



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Anschauliche analytische Geometrie**

**Barth, Elisabeth**

**München, 2000**

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83392](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83392)

Barth · Krumbacher · Barth

ANSCHAULICHE  
ANALYTISCHE  
GEOMETRIE

Oldenbourg



# Arithmetische Algebraische Geometrie

von  
G. BIRCHER

Erste Auflage  
1988

Paderborn



# Anschauliche Analytische Geometrie

Elisabeth und Friedrich Barth  
Gert Krumbacher

*pour bien conduire sa raison et  
chercher la vérité dans les sciences*

DESCARTES

**Oldenbourg**

### Bildnachweis

Photo Deutsches Museum München: Seite 7, 12, 78, 123  
Bilderdienst Süddeutscher Verlag München: Seite 45, 136, 236, 251  
Cordon Art, Baarn, Holland. All rights reserved: S. 277

Das Papier ist aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff  
hergestellt, ist säurefrei und recyclingfähig.

© 1997 Oldenbourg Schulbuchverlag GmbH, München  
[www.oldenbourg-bsv.de](http://www.oldenbourg-bsv.de)

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt.  
Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen  
Fällen bedarf deshalb der schriftlichen Einwilligung  
des Verlags.

3. Auflage 2000  
Druck 04 03 02 01  
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Drucks.

Alle Drucke dieser Auflage sind untereinander unverändert  
und im Unterricht nebeneinander verwendbar.

Umschlaggestaltung: Gert Krumbacher  
Zeichnungen: Gert Krumbacher  
Satz: Gert Krumbacher  
Druck: freiburger graphische betriebe – [www.fgb.de](http://www.fgb.de)

ISBN 3-486-03500-2

# Inhalt

|   |     |
|---|-----|
| <i>Ein Wort voraus</i>                    | 5   |
| <b>I. Was ist Analytische Geometrie ?</b> | 7   |
| <b>II. Lineare Gleichungssysteme</b>      |     |
| 1. Bezeichnungen                          | 13  |
| 2. Das Einsetzverfahren                   | 16  |
| **3. Mathematischer Hintergrund           | 24  |
| 4. Der Gauß-Algorithmus                   | 28  |
| 5. Das Determinantenverfahren             | 35  |
| **6. Eigenschaften von Determinanten      | 41  |
| <b>III. Punkte und Vektoren im Raum</b>   |     |
| 1. Räumliche Koordinatensysteme           | 46  |
| 2. Vektoren                               | 62  |
| <b>IV. Elementare Vektorrechnung</b>      |     |
| 1. Vektorrechnung mit Koordinaten         | 79  |
| 2. Teilverhältnis                         | 89  |
| 3. Schwerpunkt                            | 95  |
| <b>V. Lineare Abhängigkeit</b>            |     |
| 1. Definitionen                           | 101 |
| 2. Anwendungen                            | 114 |
| <b>*VI. Der abstrakte Vektorraum</b>      | 124 |
| <b>VII. Geraden im Raum</b>               |     |
| 1. Geradengleichung                       | 137 |
| 2. Lage im Koordinatensystem              | 145 |
| 3. Lage zweier Geraden                    | 154 |
| Geradenscharen                            | 157 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>VIII. Ebenen</b>                      |     |
| 1. Ebenengleichungen                     | 170 |
| 2. Lage im Koordinatensystem             | 178 |
| 3. Ebene und Gerade                      | 186 |
| 4. Mehrere Ebenen                        | 191 |
| 5. Ebenenscharen                         | 198 |
| <br>                                     |     |
| <b>IX. Skalarprodukt</b>                 |     |
| 1. Länge eines Vektors                   | 204 |
| 2. Winkelberechnungen                    | 210 |
| 3. Eigenschaften des Skalarprodukts      | 218 |
| 4. Anwendungen der Orthogonalität        | 223 |
| 5. Beweise                               | 232 |
| <br>                                     |     |
| <b>*X. Vektorprodukt</b>                 |     |
| 1. Normalvektor und Parallelogrammfläche | 237 |
| 2. Spatprodukt und Spatvolumen           | 245 |
| <br>                                     |     |
| <b>XI. Normalformen</b>                  |     |
| 1. Normalform der Ebene                  | 252 |
| 2. Hesseform der Ebenengleichung         | 266 |
| 3. Normalformen von Geraden              | 272 |
| <br>                                     |     |
| <b>XII. Kugel</b>                        |     |
| 1. Kugel und Kreis                       | 278 |
| 2. Kugel und Gerade                      | 286 |
| 3. Kugel und Ebene                       | 289 |
| 4. Kugel und Kugel                       | 296 |
| <br>                                     |     |
| Register                                 | 302 |

## Ein Wort voraus

*Die Anschauliche Analytische Geometrie ist eine Einführung in die mathematische Behandlung des dreidimensionalen Raums. Schon die Algebra der Mittelstufe reicht, um Punkte, Geraden und Ebenen im räumlichen Koordinatensystem zu beschreiben, um Schnittpunkte, Schnittgeraden und Schnittwinkel sowie die Lage von Figuren exakt anzugeben. Derlei ist sonst nur konstruktiv in der Darstellenden Geometrie möglich. Doch der Vorteil einfacher Mathematik verleitet auch zu flüchtigem Kopfrechnen, Vorzeichenfehler sind so die schlimmste Fehlerquelle – für Schüler genau so wie für Lehrer!*

*Zum Rechnen kommt noch die Überlegung an räumlichen Figuren. Viele Aufgaben lassen sich zwar in sturer Rezeptanwendung lösen, doch sollte man sich auf jede Gegebenheit neu einstellen, sie sich räumlich vorstellen, am besten mit Skizzen – und bei den herausfordernden Aufgaben wird man sowieso nicht drum herumkommen, die Lösungsidee im Raumbild zu suchen. Unser Rat: möglichst oft zum Stift greifen und skizzieren, am Bild den Lösungsweg herausknobeln oder einen vermeintlichen verwerfen (was genau so wertvoll ist). Nur so entwickeln sich zeichnerische Fertigkeiten Hand in Hand mit fundierter Raumanschauung, und verblüffende, ansprechende Bilder sind die Folge.*

*Die Raumgeometrie lebt durchs Bild. Das macht ihren Reiz, das zeichnet sie vor andern mathematischen Disziplinen aus und das macht sie heute so unentbehrlich. Heute, wo Unmengen von Daten anfallen, ist Sichten, Wichten und Richten nur noch mit Elektronenrechnern zu bewältigen. Aber erst das Bild macht den Datenwust über- und durchschaubar. Verantwortungsbewusste räumliche Deutung von Röntgenbildern, zuverlässige Gelenkdiagnose, präzise Anfertigung von Prothesen, Analyse von Kristall- und Molekülstrukturen und vieles mehr verlangen vom Arzt, Biologen und Chemiker eine ebenso souveräne Raumorientierung, wie sie bei Seglern, Piloten und Raumfahrern erste Voraussetzung ist. Doch damit nicht genug. In der heute so spektakulär auftretenden Konstruktions-Software geht es knallhart raumgeometrisch zu: Nur in der räumlichen Koordinaten-Geometrie erfahrene Architekten, Bauingenieure und Maschinenbauer sind imstande, ihre Ideen am Bildschirm zu konstruieren und zu testen.*

*Wir haben uns zu einem möglichst anschaulichen Weg entschlossen: Vorrang hat die Geometrie, die lineare Algebra ist wichtiges Hilfsmittel. Die lineare Algebra ist heute wesentlicher Bestandteil in vielen Studiengängen. Sie wurzelt in der Euklidischen Geometrie, der Analytischen Geometrie und der Theorie der Systeme linearer Gleichungen. So ist umgekehrt die Geometrie eine große Hilfe zur Bildung abstrakter Begriffe der linearen Algebra. Hier und in der übrigen Mathematik beruhen ja viele Begriffe und Sätze auf geometrischen Vorstellungen. Man denke nur an Vektor, Linearität, Schnittgebilde, Parallelität und Symmetrie.*

Das Buch ist für Grund- und Leistungskurs gedacht.  
Ein Stern \* kennzeichnet Stoff, der nicht im Grundkurs-Lehrplan steht.  
Zwei Sterne \*\* stehen für Zusatzstoff. Auch Lehrer eines Grundkurses sollen die Möglichkeit haben, Hilfsmittel wie Determinanten oder Vektorprodukt einzusetzen, wenn sie der (berechtigten) Meinung sind, daß dadurch auch Grundkursler gewisse Aufgaben leichter erledigen. Die Theorie der Systeme linearer Gleichungen bildet einen eigenständigen Block. Man wird sie nach eigenem Gutdünken angemessenen dosiert da anwenden, wo man sie braucht.

Die reichhaltige Aufgabensammlung, von der Fingerübung bis zur Problemaufgabe, soll die Kraft der Analytischen Geometrie vor Augen führen und die Raumvorstellung fördern. Viele formale Aufgaben dienen zum Üben des mathematischen Kalküls. Um die Auswahl zu erleichtern, sind die Aufgaben gekennzeichnet:

empfohlene Aufgaben haben eingerahmte Nummern,

Knödel • warnen vor schwierigen oder zeitaufwendigen Aufgaben.

Koordinatenebenen sind als Quadratgitter veranschaulicht, ihre Gitterlinien haben den Abstand 1. Wenn in Bildern an den Koordinatenachsen keine Zahlen stehen, dann lassen sich Punktkoordinaten am Quadratgitter abzählen.

Elisabeth & Friedrich BARTH

Gert KRUMBACHER

## I. Was ist Analytische Geometrie ?



*René Descartes (1596 bis 1650)*

In der Geometrie der Unter- und Mittelstufe löst man geometrische Aufgaben im wesentlichen durch Konstruktion, begründet man Zusammenhänge durch Beweise. Diese Art der Geometrie heißt auch **Synthetische Geometrie** ('ganzheitliche Geometrie'). Altmeister dieser Geometrie ist EUKLID (um 300 v.Chr. in Alexandrien). Schon im Altertum beginnt man, in der Geometrie auch zu rechnen – zum Beispiel mit den Strahlensätzen, mit dem Satz von PYTHAGORAS und in der Trigonometrie.

Im Barock, Anfang des 17. Jahrhunderts, finden der französische Mathematiker Pierre de FERMAT (Beaumont de Lomagne 17(?) 8.1601 bis 12.1.1665 Castres) und der französische Philosoph und Mathematiker René DESCARTES (La Haye 31.3.1596 bis 11.2.1650 Stockholm) eine neuartige Methode, geometrische Probleme zu lösen. Die beiden gehen in entgegengesetzter Richtung vor: FERMAT setzt bei einer Koordinatengleichung an und sucht die zugehörige Kurve, während DESCARTES bei der Kurve ansetzt und die zugehörige Koordinatengleichung sucht.

FERMAT legt seine Ideen um 1635 dar in seiner Schrift »Ad locos planos et solidos isagoge« ('Einführung in die ebenen und räumlichen Figuren'). Aber erst 44 Jahre später, also 1679, wird sie von seinem Sohn Clément-Samuel veröffentlicht.

1637 erscheint DESCARTES' berühmter »Discours de la Méthode« mit der Erläuterung »pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences« ('Abhandlung über die Methode, seine Vernunft gut zu leiten und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen'). Im Anhang »La géométrie« führt er die neue mathematische Methode vor. DESCARTES gilt als der Vater der Analytischen Geometrie, denn schon am 26. März 1619 schreibt er in einem Brief an den niederländischen Mathematiker Isaac BEECKMAN sinngemäß, er habe eine völlig neue Wissenschaft entdeckt, mit der er alle Probleme der Geometrie lösen könne. DESCARTES löst sich von der konstruktiven Synthetischen Geometrie der Griechen und algebraisiert die Geometrie jetzt konsequent: Er führt einen Bezugspunkt O (Ursprung) und zwei Koordinatenachsen ein. Indem er jedem Punkt der Ebene zwei Zahlen, die Koordinaten, zuordnet, kann DESCARTES geometrische Figuren wie Geraden und Kreise als Lösungsmengen von Gleichungen algebraisch darstellen und zum Beispiel Schnittpunkte über die Lösung von Gleichungssystemen berechnen. Damit ist die Analytische Geometrie geboren! (analytisch: auf einem zergliedernden Verfahren beruhend.)

Unter **Analytischer Geometrie** versteht man heute die Verwendung der Koordinatenrechnung in der Geometrie. Sie hat sich weiterentwickelt in der reinen Mathematik zur *Algebraischen Geometrie*, in der es um Gleichungen höheren Grades geht, und zur *Differentialgeometrie*, in der man auch die Analysis (Differenzieren, Integrieren) mit einbezieht. Dabei wagt man sich auch in Räume höherer Dimension vor. In der angewandten Mathematik ist die Analytische Geometrie ein unentbehrliches Hilfsmittel für die Darstellung räumlicher Sachverhalte in Physik, Chemie und Technik. Einen neuen Aufschwung erlebt sie in unseren Tagen bei der elektronischen Verarbeitung grafischer Daten. Konstruktionsbüros, vor allem die der Automobilindustrie, kommen heute ohne Computergrafik nicht mehr aus. Und ohne Analytische Geometrie gäbs keine Computergrafik!

In der Algebra der Mittelstufe haben wir schon erste Bekanntschaft mit der Analytischen Geometrie gemacht – dazu nun zwei Beispiele:

### Schnitt von Gerade und Parabel

$$\text{Gerade } g: y = \frac{1}{2}x + 3 \quad \text{I}$$

$$\text{Parabel } p: y = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 12 \quad \text{II}$$

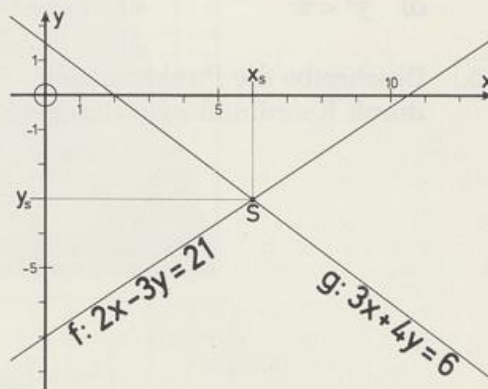
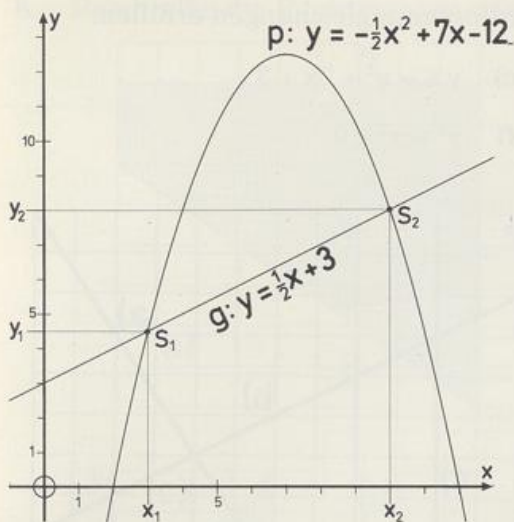
$$\text{I} - \text{II}: 0 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 15$$

$$0 = x^2 - 13x + 30$$

$$0 = (x - 3)(x - 10) \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = 10$$

$$y_1 = 4,5 \quad y_2 = 8$$

$$S_1(3 | 4,5) \quad S_2(10 | 8)$$



### Schnitt zweier Geraden

Gerade f:  $2x - 3y = 21$  I (implizite Geradengleichungen)

Gerade g:  $3x + 4y = 6$  II

$$3 \cdot \text{I} \quad 6x - 9y = 63$$

$$-2 \cdot \text{II} \quad -6x - 8y = -12$$

---


$$3 \cdot \text{I} - 2 \cdot \text{II} \quad -17y = 51$$

$$y = -3 \quad \text{eingesetzt in II: } 3x - 12 = 6 \Rightarrow x = 6 \quad \text{S}(6 | -3)$$

In der klassischen Analytischen Geometrie kommen nur lineare und quadratische Gleichungen vor. In diesem Buch werden wir uns sogar nur mit linearen Gleichungen befassen. Weil man in der Analytischen Geometrie auf Schritt und Tritt linearen Gleichungssystemen begegnet, fangen wir nicht gleich mit der Geometrie an, sondern beschäftigen uns zunächst mit dem nötigen Handwerkszeug. Die *Lineare Algebra* lehrt den Umgang mit linearen Gleichungssystemen. Davon handelt das nächste Kapitel.

