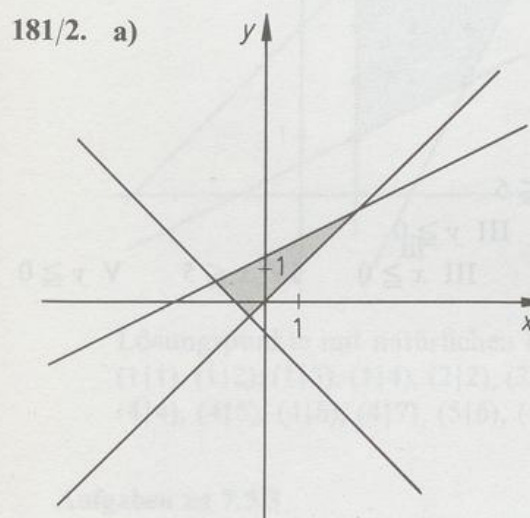
Aufgaben zu 7.5.2

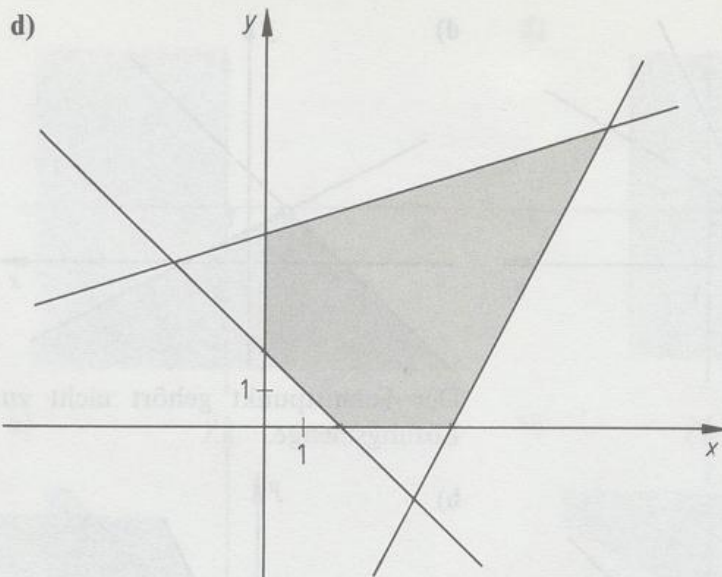
181/1. a)





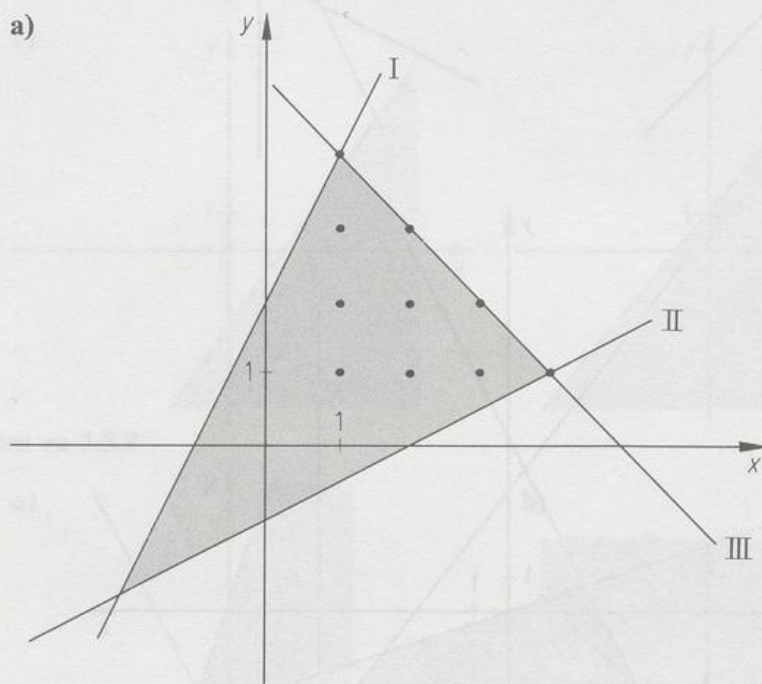
Der Schnittpunkt gehört nicht zur Lösungsmenge.



