



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 2000

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83544](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83544)

Barth · Federle · Haller

Algebra

7

Lösungen



Oldenbourg

Algebra

7

Lösungen

Friedrich Barth · Reinhold Federle

Rudolf Haller

Oldenbourg

Das Werk AL-CHARIZMI hatte keinen Titel. Spätere Gelehrte nannten es so, wie es von AL-CHARIZMI im Vorwort beschrieben wurde.

Zur Aussprache und Schreibung: Das s in MUSA ist stimmlos, das z in CHARIZMI ist ein stimmhaftes s. – Statt CHARIZMI findet man auch die Schreibweisen CHWARIZMI, HWARIZMI und HWARAZMI.

Die Übersetzung des arabischen Textes verdanken wir Herrn Prof. Dr. P. KUNITZSCH, München.

Das Papier ist aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff hergestellt, ist säurefrei und recyclingfähig.

© 1998 Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH, München
www.oldenbourg-schulbuchverlag.de

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt.
Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen
Fällen bedarf deshalb der schriftlichen Einwilligung des Verlags.

4., verbesserte Auflage 2000 R

Druck 04

Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Drucks.

Alle Drucke dieser Auflage sind untereinander unverändert
und im Unterricht nebeneinander verwendbar.

Zeichnungen: Eduard Böhm

Umschlag: Gert Krumbacher

Gesamtherstellung: Tutte Druckerei GmbH, Salzweg-Passau

ISBN 3-486-02645-3

Und darin folgt darauf eine Einführung in das Rechnen, dann das Buch der Korrespondenz über al-dschabr und al-muqabala und dann die hinreichende Einführung in die Grundlagen von al-dschabr und al-muqabala.

Buch des al-Charizmi

mit seinen Figuren. Werk des sehr verehrungswürdigen Scheichs Abu Abdallah Muhammad ibn Musa al-Charizmi – Gott habe ihn selig und belohne ihn und erbarme sich seiner.

- ∴ [unleserlich] seine Sünden und seine Verfehlungen. Der Diener, ∴.
- ∴ der Gottes bedarf, der durch ihn bedürfnislos wird, Chatab ibn Muhammad ibn Ali ∴.
- ∴ ibn Husain ibn Ali ibn Muhammad ibn Ali ibn Ahmad ibn ∴.
- ∴ Dscha'far ibn al-Hasan ibn Jahja ibn Ibrahim ibn Muhammad ibn ∴.
- ∴ Ibrahim ibn Ahmad ibn al-Mughira ibn Umran ibn Asim ibn ∴.
- ∴ al-Walid ibn Utba ibn Rabi'a ibn Abd Schams ibn ∴.

▲ Abd Manaf. ▲

- ∴ Möge Gott ihm nützen mit rechtem Wissen und dessen rechtem

▲ Gebrauch. ▲

- ▲ Unser Genüge ist Gott, und Er ist der beste Sachwalter. ▲

Es gelangte an den Sklaven der Familie Muhammads, Gottes Segnungen über sie,
Ali [unleserlich] auf dem Wege der Schenkung von seinem Besitzer
... [unleserlich] ...

Und darin ist die Einführung von al-Murtadschifi, und darin ist das Buch der Korrespondenz über al-dschabr und al-muqabala, und darin ist die hinreichende Einführung in al-dschabr und al-muqabala.

Übertragung des Textes von GERHARD VON CREMONA *

Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra et almuchabala incipit.

Hic post laudem dei et ipsius exaltationem inquit: postquam illud quod ad computationem est necessarium consideravi, reperi totum illud numerum fore. Omnemque numerum ab uno compositum esse inveni. Unus itaque intra omnem consistit numerum. Et inveni omne quod ex numeris verbis exprimitur esse quod unus ad decem pertransit. Decem quoque ab uno progreditur, qui postea duplicatus et triplicatus et cetera quemadmodum fit de uno, fiunt ex eo viginti et triginta ceteri usque quo compleatur centum. Deinde duplicatur centum et triplicatur quemadmodum ex decem, et fiunt ex eo ducenta et trecenta, et sic usque ad mille. Post hoc similiter reiteratur mille apud unumquemque articulum usque ad id quod comprehendi potest de numeris ultime: deinde reperi numeros qui sunt necessarii in computatione algebre et almuchabale secundum tres modos fore. Qui sunt radicum et census, et numeri simplicis non relati ad radicem nec ad censum. Radix vero que est unus eorum, est quicquid in se multiplicatur ab uno, et quod est super ipsum ex numeris, et quod est preter eum ex fractionibus. Census autem est quicquid aggregatur ex radice in se multiplicata. Sic numerus simplex est quicquid ex numeris verbis exprimitur absque proportionem ejus ad radicem et ad censum. Ex his igitur tribus modis, sunt qui se ad invicem equantur. Quod est sicut si dicas: census equatur radicibus, et census equatur numero, et radices equantur numero. Census autem qui radicibus equatur est ac si dicas: census equatur quinque radicibus. Radix ergo census est quinque. Et census est 25^{que}. Ipse namque quinque suis radicibus equalis existit. Et sicut si dicas: tertia census equatur 4^{or} radicibus. Totus igitur census est 12 radices qui est centum 44^{or}. Et sicut si dicas, 5^{que} census equantur decem radicibus. Unus igitur census duabus equatur radicibus. Ergo radix census est duo, et census est quattuor: similiter quoque quod fuerit majus censu aut minus ad unum reducetur censum. Et eodem modo fit ex eo quod ipsi equatur ex radicibus. Census autem qui numero equatur, est sicut cum dicitur: census equatur novem.

* Das Original der GERHARD-Übersetzung ist nicht erhalten. Die älteste erhaltene Abschrift stammt aus dem Anfang des 13. Jh.s aus Südfrankreich oder Italien und liegt heute in der Bibliothèque Nationale in Paris (lat. 9335). Der Text auf fol. 65r–69v des Codex Mm. 2.18 aus Cambridge ist eine sehr gute Kopie davon. Den gesamten Codex, der aus mehreren mathematischen Abhandlungen besteht, ließ Frater GEOFFREY DE WIGHTON vom Franziskanerorden [um 1360 in Frankreich] schreiben und bezahlte dafür mit Almosen, die er von seinen Freunden erhalten hatte. So steht es nämlich auf folium 1r: »Iste liber est Fratris Galfridi de Wyghtone quem fecit scribi de elemosinis amicorum suorum.«

Übersetzung*

Das Buch Muhammads des Choresmiers, Sohn des Moses, über algebra und almuchabala beginnt hier.

Dieser, nach dem Lob und Preis Gottes, spricht so: Nachdem ich überlegt hatte, was zum Rechnen nötig ist, entdeckte ich, daß alles, was man braucht, die Zahl ist. Und ich fand, daß jede Zahl aus der Eins zusammengesetzt ist. Und so ist die Eins in jeder Zahl enthalten. Des weiteren habe ich gefunden, daß alles, was an Zahlen durch Wörter ausgedrückt wird, das ist, was von eins bis zehn geht. Auch die Zehn geht von der Eins aus; sie wird dann verdoppelt und verdreifacht usw., wie es mit der Eins geschieht, so daß daraus die Zwanzig und die Dreißig [und] die übrigen entstehen, bis hundert voll ist. Daraufhin wird hundert verdoppelt und verdreifacht auf dieselbe Art wie zehn, und es entstehen daraus zweihundert und dreihundert, und so bis tausend. Dann wird tausend in der gleichen Weise wiederholt bei jeder Stufe bis dahin, was als das Äußerste der Zahlen erfaßt werden kann. Ferner habe ich entdeckt, daß die Zahlen, deren man beim Rechnen gemäß algebra und almuchabala bedarf, von drei Arten sind. Es sind Wurzeln, Vermögen und reine Zahlen, die weder zur Wurzel noch zum Vermögen eine Beziehung haben¹. Die Wurzel nun, die eine von diesen ist, ist alles ab der Eins, was sich mit sich selbst multiplizieren läßt, sowohl das, was über ihr ist von den Zahlen, wie auch das, was unter ihr ist von den Brüchen. Vermögen aber ist alles, was sich ansammelt aus der Wurzel, wenn diese mit sich selbst multipliziert worden ist. Demnach ist die reine Zahl alles, was von den Zahlen ohne jede Beziehung zu einer Wurzel und zu einem Vermögen ausgedrückt werden kann. Unter diesen drei Arten gibt es nun welche, die einander gleich sind. Dafür kannst du auch sagen: »Ein Vermögen ist Wurzeln gleich, und ein Vermögen ist einer Zahl gleich, und Wurzeln sind einer Zahl gleich.«² Ein Vermögen aber, das Wurzeln gleich ist, das ist so, wie wenn du z. B. sagst: »Ein Vermögen ist fünf Wurzeln gleich.« Dann ist die Wurzel des Vermögens fünf. Und das Vermögen ist 25. Es ist nämlich dann fünfmal der Wurzel gleich³. Oder so, wie wenn du sagst: »Ein Drittel eines Vermögens ist 4 Wurzeln gleich.« Dann ist das ganze Vermögen 12 Wurzeln, d. h., es beträgt hundert und 44.⁴ Oder so, wie wenn du sagst: »5 Vermögen sind zehn Wurzeln gleich.« Dann ist ein Vermögen zwei Wurzeln gleich. Also ist die Wurzel des Vermögens zwei, und das Vermögen ist vier.⁵ In entsprechender Weise wird so auf das bloße Vermögen zurückgeführt, wenn mehr vom Vermögen oder weniger gegeben ist. Und auf dieselbe Art wird daraus gewonnen, was ihm selbst von den Wurzeln gleich ist. Nun aber ein Vermögen, das einer Zahl gleich ist, das ist, wie wenn man sagt: »Ein Vermögen ist gleich neun.«⁶

* Wir bedanken uns bei Herrn Dr. Günter BERNT, München, für die Korrektur unserer Übersetzung.

¹ Wurzel ist gewissermaßen die Unbekannte; Vermögen (arabisch *mal*, lateinisch *census*) ist das Quadrat der Unbekannten.

² Es geht um die Gleichungstypen $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$ und $ax = c$.

³ $x^2 = 5x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$

⁴ $\frac{1}{3}x^2 = 4x \Rightarrow x^2 = 12x \Rightarrow x^2 = 144$

⁵ $5x^2 = 10x \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

⁶ $x^2 = 9$

Lösungen

Aufgaben zu 1.2

17/1. $A = l \cdot b$ (oder $A = a \cdot b$)

2. $V = a^3$

3. a) $S = 6a^2$

b) $6 \text{ cm}^2, 24 \text{ cm}^2, 96 \text{ cm}^2, 384 \text{ cm}^2$. Zur doppelten Kantenlänge gehört (anscheinend) die vierfache Oberfläche.

4. a) $S = 2 \cdot (ab + bc + ac)$

b) $S_1 = 62 \text{ cm}^2; S_2 = 248 \text{ dm}^2; S_3 = 21062,5 \text{ cm}^2$.

18/5. a) $S : S' = 1 : 4$ b) $V : V' = 1 : 8$

6. a) Stablänge $\geq 12a$

b) $l = 4 \cdot (a + b + c); l_1 = 40 \text{ cm}; l_2 = 80 \text{ dm}; l_3 = 1705 \text{ cm}$.

7. Kommutativgesetz der Multiplikation

8. a) z.B. $(\triangle + \square) + \circ = \triangle + (\square + \circ)$ (für alle $\triangle, \square, \circ \in \mathbb{B}$)

b) z.B. $(\triangle + \square) \cdot \circ = \triangle \cdot \circ + \square \cdot \circ$ (für alle $\triangle, \square, \circ \in \mathbb{B}$)

9. a) Ja; $0 \cdot 2 = 0^2 = 0; 2 \cdot 2 = 2^2 = 4$.

b) z.B. mit $a = 1$ erhält er $1 \cdot 2 \neq 1^2 = 1$.

10. a)

a	b	$(a+b) \cdot (a-b)$	$a^2 - b^2$
5	2	21	21
14,5	5,7	177,76	177,76
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{77}{144}$	$\frac{77}{144}$
1000	900	190000	190000

b) Es ist möglich, aber noch nicht sicher, daß die Gleichung gilt.

11. a) $x = 9 \cdot a$ ($x = \frac{3}{4} \cdot a; x = 4,5 \cdot a$)

b) $y = u + 15$

c) $z = v - 12,3$

d) $s = u + v$

e) $d = u - v$

f) $x = p \cdot q - 10$

g) $c = 5 \cdot (a + b)$

h) $u : 2 = \frac{4}{5} \cdot v + 3$

19/12. a) Wenn man zu x die Zahl 12 addiert, erhält man das Doppelte von y .
(Oder: x ist um 12 kleiner als das Doppelte von y .)

b) Das Fünffache von a ist gleich dem 3. Teil von b .

c) z ist um 1 kleiner als das Produkt von u und v .

d) Das Produkt aus der Summe und der Differenz der Zahlen p und q hat den Wert 1.

19/13. $y = 5 \cdot x$

14. $z = \frac{3}{12} \cdot n = \frac{1}{4} \cdot n$

15. $c = a \cdot b$

16. a) Z Zins, K Kapital, p Prozentsatz, t Zahl der Zinstage

b) $Z = 980 \text{ DM}$

17. a) $z = 1, 3, 5, \dots$; alle ungeraden Zahlen.

b) $n \in \{4, 5, 6, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$.

18. $z = 3 \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}$.

19. a) $z = 4 \cdot n$ b) $z = 7 \cdot n$ c) $z = 12 \cdot n; \quad n \in \mathbb{N}$

20. $x = 10, 20, 30, \dots$; 1, 2, 5 und 10 sind die gemeinsamen Teiler.

21. a) Jeder Summand ist durch 2 teilbar, daher auch die Summe.

b) Einer der Faktoren ist gerade, also auch das Produkt.

22. a) $z = 4 \cdot n + 1, \quad n \in \mathbb{N}_0$ b) $z = 7 \cdot n + 5, \quad n \in \mathbb{N}_0$ c) $z = 10 \cdot n + 7, \quad n \in \mathbb{N}_0$

23. $10 \cdot n + 3 \quad (10 \cdot n; 10 \cdot n + 8)$

20/24. $y = 100 \cdot n + 50 + m; \quad n \in \{1, 2, \dots, 9\}, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

25. Man erhält: 5, 7, 11, 17, also Primzahlen.

Nein, für $n = 5$ erhält man $25 = 5 \cdot 5$, für $n = 6$ erhält man $35 = 5 \cdot 7$.

26. Man erhält: 11, 13, 17, 23, 31, 41, 53, 67, 89, 101.

Nein, $n = 10$ (11) ergibt keine Primzahl, nämlich $121 = 11 \cdot 11$ ($143 = 11 \cdot 13$).27. a) $\frac{2}{3}$ ist eine Bruchzahl (w); b) ... (f); c) ... (w);d) ... (w);e) ... (w);f) ... (f).

28. $d = a \cdot b, \quad e = b \cdot c, \quad f = a \cdot c,$

$g = a \cdot e = a \cdot (b \cdot c), \quad h = b \cdot f = b \cdot (a \cdot c), \quad i = c \cdot d = c \cdot (a \cdot b).$

Aus dem Kommutativ- und Assoziativgesetz der Multiplikation folgt:

$g = h = i.$

29. a) $\frac{b+g}{g} \cdot \frac{b+g}{b} = \frac{b+g}{g} + \frac{b+g}{b}$

b) $a = 5 = 1 + 4 \Rightarrow b = 1, \quad g = 4$

$LS = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{1} = \frac{25}{4}; \quad RS = \frac{5}{4} + \frac{5}{1} = \frac{25}{4}$

$a = 2 + 3 \Rightarrow b = 2, \quad g = 3$

$LS = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{6}; \quad RS = \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{25}{6}$

c) $a = 5 = 1\frac{2}{3} + 3\frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{5}{3}, \quad g = \frac{10}{3}$

$LS = \frac{5}{\frac{10}{3}} \cdot \frac{5}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}; \quad RS = \frac{5}{\frac{10}{3}} + \frac{5}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}.$

Aufgaben zu 1.3

- 25/1. a) Die Zahlen 3, 5 und 10 sind Terme (Regel 1). Nach Regel 3 sind daher auch $3 \cdot 5$ und $10 \cdot 10$ Terme. Damit ist $3 \cdot 5 - 10 \cdot 10$ ebenfalls ein Term (Regel 3).
b), c), d) analog zu a)
e) Die Variablen s und t sind Terme (Regel 2). Nach Regel 3 sind daher auch $s + t$ und $s - t$ Terme. Damit ist $(s + t) \cdot (s - t)$ ebenfalls ein Term (Regel 3).
f) analog zu e)
2. a) Term b) Term (!) c) kein Term d) kein Term e) Term (!)
f) Term g) kein Term h) kein Term ($\pm$!) i) Term
3. a) $(x + 2) + (3 - y)$ b) $(3 - y) - (x + 2)$ c) $(x + 2)(3 - y)$
d) $\frac{x + 2}{3 - y}$ e) $2(x + 2)$ f) $1 : (3 - y)$ g) $2 - (x + 2)(3 - y)$
h) $(x + 2) : ((3 - y) : (x + 2))$ i) $(x + 2) : (3 - y) : (x + 2)$
j) $(3 - y) : ((x + 2) : (3 - y))$ k) $(x + 2) - ((3 - y) - (x + 2))$
l) $1 : (x + 2) + 1 : (3 - y)$
4. a) $2 + ab$ b) $2 : (ab)$ c) $2ab$ d) $7 \cdot 5(x + 3)$
e) $7x(x + 3)$ f) $(x - 2)(x + 3) \cdot 7$ g) $\frac{10 - x \cdot 5}{3y} : 1\frac{1}{2}$
h) $\left(5y - \frac{9}{x - 1}\right) \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}$ i) $ac : b + a : \frac{b}{2c}$
k) $u : (5 : v) + 1$ l) $u : (5 : v + 1)$
5. a) $(5x + 1) : 3$ b) $5,7 : (u - v)$ c) $(4x - 7) : (3y)$
d) $5x : (3y)$ e) $(2x - 10) : (3 + y)$ f) $2a : b + b : 3$
g) $(5c + 1) : (8d) - 2c : d$
6. a) 100 b) 1 c) $\frac{1}{25} (= 0,04)$
- 26/7. a) $\frac{1}{6}$ b) 24 c) $\frac{8}{3} (= 2\frac{2}{3})$
8. a) $\frac{1}{4}$ b) 1 c) 4 d) 16
9. a) Der Term ist eine Differenz. Der Minuend ist ein Produkt mit der Klammer als 1. und 5 als 2. Faktor; in der Klammer steht die Summe aus x und y . Der Subtrahend ist 3.
b) Der Term ist ein Produkt. Sein erster Faktor ist die Summe aus x und y , sein zweiter Faktor die Differenz aus 5 und 3.
c) Der Term ist eine Summe. Ihr erster Summand heißt x ; der zweite Summand ist die Differenz mit dem Produkt von y und 5 als Minuend und der Zahl 3 als Subtrahend.
d) Der Term ist eine Summe. Ihr erster Summand heißt x ; der zweite Summand ist das Produkt aus y als erstem und der Differenz von 5 und 3 als zweitem Faktor.