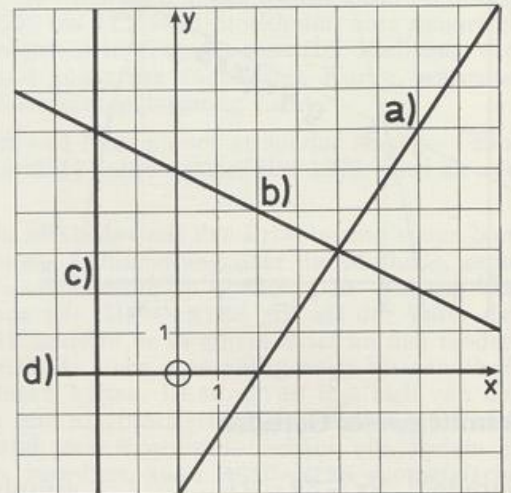
### Aufgaben

1. Zeichne die Figuren, deren Punkte die Koordinatengleichungen erfüllen:
  - a)  $y = 2x - 1$
  - b)  $2x + 3y = 6$
  - c)  $x = 5$
  - d)  $y = -2$
2. Zeichne die Figuren, deren Punkte die Koordinatengleichungen erfüllen:
  - a)  $y = x^2$
  - b)  $y^2 = x$
  - c)  $y = -(x-1)^2 + 2$
  - d)  $y = -x^2 + 4x$
3. Zeichne die Figuren, deren Punkte die Koordinatengleichungen erfüllen:
  - a)  $y = |x|$
  - b)  $|y| = x$
  - c)  $|y| = |x|$
  - d)  $|y| = x - 1$
  - e)  $|y| = -|x|$
  - f)  $|y - 1| = x - 1$
  - g)  $|y| = |x - 1|$
  - h)  $|y - 1| = |x|$

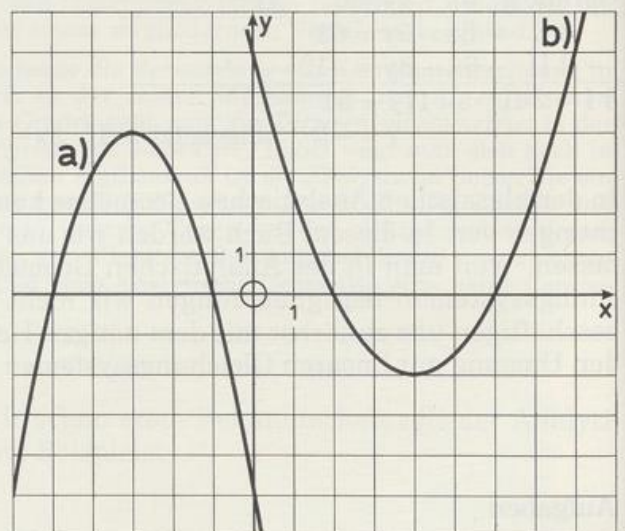
• 4. Zeichne die Figuren, deren Punkte die Koordinatengleichungen erfüllen:

- a)  $y \leq -\frac{1}{2}x + 3$       b)  $x < 2y$       c)  $y \leq -x^2 + 2x + 3$   
 d)  $y^2 < x^2$       e)  $|y| + |x| \leq 1$       f)  $y^2 - x^2 \geq 0$

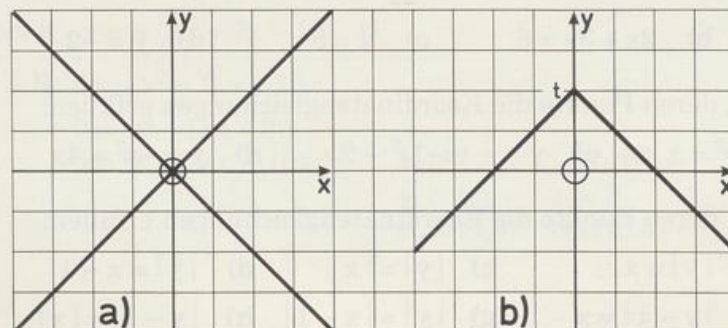
5. Beschreibe die Punktmenge durch Koordinatengleichungen:



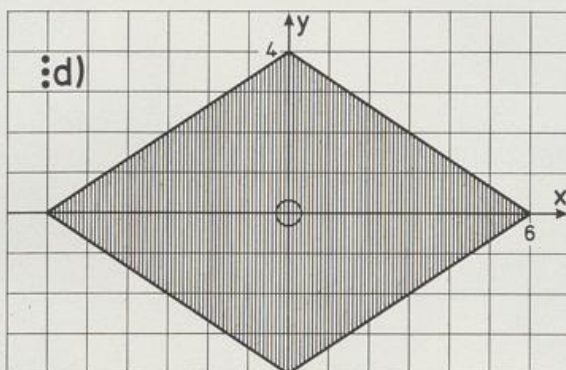
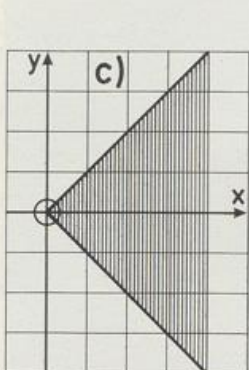
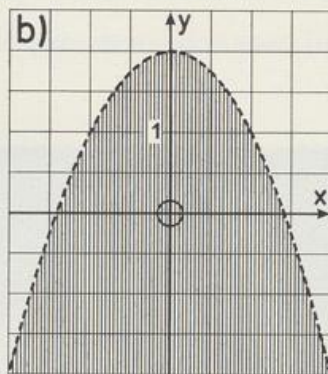
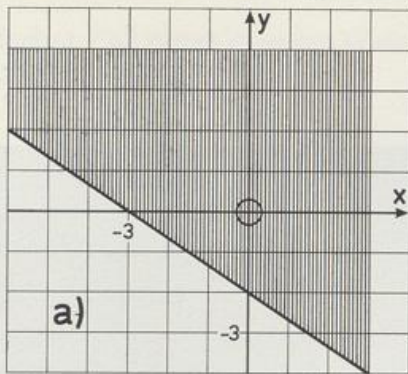
6. Beschreibe die Punktmenge durch Koordinatengleichungen:



• 7. Beschreibe die Punktmenge durch Koordinatengleichungen:



8. Beschreibe die Punktmengen durch Koordinatenungleichungen:



9. Berechne die Schnittpunkte der Geraden:

|                                      |                                     |                              |
|--------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------|
| a) $g: y = 2x$                       | b) $g: 3x - 2y = 5$                 | c) $g: y - 2 = 0$            |
| $h: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ | $h: x = 3$                          | $h: x = -2y + 4$             |
| d) $g: x - \pi = 0$                  | e) $g: 2x - 6y = 0$                 | f) $g: y = \frac{2}{3}x - 2$ |
| $h: y + \pi = 0$                     | $h: y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ | $h: x = \frac{3}{2}y + 3$    |

10. DELISCHES PROBLEM

Die Bewohner der griechischen Insel Delos sollten zur Abwendung der Pest nach einem Orakelspruch Apollon einen würfelförmigen Altar bauen, dessen Volumen doppelt so groß werden sollte wie das des vorhandenen Altarwürfels. Weil sie die Kante des neuen Würfels nicht konstruieren konnten, fragten sie PLATON um Rat, und er antwortete ihnen: Apollon braucht einen so großen Altar gar nicht, er wollte euch nur zeigen, daß ihr euch zu wenig um Mathematik kümmert und nichts von Geometrie haltet!

Wir wissen heute, daß diese Aufgabe mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist.

Die neue Kante müßte nämlich  $\sqrt[3]{2}$  mal so lang sein wie die alte, aber eine Strecke der Länge  $\sqrt[3]{2}$  ist nicht konstruierbar. Der griechische Mathematiker MENAICHMOS (4.Jh.v.Chr.) fand zwar eine Konstruktion mithilfe von Parabeln, doch als exakte Lösung im Sinn der klassischen Geometrie wurde sie natürlich nicht anerkannt.

Zeichne die Parabeln  $p: x = \frac{1}{2}y^2$  und  $q: y = x^2$  und berechne ihre Schnittpunkte.

Wieso ist damit das Delische Problem erledigt?

## II. Lineare Gleichungssysteme



*Karl Friedrich Gauß (1777 bis 1855)*

## 1. Bezeichnungen

Ein einfacher Fall eines linearen Gleichungssystems sind zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 2x - 3y = 21 \\ \text{II} \quad 3x + 4y = 6 \end{array}$$

**Linear** heißt ein Gleichungssystem, wenn in allen Gleichungen die Unbekannten höchstens in der ersten Potenz vorkommen. Weil wir künftig auch mit mehr als zwei Unbekannten arbeiten werden, numerieren wir sie und schreiben statt  $x, y, z, (?)$ ... nun  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ . Das Gleichungssystem schaut dann so aus

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 2x_1 - 3x_2 = 21 \\ \text{II} \quad 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{array}$$

Eine Lösung ist ein **Zahlenpaar**; man schreibt  $x_1 = 6, x_2 = -3$  oder kürzer  $(6 \mid -3)$  oder das ganze untereinander  $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Ein allgemeines lineares Gleichungssystem besteht aus **m Gleichungen** mit **n Unbekannten**. Man bezeichnet es auch als **m, n-System**.

Eine Lösung ist ein **n-Tupel** von Zahlen  $(x_1 \mid x_2 \mid \dots \mid x_n)$  beziehungsweise  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

Beispiel für ein 2,3-System: 
$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ \text{II} \quad x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{array}$$

Eine Lösung ist das 3-Tupel  $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , eine andere  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Statt 3-Tupel sagt man auch Tripel.

Normalerweise schreibt man die Gleichungen so, daß alle Unbekannten auf der linken Seite und die konstanten Summanden auf der rechten Seite stehen. Haben alle Konstanten den Wert null, dann nennt man das Gleichungssystem **homogen**, sonst heißt das Gleichungssystem **inhomogen**.

Beispiel für ein homogenes 3, 3-System: 
$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ \text{II} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \text{III} \quad 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{array}$$

Die Faktoren bei den Unbekannten und die Konstanten heißen **Koeffizienten** des Systems. Dank einer raffinierten Kennzeichnung sieht man sofort, an welche Stelle im System der Koeffizient hingehört:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \text{II} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \end{array}$$

.....  
(m)  $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$

$a_{32}$  ist zum Beispiel der Koeffizient in der 3. Gleichung bei der Unbekannten  $x_2$ .  
 $b_3$  ist die Konstante der 3. Gleichung.

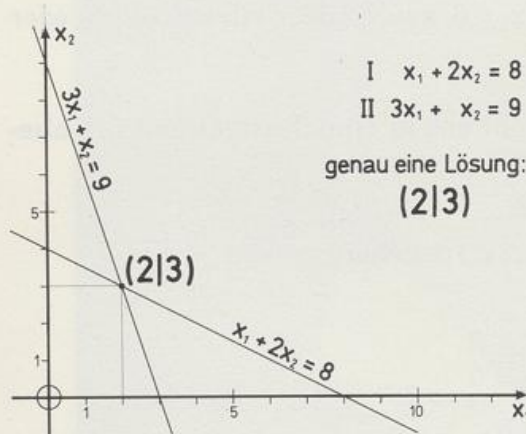
Ziel unserer Untersuchungen wird es sein, bei einem  $m, n$ -System herauszufinden:

- wann ist das System überhaupt lösbar ?
- wann hat das System genau eine Lösung ?
- wie findet man die Lösung(en) ?
- wie stellt man die Lösungsmenge übersichtlich dar ?

Erstaunlicherweise treten alle möglichen Fälle von Lösungsmengen schon bei 2,2-Systemen auf und sind durch geometrische Überlegungen sogar leicht verständlich. Man deutet die beiden Zeilen des Systems als Gleichungen von Geraden:

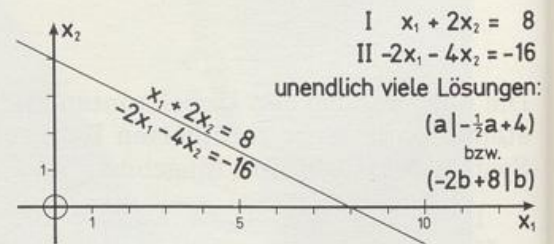
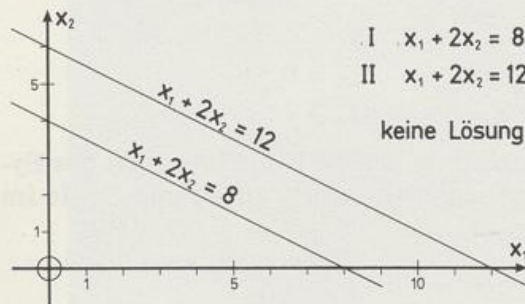
**genau eine Lösung:** I  $x_1 + 2x_2 = 8$  Lösung  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   
 II  $3x_1 + x_2 = 9$

Deutung: Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt  $(2|3)$ .



**keine Lösung:** I  $x_1 + 2x_2 = 8$   
 II  $x_1 + 2x_2 = 12$

Deutung: Die beiden Geraden sind parallel, fallen aber nicht zusammen.



**unendlich viele Lösungen:** I  $x_1 + 2x_2 = 8$  Lösung  $\begin{pmatrix} -2b + 8 \\ b \end{pmatrix}$   
 II  $-2x_1 - 4x_2 = -16$

Die Lösungsmenge kann man mit einem Parameter  $b$  darstellen. Für jeden Wert  $b \in \mathbb{R}$  ergibt sich eine andere Lösung. Deutung: Die beiden Geraden sind identisch. Die Lösungen sind die Punkte der Gerade. Der Parameter numeriert sie durch.

## Aufgaben

1. Bestimme die Lösungen und zeichne die zugehörigen Geraden:

a) I  $x_1 + x_2 = 1$       b) I  $-4x_1 + 2x_2 = -6$       c) I  $x_1 - x_2 = 0$   
II  $2x_1 - x_2 = 8$       II  $6x_1 - 3x_2 = 9$       II  $x_1 + x_2 = 0$

d) I  $6x_1 - 9x_2 = 1$       e) I  $3x_1 - 0,5x_2 = 0$       f) I  $x_1 = 1$   
II  $4x_1 - 6x_2 = 0$       II  $-6x_1 + x_2 = 0$       II  $x_2 = 2$

2. Gib ein 2,2-System an, das die Lösung  $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$  hat und

a) keine weitere Lösung hat

b) auch noch die Lösung  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  hat      c) homogen ist.

3. Ein m,2-System hat die Lösung  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Gib ein Beispiel an für  $m = 1, 2, 3$ .

Kann man es so einrichten, daß  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  jeweils die einzige Lösung ist?

4. I  $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$   
II  $2x_1 + 2x_2 = 0$       Gib die Koeffizienten an:  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{23}$  und  $b_1$ .

5. Gib ein 3,2-System an, für das gilt:

a)  $a_{11} = a_{21} = 1, \quad b_1 = -b_2 = 2 \quad a_{12} = b_3 = 0, \quad a_{31} = 2a_{32} = -a_{22} = 6$

b)  $a_{i1} = 1, \quad a_{k2} = -1, \quad b_j = j \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$

c)  $a_{ik} = i + k, \quad b_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; k = 1, 2)$

6. In einem homogenen 3,3-System gilt  $a_{21} = -1, a_{13} = a_{23} = 2$  und  $a_{ik} = -a_{ki}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ). Schreib das Gleichungssystem hin.

## 2. Das Einsetzverfahren

ist der naheliegendste Weg, ein Gleichungssystem zu lösen: Man löst **eine** Gleichung nach **einer** Unbekannten auf und ersetzt diese Unbekannte in **allen andern** Gleichungen durch den gefundenen Term. Das wiederholt man immer wieder. Wir führen das Einsetzverfahren zunächst an einigen 3,3-Systemen vor; wir haben sie so ausgewählt, daß die wichtigsten Fälle vorkommen.

### Inhomogene Gleichungssysteme

#### Genau eine Lösung

$$\begin{array}{rcl}
 \text{I} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 & \\
 \text{II} & x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 & \Rightarrow \boxed{x_1 = -x_2 - 5x_3} \text{ in I und III} \\
 \text{III} & -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 & \\
 \hline
 \text{in I} & 2(-x_2 - 5x_3) - 3x_2 + x_3 = -1 & \\
 \text{in III} & -(-x_2 - 5x_3) + 2x_2 - x_3 = 2 & \\
 \hline
 \text{I}' & -5x_2 - 9x_3 = -1 & \\
 \text{III}' & 3x_2 + 4x_3 = 2 & \Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{4}{3}x_3 + \frac{2}{3}} \text{ in I}' \\
 \hline
 \text{in I}' & -5\left(-\frac{4}{3}x_3 + \frac{2}{3}\right) - 9x_3 = -1 & \\
 & 20x_3 - 10 - 9x_3 = -3 & \\
 \text{I}'' & -7x_3 = 7 & \Rightarrow \boxed{x_3 = -1} \text{ in III}' \text{ und II} \\
 \hline
 \text{in III}' & x_3 = -1 & \\
 \text{in II} & x_2 = 2 & \\
 & x_1 = 3 & \\
 \text{Lösung:} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} & 
 \end{array}$$

Beim Einsetzverfahren geht es nur darum, Gleichungen umzuformen und Terme einzusetzen. Es kommen keine gefährlichen Umformungen vor wie Quadrieren und Multiplizieren beziehungsweise Dividieren durch Terme, die null werden könnten. So ist sichergestellt, daß weder Lösungen verloren gehen noch sich Scheinlösungen einschleichen. Allerdings muß man darauf achten, daß die Anzahl der aktuellen Gleichungen nach jedem Rechenschritt dieselbe ist. In unserm Schema heben wir die zum Einsetzen reife Gleichung mit einem Rahmen hervor. Aktuell sind dann jeweils die Gleichungen unterm Strich und die eingerahmten.

#### Keine Lösung

$$\begin{array}{rcl}
 \text{I} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 & \\
 \text{II} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 & \Rightarrow \boxed{x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3} \text{ in I und III} \\
 \text{III} & 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 5 & \\
 \hline
 \text{I}' & -7x_2 - 7x_3 = 2 & \Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{2}{7} - x_3} \text{ in III}' \\
 \text{III}' & -14x_2 - 14x_3 = 2 & \\
 \hline
 \text{III}'' & 0 = -2 & \zeta \text{ keine Lösung!}
 \end{array}$$

III'' ist eine widersprüchliche Gleichung. Wenn ein Widerspruch auftaucht, dann muß irgendwo eine Annahme stecken. Tatsächlich beruht das Lösungsverfahren auf der

Annahme, daß das Gleichungssystem mindestens eine Lösung  $(x_1 | x_2 | x_3)$  hat, die alle Gleichungen erfüllt. Stößt man beim Rechnen irgendwo auf einen Widerspruch, dann erweist sich die Annahme als falsch, das Gleichungssystem hat keine Lösung.