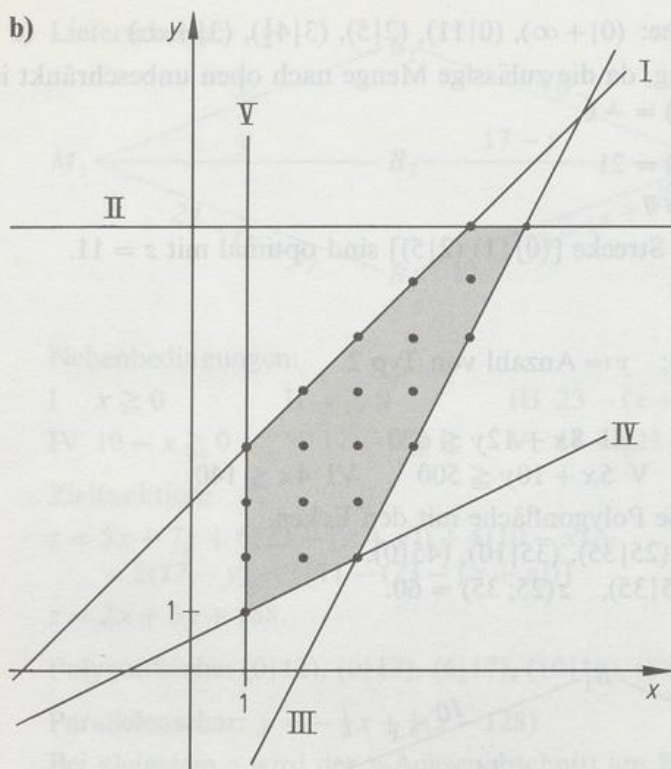


- 181/3. a) I $x \geq 0$ II $y \geq 0$ III $2x + 3y \leq 6$
 b) I $x - 3y + 3 \leq 0$ II $x + 2y \geq 2$ III $y \geq 0$
 c) I $x - 3y - 6 \leq 0$ II $x + y - 6 \leq 0$ III $x \geq 0$ IV $x \leq 5$ V $y \geq 0$
 d) nicht möglich.

182/4. a)



$$L = \{(1|1), (1|2), (1|3), (1|4), (2|1), (2|2), (2|3), (3|1), (3|2), (4|1)\}$$



Lösungspunkte mit natürlichen Koordinaten:

(1|1), (1|2), (1|3), (1|4), (2|2), (2|3), (2|4), (2|5), (3|2), (3|3), (3|4), (3|5), (3|6),
(4|4), (4|5), (4|6), (4|7), (5|6), (5|7), (5|8), (6|8)

Aufgaben zu 7.5.3

186/1. Zulässige Polygonfläche: (0|1), (0|6), (2|5), (3|2), (3|0), (2|0)

a) (0|6); $z(0; 6) = 24$

b) (2|5); $z(2; 5) = 7$

c) Optimal sind alle Punkte der durch (2|5) und (3|2) bestimmten Strecke mit $z = 11$.

d) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}x + (-\frac{1}{2}z)$.

Bei maximalem z wird der y -Achsenabschnitt am kleinsten. Aus der Parallelenschar ist also diejenige Gerade auszuwählen, die den kleinsten, d. h. den am tiefsten gelegenen y -Achsenabschnitt besitzt.

(3|0); $z(3; 0) = 9$

2. a) Bei minimalem z wird der y -Achsenabschnitt am kleinsten.

Man wählt also diejenige Gerade der Parallelenschar aus, die den kleinsten y -Achsenabschnitt besitzt.