- e) Der Term ist eine Differenz. Ihr Minuend ist die Summe aus x und dem Produkt von y und 5 ; der Subtrahend ist die Zahl 3 .
- f) Der Term ist eine Differenz. Ihr Minuend ist die Differenz aus u und v ; der Subtrahend heißt w .
- g) Der Term ist eine Differenz. Ihr Minuend heißt u , der Subtrahend ist die Differenz aus v und w .
- h) Der Term ist ein Quotient. Sein Dividend ist die Zahl 1 . Sein Divisor ist der Term in der eckigen Klammer; er ist das Produkt aus a als erstem Faktor und dem Quotienten von b und c als zweitem Faktor.
- i) Der Term ist ein Produkt. Sein erster Faktor ist der Quotient aus 1 und a , sein zweiter Faktor der Quotient aus b und c .
- j) Der Term ist ein Quotient. Sein Divisor heißt c . Der in der eckigen Klammer stehende Dividend ist selbst wieder ein Quotient, dessen Dividend die Zahl 1 und dessen Divisor das Produkt aus a und b ist.
- k) Der Term ist eine Summe. Ihr erster Summand ist der Bruch mit dem Zähler x und dem Nenner 3 , der zweite Summand ist der Kehrwert des ersten.
- l) Der Term ist ein Produkt. Sein erster Faktor ist die Summe aus dem Bruch $\frac{x}{3}$ und seinem Kehrwert; der zweite Faktor ist die Zahl 1 .

26/10. a) $z + 7y$ b) $uv - (u + v)$ c) $\frac{\frac{3}{7}}{5p + q : 3}$
 d) $(15 - t) \cdot (z : 5)$ e) $xy : (x + y)$ f) $b : (7(12 - 3a) + 1)$

11. a) $\left(7 - \frac{x}{2}\right)(x + 1)$ b) $10 : (2 - 3(x + 5))$

Aufgaben zu 1.4

- 29/1. a) 437 b) $-$ c) $-$ d) 0 e) $\frac{7}{30}$ f) $-$
2. a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{1}{32}$ c) $-$ d) $1\frac{25}{26}$ e) $-$ f) 549 g) $-$
3. a) $-; -; 0; 15; 99$ b) $2; 28; 84; 170; 286$ c) $-; -; 1; 3; 6$
- 30/4. a) $\mathbb{N}_0$ b) $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{N}_0$ d) $\{3, 4, 5, \dots\}$
 e) $\{0, 1, 2, 3\}$ f) $\{0, 1, 2\}$ g) $\mathbb{N}_0$
 h) $\{3, 4, 5, \dots\}$ i) $\{0, 1, 2\}$
5. a) $\mathbb{B}$ b) $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ c) $\mathbb{B}$ d) $\{x | x \geq 3\}$
 e) $\{x | x \leq 3\}$ f) $\{x | x < 3\}$ g) $\mathbb{B}$
 h) $\{x | x \geq 2,5\}$ i) $\{x | x \leq 2,5\}$
6. a) $\mathbb{B}$ b) $\{y | y \geq 1\}$ c) $\{y | y \geq 3\}$ d) $\{y | y \geq 3\}$
 e) $\{y | y \leq 1\}$ f) $\{\}$ g) $\{y | y \leq 1\}$ h) $\{y | 1 \leq y \leq 3\}$

30/7. a) $\{x|x > 2\}$ b) $\{x|x > 0\}$ c) $\{\}$ d) $\{x|1 < x < 4\}$

8. a) 5 b) 5 c) - d) 0 e) 0

9. a) 35 b) - c) 0 d) - e) $\frac{124}{225}$

10. a) $D_x = \{x|x \geq 1\}$; b) $D_y = \{y|y \geq \frac{2}{3}\}$

Aufgaben zu 2.1

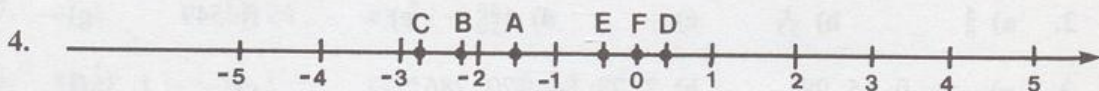
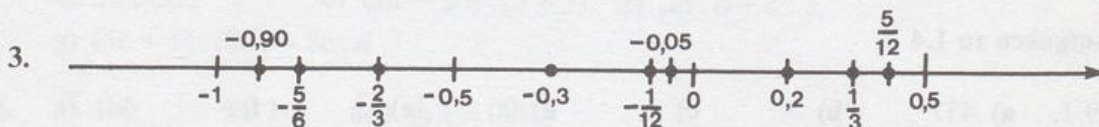
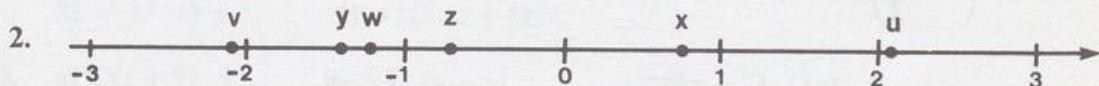
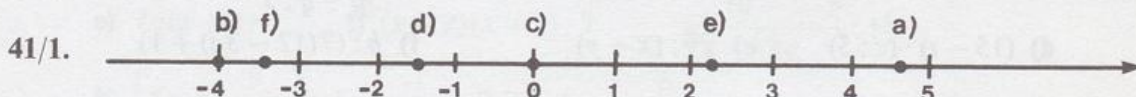
38/1. a) -7°C b) $-0,5^\circ\text{C}$ c) 8°C

2. 170,60 DM

3. a) Die Kattara-Senke liegt um 109 m tiefer als die Oase Siwa.

b) Man muß beim Aufstieg einen Höhenunterschied von 95 m, beim Abstieg einen Höhenunterschied von 204 m überwinden.

Aufgaben zu 2.2



a) -1,5 b) -2,2 c) $-2\frac{3}{4}$ d) 0,4 e) -0,4 f) 0

5. a) leere Menge, $\emptyset$

b) Menge aller positiven oder negativen rationalen Zahlen, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$

c) Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}$

d) Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}$

e) Menge der nicht-negativen rationalen Zahlen, $\mathbb{Q}_0^+$

f) Menge der nicht-negativen rationalen Zahlen, $\mathbb{Q}_0^+$

g) Menge der nicht-positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}_0^-$

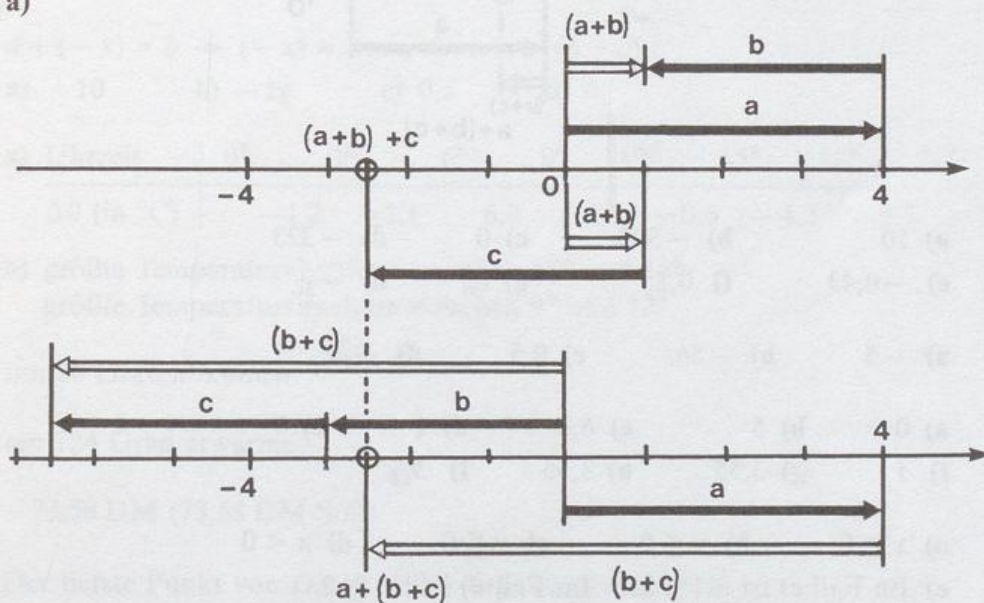
h) Menge mit dem einzigen Element 0, $\{0\}$

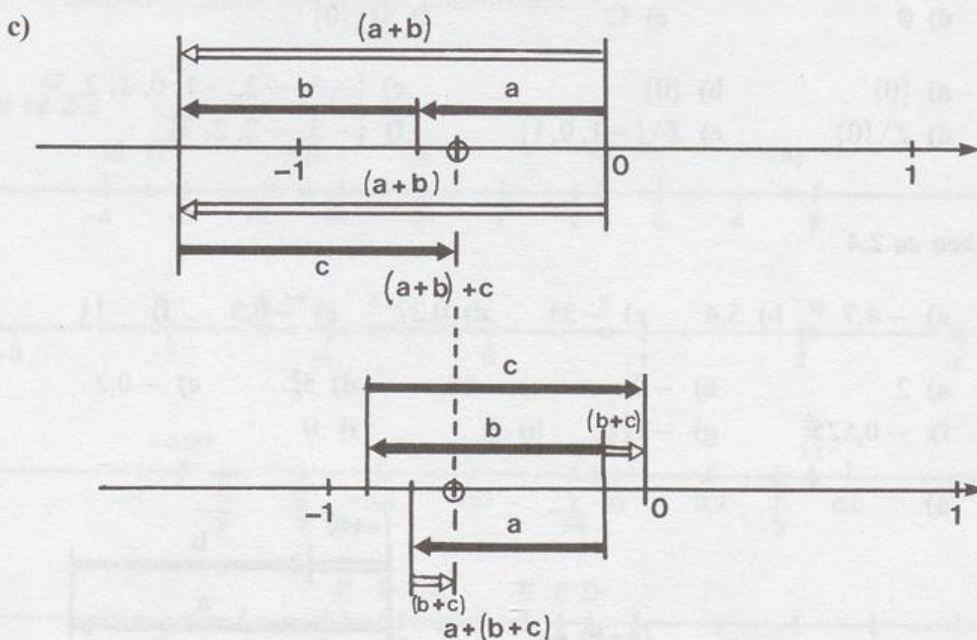
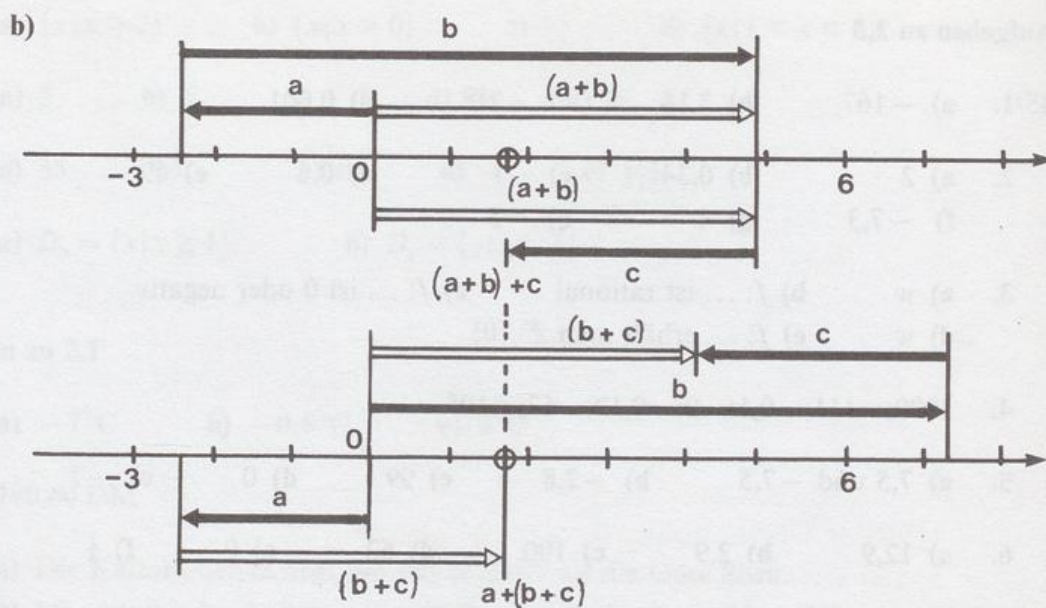
Aufgaben zu 2.3

- 45/1. a) -167 b) $3,14$ c) $-2\frac{10}{11}$ d) $0,001$
2. a) 2 b) $0,34$ c) -1 d) $0,6$ e) 49
 f) $-7,3$ g) 4 h) -5
3. a) w b) $f: \dots$ ist rational c) $f: \dots$ ist 0 oder negativ
 d) w e) $f: \dots$ erhält man $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$
4. $1000; 111; 0,1; 0; 0,12; 63; 10^6$.
5. a) $7,5$ und $-7,5$ b) $-2,8$ c) 99 d) 0 e) -7
6. a) $12,9$ b) $2,9$ c) 100 d) 62 e) 0 f) $\frac{1}{4}$
7. a) $\{-0,5; 0,5\}$ b) $\{-7; 7\}$ c) $\{0\}$
 d) $\emptyset$ e) $\mathbb{Q}$ f) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$
8. a) $\{0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 d) $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e) $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ f) $\{-3, -2, 2, 3\}$

Aufgaben zu 2.4

- 53/1. a) $-4,7$ b) $5,4$ c) -33 d) $0,27$ e) $-0,3$ f) $-1\frac{1}{3}$
2. a) 2 b) -2 c) -11 d) $5\frac{5}{6}$ e) $-0,2$
 f) $-0,525$ g) $-1\frac{23}{45}$ h) $\frac{1}{14}$ i) 0
3. a)





- 53/4. a) 10 b) -300 c) 0 d) -323
 e) -0,43 f) 0,25 g) $2\frac{1}{6}$ h) $-\frac{1}{30}$

- 54/5. a) -5 b) -56 c) 0,5 d) $-\frac{37}{84}$

6. a) 0 b) 5 c) 6,4 d) 1 e) 7
 f) 1 g) 3,55 h) 3,55 i) $3\frac{1}{18}$

7. a) $x \geq 0$ b) $x \leq 0$ c) $x \leq 0$ d) $x < 0$
 e) Im Fall c) ist $|x| \leq 2$. Im Fall d) ist $|x| \geq 2$.

54/8. Die Vorzeichen von x und y sind

- a) gleich b) verschieden c) verschieden d) verschieden

- 58/1. a) -901 b) -1099 c) 901 d) $-2,7$ e) $1,05$
 f) $-1,25$ g) $-\frac{1}{40} (= -0,025)$ h) $8\frac{2}{21}$ i) $-3\frac{39}{55}$

2. a)

1. Fall: $a - b$ ist positiv und $|a - b| = |a| + |b|$, also $a - b = |a| + |b|$
2. Fall: $a - b$ ist negativ und $|a - b| = |a| + |b|$, also $a - b = -(|a| + |b|)$
3. Fall: $a - b$ ist positiv und $|a - b| = |a| - |b|$, also $a - b = |a| - |b|$
4. Fall: $a - b$ ist negativ und $|a - b| = |b| - |a|$, also $a - b = -(|b| - |a|)$
5. Fall: $a - b$ ist negativ und $|a - b| = |a| - |b|$, also $a - b = -(|a| - |b|)$
6. Fall: $a - b$ ist positiv und $|a - b| = |b| - |a|$, also $a - b = |b| - |a|$

b) Zwei Zahlen mit *verschiedenen Vorzeichen* werden subtrahiert, indem man ihre Beträge addiert und dieser Summe das Vorzeichen des Minuenden gibt.

Zwei Zahlen mit *gleichen Vorzeichen* werden subtrahiert, indem man vom größeren Betrag den kleineren abzieht und dieser Differenz das

$\left\{ \begin{array}{l} \text{gleiche} \\ \text{entgegengesetzte} \end{array} \right\}$ Vorzeichen (wie Minuend und Subtrahend) gibt, falls der Minuend den $\left\{ \begin{array}{l} \text{größeren} \\ \text{kleineren} \end{array} \right\}$ Betrag hat.