### Unendlich viele Lösungen

$$\begin{array}{rcl}
 \text{I} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 & \Rightarrow \boxed{x_1 = 6 - 2x_2 + 3x_3} \\
 \text{II} & 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 & \\
 \text{III} & 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 14 & \\
 \hline
 \text{II}' & -5x_2 + 10x_3 = -10 & \Rightarrow \boxed{x_2 = 2 + 2x_3} \\
 \text{III}' & -5x_2 + 10x_3 = -10 & \\
 \hline
 \text{III}'' & -10 - 10x_3 + 10x_3 = -10 & \\
 & 0 = 0 & 
 \end{array}$$

Die aktuellen Gleichungen reichen nicht aus, um die Unbekannten eindeutig zu bestimmen. Wenn  $x_3$  bekannt wäre, dann ließen sich die dazu passenden Werte für  $x_2$  und  $x_1$  berechnen. So findet man zum Beispiel für  $x_3 = -1$  die Lösung  $(3 | 0 | -1)$  und für  $x_3 = 0$  die Lösung  $(2 | 2 | 0)$ . Weil  $x_3$  frei wählbar ist, gibt es unendlich viele Lösungen (abhängig von  $x_3$ ). Eine frei wählbare Größe heißt auch freier **Parameter**. Man bezeichnet Parameter mit einem kleinen griechischen, manchmal auch lateinischen Buchstaben. Setzt man  $x_3 = \lambda$ , dann bekommt man durch Einsetzen in die eingerahmten Gleichungen

$$x_2 = 2 + 2\lambda \text{ und } x_1 = 2 - \lambda \text{ oder } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 2 + 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Weil die Lösungsmenge genau **einen** freien Parameter enthält, sagt man, daß das System  $\infty^1$  **Lösungen** hat (sprich: unendlich hoch eins). Zur besseren Übersicht trennt man in der Lösung den konstanten Teil vom parameterabhängigen Teil und schreibt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 2 + 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 2 + 2\lambda \\ 0 + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{zeilenweise Addition})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Parameter abspalten})$$

$$\text{Lösung: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \boxed{1}$$

Die Darstellung der Lösungsmenge ist nicht eindeutig, sie hängt ab vom Lösungsweg. Das letzte Gleichungssystem jetzt anders gelöst:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{I} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 & \\
 \text{II} & 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 & \Rightarrow \boxed{x_2 = 2x_1 + 4x_3 - 2} \\
 \text{III} & 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 14 & \\
 \hline
 \text{I}' & 5x_1 + 5x_3 = 10 & \Rightarrow \boxed{x_3 = 2 - x_1} \\
 \text{III}' & 10x_1 + 10x_3 = 20 & \\
 \hline
 \text{III}'' & 0 = 0 & 
 \end{array}$$

Nun ist  $x_1$  die einzige Unbekannte, die nicht links vorkommt; deshalb ernennen wir sie zum freien Parameter  $\mu$ . Wir setzen  $x_1 = \mu$  und bekommen durch Einsetzen in die eingerahmten Gleichungen

$$x_3 = 2 - \mu \text{ und } x_2 = 6 - 2\mu \text{ oder } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 6 - 2\mu \\ 2 - \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Lösung: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \quad \boxed{2}$$

Bei Wahl von  $x_2$  als freien Parameter hätte sich ergeben

$$\text{Lösung: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \sigma \in \mathbb{R} \quad \boxed{3}$$

Ein Vergleich von  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{2}$  und  $\boxed{3}$  zeigt, daß sich die Anteile beim Parameter nur in einem Faktor unterscheiden

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 1/2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die konstanten Anteile – das sind die Lösungen, die jeweils zum Parameterwert 0 gehören – zeigen keinerlei Ähnlichkeit. Trotzdem sind die drei Darstellungen gleichwertig, denn jedes Lösungstriplett ist in jeder Darstellung enthalten: In  $\boxed{3}$  liefert  $\sigma = 4$  das Triplett  $(1 | 4 | 1)$ , dasselbe Triplett ergibt sich für  $\mu = 1$  in  $\boxed{2}$  beziehungsweise für  $\lambda = 1$  in  $\boxed{1}$ .

Es gibt auch Gleichungssysteme, deren Lösungsmengen mehr als einen Parameter enthalten. Dazu ein Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} \text{I} & 0,5x_1 - 4x_2 + 0,5x_3 & = 3 \\ \text{II} & -x_1 + 8x_2 - x_3 & = -6 \Rightarrow \boxed{x_1 = 8x_2 - x_3 + 6} \\ \text{III} & 0,25x_1 - 2x_2 + 0,25x_3 & = 1,5 \\ \hline \text{I}' & & 0 = 0 \\ \text{III}' & & 0 = 0 \end{array}$$

$x_2$  und  $x_3$  sind frei wählbar und werden deshalb zu Parametern ernannt:

$$\text{in II} \quad \begin{array}{l} x_2 = \lambda \text{ und } x_3 = \mu \\ x_1 = 6 + 8\lambda - \mu \end{array}$$

$$\text{Lösung: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Weil hier **zwei** freie Parameter vorkommen, spricht man von  $\infty^2$  **Lösungen**. Auch hier sind andere Darstellungen der Lösungsmenge möglich. Hätte man zum Beispiel Gleichung II nach  $x_3$  aufgelöst, dann wären  $x_1$  und  $x_2$  die freien Parameter:

$$\begin{array}{l} \text{II} \Rightarrow \boxed{x_3 = 6 - x_1 + 8x_2} \\ \text{I}' \quad 0 = 0 \\ \text{III}' \quad 0 = 0 \end{array}$$

in II  $x_1 = \sigma$  und  $x_2 = \tau$   
 $x_3 = 6 - \sigma + 8\tau$

**Lösung:**  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$

### Homogene Gleichungssysteme

Wie verändern sich die Lösungen, wenn man die rechten Seiten der Gleichungen null setzt, das heißt, zu homogenen Systemen übergeht? Wir rollen die Sache von hinten auf und untersuchen zuerst inhomogene Systeme mit unendlich vielen Lösungen. Das homogene System, das zum inhomogenen System mit  $\infty^1$  Lösungen (Seite 17) gehört, lautet:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -2x_2 + 3x_3} \\ \text{II} \quad 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ \text{III} \quad 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ \hline \text{II}' \quad -5x_2 + 10x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2x_3} \\ \text{III}' \quad -5x_2 + 10x_3 = 0 \\ \hline \text{III}'' \quad 0 = 0 \end{array}$$

$x_3 = \lambda$  (freier Parameter, es gibt  $\infty^1$  Lösungen)  $\Rightarrow x_2 = 2\lambda$  und  $x_1 = -\lambda$ ,

zusammengefaßt zur **Lösung:**  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$  oder

(anderer Lösungsweg): **Lösung:**  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$

Auch das homogene System hat  $\infty^1$  Lösungen.

Nun zum System mit den  $\infty^2$  Lösungen. Das zugehörige homogene System ist:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 0,5x_1 - 4x_2 + 0,5x_3 = 0 \\ \text{II} \quad -x_1 + 8x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 8x_2 - x_3} \\ \text{III} \quad 0,25x_1 - 2x_2 + 0,25x_3 = 0 \\ \hline \text{I}' \quad 0 = 0 \\ \text{III}' \quad 0 = 0 \end{array}$$

in II  $x_2 = \lambda$  und  $x_3 = \mu$  (zwei freie Parameter, also  $\infty^2$  Lösungen)  
 $x_1 = 8\lambda - \mu$

**Lösung:**  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Es fällt auf:

- der konstante Anteil ist  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  (wird deshalb meistens weggelassen)
- die Lösung des homogenen Systems ist gerade der parameterabhängige Anteil der Lösung des inhomogenen Systems.

Diese Übereinstimmung verwundert nicht: An der Variablenrechnung hat sich nichts geändert, und die Konstanten der rechten Seite sind alle gleich null. Der Parameteranteil wird allein von der Variablenrechnung festgelegt.

Jetzt behandeln wir das Beispiel, das im inhomogenen Fall keine Lösung hat.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{I} & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 & \\
 \text{II} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 & \Rightarrow \boxed{x_1 = -2x_2 - 3x_3} \\
 \text{III} & 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 0 & \\
 \hline
 \text{I}' & -7x_2 - 7x_3 = 0 & \Rightarrow \boxed{x_2 = -x_3} \\
 \text{III}' & -14x_2 - 14x_3 = 0 & \\
 \hline
 \text{III}'' & 0 = 0 & 
 \end{array}$$

$$x_3 = \lambda, \quad x_2 = -\lambda, \quad x_1 = -\lambda \quad \text{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Obwohl das inhomogene System keine Lösung hat, gibt es beim homogenen System Lösungen (sogar unendlich viele!). Das sollte uns eigentlich nicht überraschen, denn jedes homogene System hat zumindest die Lösung, bei der alle Unbekannten gleich null sind. Diese Lösung heißt auch **triviale Lösung**\*. Ein homogenes System kann also nie unlösbar sein, die triviale Lösung gibts garantiert.

Zum Schluß rechnen wir das Beispiel, das im inhomogenen Fall genau eine Lösung hat.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{I} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 & \Rightarrow \boxed{x_3 = 3x_2 - 2x_1} \\
 \text{II} & x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 & \\
 \text{III} & -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & \\
 \hline
 \text{II}' & -9x_1 + 16x_2 = 0 & \\
 \text{III}' & x_1 - x_2 = 0 & \Rightarrow \boxed{x_2 = x_1} \\
 \hline
 \text{II}'' & 7x_1 = 0 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{in III}' \quad x_1 = 0 \\
 \text{in I} \quad x_2 = 0 \\
 \quad x_3 = 0
 \end{array}
 \quad \text{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{triviale Lösung})$$

Auch das homogene System hat genau eine Lösung, und die muß dann die triviale sein.

\* trivial = selbstverständlich

Als Trivium (=Dreiweg) bezeichnete man die ersten drei Fächer der sieben *Artes Liberales*, die in den Klosterschulen des Mittelalters als elementare Vorstufe des Studiums gelehrt wurden: Grammatik, Dialektik und Rhetorik. Danach folgte das anspruchsvollere Quadrivium (=Vierweg) mit: Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik. Deswegen nennt man besonders einfache Dinge auch trivial.

Das Einsetzverfahren funktioniert freilich auch bei 4,4-Systemen, 5,5-Systemen usw. Auch hier sind genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen möglich. Die Anzahl der freien Parameter kann entsprechend der Anzahl der Unbekannten steigen. Das Einsetzverfahren führt auch dann zum Ziel, wenn die Anzahl der Gleichungen nicht übereinstimmt mit der Anzahl der Unbekannten. Dazu zwei Beispiele:

**4,2-System**

|       |                     |                  |
|-------|---------------------|------------------|
| I     | $2x_1 - x_2 = 5$    | $x_2 = 2x_1 - 5$ |
| II    | $-3x_1 + 2x_2 = -8$ |                  |
| III   | $x_1 + 3x_2 = -1$   |                  |
| IV    | $4x_1 + 3x_2 = 4$   |                  |
|       |                     |                  |
| II'   | $x_1 = 2$           | $x_1 = 2$        |
| III'  | $7x_1 = 14$         |                  |
| IV'   | $10x_1 = 19$        |                  |
|       |                     |                  |
| III'' | $14 = 14$           |                  |
| IV''  | $20 = 19$           | ⚡                |

Das System hat keine Lösung.

Wie das Beispiel zeigt, genügt es nicht, aus dem System einige Gleichungen herauszupicken und daraus »Lösungen« zu produzieren (die ersten beiden Gleichungen würden zur »Lösung«  $(2 \mid -1)$  führen). Weil **alle** Gleichungen erfüllt sein müssen, muß man die »Lösung« an den restlichen Gleichungen überprüfen ( $(2 \mid -1)$  löst zwar noch die dritte, aber nicht mehr die vierte Gleichung).

**2,4-System**

|    |                              |                        |
|----|------------------------------|------------------------|
| I  | $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 4$ |                        |
| II | $x_1 + x_3 - 2x_4 = -5$      | $x_1 = 2x_4 - x_3 - 5$ |
| I' | $3x_2 + 3x_4 = 9$            | $x_4 = -x_2 + 3$       |

Weil  $x_2$  und  $x_3$  nicht links vorkommen, wählen wir sie als freie Parameter  $x_2 = \lambda$ ,  $x_3 = \mu$ . Einsetzen in die eingerahmten Gleichungen liefert  $x_4 = 3 - \lambda$  und  $x_1 = 1 - 2\lambda - \mu$ .

Lösung: 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Systeme mit mehr Gleichungen als Unbekannten heißen auch **überbestimmte Systeme**. Normalerweise haben sie keine Lösung. Systeme mit weniger Gleichungen als Unbekannten heißen **unterbestimmte Systeme**. Normalerweise haben sie unendlich viele Lösungen.

Man kann zeigen: Enthält das System keinen Widerspruch, dann gilt:

$$\boxed{\text{Anzahl der Unbekannten}} - \boxed{\text{Anzahl der Gleichungen}} \leq \boxed{\text{Anzahl der freien Parameter}}$$

## Aufgaben

1. Löse die Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 10x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ & 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ & -19x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \\ & 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ & 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ & 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad & 4x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ & -2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ & -x_1 - x_2 + 4x_3 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ & -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ & 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad & -\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 0 \\ & 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ & \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ & 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ & 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{aligned}$$

2. Löse die Gleichungssysteme und die zugehörigen homogenen Systeme:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ & 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ & 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 17x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ & x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ & 4x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ & 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 8 \\ & -6x_1 + 3x_2 - 9x_3 = -12 \end{aligned}$$

• 3. Einfach – aber nicht leicht (jedes System ist ein 3,3-System!)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x_1 + x_2 = -2 \\ & x_2 + x_3 = -2 \\ & x_1 + x_3 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & x_1 = 3 \\ & 8x_3 = 4 \\ & 2x_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & x_1 + 2x_3 = 3 \\ & -x_1 + 8x_3 = 7 \\ & x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ & x_3 = 2 \\ & 4x_1 - x_2 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & 2x_1 + 3x_3 = 4 \\ & 4x_1 + 6x_3 = 8 \\ & -6x_1 - 9x_3 = -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & x_1 = x_2 \\ & x_2 = x_3 \\ & x_3 = x_1 \end{aligned}$$

#### 4. Kleine Ursache – große Wirkung

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2,01x_1 + x_2 + x_3 = 201 \\ & x_1 + x_3 = 200 \\ & -x_2 + x_3 = 200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 201 \\ & x_1 + x_3 = 200 \\ & -x_2 + x_3 = 200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 200 \\ & x_1 + x_3 = 200 \\ & -x_2 + x_3 = 200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 1,99x_1 + x_2 + x_3 = 201 \\ & x_1 + x_3 = 200 \\ & -x_2 + x_3 = 200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & 2,01x_1 + x_2 + x_3 = 200 \\ & x_1 + x_3 = 200 \\ & -x_2 + x_3 = 200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & 1,99x_1 + x_2 + x_3 = 200 \\ & x_1 + x_3 = 200 \\ & -x_2 + x_3 = 200 \end{aligned}$$

#### • 5. Bestimme die Parameter so, daß das System die angegebene Lösung hat:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2x_1 + ax_2 + x_3 = -4 \\ & bx_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ & 6x_1 - x_2 + cx_3 = 3a \end{aligned}$$

$$\text{Lösung: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & 2x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ & x_1 + x_3 = 0 \\ & -x_2 + ax_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Lösung: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ & 6x_1 + ax_2 - x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Lösung: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & -3x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ & x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0 \\ & -x_2 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

Das System hat  $\infty^1$  Lösungen.