(2|0); $z(2; 0) = 2$

b) (0|1); $z(0; 1) = 1$

c) (0|1); $z(0; 1) = 1$

d) Bei minimalem z wird der y -Achsenabschnitt am größten.

Hier ist also die Gerade mit dem größten y -Achsenabschnitt zu wählen.

(0|6); $z(0; 6) = -12$

187/3. Zulässige Polygonfläche: $(0|+\infty)$, $(0|11)$, $(2|5)$, $(3|4\frac{1}{2})$, $(3|+\infty)$

a) a, b, c keine Lösung, da die zulässige Menge nach oben unbeschränkt ist.

d) $(3|4\frac{1}{2})$; $z(3; 4\frac{1}{2}) = -6$

b) a) $(3|4\frac{1}{2})$; $z(3; 4\frac{1}{2}) = 21$

b) $(2|5)$; $z(2; 5) = 7$

c) Alle Punkte der Strecke $[(0|11) (2|5)]$ sind optimal mit $z = 11$.

d) keine Lösung

4. $x :=$ Anzahl von Typ 1; $y :=$ Anzahl von Typ 2.

$$z = x + y$$

$$\text{I } x \geq 0 \quad \text{II } y \geq 0 \quad \text{III } 8x + 12y \leq 620$$

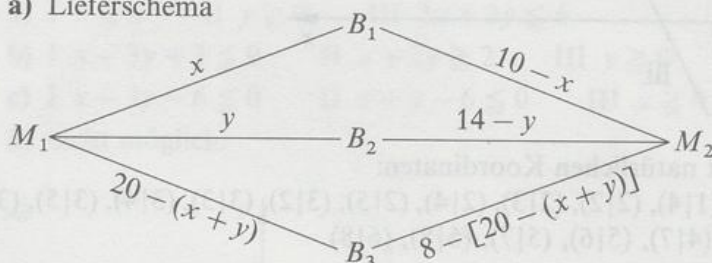
$$\text{IV } 10x + 4y \leq 390 \quad \text{V } 5x + 10y \leq 500 \quad \text{VI } 4x \leq 140$$

Zulässige Menge ist die Polygonfläche mit den Ecken

$(0|0)$, $(0|50)$, $(10|45)$, $(25|35)$, $(35|10)$, $(45|0)$.

Optimaler Punkt = $(25|35)$, $z(25; 35) = 60$.

5. a) Lieferschema



Nebenbedingungen:

$$\text{I } x \geq 0 \quad \text{II } y \geq 0 \quad \text{III } 20 - (x - y) \geq 0$$

$$\text{IV } 10 - x \geq 0 \quad \text{V } 14 - y \geq 0 \quad \text{VI } 8 - [20 - (x + y)] \geq 0$$

Zielfunktion:

$$z = 14x + 10y + 16(20 - (x + y)) + 4(10 - x) + 6(14 - y) + 8(8 - [20 - (x + y)])$$

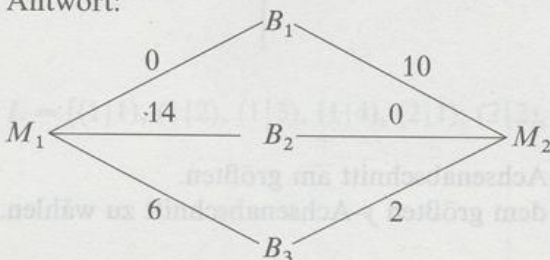
$$z = 2x - 4y + 348$$

Zulässige Menge ist die Polygonfläche $(0|12)$, $(0|14)$, $(6|14)$, $(10|10)$, $(10|2)$.

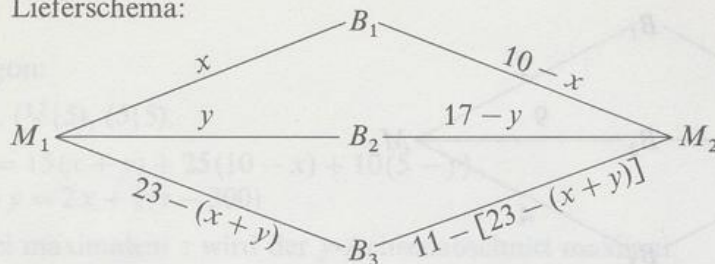
Parallelenschar $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(348 - z)$.