3. $x =$ a) -2 b) 4 c) -4 d) 2 e) $-1,2$
 f) $4,2$ g) $-4,2$ h) $1,2$ i) $-3\frac{1}{6}$ k) $-11\frac{1}{4}$ l) $777,77$

4. a) -10 b) -15 c) -152 d) 1 e) $-33\frac{71}{72}$ f) $8\frac{5}{6}$

5. a) -400 b) 0 c) $4,257$ d) $-1\frac{43}{180}$

59/6. $x + (-a) = b \Leftrightarrow x = b - (-a) = b + a$

- a) 2 b) $51,3$ c) $-\frac{34}{45}$ d) -1 e) -7 f) $6\frac{1}{18}$

7. $a + (-x) = b \Leftrightarrow (-x) = b - a \Leftrightarrow x = -(b - a)$

- a) -10 b) $-1\frac{7}{8}$ c) $0,5$ d) 0

8. a)	Uhrzeit	0^h	3^h	6^h	9^h	12^h	15^h	18^h	21^h	24^h
	$\Delta\vartheta$ (in $^{\circ}\text{C}$)	$-1,2$	$-1,1$	$6,2$	$8,3$	$-0,6$	$-4,2$	$-3,7$	$-1,5$	

- b) größte Temperaturabnahme zwischen 15^h und 18^h
 größte Temperaturzunahme zwischen 9^h und 12^h

9. um 86 Grad abkühlen

10. um 124 Grad erwärmen

11. $-73,58$ DM ($73,58$ DM Soll)

12. Der tiefste Punkt von Death Valley liegt 85 m unter NN.

Aufgaben zu 2.5

- 62/1. a) $0 < 0,1$ b) $3 > -1$ c) $-5,6 > -6,5$ d) $-\frac{7}{20} = -0,35$
 e) $-25 < 0$ f) $-0,99 < 0,01$ g) $0 = 0$ h) $-\frac{19}{24} (= -\frac{95}{120}) > -\frac{33}{40} (= -\frac{99}{120})$
 i) $-3 < -1$ k) $-1,4 < \frac{7}{5}$ l) $10 > -100$ m) $-57 > -75$

2. a) w b) f c) f d) f e) w f) w g) f h) w

- 63/3. a) Eine Ungleichung bleibt erhalten, wenn auf beiden Seiten dieselbe Zahl subtrahiert wird.

$$a < b \xrightarrow{S.62.1} a + (-c) < b + (-c) \xrightarrow{S.57.2} a - c < b - c$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a - d < b - d &\xrightarrow{S.62.1} (a - d) + d < (b - d) + d \Leftrightarrow \\ (a + (-d)) + d < (b + (-d)) + d &\xrightarrow{A} (a + ((-d) + d)) < b + ((-d) + d) \\ \dots &\Leftrightarrow a < b. \end{aligned}$$

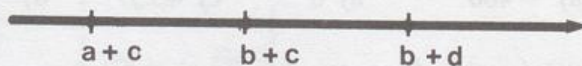
4. a) $-0,009 < 0$ bzw. $0 < 0,009$ (w) b) $0,009 < 0$ bzw. $0 < -0,009$ (f)
 c) $-\frac{1}{140} > 0$ bzw. $0 > \frac{1}{140}$ (f) d) $\frac{7}{600} > 0$ bzw. $0 > -\frac{7}{600}$ (w)
 e) $\frac{1}{75} < 0$ bzw. $0 < -\frac{1}{75}$ (f) f) $\frac{2}{495} > 0$ bzw. $0 > -\frac{2}{495}$ (w)

5. a) 3 Beispiele

- b) Entweder: Die verschiedenen Punkte a und b der Zahlengeraden werden um den gleichen Pfeil c verschoben. Man erhält verschiedene Punkte $a + c$ und $b + c$.
 Oder: Fallunterscheidung $a < b$ oder $b < a$ und jeweils Anwendung von Satz 62.1

6. a) 3 Beispiele

$$\begin{aligned} \text{b) } a < b &\Rightarrow a + c < b + c \\ c < d &\Rightarrow c + b < d + b \end{aligned}$$



Wegen $b + c = c + b$ liegt auf der Zahlengeraden $a + c$ links und $b + d$ rechts von $b + c$, somit also $a + c$ links von $b + d$.

- c) Aus $3 + 97 < 1 + 100$ (w) folgt nicht $3 < 1$ und $97 < 100$.

Aufgaben zu 2.6

- 69/1. a) -120 b) -480 c) 10125 d) $-0,7$ e) $52,44$
 f) $-0,4$ g) -7 h) $\frac{1}{8}$ i) $-8\frac{2}{3}$

2. $a = p > 0 \Rightarrow a^2 = p \cdot p > 0$ (Multiplikation in $\mathbb{Q}^+$)

$$a = 0 \Rightarrow a^2 = 0 \cdot 0 = 0 \text{ (Multiplikation in } \mathbb{Q}_0^+)$$

$$a = -p < 0 \Rightarrow a^2 = (-p) \cdot (-p) = p \cdot p > 0 \text{ (Definition 66.1)}$$

(oder mit Satz 66.1)

3. a) $1,21$ b) $0,0121$ c) 1024 d) $\frac{121}{144}$
 e) 0 f) $\frac{1}{196}$ g) $\frac{1}{196}$ h) $1\frac{29}{196}$

70/4. a) $a = p, b = q, c = -r$ ($p, q, r \in \mathbb{Q}^+$)

$$\Rightarrow (ab)c = (pq)(-r) = -((pq)r)$$

$$a(bc) = p(q(-r)) = p(-(qr)) = -(p(qr))$$

Wegen $(pq)r = p(qr)$ gilt also $(ab)c = a(bc)$.

b) $a = p, b = -q, c = -r$

$$\Rightarrow (ab)c = (p(-q))(-r) = (- (pq))(-r) = (pq)r$$

$$a(bc) = p((-q)(-r)) = p(qr)$$

Wegen $(pq)r = p(qr)$ gilt $(ab)c = a(bc)$.

c) $a = p, b = -q, c = -r$

$$\Rightarrow (ab)c = ((-p)(-q))(-r) = (pq)(-r) = -((pq)r)$$

$$a(bc) = (-p)((-q)(-r)) = (-p)(qr) = -(p(qr))$$

Wegen $(pq)r = p(qr)$ gilt $(ab)c = a(bc)$.

5. a) -111 b) 21400 c) -62,8 d) 66 e) 0 f) -2

6. Das aus den positiven Faktoren gebildete Teilprodukt ist positiv; jedes Paar von negativen Faktoren liefert wieder ein positives Produkt. Nur wenn ein negativer Faktor übrigbleibt, erhält man ein negatives Gesamtprodukt.

7. a) $<$, ohne Rechnung b) $156 > 150$ c) $-6 = -6$
d) $<$, ohne Rechnung e) $>$, ohne Rechnung f) $-3,25 < -3,24$

8. a) 24 b) 24 c) -6,5 d) -3

9. a) 5 b) -10 c) -56,25 d) 0 e) -8,2 f) $-2\frac{71}{80}$

10. a) -1225 b) 105 c) 5,5 d) $1\frac{1}{24}$

11. a) 10 b) 72 c) 51 d) 600 e) 2 f) 2 g) 2 h) 0

12. 1. Falls $a = 0$ oder $b = 0$, gilt: $|a \cdot b| = 0 = |a| \cdot |b|$

2. Falls a und b gleiche Vorzeichen haben, gilt (Satz 66.1):

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| > 0, \text{ daher auch } |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \text{ (Satz 44.2)}$$

3. Falls a und b verschiedene Vorzeichen haben, gilt (Satz 66.1):

$$a \cdot b = -(|a| \cdot |b|) < 0, \text{ also } |a \cdot b| = -(-(|a| \cdot |b|)) = |a| \cdot |b| \text{ (Satz 44.2)}$$

13. a) $T(-5) = 46$; $T(-2,3) = 15,49$; $T(0) = 1$; $T(2) = -3$

b) $T(3; -1,5) = 0$; $T(-8,3; -3,8) = 11,13$

c) $T(-12; 4; 18) = -1088$; $T(0,8; -1,25; -9,65) = -7,57$

d) $T(-22; -18; 33) = 66$; $T(-14,3; -5,8; -6,7) = -11,6$

74/1. a) -7 b) 7 c) -0,52 d) 1,8 e) 32 f) -160
g) $-\frac{1}{30}$ h) $7\frac{1}{7}$ i) $-\frac{5}{6}$

2. a) -5 b) $-1\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{7}$ d) $\frac{7}{12}$ e) -1 f) 1
g) -1 h) -1 i) 2 k) -1,6 l) $-\frac{1}{3}$ m) -16

75/3. a) -2 b) -4 c) $-0,6$ d) $48\frac{3}{4}$ e) $-6,25$ f) $1,4$

4. a) $0,1$ b) $-3,2$ c) $-6,05$ d) $60\frac{2}{3}$

5. a) $-1; 1$ b) $1; -1$ c) $0; -(!)$ d) $0,125; -8$
 e) $-\frac{2}{7}; 3,5$ f) $4,5; -\frac{2}{9}$ g) $-0,75; 1\frac{1}{3}$ h) $2\frac{3}{11}; -0,44$

6. Für $a \neq 0$ haben a und $-a$ entgegengesetztes, a und $\frac{1}{a}$ gleiches Vorzeichen; daher $-a \neq \frac{1}{a}$. (Für $a = 0$ existiert nur die Inverse bezüglich der Addition.)

Oder: Annahme $-a = \frac{1}{a} \Rightarrow -a^2 = 1$ (falsch!).

7. $x =$ a) -17 b) -4 c) $0,2$ d) $-\frac{1}{35}$
 e) 2 f) $0,5$

8. $L =$ a) $\{ \}$ b) $\mathbb{Q}$ c) $\{-1\}$ d) $\mathbb{Q}$

78/1. a) $-2x$ b) $5y$ c) $-2,3z$ d) $-abc$ e) abc f) $-abc$

2. 1) $a = p > 0 \Rightarrow \underline{a \cdot (-1) = p(-1)} \xrightarrow{\text{Def. 65.1}} \underline{-(p \cdot 1)} \xrightarrow{\text{N.}} \underline{-p = -a}$

2) $a = 0 \Rightarrow \underline{a \cdot (-1) = 0 \cdot (-1)} \xrightarrow{\text{Def. 66.2}} \underline{0 = -0 = -a}$

3) $a = -p < 0 \Rightarrow \underline{a(-1) = (-p) \cdot (-1)} \xrightarrow{\text{Def. 66.1}} \underline{p \cdot 1} \xrightarrow{\text{N.}} \underline{p = -a}$

(Es genügt auch, sich jeweils auf Satz 66.1 statt auf die Definitionen zu berufen.)

3. a) $(+) \cdot (+) \cdot (+) = +, (+) \cdot (+) \cdot (-) = (+) \cdot (-) \cdot (+) = (-) \cdot (+) \cdot (+) = -$
 $(+)(-)(-) = (-)(+)(-) = (-) \cdot (-) \cdot (+) = +, (-)(-)(-) = -$

b) $(-) \cdot (+) \cdot (-) \cdot (+) = +$ und $(+) \cdot (-) \cdot (-) \cdot (+) \cdot (-) = -$

4. a) $\frac{2m}{3}$ b) $\frac{m}{n}$ c) $-\frac{21st}{5qr}$

5. a) $m:7$ b) $n:5$ c) $p:(-4)$
 d) $q:(-4,5)$ e) $r:0,6$ f) $s:(-1,3)$

6. a) $x \cdot 2$ b) $y \cdot 6$ c) $z \cdot (-1,5)$
 d) $u \cdot 8$ e) $v \cdot 0,3$ f) $w \cdot (-1000)$

Aufgaben zu 2.7

80/1. $T_1 = T_2 =$ a) -24 b) $-176,77$ c) $33\frac{3}{4}$ d) 25

$$80/2. \quad a(b+c) \stackrel{\text{Einsetzen}}{=} p((-q)+(-r)) \stackrel{\text{Satz 49.1}}{=} p(-(q+r)) =$$

$$\stackrel{\text{Satz 66.1}}{=} -(p(q+r)) \stackrel{(\text{D}) \text{ in } \mathbb{Q}^+}{=} -(pq+pr);$$

$$ab+ac \stackrel{\text{Einsetzen}}{=} p(-q)+p(-r) \stackrel{\text{Satz 66.1}}{=} (-pq)+(-pr) =$$

$$\stackrel{\text{Satz 49.1}}{=} -(pq+pr).$$

$$3. \quad a = -p; \quad b = -q; \quad c = -r \quad \text{mit} \quad p, q, r \in \mathbb{Q}^+$$

$$a(b+c) = (-p)((-q)+(-r)) \stackrel{\text{Satz 49.1}}{=} (-p)(-(q+r)) =$$

$$\stackrel{\text{Satz 66.1}}{=} p(q+r) \stackrel{(\text{D}) \text{ in } \mathbb{Q}^+}{=} pq+pr;$$

$$ab+ac = (-p)(-q)+(-p)(-r) \stackrel{\text{Satz 66.1}}{=} pq+pr.$$

$$4. \quad \text{a)} \quad 144x+27y \quad \text{b)} \quad -35xy+62,5 \quad \text{c)} \quad -0,8v+0,3w$$

$$\text{d)} \quad -48a+36b \quad \text{e)} \quad -2n^2-7n \quad \text{f)} \quad -\frac{4}{7}x-\frac{15}{28}y$$

$$5. \quad T_1 = T_2 = \quad \text{a)} \quad 4 \quad \text{b)} \quad -0,4 \quad \text{c)} \quad -5\frac{16}{21} \quad \text{d)} \quad 4\frac{5}{6}$$

$$6. \quad (a+b):c \stackrel{\text{Satz 74.1}}{=} (a+b) \cdot \frac{1}{c} \stackrel{\text{D}}{=} a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} \stackrel{\text{Satz 74.1}}{=} a:c+b:c$$

$$7. \quad \text{a)} \quad 2x+1,5y \quad \text{b)} \quad 1,6z^2-2,5 \quad \text{c)} \quad -0,8u+6v \quad \text{d)} \quad 0,3p+0,5q$$

$$82/1. \quad \text{a)} \quad -100 < -10 \quad \text{b)} \quad -0,85 < 0,9 \quad \text{c)} \quad -9 < 0$$

$$\text{d)} \quad -9 < 49 \quad \text{e)} \quad 1,4x > 0,7y \quad \text{f)} \quad -u > 40v$$

$$2. \quad \text{a)} \quad -0,4 < 0,2 \quad \text{b)} \quad -136 < 0 \quad \text{c)} \quad 3,24 > 2,7$$

$$\text{d)} \quad \frac{7}{3} < \frac{12}{5} \quad \text{e)} \quad -10 < 100 \quad \text{f)} \quad -0,4 > -\frac{7}{16}$$

$$83/3. \quad \text{a)} \quad 111 > -3 \quad \text{b)} \quad -8 < -7,5 \quad \text{c)} \quad 0,38 < 0,42 \quad \text{d)} \quad -197 < 0$$

4. Man erhält die Gleichung $0 = 0$.

$$5. \quad \text{a)} \quad x < 0 \quad \text{b)} \quad x = 0 \quad \text{c)} \quad x < 0 \quad \text{d)} \quad x > 0$$

84/1. (I_+) gilt in $\mathbb{Q}_0^+$ nicht, da es zu den von 0 verschiedenen Zahlen noch keine Gegenzahlen gibt.

2. Die Subtraktion kann durch Addition der Gegenzahl, die Division durch Multiplikation mit dem Kehrwert ersetzt werden (Satz 57.2; Satz 74.1). Die Existenz der inversen Elemente ist durch (I_+) und (I_-) gesichert.

3. Nein! Man muß zusätzlich bei (N) und (I) 0 durch 1 ersetzen sowie bei (I) $-a$ durch $\frac{1}{a}$ ersetzen und die Einschränkung $a \neq 0$ hinzufügen. Das Monotoniegesetz liefert nur für $c > 0$ eine richtige Aussage; der Fall $c < 0$ (»Umkehrung der Monotonie«) fehlt.

4. Addition von c bedeutet auf der Zahlengeraden eine Verschiebung um den Pfeil c . Auch für $c < 0$ ändert sich dabei die Reihenfolge der Punkte a und b nicht ($a < b \Rightarrow a + c < b + c$). [Bei der Multiplikation bewirkt der Faktor -1 eine Spiegelung am Nullpunkt und damit eine Umkehr der Reihenfolge.]
5. b) Zum Beispiel:
 »Beim Abzieh'n in $\mathbb{Q}$ jedoch scheitern wir nie,
 denn dort arbeiten wir ja mit EKANI.«
 Oder:
 »In $\mathbb{Q}$ jedoch gibt es keinen Verdruß.
 Der Grund ist klar: Dort gilt auch I_+ .« usw.