#### 6. Parabeln durch gegebene Punkte

Bestimme die Koeffizienten von  $y = ax^2 + bx + c$  so, daß die zugehörige Parabel durch die angegebenen Punkte geht.

$$\text{a)} \quad P(1 | 1) \quad Q(-2 | -2) \quad R(3 | -7)$$

$$\text{b)} \quad S(0 | -3) \quad T(1 | -1) \quad U(2 | 3)$$

$$\text{c)} \quad I(1 | 1) \quad J(-1 | -1) \quad K(2 | 14)$$

$$\text{d)} \quad E(1 | 1) \quad F(2 | 3) \quad G(-1 | -3)$$

$$\text{e)} \quad U(1 | 0) \quad V(0 | 1)$$

$$\text{f)} \quad W(1 | 2)$$

#### 7. Bestimme die Lösungen der 4,4-Systeme

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \\ & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ & -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ & x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ & -x_1 + x_2 = 0 \\ & -3x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & 2x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ & 3x_2 + 5x_3 = 21 \\ & 3x_1 - 4x_4 = -13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ & 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 3 \\ & -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -2 \\ & 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 4 \end{aligned}$$

### 8. Überbestimmte Systeme

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = -5 \end{array} & \text{b)} \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = -5 \\ -3x_1 + 2x_2 = 11 \\ 4x_1 - x_2 = -13 \end{array} & \text{c)} \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{array} \\ \text{d)} & \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{array} & & \text{• e)} \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 - 4x_2 = -2 \end{array} \end{array}$$

### 9. Unterbestimmte Systeme

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{l} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + \frac{2}{3}x_2 - x_3 = -3 \end{array} \\ \text{c)} & \begin{array}{l} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 2x_1 - \frac{2}{3}x_2 + x_3 = 0 \end{array} & \text{d)} & \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \end{array} \\ \text{e)} & \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = 3 \end{array} & \text{f)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{array} \end{array}$$

### \*\* 3. Mathematischer Hintergrund

Zwischen den Lösungen eines inhomogenen und des zugehörigen homogenen Systems besteht ein einfacher Zusammenhang. Sind  $(u_1 | u_2 | \dots | u_n)$  und  $(v_1 | v_2 | \dots | v_n)$  zwei Lösungen eines inhomogenen  $m, n$ -Systems, dann ist  $(u_1 - v_1 | u_2 - v_2 | \dots | u_n - v_n)$  eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Das sieht man sofort ein, wenn man die  $i$ -ten Gleichungen des inhomogenen Systems nach dem Einsetzen voneinander subtrahiert

$$\begin{array}{l} a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n = b_i \\ a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n = b_i \\ \hline \Rightarrow a_{i1}(u_1 - v_1) + a_{i2}(u_2 - v_2) + \dots + a_{in}(u_n - v_n) = 0 \end{array}$$

Das ist die  $i$ -te Gleichung des zugehörigen homogenen Systems. Die Differenz zweier Lösungen des inhomogenen Systems ist also eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Folglich ist **jede** Lösung des inhomogenen Systems darstellbar als Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und einer Lösung des homogenen Systems. Es kommen sogar **alle** Lösungen des homogenen Systems vor, es gilt nämlich:

**Alle** Lösungen des homogenen Systems ergeben sich als Differenz zweier Lösungen des inhomogenen Systems.

*Begründung:* Ist  $(h_1 | h_2 | \dots | h_n)$  irgendeine Lösung des homogenen Systems und  $(v_1 | v_2 | \dots | v_n)$  irgendeine Lösung des inhomogenen Systems, dann ist  $(h_1 + v_1 | h_2 + v_2 | \dots | h_n + v_n)$  eine Lösung des inhomogenen Systems: Setzt man  $(h_1 + v_1 | h_2 + v_2 | \dots | h_n + v_n)$  in die linke Seite der  $i$ -ten Gleichung des inhomogenen Systems ein, dann ergibt sich:

$$a_{i1}(h_1 + v_1) + a_{i2}(h_2 + v_2) + \dots + a_{in}(h_n + v_n) =$$

$$\underbrace{(a_{i1}h_1 + a_{i2}h_2 + \dots + a_{in}h_n)}_0 + \underbrace{(a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n)}_{b_i} = b_i$$

qed.

Das alles faßt man zusammen in dem Satz:

**Die allgemeine Lösung eines inhomogenen Systems läßt sich darstellen als Summe einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems.**

Unter allgemeiner Lösung versteht man eine Lösung, die mindestens einen Parameter enthält. Eine allgemeine Lösung beschreibt eine Lösungsmenge. Ersetzt man in einer allgemeinen Lösung alle Parameter durch Zahlen, dann bekommt man eine spezielle Lösung. Genau das haben unsere Beispiele ergeben:

**inhomogenes System**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 14 \end{aligned}$$

allgemeine Lösung :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**zugehöriges homogenes System**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

allgemeine Lösung :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{spezielle Lösung des inhomogenen Systems}} + \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems}}$$

Jedes homogene System hat mindestens eine Lösung, nämlich die triviale. Gibt es eine weitere Lösung, dann gibt es gleich unendlich viele. (Nr. 4 der folgenden Aufgaben)

**Ein homogenes System kann nur genau eine oder unendlich viele Lösungen haben.  
Ein inhomogenes System kann keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben.**

Ferner gilt: **Wenn ein homogenes System genau eine, also nur die triviale Lösung hat, dann hat auch jedes zugehörige inhomogene System genau eine Lösung.**

Den Beweis bringen wir später.

## Übersicht über die Anzahlen von Lösungen

| das inhomogene System hat | das zugehörige homogene System hat           |
|---------------------------|--|
| keine Lösung              | $\infty^1$ oder $\infty^2$ oder ... Lösungen |
| genau eine Lösung         | genau eine Lösung (die triviale)             |
| $\infty^1$ Lösungen       | $\infty^1$ Lösungen                          |
| $\infty^2$ Lösungen       | $\infty^2$ Lösungen                          |
| usw.                      | usw.   |

| das homogene System hat | jedes zugehörige inhomogene System hat |
|-------------------------|--|
| genau eine Lösung       | genau eine Lösung                      |
| $\infty^1$ Lösungen     | keine oder $\infty^1$ Lösungen         |
| $\infty^2$ Lösungen     | keine oder $\infty^2$ Lösungen         |
| usw.                    | usw.                                   |

### Aufgaben

1. a) 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$$
 Jemand behauptet,  $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$  liefere Lösungen des Gleichungssystems. Wie ist eine Probe möglich?

b) Begründe den Satz:

Sind  $\begin{pmatrix} \dots \\ x_i \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ r_i \\ \dots \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \dots \\ u_i \\ \dots \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \dots \\ v_i \\ \dots \end{pmatrix}$  mit  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  Lösungen des Gleichungssystems

mit der i-ten Zeile  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ , dann erfüllt  $\begin{pmatrix} \dots \\ r_i \\ \dots \end{pmatrix}$  das

Gleichungssystem und  $\begin{pmatrix} \dots \\ u_i \\ \dots \end{pmatrix}$  bzw.  $\begin{pmatrix} \dots \\ v_i \\ \dots \end{pmatrix}$  das zugehörige homogene

Gleichungssystem.

2. 
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a) Löse das Gleichungssystem.

Zeige: b) Ist  $\begin{pmatrix} \dots \\ a_i \\ \dots \end{pmatrix}$  eine Lösung, dann ist es auch  $k \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ a_i \\ \dots \end{pmatrix}$ .

c) Sind  $\begin{pmatrix} \dots \\ a_i \\ \dots \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \dots \\ b_i \\ \dots \end{pmatrix}$  Lösungen, dann ist es auch  $\begin{pmatrix} \dots \\ a_i + b_i \\ \dots \end{pmatrix}$ .

• 3. Zeige allgemein:

a) Hat man eine Lösung eines homogenen Systems, dann ist auch jedes Vielfache eine Lösung.

b) Hat man zwei Lösungen eines homogenen Systems, dann ist auch ihre Summe eine Lösung.

c) a) und b) sind falsch für echte inhomogene Systeme.

4. Zeige: Hat ein homogenes System mehr als eine Lösung, dann hat es gleich unendlich viele.

5. Unendlich viel oder nichts

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a) Bestimme die Lösung.

b) Gib ein zugehöriges inhomogenes System an, das keine Lösung hat.

c) Gib ein zugehöriges inhomogenes System an, das  $\infty^1$  Lösungen hat.

d) Warum gibt es kein zugehöriges inhomogenes System, das genau eine Lösung oder  $\infty^2$  Lösungen hat?

• 6. Zeige: Kommt eine Unbekannte  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , in einem homogenen System nicht vor, dann gibt es unendlich viele Lösungen.

Dieser Satz ist falsch für inhomogene Systeme!

Zeige dies durch ein Gegenbeispiel.

• 7. Zeige: Ein homogenes System mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat unendlich viele Lösungen.

Dieser Satz ist falsch für inhomogene Systeme!

Zeige dies durch ein Gegenbeispiel.

#### 4. Der Gauß-Algorithmus

Besonders schnell lassen sich lineare Gleichungssysteme lösen, wenn sie in »Dreieckform« vorliegen:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 & \boxed{x_1 = 5 - 3x_2 - x_3} \\ x_2 - 2x_3 = 6 & \boxed{x_2 = 6 + 2x_3} \\ x_3 = -2 & \boxed{x_3 = -2} \end{array}$$

Jede Gleichung kann man unabhängig von den andern nach einer Unbekannten auflösen (hier sogar ohne lästige Divisionen): Man setzt wieder von unten nach oben in die eingerahmten Gleichungen ein

$$x_3 = -2, \quad x_2 = 2, \quad x_1 = 1 \quad \text{Lösung: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Für Gleichungssysteme in dieser praktischen Form hat man eigene Bezeichnungen eingeführt. Ein System hat **Dreieckform**, wenn jede Gleichung **genau** eine Unbekannte weniger enthält als die vorhergehende. Noch ein Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{array}$$

Die Dreieckform ist ein Sonderfall der Stufenform. Ein System hat **Stufenform**, wenn jede Gleichung **mindestens** eine Unbekannte weniger enthält als die vorhergehende. Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 2x_3 = 4 \end{array}$$

Der bedeutendste deutsche Mathematiker Carl Friedrich GAUß (Braunschweig 1777 bis 1855 Göttingen) hat 1810 ein Verfahren angegeben, mit dem sich lineare Gleichungssysteme auf Stufenform bringen und dann bequem lösen lassen. Es war ein Nebenprodukt seiner mathematischen Untersuchungen des Planetoiden Pallas. Das Verfahren verallgemeinert das von den 2,2-Systemen her bekannte Additionsverfahren. GAUß zu Ehren bezeichnet man es als Gauß-Verfahren oder Gauß-Algorithmus.

Der Gauß-Algorithmus beruht auf zwei elementaren Umformungen, die die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändern (Äquivalenzumformungen):

- Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl ( $\neq 0$ )
- Ersetzen einer Gleichung durch die Summe aus ihr und dem Vielfachen einer andern

Man überlegt sich leicht, daß dies Äquivalenzumformungen sind:

Wir bringen die Konstanten auf die linken Seiten und kürzen die Gleichungen ab mit  $T=0$  beziehungsweise  $S=0$ . Mit  $X$  als Abkürzung für ein Lösungstupel gilt dann

$$T(X) = 0 \Leftrightarrow k \cdot T(X) = 0 \quad \text{falls } k \neq 0$$

$$\text{und } \begin{cases} T(X) = 0 \\ S(X) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T(X) = 0 \\ S(X) + k \cdot T(X) = 0 \end{cases}$$

Wir führen das Gauß-Verfahren an Beispielen vor.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 & \text{Die 1. Gleichung schreiben wir ab. In der 2. und 3. Gleichung beseitigen wir } x_1, \text{ indem wir geeignete Vielfache der 1. Gleichung addieren:} \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 & \left\| \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \cdot (-2) \end{array} \right. + \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 & \text{Jetzt beseitigen wir } x_2 \text{ in der 3. Gleichung. Wir addieren ein geeignetes Vielfaches der 2. Gleichung zur dritten, die 1. und 2. Gleichung schreiben wir ab:} \\ -10x_2 + x_3 = -22 \\ -3x_2 + 2x_3 = -10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ -10x_2 + x_3 = -22 \\ -3x_2 + 2x_3 = -10 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \cdot (-\frac{3}{10}) \\ \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 & \text{Das Gleichungssystem hat jetzt Dreieckform. Wir besorgen uns die üblichen Rahmgleichungen und setzen von unten nach oben ein:} \\ -10x_2 + x_3 = -22 \\ \frac{17}{10}x_3 = -\frac{17}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 & \boxed{x_1 = 7 - 4x_2 - x_3} \\ -10x_2 + x_3 = -22 & \boxed{x_2 = \frac{22}{10} + \frac{1}{10}x_3} \\ \frac{17}{10}x_3 = -\frac{17}{5} & \boxed{x_3 = -2} \end{array}$$

$$\text{Lösung: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bei der praktischen Durchführung läßt man der Einfachheit halber die Variablen weg und schreibt nur die Koeffizienten und die rechten Seiten hin. Zur besseren Übersicht trennt ein senkrechter Strich rechte und linke Seiten:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \cdot (-2) \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & -3 & 2 & -10 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \cdot (-\frac{3}{10}) \\ \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & \frac{17}{10} & -\frac{17}{5} \end{array} \quad \text{Das ist die Dreieckform. Jetzt schreibt man die Variablen am besten wieder hin und löst das System wie oben:}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 & \boxed{x_1 = 7 - 4x_2 - x_3} \\ -10x_2 + x_3 = -22 & \boxed{x_2 = \frac{22}{10} + \frac{1}{10}x_3} \\ \frac{17}{10}x_3 = -\frac{17}{5} & \boxed{x_3 = -2} \end{array}$$

$$\text{Lösung: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Manchmal gehts sogar noch schneller, wenn man nicht stur die Unbekannten von links nach rechts beseitigt. Das Beispiel zeigt, was gemeint ist:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{array} \parallel \begin{array}{l} \leftarrow \cdot(-3) \text{ + } \cdot(-2) \text{ +} \\ \leftarrow \end{array} \text{ (wie gehabt)}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & -3 & 2 & -10 \end{array} \parallel \begin{array}{l} \leftarrow \cdot(-2) \text{ +} \\ \leftarrow \end{array} \text{ (in der 3. Gleichung } x_3 \text{ beseitigen)}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & 17 & 0 & 34 \end{array} \quad \text{Dreieckform (leicht vernebelt)}$$

Das Ganze wieder mit Variablen:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 7 \\ -10x_2 + x_3 & = & -22 \\ 17x_2 & = & 34 \end{array}$$

$$\boxed{x_1 = 7 - 4x_2 - x_3}$$

$$\boxed{x_3 = -22 + 10x_2}$$

$$\boxed{x_2 = 2}$$

$$\text{Lösung: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Räumt man auch noch nach oben aus (Gauß-Jordan-Algorithmus), dann ergibt sich die **Diagonalform**: in jeder Gleichung gibt es eine Unbekannte, die nur in dieser Gleichung vorkommt. Aus der Diagonalform liest man die Lösung unmittelbar ab. Wieder unser Beispiel:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{array} \parallel \begin{array}{l} \leftarrow \cdot(-3) \text{ + } \cdot(-2) \text{ +} \\ \leftarrow \end{array} \text{ (wie gehabt)}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & -3 & 2 & -10 \end{array} \parallel \begin{array}{l} \leftarrow \cdot(-2) \text{ + } \cdot(-1) \text{ +} \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & 0 & 29 \\ 0 & -10 & 1 & -22 \\ 0 & 17 & 0 & 34 \end{array} \parallel \begin{array}{l} \leftarrow \cdot \frac{10}{17} \text{ + } \cdot \left(-\frac{14}{17}\right) \text{ +} \cdot \frac{1}{17} \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_3 = -2 \\ x_2 = 2 \end{array} \quad \text{Diagonalform (leicht vernebelt)}$$

Nach Vertauschung der 2. und 3. Zeile (Gleichungen) ist die Diagonalform deutlicher und die Lösung augenfällig (rechte Spalte!):

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \end{array}$$

Das Gauß-Verfahren funktioniert auch bei Gleichungssystemen, die keine oder unendlich viele Lösungen haben. Wir greifen die Beispiele von Seite 16 auf:

*Keine Lösung*

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 3x_2 - x_3 & = & 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 & = & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Aus naheliegenden Gründen vertauschen wir die} \\ \text{ersten beiden Zeilen:} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot(-2) + \\ \cdot(-3) + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 0 & -14 & -14 & 2 \end{array} \quad \cdot(-2) +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \quad \zeta \text{ Widerspruch in } 0 = -2, \text{ keine Lösung!}$$

Allgemein gilt: Hat eine Zeile links vom Strich lauter Nullen und rechts keine, dann hat das Gleichungssystem keine Lösung.

*Unendlich viele Lösungen*

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 & = & 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 14 \end{array} \quad \text{Variablen weg:}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot(-2) + \\ \cdot(-4) + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array} \quad \cdot(-1) +$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot(-1/5) \\ \text{»Nullzeile«, läßt man weg} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \quad \text{jetzt müssen die Variablen wieder her:}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 6 \\ x_2 - 2x_3 & = & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 = 6 - 2x_2 + 3x_3 \\ x_2 = 2 + 2x_3 \end{array}$$

freier Parameter  $x_3 = \mu$ ,  $x_2 = 2 + 2\mu$ ,  $x_1 = 2 - \mu$

**Lösung:**  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$

Zum Schluß ein homogenes 4,6-System, das nicht auf eine Dreieckform führt:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 &= 0 \\x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 3x_6 &= 0 \\2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 16x_4 + 10x_5 + 10x_6 &= 0 \\x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 3x_6 &= 0\end{aligned}$$

Variablen weg!

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 16 & 10 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \cdot (-1) + \cdot (-2) + \cdot (-1) \\ \leftarrow \phantom{\cdot (-1)} + \phantom{\cdot (-2)} \\ \leftarrow \phantom{\cdot (-1)} \\ \leftarrow \phantom{\cdot (-1)} \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 14 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \leftarrow \phantom{\cdot (-2)} \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{array} \left\| \begin{array}{l} \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow \phantom{\cdot (-\frac{1}{2})} \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \left\| \cdot 1/6 \right.$$

Nullzeile weglassen

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \end{array}$$

Variablen her!

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 &= 0 \\x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 2x_6 &= 0 \\x_4 + 2/3x_6 &= 0\end{aligned}$$

$$x_4 = -2/3x_6$$

$$x_3 = -4x_4 - 2x_5 - 2x_6$$

$$x_1 = -x_2 - 2x_3 - x_4 - 3x_5 - x_6$$

Die drei Variablen  $x_2$ ,  $x_5$  und  $x_6$  kommen links nicht vor, sind also freie Parameter. Das System hat  $\infty^3$ -Lösungen. Um Brüche zu vermeiden, setzen wir:  $x_6 = 3\lambda$ ,  $x_5 = \mu$  und  $x_2 = \nu$  und bekommen  $x_4 = -2\lambda$ ,  $x_3 = 2\lambda - 2\mu$  und  $x_1 = -5\lambda + \mu - \nu$ ,

$$\text{Lösung: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Wegen des ständigen Abschreibens der Zahlentafeln braucht man beim Gauß-Algorithmus viel Zeit und Platz. Weil er so schematisch abläuft, läßt er sich gut im Computer

programmieren und steht deshalb heute hoch im Kurs. Für den Handbetrieb aber eignet sich das Einsetzverfahren besser.