Bei kleinstem z wird der y -Achsenabschnitt am größten. Also ist $(0|14)$ optimaler Punkt mit $z(0; 14) = 292$.

Antwort:



b) Lieferschema:



Nebenbedingungen:

- I $x \geq 0$ II $y \geq 0$ III $23 - (x + y) \geq 0$
 IV $10 - x \geq 0$ V $17 - y \geq 0$ VI $11 - [23 - (x + y)] \geq 0$

Zielfunktion:

$$z = 5x + 7y + 6(23 - [x + y]) + 4(10 - x) + 2(17 - y) + 7[11 - (23 - [x + y])]$$

$$z = 2x + 6y + 188.$$

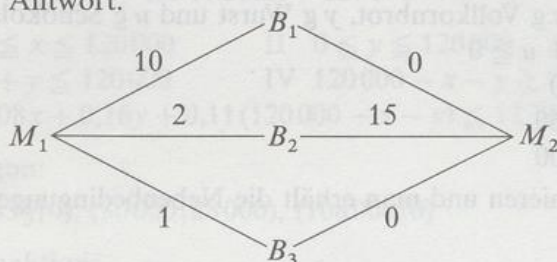
Polygonfläche: (0|12), (0|17), (6|17), (10|13), (10|12)

Parallelenschar: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}(z - 128)$

Bei kleinstem z wird der y -Achsenabschnitt am kleinsten.

Also ist (10|2) der optimale Punkt mit $z(10; 2) = 160$.

Antwort:

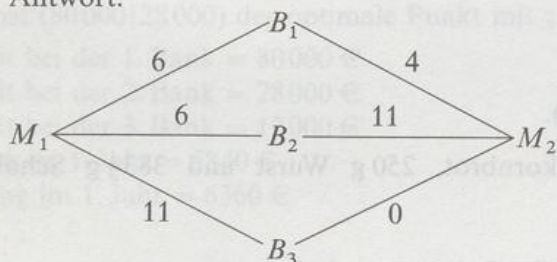


c) Die zusätzliche Nebenbedingung VII $y \geq x$ ergibt das Polygon

(0|12), (0|17), (6|17), (10|13), (10|10), (6|6).

Optimaler Punkt (6|6) mit $z(6; 6) = 176$.

Antwort:

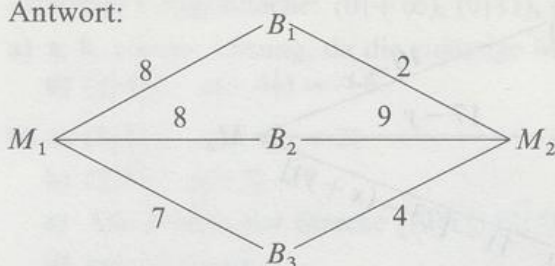


d) Die weitere Nebenbedingung VIII $x + 2y \geq 24$ ergibt das Polygon

(0|12), (0|17), (6|17), (10|13), (10|10), (8|8).

Optimaler Punkt (8|8) mit $z(8; 8) = 192$

Antwort:



188/6. Vom Müsli 1 werden x kg, vom Müsli 2 werden y kg hergestellt.