Aufgaben zu 3.1

- 94/1. a) $= x + (-2,5 + 1,9) = x - 0,6$ b) $= (3\frac{1}{7} + \frac{1}{7}) - 2u = 3\frac{2}{7} - 2u$
 c) $= (a - \frac{15}{8}) - \frac{1}{8} = a + (-\frac{15}{8} - \frac{1}{8}) = a - 2$ d) 0
 e) $= (\frac{7}{4}g - 2,8) - (-2,8 + \frac{7}{4}g) = 0$
2. a) $= (12 \cdot \frac{17}{4}) \cdot x = 51x$ b) $= ((-\frac{3}{4}) \cdot (-\frac{8}{5})) \cdot r = \frac{6}{5}r$
 c) $= (2,1 \cdot (-1,2))s = -2,52s$ d) $3,75a$
 e) $-\frac{15}{4}a$ f) $= ((-\frac{55}{100}) \cdot (-\frac{28}{33}))c = \frac{7}{15}c$
3. a) 1 b) -7 c) a
4. a) $-5xy$ b) $360abc$ c) $2,89rst$
5. a) $24uvw$ b) $-0,45xy$ c) $12abc$
 d) $-abc$ e) $\frac{1}{3}xyz$ f) $50uvwxy$
6. a) $\frac{ab}{4c}$ b) $-\frac{2xz}{7y}$
7. a) $\frac{81m}{64n}$ b) $\frac{21rs}{t}$ c) $\frac{28xyz}{9uvw}$
8. a) $2,7x - 0,9$ b) $7r + 7s$ c) $3p - 3q$ d) $\frac{1}{14}a - \frac{2}{5}b$
 e) $3c + \frac{36}{5}d$ f) $48a + 40b$ g) $3x^2 - 5xy$ h) $-\frac{25}{2}a^2 + \frac{15}{7}a$
 i) $4xy + xyz$ j) $-6u - 15v$ k) $\frac{7}{18}rz - \frac{1}{2}z^2$ l) $\frac{3}{4}tx^2 + \frac{3}{2}sx^2$
9. a) $-x$ b) $6\frac{1}{2}x$ c) 0 d) $0,09b$ e) $6s$ f) $\frac{3}{14}v$
 g) $\frac{29}{24}xy$ h) $-rs$ i) $2,7uv$ j) $337abc$ k) $-0,297rst$ l) $-10x^2y$
10. a) $4x - 17$ b) $8a - 7$ c) $-0,04u - 0,02$
11. $a(bc) \stackrel{A}{=} (ab)c \stackrel{K}{=} (ba)c \stackrel{A}{=} b(ac)$
 $a(bc) \stackrel{A}{=} (ab)c \stackrel{K}{=} c(ab)$
 Also ist auch $b(ac) = c(ab)$, da beide dem Produkt $a(bc)$ gleich sind.

$$\begin{array}{ll}
 95/12. \text{ a) } abcd \stackrel{A}{=} ((ab)c)d = & \text{Oder: } abcd \stackrel{A}{=} ((ab)c)d = \\
 \stackrel{K}{=} d \cdot ((ab)c) = & \stackrel{A}{=} (ab) \cdot (cd) = \\
 \stackrel{K}{=} d \cdot ((ba)c) = & \stackrel{K}{=} (ba) \cdot (dc) = \\
 \stackrel{A}{=} d \cdot (b(ac)) = & \stackrel{K}{=} (dc) \cdot (ba) = \\
 \stackrel{K}{=} d \cdot (b(ca)) = & \stackrel{A}{=} ((dc)b)a = \\
 \stackrel{A}{=} (db) \cdot (ca) = & \stackrel{A}{=} (d(cb))a = \\
 \stackrel{A}{=} ((db)c)a = & \stackrel{K}{=} (d(bc))a = \\
 \stackrel{A}{=} dbca & \stackrel{A}{=} ((db)c)a = \\
 & = dbca
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } a(b+c+d) &\stackrel{A}{=} a((b+c)+d) = \\
 &\stackrel{D}{=} a(b+c) + ad = \\
 &\stackrel{D}{=} (ab+ac) + ad = \\
 &\stackrel{A}{=} ab+ac+ad
 \end{aligned}$$

13. a) $7x + (-3y) = 7x + (-3)y$ b) $(-2)a + (-5)b = (-2a) + (-5b)$
 c) $3 + (-x) + y$ d) $(-5u) + 3v + (-9)$
 e) $(-1) + (-2x) + (-3y)$ f) $5a + (-6b) + 7c + (-8d)$
14. a) $12xy + (-3,7uv)$ b) $8 + (- (a-b))$ c) $(3x-5y) + (- (2x+3y))$
 d) $(3u+5v) + (- (2u-3v-1)) + (-2v)$
15. a) $3x+10y$ b) $3x-4y$ c) $4y-x$ d) $x-10y$
 e) $10y-3x$ f) $-3x-10y$ g) $4a+b$ h) $4a+\frac{2}{3}b$
 i) $b-4a$ j) $-2\frac{2}{3}a-b$ k) $2\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}b$ l) $-4a-b$
16. a) $2x+5xy-5,2$ b) $9,1x^2-5,2x-16$ c) $5ab+3,4a$
 d) $= -4\frac{5}{8}x - 3\frac{2}{3}x + 1\frac{17}{24}x + 3\frac{1}{2}y - 4\frac{3}{4}y + xy - xy =$
 $= -6\frac{7}{12}x - 1\frac{1}{4}y$

Aufgaben zu 3.2

- 99/1. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,
 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400,
 441, 484, 529, 576, 625.
2. 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.
3. a) $= 64 + 625 - 196 - 343 = 150$ b) $= 729 - 81 + 125 - 25 = 748$
 c) $= 216 - 324 - 441 + 64 = -485$ d) $= -529 + 512 - 256 - 27 = -300$
4.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

$$\begin{array}{ll}
 99/5. & 10^1 = 10 & 10^4 = 10\,000 \\
 & 10^2 = 100 & 10^5 = 100\,000 \\
 & 10^3 = 1\,000 & 10^6 = 1\,000\,000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 6. & 0^1 = 0 & 0^2 = 0 & 0^3 = 0 & 0^4 = 0 \\
 & (\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} & (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8} & (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16} \\
 & 1^1 = 1 & 1^2 = 1 & 1^3 = 1 & 1^4 = 1 \\
 & 2^1 = 2 & 2^2 = 4 & 2^3 = 8 & 2^4 = 16
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 7. \text{ a) } 2^3 = 8 & \text{b) } 3^5 = 243 & \text{c) } (2+5)^2 = 7^2 = 49 \\
 & 3^2 = 9 & 5^3 = 125 & 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29. \\
 \text{d) } (17-12)^2 = 5^2 = 25 & \text{e) } (3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225 \\
 & 17^2 - 12^2 = 289 - 144 = 145 & 3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75 \\
 \text{f) } (12:4)^2 = 3^2 = 9 & & \\
 & 12:4^2 = 12:16 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}
 \end{array}$$

$$100/8. \text{ a) } 1) (2^2)^3 = 2^6 = 64 \quad 2) (3^2)^3 = 3^6 = 729 \\
 (2^3)^2 = 2^6 = 64 \quad (3^3)^2 = 3^6 = 729$$

$$\text{b) } (a^m)^n = (a^n)^m \\
 \text{Beweis: } (a^m)^n = a^{m \cdot n} \stackrel{K}{=} a^{n \cdot m} = (a^n)^m.$$

$$\begin{array}{llllll}
 9. \text{ a) } \frac{1}{64} & \text{b) } \frac{4}{9} & \text{c) } \frac{2401}{625} & \text{d) } -\frac{1024}{243} & \text{e) } 0,09 \\
 \text{f) } -0,027 & \text{g) } 0,0081 & \text{h) } 0,0009 & \text{i) } -6,25 & \text{k) } 0,0625
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 10. \text{ a) } = (3^3)^2 = 27^2 = 729 & \text{oder: } = (3^2)^3 = 9^3 = 729 \\
 \text{b) } = (4^2)^2 = 16^2 = 256 \\
 \text{c) } = (5^2)^2 = 25^2 = 625 \\
 \text{d) } 2^{12} = (2^6)^2 = ((2^3)^2)^2 = (8^2)^2 = 64^2 = 4096 \\
 \text{oder:} \\
 2^{12} = 2^{10+2} = 2^{10} \cdot 2^2 = 1024 \cdot 4 = 4096 \\
 \text{e) } = (2^{10})^2 = 1024^2 = 1\,048\,576
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 11. \text{ a) } 2^9 & \text{b) } 2^4 \cdot 3^3 & \text{c) } 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 & \text{d) } 2^5 \cdot 7^2 \\
 \text{e) } 3^2 \cdot 11^2 & \text{f) } 2^3 \cdot 13^2 & \text{g) } 11^3 & \text{h) } 2^2 \cdot 3^2 \cdot 101
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 12. \text{ a) } = (4 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 13) = (4 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 13) = 20 \cdot 39 = 780 \\
 \text{b) } = (3 \cdot 8) \cdot (125 \cdot 3) = (3 \cdot 3) \cdot (8 \cdot 125) = 9 \cdot 1000 = 9000 \\
 \text{c) } = (5 \cdot 25) \cdot (4 \cdot 12) = (5 \cdot 12) \cdot (4 \cdot 25) = 60 \cdot 100 = 6000 \\
 \text{d) } = 25 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 15 = 100 \cdot 90 = 9000 \\
 \text{e) } = 225 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 125 = (225 \cdot 4) \cdot 2 \cdot (8 \cdot 125) = 900 \cdot 2 \cdot 1000 = 1\,800\,000 \\
 \text{f) } = 3 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7 = 3 \cdot (4 \cdot 25) \cdot (7 \cdot 7) \cdot 2 = 3 \cdot 100 \cdot 49 \cdot 2 = 29\,400
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
 13. \text{ a) } x^8 & \text{b) } 6a^3 & \text{c) } 10u^5 & \text{d) } \frac{2}{3}b^7 & \text{e) } a^5b^2 & \text{f) } 75x^3y^4 \\
 \text{g) } 6p^5q^4 & & \text{h) } 72u^{10}v^{15} & & &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} &= [2a \cdot 27a^3b^6]^2 \cdot 16a^4b^2 = [54a^4b^6]^2 \cdot 16a^4b^2 = \\ &= 2916a^8b^{12} \cdot 16a^4b^2 = 46656a^{12}b^{14}. \end{aligned}$$

100/14. a) $x^2 + xy$ b) $uv - v^2$ c) $2a^3 + a^2b$
 d) $15b^5 - 6b^4c^2$ e) $2xy^2 - 3x^5y^3$ f) $a^5bc + a^3bc^3 + a^3c$

15. 1. Möglichkeit: a beliebig und $b = 1$.
 2. Möglichkeit: $a = b = 2$.

16. a) 1) $7,84 \cdot 10^6$ 3) $3,02 \cdot 10^3$ 5) $7,24 \cdot 10^2$
 2) $1 \cdot 10^5$ 4) $8,05 \cdot 10^7$ 6) $1,7 \cdot 10^{13}$
 b) 1) 1030000000 3) 150000000000 5) 505000
 2) 300000000 4) 1350000 6) 80700

17. a) $\frac{16}{25}x^4y^6$ b) $0,0000000032a^5b^{15}$ c) $-\frac{27}{8}r^{12}s^9$

18. a) $\frac{1}{12}$ b) $-\frac{5}{48}$ c) $\frac{5}{36}$ d) $\frac{1}{144}$ e) $\frac{25}{576}$ f) $\frac{25}{288}$

101/19. a) 1 b) -1 c) 1 d) 1
 e) 1 f) -1 g) -1 h) 1

i) -1 und +1. Bei geraden Exponenten ergibt sich +1, bei ungeraden -1.

20. a) 0,01 b) 100 c) -0,001 d) -1000
 e) 0,0001 f) -0,000001 g) 10000 h) -1000000

21. a) a^2 b) $-a^5$ c) a^{32} d) $-a$
 e) a^{2n} f) $-a^{2n+1}$ g) $-a^{2n-1}$

22. a) 0 b) $-2c^5$ c) $-a^3b^3$ d) a^4b^4
 e) $-a^4b^4$ f) a^4b^4 g) u^7v^7 h) uv^7

23. a) $-x^2$ b) x^3 c) x^2 d) x^3

24. a) $-a^2b^3c^4$ b) $a^3b^2c^3$ c) $-\frac{1}{125}x^2y^4$
 d) $-512a^9$ e) $-\frac{2}{3}a^6$ f) $-3,9015x^6$

25. a) 0 b) 2 c) 0 d) 2
 e) 2 f) 0 g) 2 h) 0

Aufgaben zu 3.3.1

103/1. a) $3a$ b) $\frac{4}{3}b$ c) $-xyz$ d) $-4ab$ e) $7xy$ f) $-13u$

2. a) $a - b$ b) $a - b$ c) $a - b$

3. a) falsch b) richtig c) falsch
 d) richtig e) falsch f) falsch

Aufgaben zu 3.3.2

- 104/1. a) $12a + 3b$ b) $12a + 3b$ c) $3b - 2a$
 d) $2a - 3b$ e) $3b - 12a$ f) $-12a - 3b$
2. a) $8x + 8y$ b) $-4x$ c) $4x$
 d) $-8x - 8y$ e) $8x - 8y$ f) $-8x$
- 105/3. a) $25a + 20x$ b) $28a + 27b$ c) $33a + 38b + 27x$ d) $41a + 59b$

4. $51 + 49b + 53c$ 5. Ab 3. Auflage: $-50x$

6. $12 + 4x + y$ 7. $8 + 4n + 4r$ 8. 1

9. a) $q = x + y$

b) $q = x + (9 - x) = x + 9 - x = 9$.

Da die Quersumme von $10x + (9 - x)$ den Wert 9 hat, ist sie durch 9 teilbar; also ist auch die Zahl $10x + (9 - x)$ durch 9 teilbar.

c) $z = 100x + (99 - x) = 100x + 99 - x = 99x + 99 = 99(x + 11)$.

Bei der letzten Umformung haben wir das Distributivgesetz angewendet.

Da $x + 11 \in \mathbb{N}$, sehen wir, daß sich z als ganzzahliges Vielfaches von 99 schreiben läßt, also erst recht als ganzzahliges Vielfaches von 9; denn es gilt:

$$z = 100x + (99 - x) = (x + 1) \cdot 99 = [(x + 1) \cdot 11] \cdot 9 \text{ und } (x + 11) \cdot 11 \in \mathbb{N}.$$

Daher ist z durch 9 teilbar.

d) Alle Zahlen der Form $100x + (99 - x)$ lassen sich auf die Form $(x + 11) \cdot 99$ bringen. Also haben alle diese Zahlen die gemeinsamen Teiler 1, 3, 9, 11, 33, 99.

Aufgaben zu 3.3.3

- 107/1. a) $-2a - 3b$ b) $12a - 3b$ c) $3b - 2a$ d) $12a + 3b$
2. a) $-4x$ b) $-4x$ c) $8y - 4x$ d) $-8x$ e) $4x + 8y$ f) $4x - 8y$
3. a) $2x$ b) $-34a$ c) $a - 24b + 33x$ d) $11b$
4. $-26 + 53c$ 5. $-55x - 53z$
6. a) $\frac{7}{2}a + \frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}a + \frac{5}{6}b + \frac{13}{3}c$ c) 0 d) $-5,1$
7. a) $a + 21c - 18,55$ b) $-7u + 11v$
8. a) $-\frac{121}{30}x - \frac{2}{15}y + \frac{1}{2}$ b) $a + \frac{8}{11}b - 2$ c) $\frac{3}{10}r - \frac{33}{10}s + \frac{5}{2}$
9. a) $5x^2 - 6x + 7$ b) $2x^3 + x - 1$
 c) $-9x^3 - 4x^2 + 4x + 2$ d) $-9x^3 - 5x^2 - 3$
10. a) 1 b) 1

Aufgaben zu 3.3.4

- 108/1. a) $13a - 5b$ b) $4x - 3$ c) $3 + x - x^2$ d) $6z$
2. $29b - 17c$
- 109/3. $13a + 6b - 57$ 4. a) $a^2 - 4ab + b^2$ b) $2a^2 + ab - 5b^2$
5. $6x^2 - 15x - 12$ 6. $105a^2 + 177ax - 20ay + 48x^2 - 214xy - 110y^2$
7. $-27a^2b - ab^2 + 6b^3$ 8. $11a^3b - a^2b^2 - 2ab^3$
9. $10a^3bc^2 + 24b^4c^5$ 10. $227a^4x^3y^2 - 232a^3x^4y^4 + 16a^2x^2y^3$
11. $5a^2bc - 17ab^2c - abc^2$ 12. $9a^2bc^3$ 13. $2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4$
14. $a^2 - b^2$ 15. $-18x + 8y - 31$ 16. $7x + 19y + 15z$
17. -8 18. $64a + 52b + 2c$ 19. $4y + 29z + 390$ 20. $5a + 8x + 6$
21. $2b$ 22. 0 23. $14x - 3y - 6z + 41$ 24. $a - 2b - 3c$
25. y^2 26. $3x$ 27. x^2 28. a
- 110/29. $a^2 + b^2 - c^2$ 30. $a^2 - b^2 - c^2$
31. a) $34a + 8b$ b) $-w - vw$ c) $44\frac{3}{5}x$ d) $6x + 38y + 36xy$
32. $2a^4c^2 + 3a^3b$ 33. $5bx^3$ 34. $8p^2qr^3 + 7p^2q^3r$
35. a) $0,4x^2 + 0,7xy - 0,6y^2$ b) $11a^2 - \frac{197}{8}ab - 20b^2$ c) $24a^2 - 90ab + 27b^2$
36. a) 0 b) $2xz - 2yz$ c) $14x + y + 5xy$
37. a) $18pqr - qrs$ b) $12ab - 21bc$ c) $-11ab - 2abc$
38. a) $32p^2q - 20pq^2$ b) $a^2b^2 - 3a^2b^2c^2$
39. a) x b) $22a - 22b$ c) $0,248x^3 - 0,016x^2$

Aufgaben zu 3.3.5

- 111/1. a) $3b$ b) $3b$
2. a) $9x^3 + y^2$ b) $9x^3 + y^2$

- 111/3. a) $-a^4 - 3ab + 3b^2$ b) $-a^4 - 3ab + 3b^2$
4. a) $a - 7b + 21c - 9$ b) $-3u + 5v - 7w$
 c) $-3x + 4y + 1$ d) $11m + n$
5. $-4,2u^2v - 3,9uv^3 + 5,5u$ 6. $3x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x + 1$
- 112/7. $6a^4b - 24a^3b^2 + 6a^2b^3 + 6ab^4$ 8. $2a^2 + a$
9. 1 10. $15a^3 + 17a^2 - 39a$ 11. $2b^4 - 2a^2b^2$
12. $2ab^2 - 2a^2b$ 13. $57x + 190$ 14. $3x^4 + 12x^3 - 8x^2 - 12x$
15. $2a^3 + 24a^2 - 20a$ 16. $-\frac{10}{3}x^2 - 4x - \frac{4}{5}$ 17. $-4x^2$
18. $\frac{8}{3}c^3$ 19. $5a^2 - 2ab - 7bc$ 20. 0

Aufgaben zu 4.1.1

- 116/1. Honig schmeckt süß.
 Auf Samstag folgt Sonntag.
 Maikäfer können fliegen.
 Orangen sind blau.
 Der Wendelstein ist der höchste Berg der Bundesrepublik Deutschland.
 Die Tanne hat Blätter.
2. $2^4 = 4^2$.
 Zwei Geraden, die aufeinander senkrecht stehen, bilden einen Winkel von 90° .
 Alle Punkte eines Kreises sind vom Mittelpunkt gleich weit entfernt.
 $2^3 = 3^2$.
 Im Quadrat mißt jeder Winkel 60° .
 Im Quadrat ist die Diagonale doppelt so lang wie eine Seite.
3. a) w b) w c) keine Aussage
 d) f. Die Hauptstadt von Mali heißt Bamako; Wagadugu ist die Hauptstadt von Burkina Faso – Land der unbestechlichen Menschen –, wie das frühere Obervolta seit dem 4.8. 1984 heißt.
 e) keine Aussage
 f) Die Autoren sind verschiedener Meinung über den Wahrheitswert dieser Aussage.
4. a) f b) w c) f d) w e) f f) keine Aussage
 g) f h) f, da z. B. $13 - 7 = 6$ i) f, da z. B. $19 - 17 = 2$ j) w