Das Additionsverfahren, auf dem der Gauß-Algorithmus beruht, wird gefährlich, wenn man sich nicht an die erlaubten Umformungen hält und kreuz und quer drauf los-addiert. Dazu ein **Warnungsbeispiel**:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & -x_1 + x_2 + x_3 = 1 & \text{Durch I+II beseitigen wir } x_1: & 2x_2 = 2 \\ \text{II} & x_1 + x_2 - x_3 = 1 & \text{durch } 2\text{I}+2\text{II}+\text{III beseitigen wir } x_2: & 5x_3 = 5 \\ \text{III} & -4x_2 + 5x_3 = 1 & \text{III schreiben wir ab:} & -4x_2 + 5x_3 = 1 \end{array}$$

Das neue System hat die Lösung:  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}.$

Von diesen  $\infty^1$  Lösungen ist nur eine einzige, nämlich die für  $\mu = 1$  auch Lösung des gegebenen Systems. Die verwegenen Umformungen haben uns ein System beschert, das zum ursprünglichen nicht äquivalent ist.

## Aufgaben

1. Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

a)  $\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ -19x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

e)  $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$

f)  $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

g)  $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

h)  $\begin{cases} -\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases}$

i)  $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

j)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

2. Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

a)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 3 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 12x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 = 3 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 15x_3 = 0 \\ 3x_1 - 11x_2 + 30x_3 = 0 \end{cases}$

3. Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ \quad \quad 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ \quad \quad 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 = 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b)} \quad x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ \quad \quad 2x_2 + 5x_3 + 11x_4 = -11 \\ \quad \quad x_2 - 3x_3 = 11 \end{array}$$

4. Löse die Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 3 \\ \quad \quad \quad \quad x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_4 - 3x_5 = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 15 \\ \quad \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3 \\ \quad \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 35 \\ \quad \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 3 \end{array}$$

• 5. Seltsame Gleichungssysteme fürs Gauß-Verfahren (jedes System hat die vier Unbekannten  $x_1$  bis  $x_4$ ):

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ \quad \quad x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \quad \quad x_1 - x_2 = 1 \\ \quad \quad x_1 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b)} \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ \quad \quad \quad \quad x_3 - x_4 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c)} \quad x_1 + x_3 = 0 \\ \quad \quad x_2 + x_4 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{d)} \quad x_1 - 2x_2 = -3 \\ \quad \quad \quad \quad x_4 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{e)} \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ \quad \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{f)} \quad -x_2 + x_3 = 1 \\ \quad \quad x_1 = 1 \\ \quad \quad -x_4 = 1 \end{array}$$

• 6. Seltsame Gleichungssysteme fürs Gauß-Verfahren (jedes System hat die vier Unbekannten  $x_1$  bis  $x_4$ ):

$$\text{a)} \quad x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 1 \quad \text{b)} \quad x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = x_3 - x_4 = 1$$

• 7. Entscheide mit dem Gauß-Verfahren, für welche Werte von a, b und c es keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen gibt.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad 2x_1 - 4x_2 = a \\ \quad \quad x_1 - 2x_2 = b \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b)} \quad x_1 - x_2 + 3x_3 = a \\ \quad \quad 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = b \\ \quad \quad -2x_1 - 2x_2 - 6x_3 = c \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c)} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = a \\ \quad \quad x_1 + 3x_2 + ax_3 = 2 \\ \quad \quad x_1 + ax_2 + x_3 = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{d)} \quad x_1 + ax_3 = 2 \\ \quad \quad x_2 - x_3 = 0 \\ \quad \quad ax_1 + x_2 = 3 - a \end{array}$$

## 5. Das Determinantenverfahren

Für quadratische Gleichungen haben wir eine Formel, mit der wir entscheiden, wieviel Lösungen es gibt, und mit der wir die Lösungen gegebenenfalls auch bestimmen. Wenn bei einem linearen Gleichungssystem die Anzahl der Gleichungen übereinstimmt mit der Anzahl der Unbekannten ( $n, n$ -System), dann gibts auch hier eine Formel, die fast dasselbe kann.

Fangen wir mit einem  $2,2$ -System an. Um die Formel zu finden, lösen wir das Gleichungssystem allgemein mit dem Additionsverfahren:

$$\begin{array}{l|l|l} ax_1 + bx_2 = u & \cdot d & \cdot(-c) \\ cx_1 + dx_2 = v & \cdot(-b) & \cdot a \\ \hline (ad - cb)x_1 = ud - vb & & (ad - cb)x_2 = av - cu \quad (**) \end{array}$$

Es fällt auf, daß lauter Terme der Form »Produkt minus Produkt« auftreten. Seit GAUß nennt man solche Ausdrücke **Determinanten**. Für die Determinante hat der britische Mathematiker Arthur CAYLEY (Richmond 1821 bis 1895 Cambridge) eine einfache Schreibweise eingeführt, die sich gut einprägen läßt, weil sie an die Form des Gleichungssystems erinnert:

**Definition:**  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - cb$  heißt zweireihige Determinante.

Grafische Eselsbrücke

$$\begin{array}{c} + \\ \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = ad - cb \\ - \end{array}$$

Mit den Determinanten  $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

$$D_1 = \begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix} = ud - vb \quad \left[ \begin{array}{l} \text{die 1. Spalte von } D \text{ ist ersetzt} \\ \text{worden durch die rechte Seite} \\ \text{des Gleichungssystems.} \end{array} \right]$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix} = av - cu \quad \left[ \begin{array}{l} \text{die 2. Spalte von } D \text{ ist ersetzt} \\ \text{worden durch die rechte Seite} \\ \text{des Gleichungssystems.} \end{array} \right]$$

lauten die beiden Gleichungen (\*\*):  $Dx_1 = D_1$  und  $Dx_2 = D_2$ . Sie haben für  $D \neq 0$  die eindeutigen Lösungen  $x_1 = \frac{D_1}{D}$  und  $x_2 = \frac{D_2}{D}$ . Wie man sich (durch Einsetzen) leicht überzeugt, ist  $(\frac{D_1}{D} | \frac{D_2}{D})$  auch Lösung des ursprünglichen Systems.

Ist  $D = 0$ , aber  $D_1 \neq 0$  oder  $D_2 \neq 0$ , dann liegt ein Widerspruch vor: Das System hat keine Lösung. Sind alle drei Determinanten gleich null, dann hat das System sicher keine eindeutige Lösung, also unendlich viele oder keine Lösung.

Für Gleichungssysteme mit genau einer Lösung haben wir die Formel gefunden. Sie heißt zu Ehren des schweizer Mathematikers Gabriel CRAMER (Genf 1704 bis 1752 Bagnole-sur-Cèze), weil er sie als erster veröffentlicht hat.

### Cramer-Regel

Das Gleichungssystem  $ax_1 + bx_2 = u$   
 $cx_1 + dx_2 = v$

hat für  $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$  die eindeutige Lösung mit  $x_1 = \frac{D_1}{D}$ ,  $x_2 = \frac{D_2}{D}$ ,

dabei ist  $D_1 = \begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}$  und  $D_2 = \begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}$ .

Auch für 3,3-Systeme gibt es eine Lösungsformel mit Determinanten.

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = r \\ \text{II} \quad dx_1 + ex_2 + fx_3 = s \\ \text{III} \quad gx_1 + hx_2 + ix_3 = t \end{array} \quad \text{Gleichungssystem } \boxed{1}$$

Wie bei 2,2-Systemen isolieren wir durch geschickte Multiplikation und Addition der Gleichungen die Variable  $x_1$ . Dabei verwenden wir die zweireihigen Determinanten:

$$\text{I} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - \text{II} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + \text{III} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \text{ ergibt}$$

$$\left( a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \right) x_1 = r \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - s \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \quad (\heartsuit)$$

Diese Formel kann sich kein Mensch merken! CAYLEY hat auch dafür eine prägnante Abkürzung eingeführt. Es ist die dreireihige Determinante:

$$\text{Definition: } D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} := a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

Eine dreireihige Determinante berechnet man schematisch so: Man nimmt das 1. Element der 1. Spalte (in unserm Fall ist es  $a$ ) und streicht die Zeile und Spalte, in der es

steht  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ . Die übrigen 4 Elemente bilden eine zweireihige Determinante, die zugehörige

**Unterdeterminante**  $U_a = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$ . Genauso verfährt man mit den anderen Elementen der 1. Spalte:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Rightarrow U_d = \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Rightarrow U_g = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

Nun bildet man die drei Produkte der Elemente und ihrer Unterdeterminanten und addiert beziehungsweise subtrahiert sie abwechselnd. Damit läßt sich die linke Seite der Gleichung  $(\heartsuit)$  abkürzen mit  $D \cdot x_1$ . Auch die rechte Seite entpuppt sich als dreireihige

Determinante, wir nennen sie  $D_1$ . Sie entsteht aus  $D$ , wenn man die 1. Spalte durch die rechte Seite  $\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$  des ursprünglichen Gleichungssystems ersetzt:

$$D_1 = \begin{vmatrix} r & b & c \\ s & e & f \\ t & h & i \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - s \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}. \text{ Jetzt heißt die Gleichung } (\heartsuit) \text{ kurz } Dx_1 = D_1.$$

$$Dx_1 = D_1$$

Analoge Rechnung ergibt:  $Dx_2 = D_2$  Gleichungssystem  $\boxed{2}$

$$Dx_3 = D_3$$

Man bekommt  $D_i$ , indem man die  $i$ -te Spalte von  $D$  durch die rechte Seite des ursprünglichen Gleichungssystems ersetzt.

Wir haben das System  $\boxed{2}$  aus dem System  $\boxed{1}$  abgeleitet; also ist jede Lösung von  $\boxed{1}$  auch Lösung von  $\boxed{2}$ . Weil wir aber nicht nur Äquivalenzumformungen verwendet haben, können Scheinlösungen dazugekommen sein. Die Anzahl der Lösungen von  $\boxed{2}$  ist deshalb größer oder gleich der Anzahl der Lösungen von  $\boxed{1}$ . Ist  $D \neq 0$ , dann hat  $\boxed{2}$  als einzige Lösung das Tripel  $(x_1 | x_2 | x_3)$  mit  $x_i = \frac{D_i}{D}$ . Zum Glück ist es auch immer Lösung von  $\boxed{1}$ , wie man durch Einsetzen mühsam bestätigt. Das ist die Cramer-Regel für 3,3-Systeme.

### Cramer-Regel

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= r \\ dx_1 + ex_2 + fx_3 &= s \\ gx_1 + hx_2 + ix_3 &= t \end{aligned}$$

hat für  $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$  die eindeutige Lösung  $x_1 = \frac{D_1}{D}$ ,  $x_2 = \frac{D_2}{D}$  und  $x_3 = \frac{D_3}{D}$ ,

dabei ist  $D_1 = \begin{vmatrix} r & b & c \\ s & e & f \\ t & h & i \end{vmatrix}$ ,  $D_2 = \begin{vmatrix} a & r & c \\ d & s & f \\ g & t & i \end{vmatrix}$  und  $D_3 = \begin{vmatrix} a & b & r \\ d & e & s \\ g & h & t \end{vmatrix}$ .

Ist  $D = 0$  und mindestens ein  $D_i \neq 0$  ( $i=1,2,3$ ), dann enthält  $\boxed{2}$  einen Widerspruch und auch  $\boxed{1}$  hat keine Lösung. Ist aber  $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$ , so hat das System  $\boxed{2}$   $\infty^3$  Lösungen. Das System  $\boxed{1}$  hat dann entweder auch unendlich viele Lösungen oder gar keine. Man kann beweisen – und wir werden das später auch tun –, daß  $\boxed{1}$  in diesem Fall sicher keine eindeutige Lösung hat.

### Zusammenfassung

$$D \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{1} \text{ hat genau eine Lösung.}$$

$$D = 0, \text{ mindestens ein } D_i \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{1} \text{ hat keine Lösung.}$$

$$D = D_1 = D_2 = D_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{1} \text{ hat unendlich viele oder keine Lösung.}$$

Hier noch ein Beispiel für den letzten Fall:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned} \quad [1]$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$0 \cdot x_1 = 0$$

Das System [2] hat  $\infty^3$  Lösungen.

$$0 \cdot x_2 = 0 \quad [2]$$

$$(x_1 = \lambda, x_2 = \mu, x_3 = \nu)$$

$$0 \cdot x_3 = 0$$

Das System [1] ist dagegen unlösbar!

Man könnte meinen, die Cramer-Regel sei für Gleichungssysteme reserviert, die genau soviel Gleichungen wie Unbekannte haben. Mit einem kleinen Trick klappt die Cramer-Regel aber auch bei andern Systemen. Bei einem 2,3-System zum Beispiel geht das so:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 2 \\ \text{II} \quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wir ernennen die »überzählige« Unbekannte  $x_3$  zum freien Parameter  $\lambda$  und bringen alle Terme mit  $x_3$  auf die rechte Seite

$$\begin{aligned} \text{I} \quad 2x_1 + x_2 &= 2 + 3\lambda \\ \text{II} \quad 3x_1 + 4x_2 &= -\lambda \end{aligned}$$

Jetzt kann Cramer ran:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 2+3\lambda & 1 \\ -\lambda & 4 \end{vmatrix} = 8 + 13\lambda, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2+3\lambda \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = -6 - 11\lambda,$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{8+13\lambda}{5} = 1,6 + 2,6\lambda \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-6-11\lambda}{5} = -1,2 - 2,2\lambda$$

$$\text{Lösung:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,6 \\ -1,2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0,6 \\ -2,2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Cramer-Regel läßt sich auch auf n,n-Gleichungssysteme mit mehr als drei Unbekannten anwenden. Wie in den Fällen  $n=2$ ,  $n=3$  gibt es für  $D \neq 0$  eine eindeutige Lösung in der Form  $x_i = \frac{D_i}{D}$ . Doch muß man wissen, wie man n-reihige Determinanten berechnet. Es geht ähnlich wie bei den 3-reihigen Determinanten. Man nimmt der Reihe nach die n Elemente der 1. Spalte, multipliziert sie mit den zugehörigen (n-1)-reihigen Unterdeterminanten und addiert beziehungsweise subtrahiert diese Produkte abwechselnd. Bei einer 4-reihigen Determinante sieht das so aus:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 7 & 2 \\ -2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

Jede Unterdeterminante muß nach demselben Schema reduziert werden, bis schließlich eine zweireihige (oder einreihige) Determinante übrig bleibt. Das Prinzip ist zwar recht

einfach, aber die Rechnung geht schnell ins Uferlose: Bei einer 10-reihigen Determinante braucht man zehn 9-reihige Determinanten, das heißt, man muß 10·9 8-reihige, also 10·9·8 7-reihige, also ..., also 10·9·8·7·6·5·4·3 = 1814400 zweireihige Determinanten berechnen! Will man ein 10,10-System mit der Cramer-Regel bewältigen, dann fallen bei den 11 10-reihigen Determinanten  $D, D_1, D_2, \dots, D_{10}$   $11 \cdot 1814400 \cdot 2 = 39916800$  Multiplikationen an. Mit der Abkürzung  $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  (lies n-Fakultät) sind somit zur Lösung eines n,n-Systems  $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$  Multiplikationen nötig. Der Gauß-Algorithmus dagegen kommt mit  $\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$  Multiplikationen aus, er ist für  $n \geq 3$  dem Determinantenverfahren haushoch überlegen. Zum Vergleich sind in einer Tabelle die Anzahlen der Multiplikationen bei beiden Methoden aufgeführt.

| n,n-Gleichungssystem n =             | 2 | 3  | 4   | 5   | 6    | 7     | 8      | 9       | 10       |
|--------------------------------------|---|----|-----|-----|------|-------|--------|---------|----------|
| Anzahl der Multiplikationen   Cramer | 6 | 24 | 120 | 720 | 5040 | 40320 | 362880 | 3628800 | 39916800 |
| Multiplikationen   Gauß              | 5 | 14 | 30  | 55  | 91   | 140   | 204    | 285     | 385      |

Ein Personal-Computer, der heute (1989) 20µs für eine Multiplikation braucht, schafft in einer 10tel Sekunde die 4900 Multiplikationen für ein 24,24-System beim Gauß-Algorithmus. Dasselbe Gleichungssystem wird denselben Computer beim Determinantenverfahren ungefähr  $10^{13}$  Jahre beschäftigen – das ist etwa 500mal so lang, wie unser Weltall besteht.

Man könnte nun meinen, daß Determinanten nur von theoretischem Belang, praktisch aber völlig nutzlos wären. Dem ist aber nicht so! In einigen Gebieten der Mathematik sind sie ein hilfreiches Werkzeug, und auch wir werden 2- und 3-reihige Determinanten vorteilhaft verwenden, zum Beispiel zur Berechnung von Flächen- und Rauminhalten.