Nebenbedingungen:

$$\text{I } x \geq 0 \quad \text{II } y \geq 0 \quad \text{III } \frac{4}{15}x + \frac{2}{5}y \leq 210$$

$$\text{IV } \frac{5}{15}x + \frac{1}{5}y \leq 180 \quad \text{V } \frac{6}{15}x + \frac{2}{5}y \leq 240$$

Polygon:

$$(0|0), (0|525), (225|375), (450|150), (540|0).$$

$$\text{a) } z = 9x + 10y \Leftrightarrow y = -\frac{9}{10}x + \frac{1}{10}z$$

$$\text{Optimaler Punkt } (225|375) \text{ mit } z(225; 375) = 5775.$$

$$\text{b) } z = 12x + 10y \Leftrightarrow y = -1,2x + 0,1z$$

$$\text{Optimaler Punkt } (450|150) \text{ mit } z(450; 150) = 6900.$$

7. Die eiserne Ration enthält x g Vollkornbrot, y g Wurst und u g Schokolade.

$$\text{I } x \geq 0, \quad \text{II } y \geq 0 \quad \text{III } u \geq 0$$

$$\text{IV } 0,2x + 0,3y + 0,1u = 160$$

$$\text{V } 0,45x + 0,1y + 0,6u \geq 360$$

$$\text{VI } 0,05x + 0,2y + 0,1u \leq 100$$

Mittels IV lässt sich u eliminieren und man erhält die Nebenbedingungen

$$\text{V}' \quad 15x + 34y \leq 12000$$

$$\text{VI}' \quad 3x + 2y \leq 1200,$$

die das Polygon $(0|0)$, $(0|352\frac{16}{17})$, $(233\frac{1}{3}|250)$, $(400|0)$ bestimmen.

Zielfunktion:

$$z = x + y + u, \text{ mittels IV}$$

$$z = 1600 - x - 2y$$

Parallelenschar:

$$y = -\frac{1}{2}x + 800 - \frac{1}{2}z$$

$$\text{Optimaler Punkt } (233\frac{1}{3}|250).$$

Man benötigt $233\frac{1}{3}$ g Vollkornbrot, 250 g Wurst und $383\frac{1}{3}$ g Schokolade.
Gesamtgewicht $866\frac{2}{3}$ g.

8. Es werden x kg Nüsse und y kg Rosinen gemischt.

Nebenbedingungen:

$$\text{I } 0 \leq x \leq 10 \quad \text{II } 0 \leq y \leq 5$$

$$\text{III } 0,5(x + y) \leq y \quad \text{IV } 0,3(x + y) \leq x$$

Polygon:

$(0|0)$, $(\frac{15}{7}|5)$, $(5|5)$.

a) $z = 15(x + y) + 25(10 - x) + 10(5 - y)$
 $\Leftrightarrow y = 2x + \frac{1}{5}(z - 300)$

Bei maximalem z wird der y -Achsenabschnitt maximal.

Optimaler Punkt ist $(\frac{15}{7}|5)$ mit $z(\frac{15}{7}|5) = 303\frac{4}{7}$.

$2\frac{1}{7}$ kg Nüsse mit 5 kg Rosinen mischen, Erlös $303\frac{4}{7}$ €.

Die Mischung besteht zu 70 % aus Rosinen und zu 30 % aus Nüssen.

b) $z = 13,75(x + y) + 25(10 - x) + 10(5 - y)$
 $\Leftrightarrow y = 3x + \frac{4}{15}(z - 300)$

Optimaler Punkt ist $(0|0)$: Kein Studentenfutter herstellen!

c) $z = 14,5(x + y) + 25(10 - x) + 10(5 - y)$
 $\Leftrightarrow y = \frac{7}{3}x + \frac{2}{9}(z - 300)$

Optimal ist jeder Punkt der Strecke $[(0|0)(\frac{15}{7}|5)]$, also jede Mischung von Rosinen und Nüssen im Verhältnis 7 : 3, mit $z = 300$, d. h. 70 % Rosinen und 30 % Nüsse; Erlös 300 €.

9. x = Kredit bei der 1. Bank in €

y = Kredit bei der 2. Bank in €

Also Kredit bei der 3. Bank = $120\,000 - x - y$.