117/5. a)	x	0	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{3}$	-3					
	Wahrheitswert	f	f	w	f	f					
b)	x	-2	$-\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	100						
	Wahrheitswert	f	f	f	w						
c)	x	3	-5	2							
	Wahrheitswert	f	f	w							
d)	x	-4	-6	0							
	Wahrheitswert	f	w	f							
e)	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Wahrheitswert	w	w	w	w	w	w	f	w	w	w

6. a) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ b) 1) $\{0, 1, 2\}$ 2) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 c) $\{7, 8, 9, \dots, 19, 20\}$
 d) 1) $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ 2) $\{2; 3\}$
 e) $\{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$
 f) $\{4, 8, 16, 20, 28, 32, 40, 44, 52, 56, 64, 68, 76, 80, 88, 92, 100\}$
 g) $\{8, 24, 72\}$

7. a) $\mathbb{Z}$ b) $\{0\}$ c) $\{ \}$ d) $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e) $\{ \}$
 8. a) $\{-4; 4\}$ b) $\{ \}$ c) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 d) $\mathbb{Z} \setminus \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e) $\mathbb{N}_0$ f) $\mathbb{Z}_0^-$

Aufgaben zu 4.1.2

- 118/1. a) falsch, da $1 - 1 = 1$ falsch b) falsch, da $0^2 > 0$ falsch
 c) wahr d) falsch, da $2 \cdot (-1) > -1$ falsch
 2. a) wahr, da $7 \cdot 0 = 0$ und $0 \in \mathbb{Q}$ b) falsch
 c) wahr, da $0 < 1$ wahr und $0 \in \mathbb{Z}$ d) falsch

Aufgaben zu 4.2.1.2

- 122/1. a) $x + \frac{1}{2}x = 16$ b) $x + \frac{1}{4}x = 15$ c) $x + \frac{1}{5}x = 21$
 2. a) $2 \cdot x + x = 9$ b) $1\frac{1}{2} \cdot x + 4 = 10$
 3. $(z \cdot 4 - 6) : 2 = 10$

Aufgaben zu 4.2.1.4

$$123/1. \quad LS = (9 + \frac{2}{3} \cdot 9) - \frac{1}{3}(9 + \frac{2}{3} \cdot 9) = (9 + 6) - \frac{1}{3}(9 + 6) = 15 - \frac{1}{3} \cdot 15 = 15 - 5 = 10$$

$$RS = 10$$

$$2. \quad LS = \frac{2}{3} \cdot 13\frac{1}{23} + \frac{1}{10} \cdot 13\frac{1}{23} = \frac{2}{3} \cdot \frac{300}{23} + \frac{1}{10} \cdot \frac{300}{23} = \frac{200}{23} + \frac{30}{23} = \frac{230}{23} = 10 = RS$$

$$3. \quad LS = \frac{1}{3}[13\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 13\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(13\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 13\frac{1}{2})] =$$

$$= \frac{1}{3}[13\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{2} + \frac{1}{3}(13\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{2})] =$$

$$= \frac{1}{3}[13\frac{1}{2} + 9 + \frac{1}{3} \cdot (13\frac{1}{2} + 9)] =$$

$$= \frac{1}{3}[22\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 22\frac{1}{2}] =$$

$$= \frac{1}{3}[\frac{45}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{45}{2}] =$$

$$= \frac{1}{3}[\frac{45}{2} + \frac{15}{2}] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{60}{2} = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10 = RS$$

$$4. \quad 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{144} + \frac{1}{228} = 1 \frac{38+19+2+1}{228} = 1 \frac{60}{228} = 1 \frac{5}{19} = \frac{24}{19}$$

$$LS = 1 \frac{5}{19} + \frac{1}{3} \cdot \frac{24}{19} + \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{19} = 1 \frac{5}{19} + \frac{8}{19} + \frac{6}{19} = 2 = RS$$

$$5. \quad x = 2: \quad \left. \begin{array}{l} LS = 3 - \frac{2}{3} = 2\frac{1}{3} \\ RS = \frac{3}{8} + \frac{4}{3} = \frac{41}{24} \end{array} \right\} \Rightarrow LS \neq RS \Rightarrow 2 \text{ ist keine Lösung.}$$

$$x = \frac{3}{4}: \quad \left. \begin{array}{l} LS = \frac{9}{8} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8} \\ RS = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow LS = RS \Rightarrow \frac{3}{4} \text{ ist Lösung.}$$

$$x = -\frac{3}{4}: \quad \left. \begin{array}{l} LS = -\frac{9}{8} + \frac{1}{4} = -\frac{7}{8} \\ RS = \frac{3}{8} - \frac{4}{8} = -\frac{1}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow LS \neq RS \Rightarrow -\frac{3}{4} \text{ ist keine Lösung.}$$

$$124/6. \quad x = 3: \quad \left. \begin{array}{l} LS = 9 + 15 = 24 \\ RS = 8 \cdot 3 = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow LS = RS \Rightarrow 3 \text{ ist Lösung.}$$

$$x = 5: \quad \left. \begin{array}{l} LS = 25 + 15 = 40 \\ RS = 8 \cdot 5 = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow LS = RS \Rightarrow 5 \text{ ist Lösung.}$$

$$7. \quad x = 1: \quad \left. \begin{array}{l} LS = 1 + 1 = 2 \\ RS = 2 - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow LS \neq RS \Rightarrow 1 \notin L$$

$$x = -1: \quad \left. \begin{array}{l} LS = -1 + 1 = 0 \\ RS = -2 + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow LS = RS \Rightarrow -1 \in L$$

$$x = \frac{1}{3}: \quad \left. \begin{array}{l} LS = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} = \frac{4}{27} \\ RS = \frac{2}{3} - \frac{2}{27} = \frac{16}{27} \end{array} \right\} \Rightarrow LS \neq RS \Rightarrow \frac{1}{3} \notin L$$

$$x = \frac{2}{3}: \quad \left. \begin{array}{l} LS = \frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{20}{27} \\ RS = \frac{4}{3} - \frac{16}{27} = \frac{20}{27} \end{array} \right\} \Rightarrow LS = RS \Rightarrow \frac{2}{3} \in L$$

$$x = 0: \quad \left. \begin{array}{l} LS = 0 + 0 = 0 \\ RS = 0 - 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow LS = RS \Rightarrow 0 \in L$$

Aufgaben zu 4.2.1.5

- 125/1. a) $L = \{-21\}$, eindeutig lösbar
 b) $L = \mathbb{Q}$, allgemeingültige Gleichung
 c) $L = \{-1\}$, eindeutig lösbar
 d) $L = \{-16; 16\}$, mehrdeutig lösbar
 e) $L = \{-2; 2\}$, mehrdeutig lösbar
 f) $L = \{ \}$, widersprüchliche Gleichung
 g) $L = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, mehrdeutig lösbar
 h) $L = \{ \}$, widersprüchliche Gleichung
2. a) $L = \{0\}$, eindeutig lösbar
 b) $L = \{ \}$, widersprüchliche Gleichung
 c) $L = \{-1, 2; 1, 2\}$, mehrdeutig lösbar
 d) $L = \mathbb{Q}$, allgemeingültige Gleichung
 e) $L = \{ \}$, widersprüchliche Gleichung
3. a) $L = \{ \}$, widersprüchliche Gleichung
 b) $L = \{-1\}$, eindeutig lösbar
 c) $L = \{-\frac{32}{3}; \frac{32}{3}\}$, mehrdeutig lösbar
 d) $L = \{0; -3\}$, mehrdeutig lösbar
 e) Die Gleichung ist allgemeingültig, da sie eine Sonderform des Distributivgesetzes darstellt: $L = \mathbb{Q}$.

Aufgaben zu 4.2.2.1

- 126/1. a) $L_I = \{3\}$, $L_{II} = \{3\}$; also $I \Leftrightarrow II$.
 b) $L_I = \{1\}$, $L_{II} = \{1\}$; also $I \Leftrightarrow II$.
 c) $L_I = \{1\}$, $L_{II} = \{-1\}$; also: I und II sind nicht äquivalent.
 d) $L_I = \{-1; 1\}$, $L_{II} = \{1\}$; also: I und II sind nicht äquivalent.
2. a) $L_I = \{\frac{9}{25}\}$, $L_{II} = \{-\frac{3}{5}; \frac{3}{5}\}$; also: I und II sind nicht äquivalent.
 b) $L_I = \mathbb{Q}$, $L_{II} = \mathbb{Q}$; also $I \Leftrightarrow II$.
 c) $L_I = \{0\}$, $L_{II} = \{ \}$; also: I und II sind nicht äquivalent.
 d) $L_I = \mathbb{Q}$, $L_{II} = \mathbb{Q}$, also $I \Leftrightarrow II$.

Aufgaben zu 4.2.2.2

- 128/1. a) $1,5x = 1,5x \Rightarrow L = \mathbb{Q}$ b) $\frac{15}{2}x - 3 = -3 \Rightarrow L = \{0\}$
 c) $-5x - 0,5 = -5x \Rightarrow L = \{ \}$ d) $x - \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow L = \{\frac{7}{2}\}$
 e) $x(x - 2x - 10) = -10x - x^2$
 $x(-x - 10) = -10x - x^2$
 $-x^2 - 10x = -10x - x^2 \Rightarrow L = \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{7}{2}[2 - \frac{3}{2}x - 2x^2 + \frac{1}{2}x + 2x^2] &= 7 \\ \frac{7}{2}[2 - x] &= 7 \\ 7 - \frac{7}{2}x &= 7 \Rightarrow L = \{0\} \end{aligned}$$

$$128/2. \text{ a) } \frac{7}{2}y = 0 \Rightarrow L = \{0\}$$

$$\text{b) } 0 \cdot z = 0 \Rightarrow L = \mathbb{Q}$$

$$\text{c) } 0 \cdot u = -1 \Rightarrow L = \{ \}$$

$$\text{d) } y = 13,5 \Rightarrow L = \{13,5\}$$

$$\text{e) } z = -17\frac{2}{3} \Rightarrow L = \{-17\frac{2}{3}\}$$

$$3. \text{ a) } 0 \cdot x = 0 \Rightarrow L = \mathbb{Q}$$

$$\text{b) } 0 \cdot y = \frac{1}{6} \Rightarrow L = \{ \}$$

Aufgaben zu 4.2.2.3

$$130/1. \text{ a) } 17 \quad \text{b) } -18 \quad \text{c) } 0 \quad \text{d) } \frac{1}{28} \quad \text{e) } -44,6$$

$$\text{f) } -\frac{1}{48} \quad \text{g) } \frac{20}{21} \quad \text{h) } -5\frac{143}{216}$$

$$2. \text{ a) } 0 \quad \text{b) } -2\frac{3}{8} \quad \text{c) } -2,5 \quad \text{d) } 0 \quad \text{e) } \{ \} \quad \text{f) } -0,9895$$

$$3. \text{ a) } 1 \quad \text{b) } -1446 \quad \text{c) } -25,5 \quad \text{d) } 2 \quad \text{e) } 13 \quad \text{f) } -16$$

$$4. \text{ a) } -18 \quad \text{b) } -9 \quad \text{c) } -5 \quad \text{d) } 0 \cdot x = 3,3 \Rightarrow L = \{ \} \quad \text{e) } -\frac{3}{4}$$

Aufgaben zu 4.2.2.4

$$132/1. \text{ a) } 2\frac{1}{2} \quad \text{b) } 6 \quad \text{c) } \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$$

$$2. \text{ a) } -\frac{2}{5} \quad \text{b) } -\frac{2}{5} \quad \text{c) } -14$$

$$3. \text{ a) } -7,1 \quad \text{b) } -\frac{1}{2} \quad \text{c) } -0,1$$

$$4. \text{ a) } -\frac{16}{7} \quad \text{b) } -6\frac{4}{25} \quad \text{c) } 1\frac{1}{2}$$

$$5. \text{ a) } 54 \quad \text{b) } -480 \quad \text{c) } \frac{65}{4} = 16\frac{1}{4}$$

$$6. \text{ a) } 28 \quad \text{b) } -15,6 \quad \text{c) } 1\frac{17}{64}$$

$$7. \text{ a) } -\frac{3}{10} \quad \text{b) } \frac{147}{160} = 0,91875 \quad \text{c) } 11\frac{7}{15}$$

$$8. \text{ a) } \frac{3}{7} \quad \text{b) } -136 \quad \text{c) } 1$$

Aufgaben zu 4.2.2.5

$$134/1. \text{ a) } 2 \quad \text{b) } 4 \quad \text{c) } 14 \quad 2. \text{ a) } 2 \quad \text{b) } 2 \quad \text{c) } -12$$

$$3. \text{ a) } 9 \quad \text{b) } 2 \quad \text{c) } 3\frac{1}{2} \quad 4. \text{ a) } 13 \quad \text{b) } 4 \quad \text{c) } 2$$

- 134/5. a) 0 b) 10 c) 3 6. a) 10 b) 10 c) 5
7. a) 2 b) $3\frac{2}{7}$ c) -20 8. a) 0 b) $\{ \}$
9. a) $\mathbb{Q}$ b) 4 10. a) 2 b) $1\frac{3}{5}$
- 135/11. a) 3 b) 8 12. a) 1 b) 5
13. a) 1 b) 3 14. a) 7 b) -9
15. a) -2 b) $\mathbb{Q}$ 16. a) 24 b) 1
17. a) -4 b) $5\frac{1}{2}$ 18. a) 5 b) 6
19. a) 8 b) 3,5 20. a) -25 b) 3
21. a) 16 b) 42 22. a) -60 b) 12
23. a) $-1,5$ b) 72 24. a) -7 b) 2,5
25. a) $\frac{1}{3}$ b) 0
26. a) $-2,4$ b) 9 c) 1,5 d) 2
27. a) 2 b) $\frac{77}{27}$ 28. a) 1 b) 200
- 136/29. a) 2,4 b) $-\frac{4}{3}$ c) 300 d) 54
30. a) 2 b) 4 c) 6 31. a) 2 b) 51 c) $\mathbb{Q}$ d) $\{ \}$
32. a) 15 b) 3 33. a) 24 b) 2
34. a) $-\frac{16}{3}$ b) 5 c) 9 d) -144 35. a) $\frac{7}{10}$ b) 3
36. a) 1 b) $-\frac{6}{7}$ 37. a) $\frac{115}{112}$ b) 1
38. a) -6 b) 0 39. a) $-\frac{30}{29}$ b) 50
40. a) 1 b) 26 41. a) -78 b) $-6\frac{2}{3}$
42. a) 2,22 b) $-5,5$ 43. a) $11\frac{2}{3}$ b) -5
- 137/44. a) -5 b) $\frac{1}{2}$ 45. $-\frac{11}{2}$
46. 20 47. a) $\{ \}$ b) $\mathbb{Q}$
48. a) $\mathbb{Q}$ b) $\{ \}$
49. a) $-1,05$ b) $-1\frac{8}{157} = -1,05095 \dots$
c) $-1\frac{2}{31} = -1,0645 \dots$ d) $-1\frac{1}{3} = -1,33333 \dots$

137/50. a) $-7,4$ b) $-4c$ $\mathbb{Q}$

51. a) $-\frac{913}{3140} = -0,29076 \dots$ b) $-\frac{9}{31} = -0,29032 \dots$
 c) $-\frac{1}{3} = 0,33333 \dots$

52. $-0,65$ 53. -1 54. 3 55. $-0,6$

56. -11 57. 4 58. 1 59. 5

60. 0 61. 11 62. $\frac{27}{7}$

Aufgaben zu 4.2.3

141/1. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0 e) 0 f) 0

2. a) $\{-1; 2\}$ b) $\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\}$ c) $\{\frac{1}{2}\}$
 d) $\{\frac{5}{6}, 37\frac{1}{2}\}$ e) $\{-5, \frac{8}{3}\}$ f) $\{0,6; 12\}$

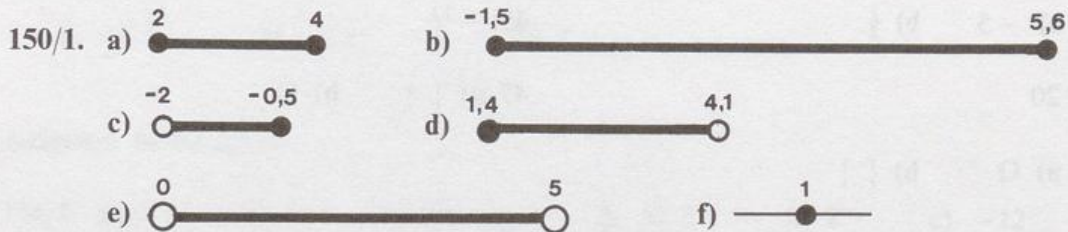
3. a) $\{-1\}$ b) $\{\frac{5}{2}\}$ c) $\{2\}$ d) $\{-9, 9\}$

4. a) $\{-\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\}$ b) $\{-5\frac{1}{2}, 1\frac{4}{5}, 7\}$
 c) $\{1, 3\frac{1}{5}\}$ d) $\{-19, 2, 3\}$

5. a) $(x-2)(x-3) = 0$ b) $(x-2)(x+3) = 0$
 c) $(x+2)(x-3) = 0$ d) $(x+2)(x+3) = 0$
 e) $(x-\frac{3}{2})(x+\frac{1}{4}) = 0$ oder $(2x-3)(4x+1) = 0$
 f) $x(x+1) = 0$ g) $x(x-1)(x+1) = 0$
 h) $(x-2)(x+2) = 0$ oder $|x| = 2$

6. a) f b) w c) f
 d) w e) f f) w
 g) w h) w i) w

Aufgaben zu 5.3.1



2. a) $[2; 3,9]$ b) $[-7; 3[$ c) $] -1; 1]$ d) $] -8,3; 16,6[$

150/3. a) 

b) 

c) 

d) 

4. a) $[-5; +\infty[$ b) $]-\infty; 7]$ c) $]-\infty; 100[$ d) $]-\infty; -13[$

5. a) $]-\infty; +\infty[$ b) $]0; +\infty[$ c) $]-\infty; 0[$
d) $[0; +\infty[$ e) $]-\infty; 0]$ f) $]3; 3[$