## Aufgaben

### 1. Berechne

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 0,5 & -5 \\ 2 & 18 \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$$

### 2. Berechne

$$\text{a) } \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} r & r \\ 4 & 2r \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{vmatrix}$$

### 3. Für welche Werte von a wird die Determinante null ?

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a & a \\ 1 & a \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a & -a \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix}$$

### 4. Löse mit der Cramer-Regel (falls möglich!)

$$\begin{array}{lll} \text{a) } & x_1 + x_2 = 1 & \text{b) } -4x_1 + 2x_2 = -6 \\ & 2x_1 - x_2 = 8 & \quad 6x_1 - 3x_2 = 9 \\ & & \text{c) } x_1 - x_2 = 0 \\ & & \quad x_1 + x_2 = 0 \\ \text{d) } & 4x_1 - 5x_2 = 12 & \text{e) } -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 = 1 \\ & -5x_1 + 4x_2 = 12 & \quad 2x_1 - x_2 = -6 \\ & & \text{f) } 6x_1 - 3x_2 = -9 \\ & & \quad 2x_1 - x_2 = -3 \end{array}$$

5. Löse mit der Cramer-Regel (Fallunterscheidungen!)

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \begin{array}{l} ax_1 + x_2 = 1 \\ 2ax_1 - x_2 = 8 \end{array} & \text{b)} \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = a \\ ax_1 - 4x_2 = 0 \end{array} & \text{c)} \quad \begin{array}{l} x_1 - ax_2 = 0 \\ ax_1 + x_2 = 0 \end{array} \\ \text{d)} & \begin{array}{l} 4ax_1 - 5ax_2 = -9 \\ ax_1 - ax_2 = 3 \end{array} & \text{e)} \quad \begin{array}{l} ax_1 + x_2 = b \\ bx_1 + x_2 = a \end{array} & \text{f)} \quad \begin{array}{l} 6ax_1 + 3bx_2 = -9 \\ 2bx_1 - ax_2 = -3 \end{array} \end{array}$$

6. Berechne

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} & \text{b)} & \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} & \text{c)} & \begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} & \text{d)} & \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \text{e)} & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} & \text{f)} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \text{g)} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} & \text{h)} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

7. Berechne und vereinfache

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & 0 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} & \text{b)} & \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} & \text{c)} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\ \text{d)} & \begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix} & \text{e)} & \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & \tan \beta & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & \tan \beta & \sin \alpha \\ 0 & & -1 & \tan \beta \end{vmatrix} \end{array}$$

8. Für welche Werte von a ist die Determinante null ?

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & a & 1 \\ 0 & -6 & 5 \end{vmatrix} & \text{b)} & \begin{vmatrix} a & -2 & b \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} & \text{c)} & \begin{vmatrix} a & 5 & -4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} & \text{d)} & \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \end{array}$$

9. Löse die Gleichungssysteme mit der Cramer-Regel

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{array} \\ \text{c)} & \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{array} & \text{d)} & \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 4x_1 + 3x_3 = 0 \end{array} \end{array}$$

10. Löse mit der Cramer-Regel (Fallunterscheidungen!)

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} ax_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \end{array} & \text{b)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = 2a \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = 0 \end{array} \\ \text{c)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + bx_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 + x_3 = 0 \end{array} & \text{d)} & \begin{array}{l} cx_2 + bx_3 = a \\ cx_1 + ax_3 = b \\ bx_1 + ax_2 = c \end{array} \end{array}$$

11. Nimm  $x_3$  als freien Parameter  $\lambda$  und löse mit der Cramer-Regel

a)  $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$   
 $5x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$

b)  $-2x_1 + 3x_2 + 21x_3 = 3$   
 $5x_1 + 3x_2 - 21x_3 = 3$

c)  $7x_1 - 5x_2 + 21x_3 = 0$   
 $5x_1 - 3x_2 + 11x_3 = 0$

d)  $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$   
 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

12. Löse mit der Cramer-Regel  $x_1 + x_2 + x_3 = 7$   
 $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$

- und nimm a)  $x_3$  als freien Parameter  $\lambda$   
 b)  $x_2$  als freien Parameter  $\mu$   
 c)  $x_1$  als freien Parameter  $\nu$

13. Löse mit der Cramer-Regel

a)  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$   
 $x_1 + x_2 - x_3 = 2$

b)  $-2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3$   
 $4x_1 + 6x_2 + x_3 = 3$

c)  $x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$   
 $3x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 3$

d)  $x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 6$   
 $9x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4$

### \*\*6. Eigenschaften von Determinanten

Von den Determinanten brauchen wir später hauptsächlich die 3-reihigen. Deshalb stellen wir einige Sätze für sie vor. Berechnet man die 3-reihige Determinante  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

allgemein, so ergibt sich ein Aggregat von sechs Produkten:  $D = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$ . Der deutsche Philosoph und Mathematiker Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (Leipzig 1.7.1646 bis 14.11.1716 Hannover) hat n-reihige Determinanten als Aggregate von n-fachen Produkten definiert. Ihm zu Ehren nennen wir ein solches Aggregat die **Leibniz-Form** der Determinante.  $aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$  ist also die Leibniz-Form der 3-reihigen Determinante.

Für 3-reihige Determinanten hat der französische Mathematiker Pierre F. SARRUS eine Merkmethode formuliert, sie heißt **Sarrus-Regel** oder auch **Jägerzaunregel**. Mit ihr findet man schnell die sechs Produkte und ihre Vorzeichen: Man schreibt die ersten beiden Spalten als 4. und 5. Spalte nochmal und multipliziert längs der Pfeile. Die »Abwärtsprodukte« zählen positiv, die »Aufwärtsprodukte« negativ:

$$\begin{array}{ccccccc}
 + & + & + & & & & \\
 | & a & b & c & | & a & b \\
 | & d & e & f & | & d & e \\
 | & g & h & i & | & g & h \\
 - & - & - & & & & \\
 & & & & & gec & hfa & idb \\
 & & & & & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\
 & & & & & a & b & \\
 & & & & & d & e & = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb \\
 & & & & & g & h & \\
 & & & & & \searrow & \searrow & \searrow \\
 & & & & & aei & bfg & cdh
 \end{array}$$

$$\text{Beispiel: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = -18$$

(Die Sarrus-Regel gilt **nur** für dreireihige Determinanten!)

Aus der Leibniz-Form kann man einige Determinantensätze leicht ableiten:

- 1** Vertauscht man in einer Determinante die Zeilen mit den Spalten, so ändert die Determinante ihren Wert nicht.

$$\text{Beispiel: } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

Zum Beweis berechnen wir die Leibniz-Form der rechten Determinante:  $aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$ .

Sie stimmt mit der Leibniz-Form der linken Determinante überein.

Nach diesem Satz sind in allen Determinanten Spalten und Zeilen gleichberechtigt. Deshalb verwenden wir von jetzt an den Oberbegriff **Reihe**.

- 2** Ersetzt man eine Reihe durch ihr  $k$ -faches, so ist der Wert der neuen Determinante  $k$ -mal so groß wie der Wert der alten Determinante.

$$\text{Beispiel: } \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Zum Beweis überlegt man sich mit der Sarrus-Regel, daß der Faktor  $k$  in jedem Produkt genau einmal vorkommt (und deswegen ausgeklammert werden kann).

- 3** Eine Nullreihe macht die Determinante zu null.

$$\text{Beispiel: } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Zum Beweis setze man in Satz } \boxed{2} \quad k = 0.$$

- 4** Vertauscht man zwei parallele Reihen, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

$$\text{Beispiel: } \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Zum Beweis berechnet man die linke Seite:

$$dbi + ecg + fah - gbf - hcd - iae = -(aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb)$$

- 5** Sind zwei parallele Reihen zueinander proportional, so hat die Determinante den Wert null.

$$\text{Beispiel: } D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Beweis: } D = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -k \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -D$$

(Vertauschen von 1. und 2. Zeile)

Aus  $D = -D$  folgt  $D = 0$ .

- 6 Besteht eine Reihe aus Summen, so läßt sich die Determinante als Summe zweier Determinanten schreiben.

$$\text{Beispiel: } \begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Zum Beweis überlegt man sich mit der Sarrus-Regel, daß in jedem Produkt genau eine Summe vorkommt. Das Distributivgesetz bestätigt die Behauptung.

- 7 Addiert man zu einer Reihe ein Vielfaches einer andern parallelen Reihe, so ändert die Determinante ihren Wert nicht.

$$\text{Beispiel: } \begin{vmatrix} a+kb & b & c \\ d+ke & e & f \\ g+kh & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\text{Beweis: } \begin{vmatrix} a+kb & b & c \\ d+ke & e & f \\ g+kh & h & i \end{vmatrix} = (\text{Satz } \boxed{6}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb & b & c \\ ke & e & f \\ kh & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix},$$

$$\text{denn nach Satz } \boxed{5} \text{ ist } \begin{vmatrix} kb & b & c \\ ke & e & f \\ kh & h & i \end{vmatrix} = 0.$$

Mit Satz 7 lassen sich Determinanten wesentlich einfacher berechnen als mit dem Unterdeterminanten-Verfahren. Wie beim Gauß-Algorithmus bringt man durch Addition geeigneter Reihen-Vielfacher die Determinante auf Dreieckform.

$$\text{Beispiel: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = -18$$

Der Wert einer Determinante ergibt sich aus der Dreieckform, wenn man alle Zahlen der **Hauptdiagonale** (von links oben nach rechts unten) multipliziert. Das gilt auch für n-reihige Determinanten.

$$\text{Beispiel: } \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-4) = -24$$

Auch die Sätze 1 bis 7 gelten für n-reihige Determinanten.

Wir verzichten auf die Beweise, weil wir die Sätze für  $n > 3$  nicht brauchen.

Zum Abschluß verallgemeinern wir das Verfahren der Entwicklung einer Determinante. Wie man leicht nachrechnet, läßt sich eine Determinante nach jeder Reihe entwickeln, wenn man die Unterdeterminante nach dem Verfahren von Seite 36 durch Streichen der jeweiligen Zeilen und Spalten erzeugt und mit dem Vorzeichen versieht, das sich aus dem Schema (rechts) ergibt:

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

Beliebt sind Reihen mit möglichst vielen Nullen.  
So wird man die folgende Determinante nach der 2. Zeile entwickeln:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = +4 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 4(5 + 21) = 104$$

Entwickeln nach der 3. Zeile dauert etwas länger:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-28) + 0 + 5 \cdot 4 = 104$$

## Aufgaben

1. Berechne ohne zu „rechnen“

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & a & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 12 & 5 & -8 \end{vmatrix}$$

2. Berechne ohne zu „rechnen“

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x^2 & x & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Begründe mit den Determinantensätzen

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a & b & a+b+c \\ u & v & u+v+w \\ x & y & x+y+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a+b & a-b & c \\ u+v & u-v & w \\ x+y & x-y & z \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} a+tb & ta+b & c \\ u+tv & tu+v & w \\ x+ty & tx+y & z \end{vmatrix} = (1-t^2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

• 4. Schreibe als Summe von Determinanten, die keine Summen enthalten

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1+a \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a+b & b+c & 1 \\ a+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

• 5. Addiere ein Vielfaches einer Reihe zu einer andern parallelen Reihe und zeige (rechtzeitig ausklammern!):

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

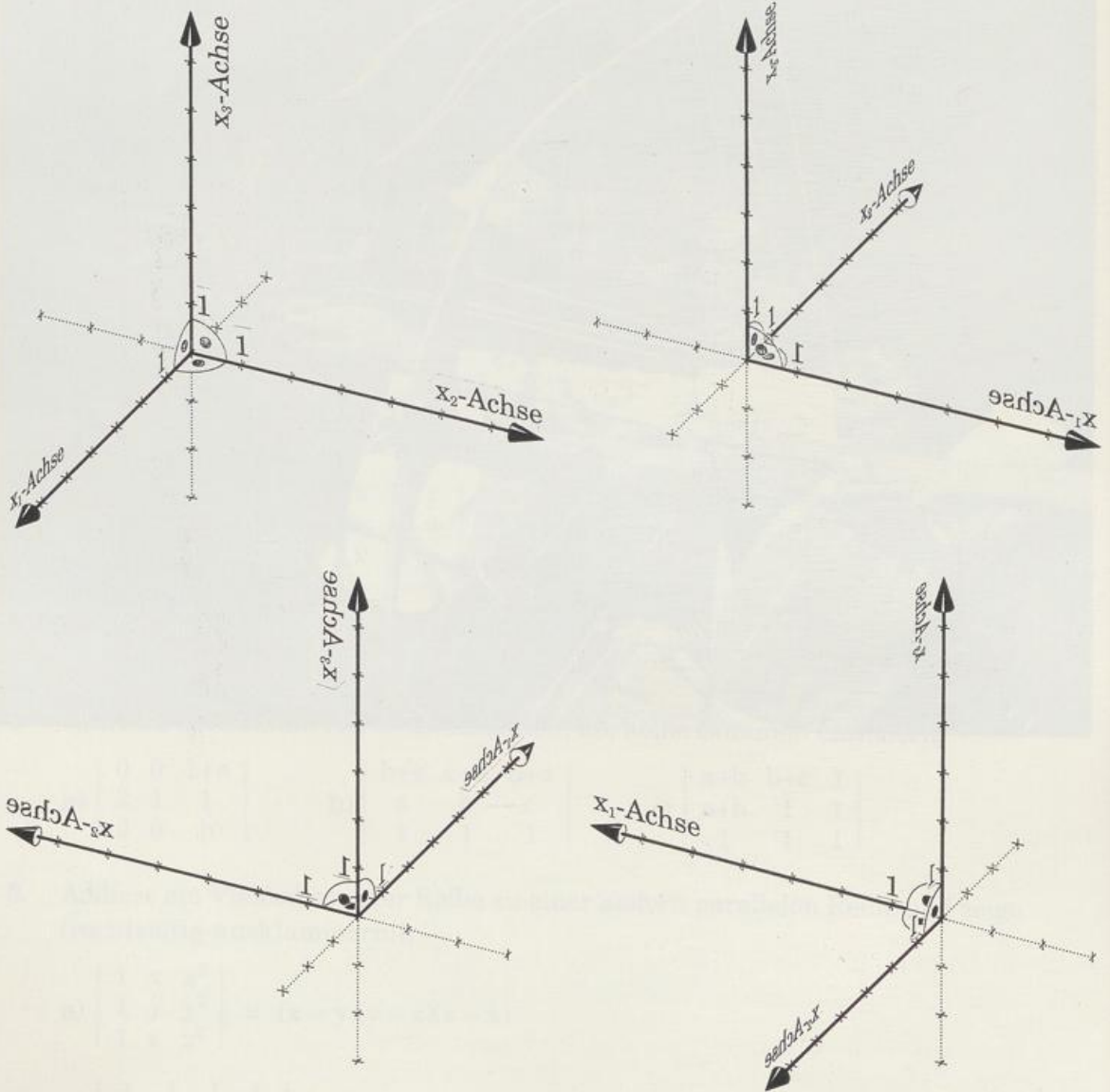
$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a) \quad \text{[Vandermonde-Determinante, nach ALEXANDRE THÉOPHILE VANDERMONDE (1735 bis 1796)]}$$

### III. Punkte und Vektoren im Raum



## 1. Räumliche Koordinatensysteme

In der Ebene beschreibt man die Lage von Punkten in einem Koordinatensystem mit zwei Zahlen, den Koordinaten. Für Punkte im Raum brauchen wir eine dritte Zahl, also ein Koordinatensystem mit drei Achsen. Üblicherweise legt man die drei Achsen so, daß sie paarweise aufeinander senkrecht stehen. Verwendet man auf allen Achsen auch noch dieselbe Einheit, dann spricht man von einem **räumlichen kartesischen Koordinatensystem** oder auch orthonormierten (= rechtwinklig mit gleich langen Einheiten) Koordinatensystem. Künftig verwenden wir bis auf Ausnahmen nur kartesische Systeme. Die Achsen nennt man  $x_1$ -Achse,  $x_2$ -Achse und  $x_3$ -Achse, manchmal auch x-, y- und z-Achse oder i-, j- und k-Achse.



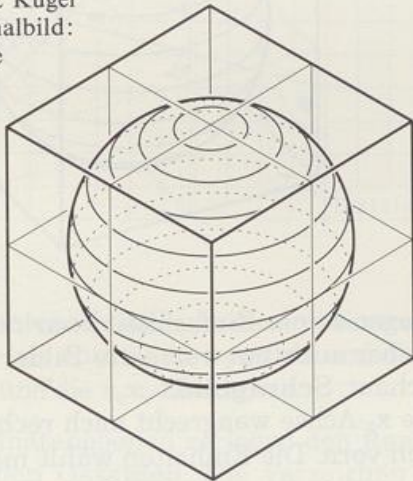
Eine wirklichkeitsgetreue Darstellung verlangt ein dreidimensionales Modell. Doch dafür ist kein Platz, weder im Heft noch im Buch – ganz zu schweigen von der zeitraubenden Anfertigung! Deswegen begnügen wir uns mit zweidimensionalen Bildern

räumlicher Figuren. Am anschaulichsten sind **Normalbilder**. Sie zeigen Figuren so, wie man sie aus großer Entfernung wirklich sieht. Wie Koordinatensysteme ausschauen, hängt von der Blickrichtung ab. Es gibt unendlich viele Ansichten. Beim Zeichnen allerdings verwendet man nur einige, nämlich:

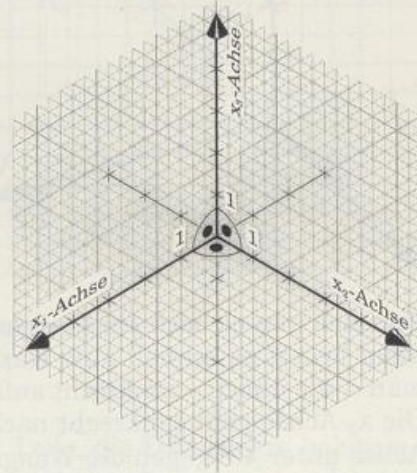
### Normalbild in Isometrie

In der Zeichnung sind alle drei Einheiten gleich lang und die Winkel zwischen den Achsen  $120^\circ$ . Papier mit aufgedrucktem Isometrienetz und passende Schablonen erleichtern das Zeichnen beträchtlich.