I $0 \leq x \leq 120\,000$

II $0 \leq y \leq 120\,000$

III $x + y \leq 120\,000$

IV $120\,000 - x - y \geq 12\,000$

V $0,08x + 0,16y + 0,11(120\,000 - x - y) \leq 12\,200$

Polygon:

$(33\,333\frac{1}{3}|0)$, $(80\,000|28\,000)$, $(108\,000|0)$

Zielfunktion:

$$z = 0,05x + 0,04y + 0,06(120\,000 - x - y)$$

Parallelenschar:

$$y = -\frac{1}{2}x + 360\,000 - 50z.$$

Bei minimalem z wird der y -Achsenabschnitt maximal.

Also ist $(80\,000|28\,000)$ der optimale Punkt mit $z = 5840$.

Kredit bei der 1. Bank = 80 000 €

Kredit bei der 2. Bank = 28 000 €

Kredit bei der 3. Bank = 12 000 €

Zinsen im 1. Jahr = 5840 €

Tilgung im 1. Jahr = 6360 €.

Polygon:

$$(0|0), (15|2), (2|2)$$

$$a) z = 15(x+y) + 25(10-x) + 10(2-y)$$

$$\Rightarrow y = 2x + \frac{1}{2}(2 - 200)$$

Bei maximalem z wird der y -Achsenabschnitt maximal.

Optimaler Punkt ist $(\frac{1}{2}|2)$ mit $z(15|2) = 303\frac{1}{2}$.

2,5 kg Nüsse mit 2 kg Rosinen mischen, Erlös 303,5 €.

Die Mischung besteht aus 10 kg Rosinen und 20 kg Nüssen.

$$b) z = 15,75(x+y) + 25(10-x) + 10(2-y)$$

$$\Rightarrow y = 2x + \frac{1}{2}(2 - 200)$$

Optimaler Punkt ist $(0|0)$. Kein Stückchen Nüsse.

$$c) z = 14,2(x+y) + 25(10-x) + 10(2-y)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(2 - 200)$$

Optimal ist jeder Punkt der Strecke $(0|0) \rightarrow (15|2)$, also jede Mischung von

Rosinen und Nüssen im Verhältnis 1 : 2, damit $z \approx 306$, d. h. 306 € Erlös.

und 30 € Nüsse, Erlös 306 €.

9. x = Kredit bei der 1. Bank in €

y = Kredit bei der 2. Bank in €

Also Kredit bei der 3. Bank = 120000 - x - y

Abzinsen z nach Formel $z = 0,08x + 0,1y + 0,11(120000 - x - y)$

$$I \quad 0 \leq x \leq 120000 \quad II \quad 0 \leq y \leq 120000$$

$$III \quad x + y \leq 120000 \quad IV \quad 120000 - x - y \leq 120000$$

$$V \quad 0,08x + 0,1y + 0,11(120000 - x - y) \leq 12200$$

$$VI \quad 0,01x + 0,02y + 0,03(120000 - x - y) \leq 1200$$

Polygon:

$$(0|0), (12000|12000), (10000|0)$$

Zielfunktion:

$$z = 0,08x + 0,1y + 0,11(120000 - x - y)$$

Parallelverschiebung:

$$y = -\frac{1}{2}x + 360000 - 200$$

Bei minimalem z wird der y -Achsenabschnitt maximal.

Also ist $(80000|36000)$ der optimale Punkt mit $z = 2840$.

Kredit bei der 1. Bank = 80000 €

Kredit bei der 2. Bank = 36000 €

Kredit bei der 3. Bank = 12000 €

Zinssumme 1. Jahr = 2840 €

Übung im 1. Jahr = 6360 €

10. x = Anzahl der y -Achsenabschnitt maximal

Nebenbedingung:

$$I \quad 2x + 5y \leq 10$$

$$II \quad 0,5x + 0,2y \leq 1$$

$$III \quad x \geq 0, y \geq 0$$

ISBN 3-486-02648-8



9 783486 026481

Bestell-Nr. 02648-8