6.	a) $]-5; 1,5]$	b) $]-3; 5]$	c) $]-10; 20]$	d) $]-5,5; 0[$
-5	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
20	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
0	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
-3,1	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
1,5	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$

7. a) $[1; 4]$ b) $[-2; 3]$ c) $[-2; 2]$ d) $[-6; -2]$ e) $[-1; 2]$

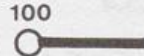
8. a) $]0; 5[$ b) $]-3; 4[$ c) $]-3; 3[$ d) $]-7; -1[$ e) $]-2; 3[$

151/9. a) $]0; 2]$ b) $[-1; 4[$ c) $[-3; 3[$ d) $\{\frac{1}{2}\}$
e) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ f) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Aufgaben zu 5.3.2

152/1. a) $x < 8$ b) $x < 5$ c) $x > 3$ d) $x > 6$ e) $x < 1$
f) $x < 1$ g) $x > -8\frac{3}{4}$ h) $x > \frac{9}{28}$ i) $x < -4\frac{1}{2}$

2. a) $]- \frac{1}{5}; +\infty[$ b) $]2; +\infty[$ c) $]-1; +\infty[$ d) $]-\infty; 5[$

3. a)  b)  c)  d) 

4. a) $]3; +\infty[$ b) $]-\infty; 6[$ c) $]-\infty; -\frac{1}{11}[$

5. a) $]1; +\infty[$ b) $]2; +\infty[$ c) $]-3; +\infty[$

6. a) $\mathbb{Q}$ b) $\mathbb{Q}$ c) $\{ \}$ d) $\{ \}$

Aufgaben zu 5.3.3

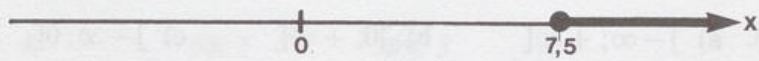
153/1. a) $] -\infty; 2]$



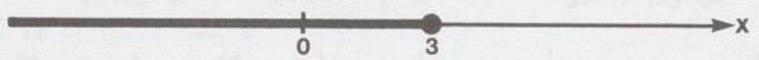
b) $] -\infty; -1]$



c) $[7,5; +\infty[$



d) $] -\infty; 3]$



e) $[-2\frac{1}{2}; +\infty[$



f) $\mathbb{Q} \setminus \{4\}$



2. a) $] -\infty; \frac{1}{2}]$

b) $] -\infty; 1]$

c) $[12; +\infty[$

d) $[0; +\infty[$

e) $] -\infty; \frac{9}{10}]$

f) $\mathbb{Q}$

154/3. a) $] -\infty; 1]$



b) $[1; +\infty[$

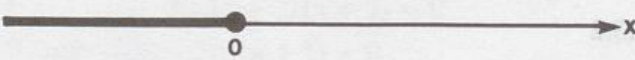


c) $[145\frac{5}{11}; +\infty[$



1. u. 2. Auflage: Ersetze $\geq$ durch $\leq$.

d) $\mathbb{Q}_0^-$



4. a) $] -\infty; 1\frac{3}{7}]$

b) $] -\infty; 3\frac{12}{53}]$

5. a) $\mathbb{Q}_0^+$

b) $\{ \}$

Aufgaben zu 5.3.4

156/1. a) $-1 < x \leq 5$

b) $-3,5 \leq x \leq 0$

c) $-10 < x \leq -7$

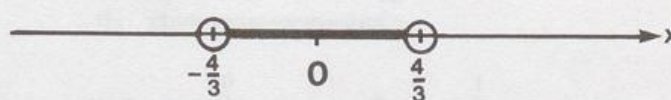
d) $15 < x < 22$

2. a) $[\frac{1}{2}; 1]$

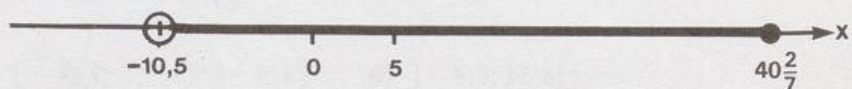


1. u. 2. Auflage: lies $0 \leq 2x - 1 \leq 1$ statt $1 \leq 2x - 1 \leq 1$.

b) $] -\frac{4}{3}; \frac{4}{3}[$



c) $] -10\frac{1}{2}; 40\frac{2}{7}]$



156/3. a) $]0; \frac{1}{2}]$ b) $[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$ c) $\{ \}$

4. a) $]0; 0,5]$ b) $] -\frac{3}{7}; \frac{3}{5}[$ c) $] -2; -\frac{2}{3}]$

5. a) $-3 < x$ $x < 1$ $-3 < 1$

b) $-3 < -10$ $] -10; -3[$

Aufgaben zu 5.3.5

158/1. a) $-4,5$ und $4,5$ b) -1986 und 1986 c) $-0,1$ und $0,1$

d) 0

e) keine Zahl

f) $-2,2$ und $2,2$.

2. a) $] -1; 1[$



b) $[-4,5; 4,5]$

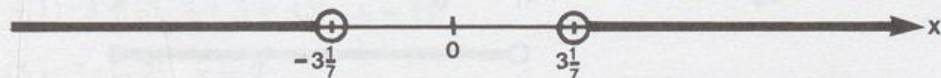


c) $\mathbb{Q}$ d) $\{ \}$

e) $] -\infty; -3,6] \cup [3,6; +\infty[= \mathbb{Q} \setminus] -3,6; 3,6[$



f) $] -\infty; -3\frac{1}{7}[\cup] 3\frac{1}{7}; +\infty[= \mathbb{Q} \setminus [-3\frac{1}{7}; 3\frac{1}{7}]$



g) $[-3,14; 3,14]$



h) $] -\infty; -\frac{8}{9}[\cup [\frac{8}{9}; +\infty[= \mathbb{Q} \setminus] -\frac{8}{9}; \frac{8}{9}]$

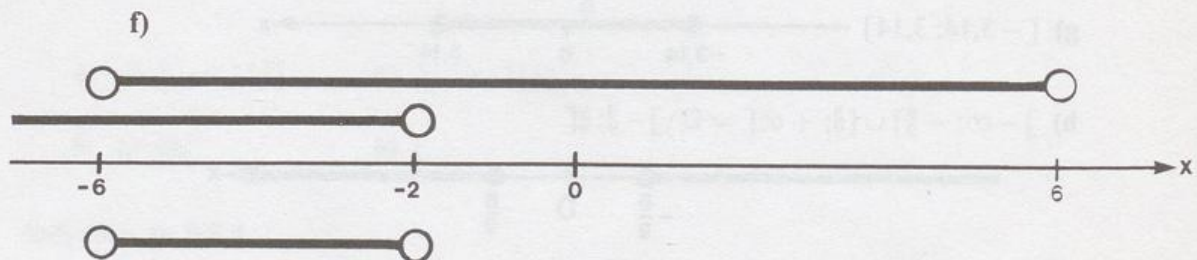
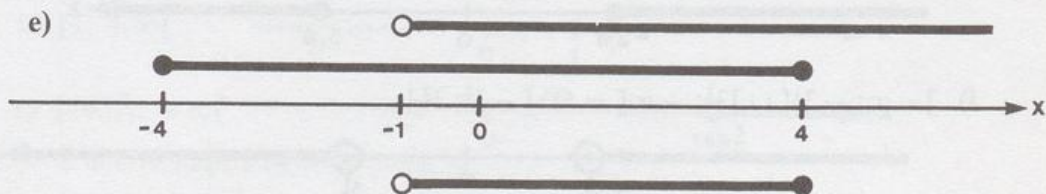
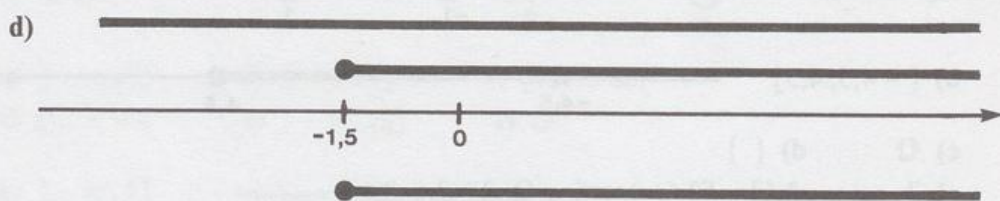
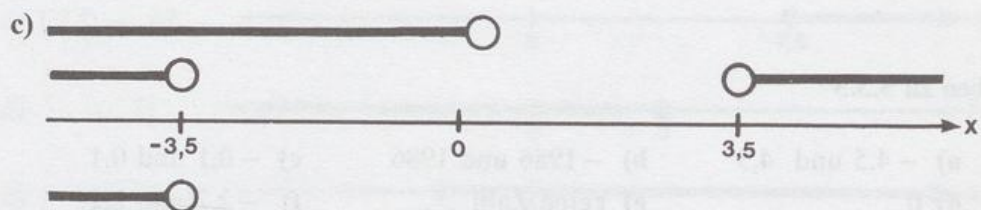
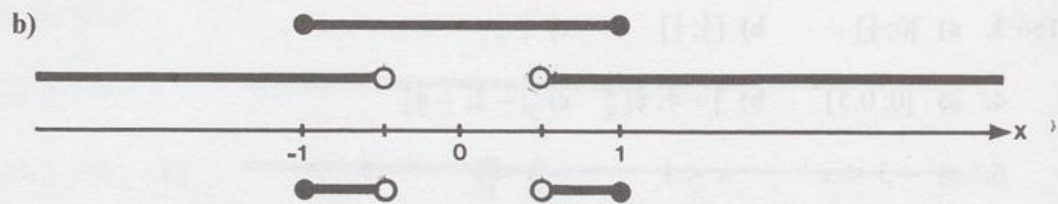


3. a)

b)

c)

4. a)



Aufgaben zu 6.1

164/1. $x + (x + 3500) = 12400$; $x = 4450$ = Anteil des jüngeren Neffen.

2. $x + (x - 3000) + (x + 2000) = 14000$; $x = 5000$ = Anteil der jüngeren Tochter.

3. $x + (x + 1500) + (x + (x + 1500) - 3500) = 19500$; $x = 5000$ = Anteil von A.

4. $100 = x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$; $x = 48 = 1$. Summand.

5. $1000 = x + 2x + 3x + 4x$; $x = 100 = 1$. Summand.

- 164/6. $4x + 2(35 - x) = 98$; $x = 14 =$ Anzahl der Kaninchen.
7. $4x + 2(20 - x) + 2 \cdot 10 = 86$; $x = 13 =$ Anzahl der PKW.
8. $4x + 6(12 - x) + 8 = 72$; $x = 4 =$ Anzahl der Güterwagen.
- 165/9. $2x \cdot 10,5 + 3x \cdot 13,5 + x \cdot 6 = 675$;
 $x = 10 =$ Anzahl der Flaschen der billigen Sorte.
10. $1718 = 83x + 106 \cdot (x + 1,5) + 34 \cdot \frac{5}{3}(x + 1,5)$; $x = 6 =$ Preis für dritten Platz.
11. $\frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}x = 5$; $x = 10\frac{15}{16} =$ Anzahl der Tou anfangs.
12. $2(2(2x - 25) - 25) - 25 = 0$; $x = 21\frac{7}{8} =$ Anzahl der Dahekan anfangs.
13. $\frac{1}{128}x - \frac{127}{64} = 1$; $x = 382 =$ Anzahl der Äpfel anfangs.
- 166/14. $x \cdot 9 = 150 + x \cdot 7$; $x = 75 =$ Anzahl der Sprünge.
15. a) $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$; $x = 84$. Diophant wurde 84 Jahre alt.
 b) $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}(x - 4) + 4 = x$; $x = 65\frac{1}{3}$. Diophant wurde $65\frac{1}{3}$ Jahre alt.

Aufgaben zu 6.2.1

- 167/1. $((2x + 1) \cdot 3 + 2) \cdot 4 + 3 = 45$; $x = \frac{11}{12}$.
2. $x + 16 = 3x - 2$; $x = 9$.
3. $((x + 5) \cdot 2 - 4) : 5 = 4$; $x = 7$. 4. $(x - 9) : 2 + 5 = x$; $x = 1$.
- 168/5. $((x + 90) : 18 + 18) \cdot 3 - 84 = 7$; $x = 132$.
6. $x + (x + 2) + (x + 4) = 33$; $x = 9$; 9, 11, 13.
7. $10x + (8 - x) = 11k$; $x = 4 =$ Einerziffer; 44.
8. $x : 2 = x - 2$; $x = 4$. 9. $x \cdot 13 = x : 13$; $x = 0$.
10. $10(x - 2) + x = 6x$; $x = 4$; 24.
11. $(60 + x) + (10x + 6) = 88$; $x = 2$; 26.
12. $(100x + 10(x + 7) + 7) + (700 + 10(x + 7) + x) = 1089$; $x = 2$; 297.
13. $(400 + x) + 243 = 10x + 4$; $x = 71$; 471.
14. $10x + 2 = (200\,000 + x) \cdot 3$; $x = 85\,714$; 857142.
15. $x + (x + 22) = 56$; $x = 17$.

Aufgaben zu 6.2.2

- 169/1. $2x = x + 32$; $x = 32$; Vater: 64 Jahre Sohn: 32 Jahre.
2. $(2x - 11) = 3 \cdot (x - 11)$; $x = 22$; Tochter: 22 Jahre Mutter: 44 Jahre.
3. a) $16 - x = (12 - x) \cdot 2$; $x = 8$ b) $16 - x = (12 - x) \cdot \frac{3}{2}$; $x = 4$.
4. $(x + 17,5) \cdot 3 + 2,5 = 13x + 17,5$; $x = 3,75$; Sohn: $3\frac{3}{4}$ Jahre Vater: $48\frac{3}{4}$ Jahre.
5. $x + (x + 6) + 2x = 50$; $x = 11$
a) 50 b) 11, 17 und 22.
6. $30 + x = 3x$ $x = 15$ 1953.
7. $4(x - 5) = 3x$; $x = 20$; Onkel: 60 Jahre, Neffe: 20 Jahre
8. $3x + 5 = 2(x + 5)$; $x = 5$; Otto: 15 Heinz: 10.
9. $19 - x = x - 13$; $x = 16$; Helga: 16.
10. $27 - 2x = x - 9$; $x = 12$; Inge: 12.
11. $1650 - 1614 = \frac{2}{3}x$; $x = 54$; Geburtsjahr: 1596 Sterbejahr: 1650.
12. $x =$ Anzahl der gemeinsamen Berufsjahre
 $50 - 2x \geq 20 \Leftrightarrow 15 \geq x$
Vater: mindestens 53 höchstens 68
Sohn: mindestens 18 höchstens 33
Zusammen immer 86.
13. Sokrates 470–399 v. Chr.; Platon 427–347 v. Chr.; Aristoteles 384–322 v. Chr.

Aufgaben zu 6.2.3

- 171/1. $x \cdot \frac{115}{100} \cdot \frac{125}{100} = x + 17,5$; $x = 40 =$ Fabrikpreis in DM.
2. $(x \cdot \frac{107}{100} - 20000) \cdot \frac{106}{100} - 20900 = x \cdot \frac{105}{100}$; $x = 500000 =$ Anfangsvermögen.
- 172/3. $\frac{3,5}{100} \cdot x = \frac{4}{100}(9240 - x)$; $x = 4928 =$ Anteil des ersten Bruders in DM, der andere erbt 4312 DM.
4. $\frac{x + 0,5}{100} \cdot 3000 = \frac{x}{100} \cdot 3375$; $x = 4$; Verzinsung 4% und 4,5%.
5. $\frac{x}{100} \cdot 2662,5 \cdot \frac{144}{360} = 49,7$; $x = 4\frac{2}{3}$.

$$172/6. \quad 6000 \cdot 1,03 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) = 6427,2; \quad x = 4.$$

$$7. \quad 1800 \cdot \frac{x}{100} + 2200 \cdot \frac{9x}{700} = 216; \quad x = 4\frac{2}{3}; \quad 4\frac{2}{3}\% \text{ und } 6\% \text{ Verzinsung.}$$

$$8. \quad \frac{1}{4}x \cdot \frac{4,5}{100} + \frac{1}{3}x \cdot \frac{4}{100} + \frac{1}{5}x \cdot \frac{3,5}{100} - \frac{13}{60}x \cdot \frac{2}{100} = 8175; \quad x = 300\,000.$$

$$9. \quad (x \cdot 1,04 + 720) \cdot \left(1 + \frac{4}{100} \cdot \frac{75}{360}\right) = 5445; \quad x = 4500.$$

$$10. \quad 1,3x - 0,3 \cdot 1,25x = 74; \quad x = 80.$$

$$11. \quad 1,14x = 889,2; \quad x = 780.$$

Aufgaben zu 6.2.4

$$174/1. \quad 2 \cdot \frac{3}{4} = x \cdot 1 \quad \text{Neue Stärke} = 1,5.$$

$$2. \quad \frac{x}{100} \cdot 1200 = 0,1 \cdot 800; \quad x = 6\frac{2}{3}; \quad 6\frac{2}{3}\% \text{ Salz.}$$

$$3. \quad 0,539 \cdot 0,02 = (0,539 + x) \cdot \frac{2}{300}; \quad x = 1,078; \quad 1,078 \text{ l.}$$

$$4. \quad x \cdot 180 = 55 \cdot 0,12; \quad x = \frac{11}{300}; \quad 3\frac{2}{3}\% \text{ Salzgehalt.}$$

$$5. \quad 255 \cdot 0,15 + 207 \cdot 0,08 = 462 \cdot x; \quad x = \frac{261}{2200}; \quad 11\frac{19}{22}\% \text{ Zuckergehalt.}$$

$$6. \quad 595 \cdot 0,15 + x \cdot 0,08 = (595 + x) \cdot 0,12; \quad x = 446,25; \quad 446,25 \text{ g der 2. Lösung.}$$

$$7. \quad 300 \cdot 0,98 = (300 + x) \cdot 0,6; \quad x = 190; \quad 190 \text{ g Wasser.}$$

$$8. \quad x \cdot \frac{4}{7} + (45 - x) \cdot \frac{7}{8} = 33; \quad x = 21; \quad 21 \text{ kg der 1. Sorte.}$$

$$9. \quad (x - 12) \cdot 0,98 = x \cdot 0,83; \quad x = 78,4; \quad 78,4 \text{ kg Spiritus.}$$

$$10. \quad 40 \cdot 0,05 = (40 + x) \cdot 0,02; \quad x = 60; \quad 60 \text{ l Süßwasser.}$$

$$11. \quad 8 \cdot 2,25 + x \cdot 1,8 = (8 + x) \cdot 2,04; \quad x = 7; \quad 7 \text{ kg der 2. Sorte.}$$

$$12. \quad 26 \cdot \frac{368}{16} + x \cdot 30 = (26 + x) \cdot 26; \quad x = 19,5; \quad 19,5 \text{ kg der 2. Sorte.}$$

$$175/13. \quad x \cdot 31,2 + (1 - x) \cdot 19,2 = 24; \quad x = \frac{2}{5}; \quad \text{Likörbohnen : Pralinen} = 2 : 3$$

$$14. \text{ a) } 0,4 \cdot 10 = 0,25 \cdot 10 + x; \quad x = 1,5; \quad 1,5 \text{ kg Wasser verdampfen}$$

$$\text{ b) } (10 + x) \cdot 0,4 = 10 \cdot 0,25 + x; \quad x = 2,5; \quad 2,5 \text{ kg reines Frostschutzmittel}$$

$$\text{ c) } 4 = x + (10 - x) \cdot 0,25; \quad x = 2; \quad 2 \text{ kg ersetzen.}$$

$$15. \quad 0,585(234 + x) = 234; \quad x = 166; \quad 166 \text{ g Kupfer.}$$

$$16. \quad 0,750x + 0,600(1 - x) = 0,700; \quad x = \frac{2}{3}; \quad \text{Verhältnis } 2 : 1.$$

$$17. \text{ a) } x = 5 \cdot \frac{14}{24}; \quad x = 2\frac{11}{12}; \quad 2\frac{11}{12} \text{ g Gold}$$

$$\text{ b) } \frac{14}{16}x = \frac{10}{16} \cdot 1200; \quad x = 857\frac{1}{7}; \quad 857\frac{1}{7} \text{ g 14lötiges Silber.}$$