Würfel & Kugel  
im Normalbild:  
Isometrie



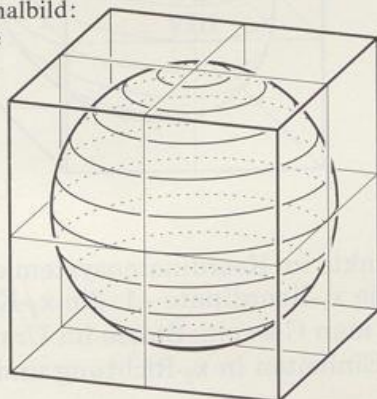
### Normalbild in Isometrie



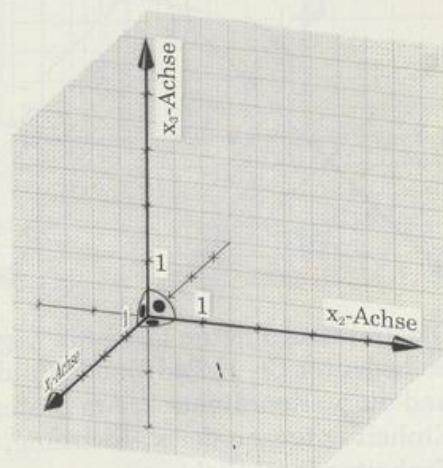
### Normalbild in Dimetrie

In der Zeichnung sind zwei Einheiten gleich lang und die dritte halb so lang. Auch dieses System ist genormt: die  $x_3$ -Achse geht senkrecht nach oben, die  $x_2$ -Achse ist  $7^\circ$ , die  $x_1$ -Achse  $42^\circ$  gegen die Waagrechte geneigt. Und auch hier gibt es passende Schablonen und Papier mit Dimetrienetz. Diese Darstellungsart ist in der Technik gebräuchlich. Man nennt sie deshalb Ingenieur-Axonometrie.

Würfel & Kugel  
im Normalbild:  
Dimetrie



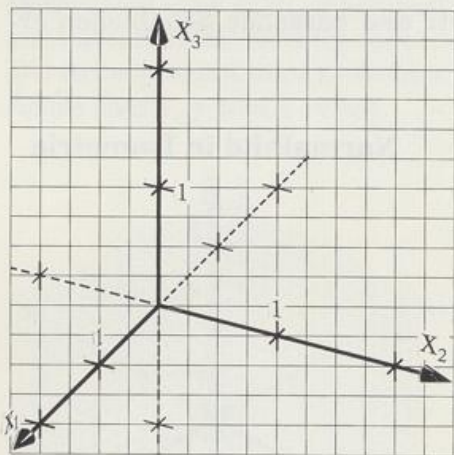
### Normalbild in Dimetrie



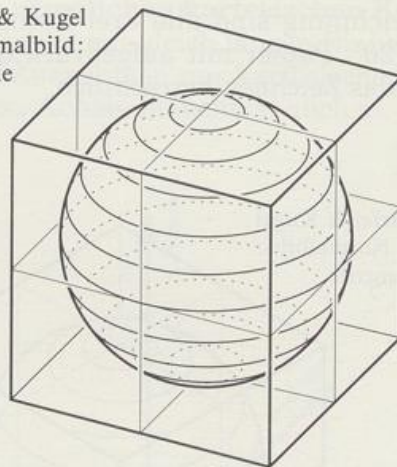
### Normalbild in Trimetrie

In der Zeichnung sind alle drei Einheiten verschieden lang. Fürs Zeichnen auf Karopapier eignen sich besonders solche Systeme, bei denen die Einheitsmarken auf Gitterpunkten liegen. Hier ein bewährtes, leicht zeichnbares Koordinatensystem:

### Normalbild in Trimetrie



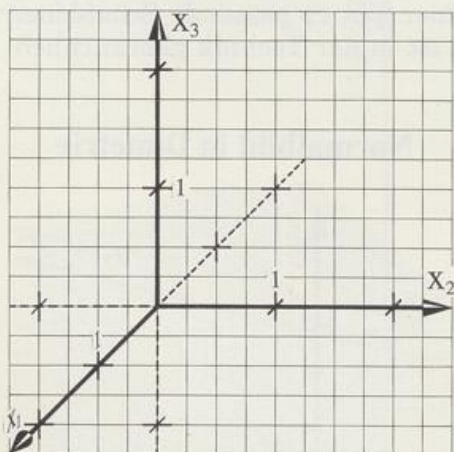
Würfel & Kugel  
im Normalbild:  
Trimetrie



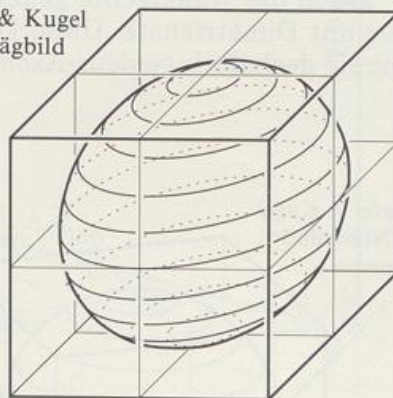
Daneben gibt es noch ein Verfahren, das wegen seiner Einfachheit zwar recht beliebt ist (man bringt es schnell aufs Karopapier), aber auch nur verzerrte Bilder liefert, wenn man – wie üblich – senkrecht aufs Papier schaut: **Schrägbild**.

Die  $x_3$ -Achse geht senkrecht nach oben, die  $x_2$ -Achse waagrecht nach rechts und die  $x_1$ -Achse unter  $45^\circ$  gegen die Waagrechte nach vorn. Die Einheitsmarken wählt man so, daß die Einheitsmarken auf Gitterpunkten liegen.

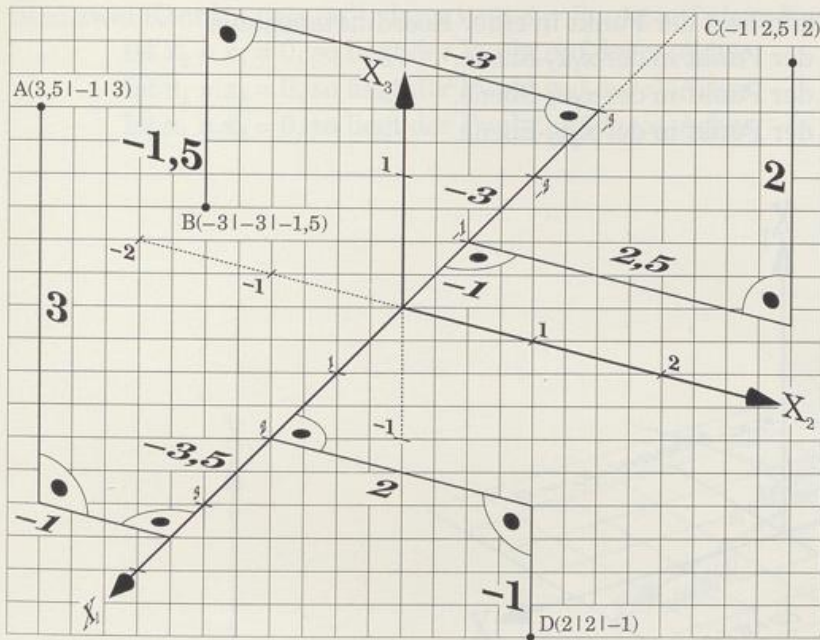
### Schrägbild



Würfel & Kugel  
im Schrägbild



Die drei Koordinaten legen die Lage eines Punkts im Koordinatensystem eindeutig fest. So bedeutet  $C(-1|2,5|2)$ : der Punkt C hat die  $x_1$ -Koordinate  $-1$ , die  $x_2$ -Koordinate  $2,5$  und die  $x_3$ -Koordinate  $2$ . Am besten zeichnet man C so ein: Starte im Ursprung, gehe 1 Einheit entgegen der  $x_1$ -Richtung, dann  $2,5$  Einheiten in  $x_2$ -Richtung und schließlich 2 Einheiten in  $x_3$ -Richtung.

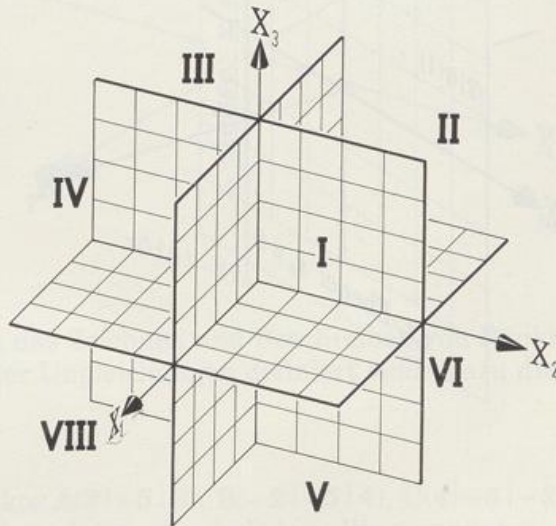


Die drei Koordinatenachsen legen die drei **Koordinatenebenen** fest:  
 die  $x_1x_2$ -Ebene (sie enthält die  $x_1$ -Achse und die  $x_2$ -Achse),  
 die  $x_1x_3$ -Ebene und die  $x_2x_3$ -Ebene.

Die drei Koordinatenebenen zerlegen den Raum in acht Teile, die **Oktanten**, gehören aber nicht zu den Oktanten. Die Vorzeichen der Koordinaten geben an, in welchem Oktanten der Punkt liegt:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | Oktant |
|-------|-------|-------|--------|
| +     | +     | +     | I      |
| -     | +     | +     | II     |
| -     | -     | +     | III    |
| +     | -     | +     | IV     |
| +     | +     | -     | V      |
| -     | +     | -     | VI     |
| -     | -     | -     | VII    |
| +     | -     | -     | VIII   |

### Die acht Oktanten

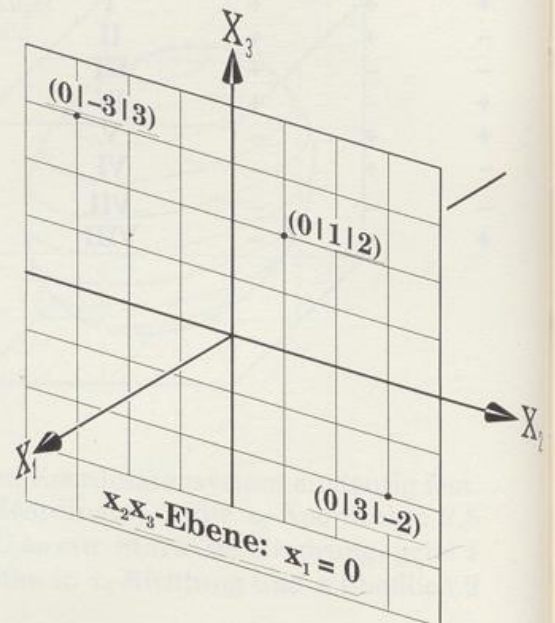
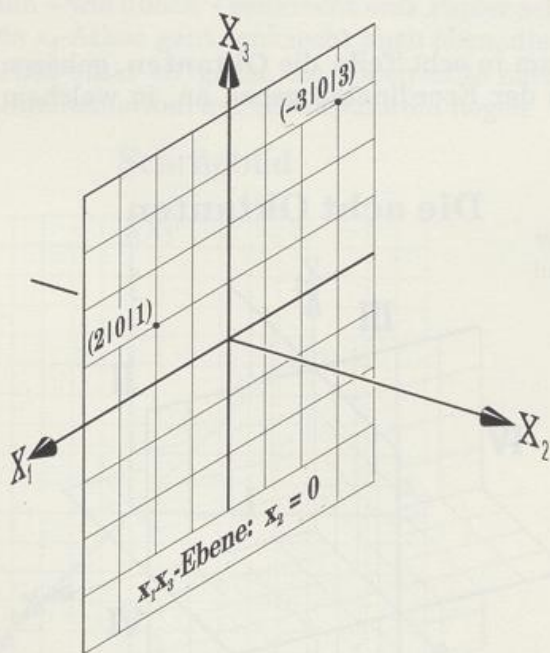
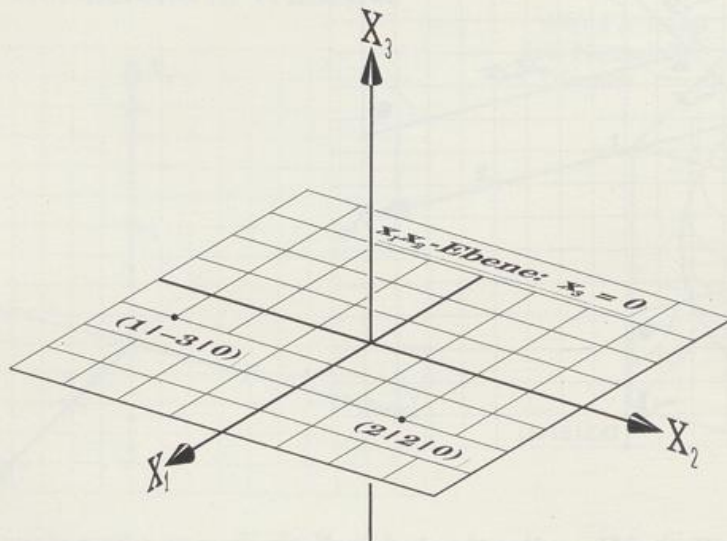


Ist eine Koordinate null, dann liegt der Punkt in einer Koordinatenebene:

Ist  $x_3 = 0$ , so liegt der Punkt in der  $x_1x_2$ -Ebene.

Ist  $x_2 = 0$ , so liegt der Punkt in der  $x_1x_3$ -Ebene.

Ist  $x_1 = 0$ , so liegt der Punkt in der  $x_2x_3$ -Ebene.

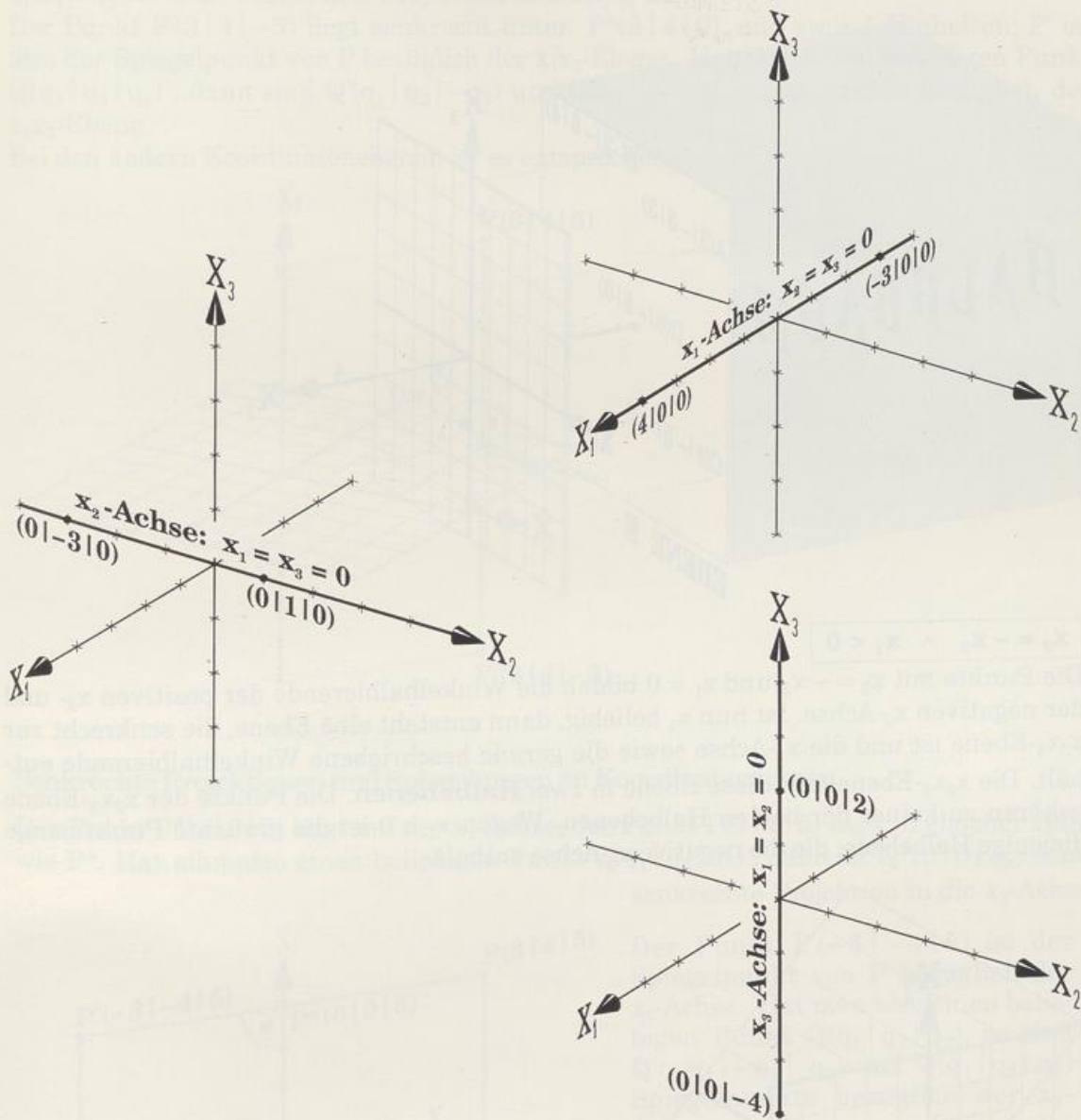


Sind zwei Koordinaten null, dann liegt der Punkt auf einer Koordinatenachse:

Ist  $x_2 = x_3 = 0$ , so liegt der Punkt auf der  $x_1$ -Achse.