Aufgaben zu 6.2.5

- 177/1. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 4)x = 1$; $x = \frac{12}{61}$. Es dauert $\frac{12}{61}$ Tage = $4\frac{44}{61}$ Stunden =
= 4 Std. 43 min $16\frac{44}{61}$ sec.
2. $(2 + 3 + 5 + 7 + 9)x = 1$; $x = \frac{1}{26}$. Es dauert $\frac{1}{26}$ Tage ≈ 55 min 23 sec.
3. $(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6})x = 1$; $x = \frac{12}{17}$. Es dauert $\frac{12}{17}$ Std. ≈ 42 min 21 sec.
4. $(\frac{1}{30} + \frac{1}{20})x = 1$; $x = 12$. Es dauert 12 Std.
- 178/5. $(\frac{1}{6} + \frac{1}{4})x = 1$; $x = \frac{5}{12}$. Es dauert $\frac{5}{12}$ Std. = 25 min.
6. $(\frac{1}{8} + \frac{1}{12}) \cdot x = \frac{5}{8}$; $x = 3$; noch 3 Tage.

Aufgaben zu 6.2.6

- 178/1. $(x - 1)x = x^2 - 11$; $x = 11$. Die Seite war 11 m lang.
2. $x(x + 2) = x^2 + 122$; $x = 61$. Die Seite war 61 cm lang.
3. $x(x + 5) = (x + 13)x - 64$; $x = 8$. Die Seiten des ursprünglichen Rechtecks waren 8 cm und 13 cm, die des neuen 21 cm und 8 cm.
4. $x + (x + 1) + (x - 2) = 20$; $x = 7$. Die Seiten sind 8 cm, 7 cm und 5 cm.
5. $2(x + 1\frac{1}{2}x) = 30$; $x = 6$. Die Seiten sind 6 cm und 9 cm.
6. $2x + 8 = 3\frac{3}{5}x$; $x = 5$. Die Schenkellänge ist 5 cm.
7. $12 = x + (x + 1) + 1\frac{1}{4}(x + 1)$; $x = 3$. Die Seiten sind 3 m, 4 m und 5 m.
8. $\frac{x + 5x}{2} = x + 4$; $x = 2$. Die Mittelparallele ist 6 cm lang.
9. $\alpha + (\alpha + 54^\circ 54') + (2\alpha + 54^\circ 54' - 103^\circ 30') = 180^\circ$;
 $\alpha = 43^\circ 28'$ $\beta = 98^\circ 22'$ $\gamma = 38^\circ 40'$.
10. $2\alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) - 4^\circ$; $\alpha = 24^\circ$; $\beta = 78^\circ$.
11. $\alpha + \frac{3}{8}(180^\circ - \alpha) + 5\alpha = 180^\circ$; $\alpha = 20^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 100^\circ$.
12. $\alpha + (\alpha - 30^\circ) + (3\alpha - 90^\circ) + \frac{7}{12}(4\alpha - 120^\circ) = 360^\circ$
 $\alpha = 75^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $\gamma = 135^\circ$; $\delta = 105^\circ$.
13. a) $(n - 2) \cdot 180^\circ = 7 \cdot 360^\circ$ $n = 16$
b) $(n - 2) \cdot 180^\circ = 5\frac{1}{2} \cdot 360^\circ$ $n = 13$.

Aufgaben zu 7.1

- 184/1. a) $pu + pv + qu + qv$ b) $ax - bx + ay - by$
 c) $3t + 15 - st - 5s$ d) $ac - ad - bc + bd$
 e) $-m + n + m^2 - mn$ f) $ux + vx + uy + vy$
2. a) $27a^2x + 297ay - 3abx - 33by$ b) $208pq + 144p - 234qr - 162r$
 c) $-\frac{4}{3}x^2 + \frac{39}{5}xy - \frac{21}{5}y^2$ d) $7,525km + 43,215lm - 2,45kn - 14,07ln$
 e) $-0,15 + 6,36a^2 + 15,84a$ f) $\frac{25}{14}p^3 + \frac{15}{14}p^2q^3 + \frac{5}{8}pq + \frac{3}{8}q^4$
3. a) $2bc - 2ad$ b) $2bd - 2bc$ c) $2ad + 2bc$
 d) $-49s - 35t - 18rt - 18rs$ e) $-15y^3 + 27y^2 + 21y - 29$
4. a) $-35a^6x^2 - 13a^4x - 92a^2x^2 + 17ax^3 + 15a^5 - 2x$
 b) $192m^4 - 24m^4n^3 - 135m^3n^3 - 48m^2n + 41mn^4 + 28mn$
5. a) $-66x^3 + 75x^2y - 110xy + 125y^2$
 b) $39abc - 30a^2b - 15a^2c + 90ab^2 - 3ac^2 + 9bc^2 + 18b^2c$
6. a) $ux + uy + uz + vx + vy + vz$
 b) $3ps - 9qs - 21rs - 2pt + 6qt + 14rt + p - 3q - 7r$
 c) $m^3 - n^3 + m^2n^2 + m^2 + n^2 - mn + m - n + 1$
 d) $5ae - 6af + 7ag - 10be + 12bf - 14bg + 15ce - 18cf + 21cg - 20de + 24df - 28dg$
7. a) $1 - x^4$ b) $1 + y^5$ c) $1 - a^8$ d) $a^3 - b^3$
8. a) $\frac{49}{2}x^3y - \frac{3}{10}x^2y - \frac{653}{40}x^2y^2 + \frac{9}{56}xy^2 + \frac{12}{7}xy^3$
 b) $0,008a^3 + 0,125b^3$ c) $\frac{27}{64}x^3 - \frac{8}{125}y^3$
9. a) $a^3 + 6a^2b + 11ab^2 + 6b^3$ b) $a^3 - 6a^2b + 11ab^2 - 6b^3$
 c) $-2x^4 + x^3 + 2x^2 - x$ d) $64 - 32x - 16x^2 + 4x^4 + 2x^5 - x^6$
10. a) $2,0736x^4 - 0,0001y^4 = (1,2x)^4 - (0,1y)^4$
 b) $\frac{32}{243}x^5 - \frac{2}{27}x^3 + \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{32}$
11. a) $24 - 50x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$ b) $24 - 14x - 13x^2 + 2x^3 + x^4$
 c) $64 - 32y + 16y^2 - 16y^3 + 4y^4 - 2y^5 + y^6$
- 185/12. $2x - 4x^2$ 13. $4x$ 15. $5ax^2 - 5a^2x$ 14. $12x - 11$
16. $15a^2b^2 + 49b^2c^2 + 16a^2c^2 - 18a^2bc - 7ab^2c - 49abc^2$
17. $-10x^4y + 18x^2y^3 - 4xy^4$
18. $x^2 - y^2 - 2z^2 + 2xy + yz + xz$

185/19. $4op - 2oq - 2pq - 2q^2$

20. $2x^2y - 2xz^2 + 2xyz - 2y^2z$

21. $235x^6 - 124x^4y - 265x^2y^2 - 246y^3$

22. $256a^8b^4 - 192a^7b^6 + 192a^6b^6 - 144a^4b^8 + 144a^6b^8 - 81a^4b^{12}$

23. $a^5b^6x^3 - 4a^7b^5x^6 + a^9b^4x^9 + 7a^{11}b^3x^{12} - 2a^{13}b^2x^{15}$

24. $-108a^3 - 13a^2b + 186ab^2$

25. $3x^3 - 16x^2 + 11x - 4$

26. $3298a^3 + 487a^2 - 3837a - 1260$

27. $5x^2 - 29x + 2$

28. $-108x^3 + 378x^2 + 66x$

29. $22y^2 - 13y - 14$

30. $6x^2 - 6x - 16$

Gleichungen und Ungleichungen

31. a) $x = \frac{23}{11}$

b) $\frac{126}{431}$

32. $x = -5$

33. $x = \frac{1}{2}$

34. $x = -\frac{11}{2}$

186/35. $x = 20$

36. $x = 16$

37. $x \geq 4$

38. $x < -\frac{13}{20}$

39. $x \geq -5$

40. $(x+2)(x+5) - x^2 = 122$; $x = 16 = \text{Quadratseite.}$

41. $x(x+3)(x-2) = x^3$; $x = 6 = \text{Kantenlänge des Würfels.}$

Aufgaben zu 7.2

188/1. a) $1 + 2x + x^2$

b) $x^2 - 2x + 1$

c) $4 + 4x + x^2$

d) $1 - 4x + 4x^2$

e) $x^6 - 6x^3 + 9$

f) $9 - 6x^2 + x^4$

2. a) $9a^2 + 24ab + 16b^2$

b) $4x^2 + 20xy + 25y^2$

c) $16x^4 - 72x^2y^2 + 81y^4$

d) $36x^2y^2 + 60xy^3 + 25y^4$

e) $49a^2b^2 - 126ab^2c + 81b^2c^2$

f) $121a^4x^2 + 286a^2x^2y + 169x^2y^2$

189/3. a) $289y^2 + 102yz + 9z^2$

b) $169p^2 - 182pq + 49q^2$

c) $196x^2 - 308x + 121$

d) $441 + 630t + 225t^2$

e) $\frac{4}{9}a^2 + \frac{12}{5}ap + \frac{81}{25}p^2$

f) $5,29c - 0,506cd + 0,0121d^2$

g) $81u^2 - \frac{108}{5}uv + \frac{36}{25}v^2$

h) $3,24r^2 + 12,96r + 12,96$

i) $\frac{9}{49}a^2 - ab + \frac{49}{36}b^2$

j) $\frac{9}{25}x^2 - 4xy + \frac{100}{9}y^2$

k) $0,01a^4b^2 + 2a^3b^3 + 100a^2b^4$

l) $\frac{9}{4900}u^6 - \frac{3}{500}u^7 + 0,0049u^8$

189/4. a) $16 - x^2$ b) $484x^4 - 1089$ c) $1 - 16x^4$

5. a) $25a^2 - 16x^2$ b) $289x^4 - 361y^4$

6. a) $256x^2 - 576y^2$ b) $144p^2 - 529q^2$
 c) $-\frac{484}{9} + \frac{324}{49}z^2$ d) $\frac{1}{16}u^2 - \frac{49}{10000}v^2$

7. a) $b^2 - a^2$ b) $a^2 - b^2$ c) $-x^2 + 2xy - y^2$ d) $-x^2 - 2xy - y^2$

8. $(u + a)(u - a) + a^2 = u^2 - a^2 + a^2 = u^2$

a) $(98 + 2)(98 - 2) = 100 \cdot 96 = 9600$
 $98^2 = 9600 + 4 = 9604$

b) $(395 + 5)(395 - 5) = 400 \cdot 390 = 156000$
 $395^2 = 156000 + 25 = 156025$

c) $(1999 + 1)(1999 - 1) = 2000 \cdot 1998 = 3996000$
 $1999^2 = 3996000 + 1 = 3996001$

d) $(2001 - 1)(2001 + 1) = 2000 \cdot 2002 = 4004000$
 $2001^2 = 4004000 + 1 = 4004001$

e) $(9999 + 1)(9999 - 1) = 10000 \cdot 9998 = 99980000$
 $9999^2 = 99980000 + 1 = 99980001$

9. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 + 4ab = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab = a^2 + 2ab + b^2$

10. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{4} = \frac{4ab}{4} = ab$

11. a) $(x + y)^2 + (x - y)^2 + (-x + y)^2 + (-x - y)^2 =$
 $= x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 =$
 $= 4(x^2 + y^2)$

b) $\frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2}{2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{2} = x^2 + y^2$

12. a) $9u^2v^2 - 12uv^3 + 4v^4$ b) $49a^4b^2 - 16a^2b^4$ c) $x^{12} + 2x^6y^3 + y^6$

d) $-(8a^2b^2 - 5c^4)^2 = -64a^4b^4 + 80a^2b^2c^4 - 25c^8$

e) $\frac{169}{49}p^4q^2r^6 - \frac{26}{7}p^2qr^3 + 1$ f) $3,61c^{10}d^2 - \frac{49}{64}d^6e^4$

13. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$

$(a + b)^2 - (a - b)^2 = ((a + b) + (a - b))((a + b) - (a - b)) = 2a \cdot 2b = 4ab$

189/14.	a	7	-4	21	$-4\frac{1}{6}$	$\frac{14}{5}$
	b	3	11	-21	$-\frac{4}{3}$	-2,8
	$(a+b)^2$	100	49	0	$\frac{1089}{36}$	0
	$a^2 + b^2$	58	137	882	$\frac{689}{36}$	$\frac{392}{25}$

190/15. $4 + 3x^2$

17. $63a^4 + 16a^3x + 60a^2x^2 + 40ax^3$

19. $x^4 - 6x^3 + 2x^2 - x - 1$

21. $6a^3 + 6a^2 - 2a - 2$

23. $\frac{4}{9}a^2 + \frac{9}{4}b^2 + 1 - 2ab + \frac{4}{3}a - 3b$

25. $\frac{7}{4}b^2 - \frac{113}{25}a^2$

16. $16a^2 + 141ax - 85x^2$

18. $115a^3 - 71a^2b + 671ab^2 - 510b^3$

20. $2x^4 - 2x^3y + 5x^2y^2 - 2xy^3$

22. 0

24. a) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

191/26. $1,58x^2 - 3,28x + 0,04$

27. a) 3481; 676; 8836; 5329; 7744; 2209; 4225; 961.

b) 8,41; 44,89; 0,2304; 0,001444; 302500; 0,0000008649.

c) $\frac{1681}{1024}$; $\frac{6724}{361}$; $\frac{2916}{2809}$; $\frac{5041}{9801}$; $\frac{3,24}{529}$; $\frac{448900}{1,44}$; $\frac{0,7225}{0,001936}$.

28. a) 899; 3575; 621; 6336.

b) 9999; 249996; 62451; 999856

c) 159,6; 4,884; $\frac{3596}{6375}$; $\frac{2401}{3596}$

29. $(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 =$
 $= 100 \cdot (a^2 + a) + 25 =$
 $= 100 \cdot a \cdot (a+1) + 25$

30. $x = -\frac{3}{2}$

31. $x = \frac{1}{2}$

32. $x = 4$

33. $x > 5$

34. $x \geq 1,5$

192/35. $x \geq 4$

36. $x > 15$

37. $4 = 0$; $L = \{ \}$.

38. $x = 0$

39. $x = \frac{5}{6}$

40. $-1 > 0$; $L = \{ \}$.

41. $(x-10)^2 = x^2 - 140$; $x = 12$ = Seite des ursprünglichen Quadrats.

42. $x(x+5) + 64 = (x+4)^2$; $x = 16$. Die Seiten des Rechtecks sind 16 cm und 21 cm.

43. $(x-2)(x+2) = (x-4)(x+10)$; $x = 6$ = Quadratseite.

44. $x(x+11) = (x+5)^2$; $x = 25$. Die Seiten des Rechtecks sind 25 cm und 36 cm.

192/45. $(x+2)(x-2)x = x^3 - 12$; $x = 3 =$ Würfelkante.

46. $x \cdot (2x+1)(2x-1) = 4x^3 - 5$; $x = 5$. Die Seiten des Quaders sind 5 cm, 11 cm und 9 cm.

47. $6(x+1)^2 = 6x^2 + 30$; $x = 2$. Der Rauminhalt ist 8 dm^3 .

Aufgaben zu 7.3

194/1. a) $u^2 + v^2 + w^2 + 2uv + 2uw + 2vw$ b) $u^2 + v^2 + w^2 + 2uv - 2uw - 2vw$
 c) $u^2 + v^2 + w^2 - 2uv - 2uw + 2vw$ d) $u^2 + v^2 + w^2 + 2uv + 2uw + 2vw$

2. a) $9x^2 + 25y^2 + 1 + 30xy + 6x + 10y$
 b) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 16xz + 24yz$
 c) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 12xy + 16xz - 24yz$
 d) $0,49a^2 + 1,21b^2 + 0,81c^2 - 1,54ab - 1,26ac + 1,98bc$
 e) $25x^4 + 9y^2 + 1 - 30x^2y - 10x^2 + 6y$
 f) $\frac{64}{5}a^2 + \frac{64}{9}b^2 + \frac{25}{16}c^2 - \frac{128}{15}ab + 4ac - \frac{20}{3}bc$
 g) $0,64x^2 + 1,44y^2 + 2,56x^2y^2 - 1,92xy + 2,56x^2y - 3,84xy^2$
 h) $0,01x^2 + 0,04x^2y^2 + 0,09y^2 - 0,04x^2y + 0,06xy - 0,12xy^2$

195/3. a) $2u^2 + 2v^2 + 2w^2 + 4vw$
 b) $-60a^2 + 15b^2 + 32c^2 + 56ac - 52bc$
 c) $16r^2 + 9s^2 + 25t^2 + 24rs - 40rt - 30st - 16a^2 - 9b^2 - 25c^2 - 24ab + 40ac + 30bc$

4.

a	a^2	ab	ac
b	ab	b^2	bc
c	ac	bc	c^2
	a	b	c

5. a) $25u^2 + 64v^2 + 36w^2 + 4 - 80uv + 60uw - 20u - 96vw + 32v - 24w$
 b) $9x^6 - 12x^5 + 10x^4 - 10x^3 + 5x^2 - 2x + 1$
 c) $289a^4 - 476a^3b + 638a^2b^2 - 374a^2b - 364ab^3 + 308ab^2 + 196b^4 - 286b^3 + 121b^2$
 d) $1,44x^4 - 0,6x^3 + 3,12x^2y^2 - 0,36x^2y - 0,0625x^2 - 0,65xy^2 + 0,075xy + 1,69y^4 - 0,39y^3 - 0,0225y^2$
 e) $\frac{1}{4}a^4 - \frac{3}{4}a^3 - \frac{1}{3}a^2b^2 + \frac{2}{3}a^2b + \frac{9}{16}a^2 + \frac{1}{2}ab^2 - ab + \frac{1}{9}b^4 - \frac{4}{9}b^3 + \frac{4}{9}b^2$

- 195/6. a) $(u+v)^2 - w^2 = u^2 + v^2 - w^2 + 2uv$
 b) $u^2 - (v+w)^2 = u^2 - v^2 - w^2 - 2vw$
 c) $u^2 - (v-w)^2 = u^2 - v^2 - w^2 + 2vw$
 d) $(2p+q)^2 - (7r)^2 = 4p^2 + 4pq + q^2 - 49r^2$
 e) $(\frac{3}{2}x)^2 - (\frac{2}{3}y - z)^2 = \frac{9}{4}x^2 - \frac{4}{9}y^2 - z^2 + \frac{4}{3}yz$
 f) $(\frac{1}{3}b)^2 - (2c - 0,5a)^2 = \frac{1}{9}b^2 - 4c^2 - 0,25a^2 + 2ac$
7. a) $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$ b) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$
8. a) $1 - x^2 - y^2 - 2xy$ b) $1 + x^2 - x^4 - 2x$
9. a) $49a^2 - 81x^2 - 121y^4 + 198xy^2$ b) $36x^4 + 169y^4 - 381x^2y^2$
10. a) $81a^2x^4 - 121a^4 - 16x^8 + 88a^2x^4$ b) $81a^2x^4 - 121a^4 + 16x^8 + 72ax^6$
11. a) $(a+b)^2 - (c+d)^2 = a^2 + b^2 + 2ab - c^2 - d^2 - 2cd$
 b) $(1-x)^2 - (x^2 - x^3)^2 = 1 + x^2 - 2x - x^4 - x^6 + 2x^5$
12. a) $(8x^3 + 7x^2y)^2 - (6xy^2 - 5y^3)^2 = 64x^6 + 49x^4y^2 + 112x^5y - 36x^2y^4 - 25y^6 + 60xy^5$
 b) $(19a^6b - 4a^4b^2)^2 - (5a^2b^3 + 18b^4)^2 = 361a^{12}b^2 + 16a^8b^4 - 152a^{10}b^3 - 25a^4b^6 - 324b^8 - 180a^2b^7$
13. a) $(a-2b)^2 - (2c-x)^2 = a^2 + 4b^2 - 4ab - 4c^2 - x^2 + 4cx$
 b) $(x^2-b)^2 - (2-y^2)^2 = x^4 + b^2 - 2bx^2 - 4 - y^4 + 4y^2$
14. a) $(a^2-x)^2 - (y-b^2)^2 = a^4 + x^2 - 2a^2x - y^2 - b^4 + 2b^2y$
 b) $(1-x^2)^2 - (x^3-x)^2 = 1 + x^4 - 2x^2 - x^6 - x^2 + 2x^4 = 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6$
 c) $(1-x)^2 - (a+ax)^2 = 1 + x^2 - 2x - a^2 - a^2x^2 - 2a^2x$
 d) $(a^3 - a^2b)^2 - (b^3 - ab^2)^2 = a^6 + a^4b^2 - 2a^5b - b^6 - a^2b^4 + 2ab^5$

Aufgaben zu 7.4.

- 197/1. a) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ b) $1 - 9a + 27a^2 - 27a^3$
 c) $8a^3 + 60a^2b + 150ab^2 + 125b^3$ d) $27a^3 - 135a^2b + 225ab^2 - 125b^3$
 e) $-a^3 + 12a^2b - 48ab^2 + 64b^3$ f) $-a^3 - 6a^2b - 12ab^2 - 8b^3$
- 198/2. a) $0,001 + 0,03u + 0,3u^2 + u^3$
 b) $-1,728r^3 + 21,6r^2s - 18rs^2 + 125s^3$
 c) $\frac{27}{8}a^3 + 9a^2b + 8ab^2 + \frac{64}{27}b^3$
3. a) $a^3 \cdot (\frac{1}{8}b^3 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{2}{3}b + \frac{8}{27})$ b) $x^3(\frac{125}{343} - \frac{6}{7}x + 6x^2 + \frac{2744}{125}x^3)$
 c) $\frac{1}{1000}(8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3)$

198/4. a) $x^3y^3(y^3 + 6y^2x + 12yx^2 + 8x^3)$

b) $a^6b^6(\frac{125}{729}a^3 - \frac{5}{9}a^2b + \frac{3}{5}ab^2 - \frac{27}{125}b^3)$

5. $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

6. a) $16a^4 + 32a^3 + 24a^2 + 8a + 1$

b) $x^5 - 15x^4y + 90x^3y^2 - 270x^2y^3 + 405xy^4 - 243y^5$

c) $x^7 - 7x^6y + 21x^5y^2 - 35x^4y^3 + 35x^3y^4 - 21x^2y^5 + 7xy^6 - y^7$

Aufgaben zu 7.5.1

199/1. a) $s(3t - 4s + 1)$

b) $x(ax + b + 1)$

c) $4a^2(-1 + 3a^3)$

d) $\frac{1}{5}y(4a + \frac{3}{2}b - \frac{2}{3}y)$

2. a) $\frac{2}{3}(a + b)$ b) $\frac{6}{5}(x - y + z)$ c) $\frac{3}{8}(u - \frac{5}{4}v)$ d) $-\frac{37}{23}(\frac{3}{2}s + \frac{2}{3}t)$

3. a) $\frac{1}{5}(2x + 3y)$ b) $\frac{1}{10}(4a - 5b)$ c) $\frac{1}{2}(r + 3s - 2t)$

d) $\frac{1}{100}(-u + 10v + 100w)$ e) $\frac{1}{60}(80 + 75x - 72z)$ f) $\frac{1}{15}(-18a + 10b - 15)$

4. a) $ac(b - d)$ b) $ab(a + b - ab)$ c) $x^2(x^2 - x + 1)$ d) $uv^3(u + v - v^2)$

5. a) $3u(2v + 2w - z)$

b) $\frac{10}{3}p(1 - 2pq)$

c) $-7x^3(\frac{1}{8}x + \frac{8}{3})$

d) $\frac{1}{34}u^2vz(49v^2 - 78uz^4)$

6. a) $13 \cdot 10 = 130$

b) $18 \cdot 20 = 360$

c) $18 \cdot 1 = 18$

d) $27 \cdot 10 = 270$

e) $83 \cdot 3 = 249$

f) $13 \cdot 0 = 0$

7. a) $54(2xy - 3x + 4y)$

8. a) $7u^2(3u^2 - u + \frac{10}{3})$

b) $\frac{2}{5}xy^2z(7y^2z - 5xz - 11x^2 + 4z - 9xy)$

b) $\frac{1}{10}xy(13x^2 + 23,5xy - 9y^2)$

9. a) $3(6a^2 - 91b)$ b) $3(3x + \frac{4}{3})$ c) $3(\frac{1}{3} - 4x)$ d) $3(\frac{a}{3} - \frac{1}{3})$.

200/10. a) $-1(3a^2 - b^2)$ b) $-1(5x - 3)$ c) $-1(1 + 8ab)$ d) $-1(-3a^2b - 5x)$

11. a) $-\frac{2}{3}(-2a + 7b)$

b) $-\frac{2}{3}(-12a + 1)$

c) $-\frac{2}{3}(\frac{3}{2} + \frac{9}{4}b)$

d) $-\frac{2}{3}(-3x - \frac{9}{2}y)$

12. a) $(v + w)(u - v + w)$

b) $(a + b - c)(x + y + z)$

c) $(2a - 3b)(m - n - p)$

d) $(2e - f)(u - 6v - 3w)$

13. a) $\frac{3}{4}(a - b)(x - y)$

b) $1,6(x - 3)(2a + 3b)$

c) $14(3y + 2z)(x - 2y)$

1. u. 2. Auflage:

$14(-3xy + 2xz - 4yz)$

14. a) $12ab^3(7x - 1)(a + 7b)$

b) $3a(1 - x)(2a^2 + 9b^2)$

c) $7xy(3x - y)(\frac{1}{4}x - y)$

d) $\frac{6}{25}(x - y)(5a + 35ab + 3b^2)$

- 200/15. a) $(a+b)(x+1)$ b) $(a-b)(x+1)$
 c) $(a-b)(x-1)$ d) nicht faktorisierbar

16. a) $(\frac{5}{2}a-b)(x-2y)$ b) $(3,7a^2b+c) \cdot 10ab^2$

17. a) $2xyz(2xy-3z+5xyz)$ b) $3a^7b^{11}c^9(abc^4+9b^4-6a^4c^2)$
 c) $a^3b^3(b-a+a^2b^2)$ d) $(x+y)^2 \cdot x \cdot y$

Aufgaben zu 7.5.2

201/1. a) $(a+b)(x+y)$ b) $(s+t)(x-y)$ c) $(a-x)(b+c)$ d) $(z-a)(x-y)$

2. a) $(2u+3v)(x+y)$ b) $(b+c)(a+1)$
 c) $(x+a)(x+b)$ d) $(x^2+1)(y^2+1)$

3. a) $(x+y)(m+n+r)$ b) $(p-q+z)(a-b)$
 c) $(r-1)(a+b+c)$ d) $(h-i)(e+f-g)$

4. a) $(x+2)(a-c+b)$ b) $(p+r+q)(u-v)$
 c) $(x-y-1)(1-z)$ d) $(1+a)(1+a^2+a^4)$

5. a) $1,1(3a-4b)(x+y)$ b) $(0,7q-0,9r)(p+s)$
 c) $(0,7u+0,4)(6v+5w)$ d) $(9b-8a)(x^2-0,4y^2)$

6. a) $(a-\frac{1}{5}b)(7x+3y)$ b) $(az+\frac{5}{7}bz)(z+\frac{3}{2}x)$
 c) $y(\frac{1}{10}x-\frac{3}{10}y)(2z-3u)$ d) $v^2(u+\frac{3}{2}a)(v-\frac{1}{4})$

7. a) $(x+4y)(a-7b)$ b) $(2a-3b)(6x-y)$
 c) $(x-y)(a+b-c+1)$ d) $(x-y)(b+c-a+1)$

8. a) $(a+2b)(3ux-vy-uy+3vx) = (a+2b)(3x-y)(u+v)$
 b) $(3a+4b)(7xz-3y-yz+21x) = (3a+4b)(7x-y)(z+3)$
 c) $(5p-q)(2st-3ru+3rt-2su) = (5p-q)(2s+3r)(t-u)$
 d) $(7d-2)(10eg-2fh-5eh+4fg) = (7d-2)(5e+2f)(2g-h)$

202/9. a) $4(u+x)(16a+9e-11b)$ b) $3(4p+9q)(2a-3b+5c)$
 c) $\frac{1}{6}(2a-3b)(y^2+4y-1)$ d) $\frac{1}{30}r^2(2u-3v)(3r^2+7s^2-5rs)$

Aufgaben zu 7.5.3

203/1. a) $(x-4)^2$ b) $(u-3v)^2$ c) $(2z+p)^2$
 d) $(7p-8q)^2$ e) $(3y^2+5)^2$ f) $(x^5+2)^2$

2. a) $(a+\frac{1}{2})^2$ b) $(3a-14)^2$ c) $(0,4x^3-0,3y)^2$
 d) $(x-1,5)^2$ e) $(4s-0,6r)^2$ f) $(2x+13)^2$

203/3. a) $(\frac{2}{3}s + \frac{4}{3}t)^2$ b) $(\frac{3}{4}u - \frac{5}{6}v)^2$ c) $(1,1 + \frac{5}{11}a)^2$ d) $(1,4x^2 - 1)^2$

4. a) $(25 - 14a)(25 + 14a)$

b) $(1 - 9x)(1 + 9x)$

c) $(\frac{3}{4}u - \frac{5}{6}v)(\frac{3}{4}u + \frac{5}{6}v)$

d) $(0,7a - 0,1b)(0,7a + 0,1b)$

5. a) $(1,5 - 0,16t)(1,5 + 0,16t)$

c) $(20xy - 11uv)(20xy + 11uv)$

b) $(\frac{8}{17}p - 1,9q)(\frac{8}{17}p + 1,9q)$

d) $(\frac{13}{18}x^2 - 1)(\frac{13}{18}x^2 + 1)$

6. a) $5(2x - 3y)(2x + 3y)$

c) $7(5p^2 - 6q^2)(5p^2 + 6q^2)$

b) $0,1(6x - 7y)(6x + 7y)$

d) $3(4xy - 7uv)(4xy + 7uv)$

7. a) $6(a + b)^2$

b) $7(x - \frac{1}{2})^2$

c) $a(a + 1)^2$

d) $3x^3(x^2 - 2)^2$

8. a) $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

b) $(x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

c) $(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$

d) $(x - y)^2(x + y)^2$

e) $(3 - 2u)^2(3 + 2u)^2 = (9 - 4u^2)^2$

f) $(8x^3 - 1)(8x^3 + 1) = (2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

9. a) $(a + b - c)(a + b + c)$

b) $(2x - 5 - 3y)(2x - 5 + 3y)$

c) $(6a + 4b - 9c)(6a + 4b + 9c)$

d) $(14u - \frac{1}{7}v - \frac{1}{11})(14u - \frac{1}{7}v + \frac{1}{11})$

e) $(a + b - x + y)(a + b + x - y)$

f) $(4u - v + 1)(4u + v - 1)$

10. a) $(-2a + 3b)(6a + 3b)$

b) $(-2a - 3b)(6a - 3b)$

c) $(2a - 3b)(6a + 3b)$

d) $(2a + 3b)(6a - 3b)$

204/11. a) $728xy$ b) $-0,08xy$ c) $4xy$ d) $-\frac{49}{3}xy$

12. a) $(a - b + c)(a + b - c)$ b) $(x - y - z)(x + y + z)$

c) $(1,7a - 0,8b + 1,3c)(1,7a + 0,8b - 1,3c)$

d) $(1,8x - 1,6y - 1,1z)(1,8x + 1,6y + 1,1z)$

13. a) $(2 + x)(a - b)(a + b)$

b) $(2x + 3y)(m - 2n)(m + 2n)$

c) $(3x + 2y)(2a - b)(2a + b)$

d) $(3p - 2q)(3p + 2q)(2x - y)(2x + y)$

14. a) $(x - y)(9a^2 - 12ab - 4b^2)$ b) $(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}xy + \frac{1}{4}y^2)(a - b)(a + b)$

204/15. a) $(a-b)(a+b)(x-y)(x+y)$ b) - c) $(1-a-b)(1+a+b)$
 d) $(a-b-1)(u-b+1)$ e) - f) - g) - h) -

16. a) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$
 $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$
 b) $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$
 c) $(7+6a^2)(49-42a^2+36a^4)$
 d) $(\frac{4}{5}x-1)(\frac{16}{25}x^2+\frac{4}{5}x+1)$
 e) $(\frac{7}{8}a+\frac{4}{3}b)(\frac{49}{64}a^2-\frac{7}{6}ab+\frac{16}{9}b^2)$
 f) $(0,1x+yz^2)(0,01x^2-0,1xyz^2+y^2z^4)$
 g) $(0,9u-100v)(0,81u^2+90uv+10000v^2)$

Aufgaben zu 7.5.4

205/1. a) $(x+3)(x+4)$ b) $(x+3)(x-4)$ c) $(x+10)(x+1)$
 d) $(x+10)(x-1)$

2. a) $(u-5)(u-8)$ b) $(a-8)(a-12)$ c) $(z-1)(z-9)$ d) -

3. a) $(x-y)(x-4y)$ b) $(y+8z)(y-7z)$
 c) $(a-6b)(a-3b)$ d) $(u+3v)(u-7v)$

4. a) $(x+8)(x-6)$ b) $(x+6)(x-8)$ c) - d) -

5. a) $2 \cdot (x+3)(x+5)$ b) $7 \cdot (x-5)(x+3)$ c) $\frac{3}{4} \cdot (x+2)(x+6)$
 d) $-(x-7)(x-5) = (7-x)(x-5)$

6. a) $3 \cdot (x-9)(x-4)$ b) $\frac{1}{4}(x-6)^2$
 c) $-\frac{1}{2}(x^2-18x+36)$ d) $0,1(a-1)(a-10)$

7. a) $-0,4(z-3)(z-4)$ b) $\frac{1}{4}(p+3q)(p-7q)$
 c) $\frac{1}{6}(x+6)(x+8)$ d) $\frac{5}{4}(y+8)(y+12)$

ISBN 3-486-02645-3



Bestell-Nr.: 02645-3