Ist  $x_1 = x_3 = 0$ , so liegt der Punkt auf der  $x_2$ -Achse.

Ist  $x_1 = x_2 = 0$ , so liegt der Punkt auf der  $x_3$ -Achse.



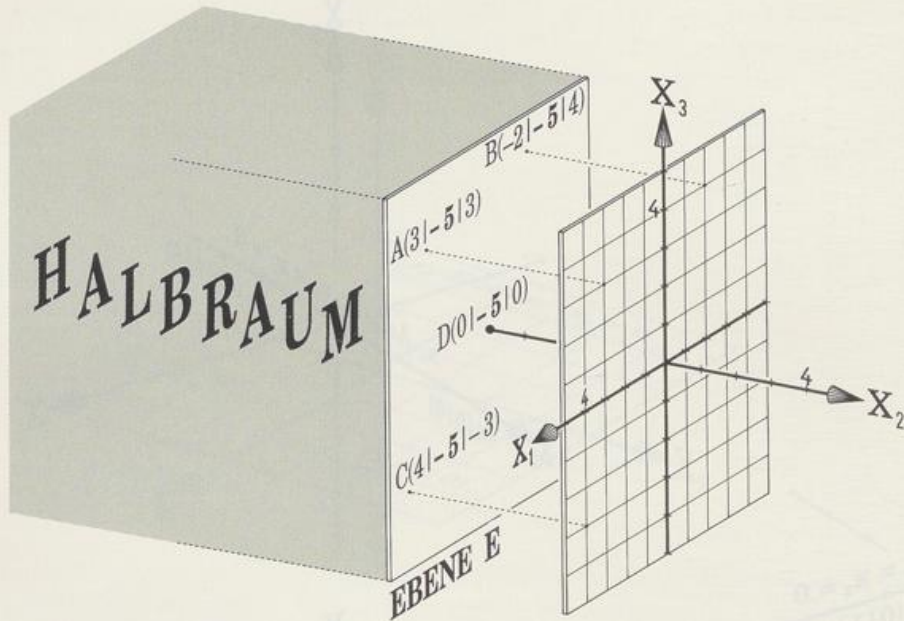
Ein gutes Training der Raumvorstellung ist das Zeichnen und Beschreiben von Punkt-  
mengen, die durch einfache Gleichungen oder Ungleichungen definiert sind. Dazu drei  
Beispiele.

$$x_2 = -5$$

Diese Menge enthält zum Beispiel die Punkte  $A(3|-5|3)$ ,  $B(-2|-5|4)$ ,  $C(4|-5|-3)$   
und  $D(0|-5|0)$ .  $x_2$  ist immer gleich  $-5$ , während  $x_1$  und  $x_3$  beliebige Werte annehmen  
können. Die Punktmenge ist also eine Ebene  $E$  durch  $(0|-5|0)$ , die parallel zur  $x_1x_3$ -  
Ebene ist.

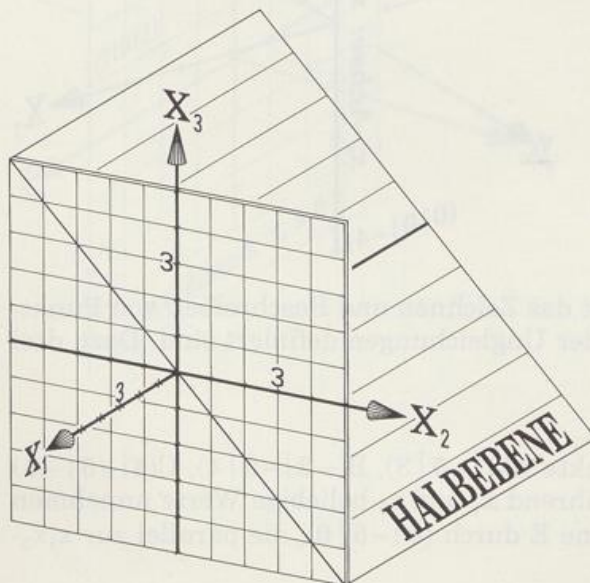
$$x_2 \leq -5$$

Diese Menge enthält die gerade besprochene Ebene E. E zerlegt den Raum in zwei Teile, diese nennt man **Halbräume**. E gehört zu keinem der beiden Halbräume. Die gesuchte Punktmenge ist derjenige Halbraum einschließlich E, der den Ursprung nicht enthält.



$$x_2 = -x_3 \wedge x_1 < 0$$

Die Punkte mit  $x_2 = -x_3$  und  $x_1 = 0$  bilden die Winkelhalbierende der positiven  $x_2$ - und der negativen  $x_3$ -Achse. Ist nun  $x_1$  beliebig, dann entsteht eine Ebene, die senkrecht zur  $x_2x_3$ -Ebene ist und die  $x_1$ -Achse sowie die gerade beschriebene Winkelhalbierende enthält. Die  $x_2x_3$ -Ebene teilt diese Ebene in zwei **Halbebenen**. Die Punkte der  $x_2x_3$ -Ebene gehören zu keiner der beiden Halbebenen. Wegen  $x_1 < 0$  ist die gesuchte Punktmenge diejenige Halbebene, die die negative  $x_1$ -Achse enthält.

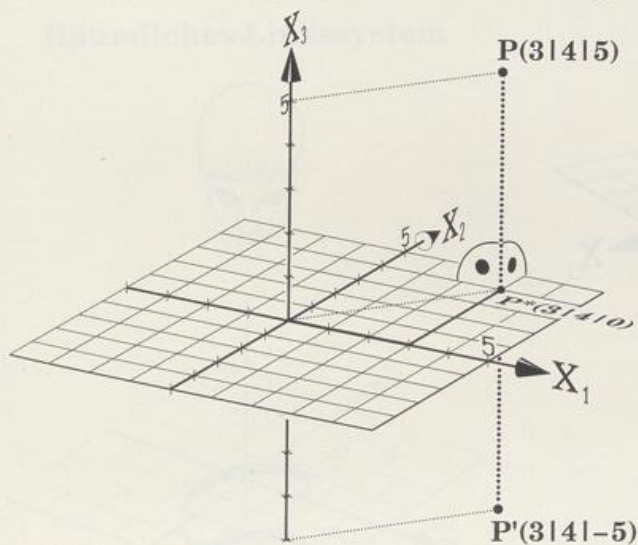


### Senkrechte Projektionen und Spiegelungen an Koordinatenebenen

Der Punkt  $P^*(3|4|0)$  liegt in der  $x_1x_2$ -Ebene, der Punkt  $P(3|4|5)$  liegt senkrecht über  $P^*$ , und zwar 5 Einheiten. Hat man also einen beliebigen Punkt  $Q(q_1|q_2|q_3)$ , dann ist  $Q^*(q_1|q_2|0)$  seine senkrechte Projektion in die  $x_1x_2$ -Ebene.

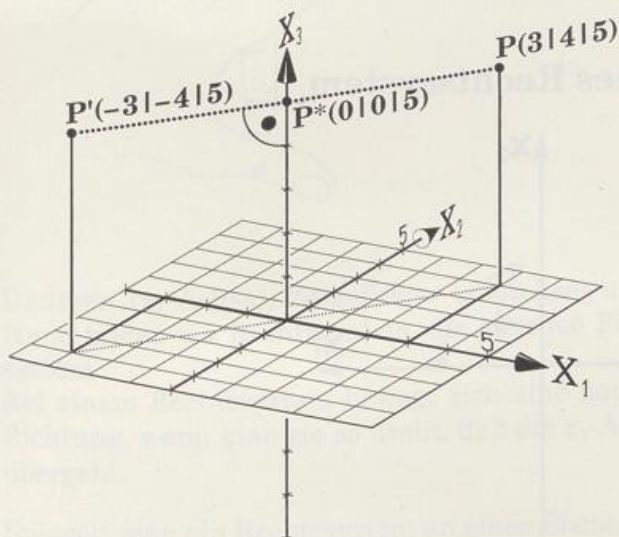
Der Punkt  $P'(3|4|-5)$  liegt senkrecht unter  $P^*(3|4|0)$ , und zwar 5 Einheiten;  $P'$  ist also der Spiegelpunkt von  $P$  bezüglich der  $x_1x_2$ -Ebene. Hat man einen beliebigen Punkt  $Q(q_1|q_2|q_3)$ , dann sind  $Q'(q_1|q_2|-q_3)$  und  $Q(q_1|q_2|q_3)$  Spiegelpunkte bezüglich der  $x_1x_2$ -Ebene.

Bei den andern Koordinatenebenen ist es entsprechend.



### Senkrechte Projektionen und Spiegelungen an Koordinatenachsen

Der Punkt  $P^*(0|0|5)$  liegt auf der  $x_3$ -Achse, der Punkt  $P(3|4|5)$  liegt in gleicher Höhe wie  $P^*$ . Hat man also einen beliebigen Punkt  $Q(q_1|q_2|q_3)$ , dann ist  $Q^*(0|0|q_3)$  seine senkrechte Projektion in die  $x_3$ -Achse.

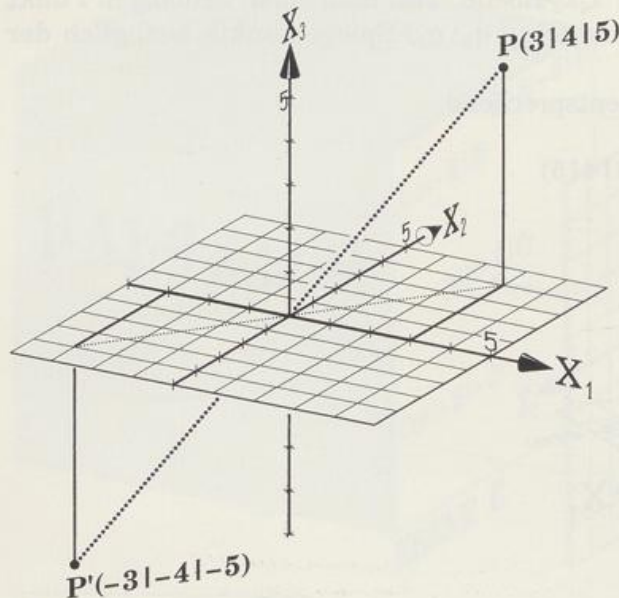


Der Punkt  $P'(-3|-4|5)$  ist der Spiegelpunkt von  $P$  bezüglich der  $x_3$ -Achse. Hat man also einen beliebigen Punkt  $Q(q_1|q_2|q_3)$ , so sind  $Q'(-q_1|-q_2|q_3)$  und  $Q(q_1|q_2|q_3)$  Spiegelpunkte bezüglich der  $x_3$ -Achse.

Bei den andern Koordinatenachsen ist es entsprechend.

### Spiegelung am Koordinatenursprung

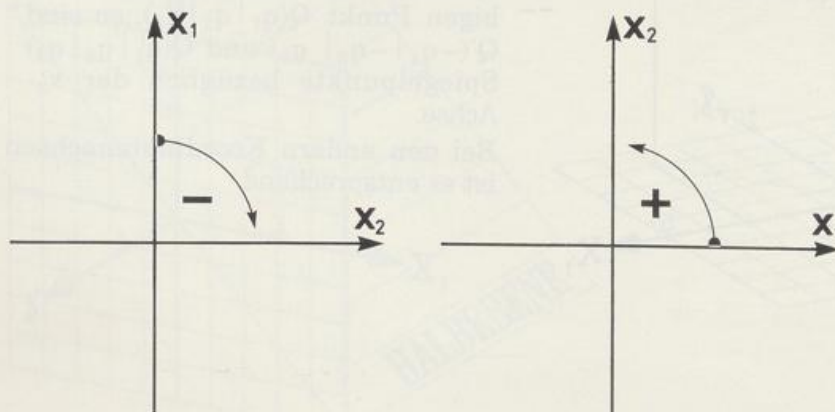
Ändert man bei allen Koordinaten eines Punkts die Vorzeichen, dann bekommt man den Spiegelpunkt bezüglich des Ursprungs. So sind also die Punkte  $Q(q_1 | q_2 | q_3)$  und  $Q'(-q_1 | -q_2 | -q_3)$  Spiegelpunkte bezüglich des Ursprungs.



### Orientierung

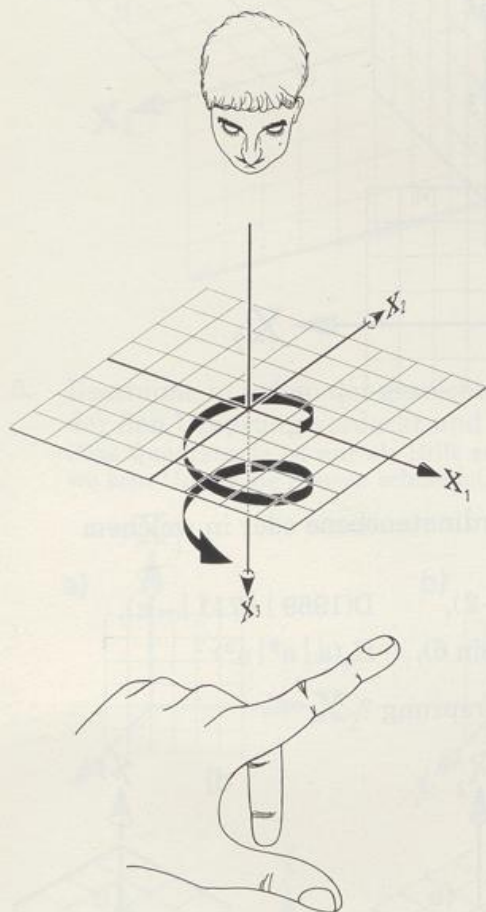
Je nach Lage der Achsen unterscheidet man in der Ebene zwei verschieden orientierte Koordinatensysteme. Wenn man die  $x_1$ -Achse durch eine mathematisch positive Drehung (linksum, entgegen dem Uhrzeigersinn) auf kürzestem Weg in die  $x_2$ -Achse überführen kann, dann heißt das Koordinatensystem **positiv orientiert** oder kurz **Rechtssystem**. Vertauscht man die beiden Achsen, so ergibt sich ein **negativ orientiertes** Koordinatensystem, kurz ein **Linkssystem**.

### Ebenes Linkssystem      Ebenes Rechtssystem

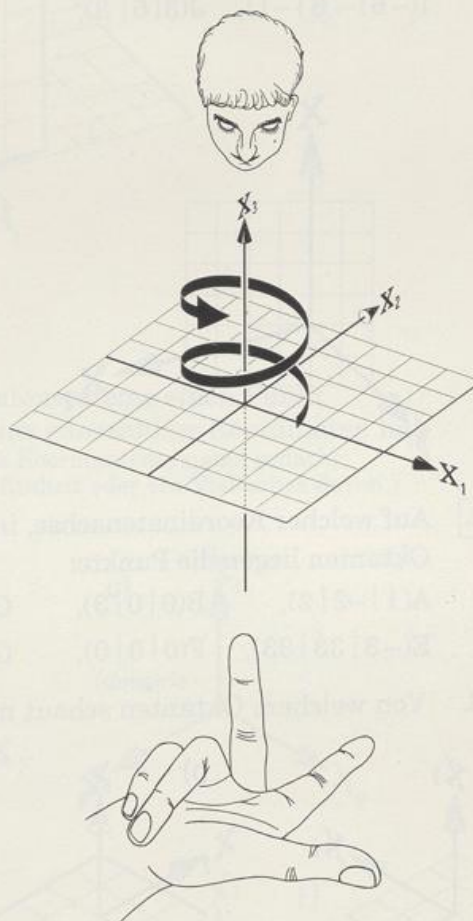


Im Raum ist es komplizierter. Ebene Koordinatensysteme lassen sich hier nicht mehr in Links- und Rechtssysteme einteilen, weil man sie von zwei Seiten betrachten kann. Was man von der einen Seite als Rechtssystem sieht, ist von der andern Seite aus gesehen ein Linkssystem und umgekehrt. Räumliche Koordinatensysteme aber lassen sich wieder in zwei Gruppen einteilen: Schaut man so auf die  $x_1x_2$ -Ebene, daß ihre Achsen ein ebenes Rechtssystem bilden, und kommt die  $x_3$ -Achse auf einen zu, dann hat man ein **räumliches Rechtssystem** vor sich. Zeigt dagegen die  $x_3$ -Achse von einem weg, so ist das Koordinatensystem ein **räumliches Linkssystem**.

### Räumliches Linkssystem



### Räumliches Rechtssystem



Daumen ( $x_1$ -Achse), Zeigefinger ( $x_2$ -Achse) und Mittelfinger ( $x_3$ -Achse) der rechten Hand bilden ein Rechtssystem, die gleichen Finger der linken Hand bilden ein Linkssystem.

Bei einem Rechtssystem bewegt sich eine normale Schraube (Rechtsschraube) in  $x_3$ -Richtung, wenn man sie so dreht, daß die  $x_1$ -Achse auf kürzestem Weg in die  $x_2$ -Achse übergeht.

Spiegelt man ein Rechtssystem an einer Ebene, so entsteht ein Linkssystem und umgekehrt. Wir verwenden künftig nur Rechtssysteme.

## Aufgaben

»Bestimme die Punkte ...«, »Lies die Punkte ... ab« steht kurz und bündig für:  
Bestimme die Koordinaten der Punkte..., Lies die Koordinaten der Punkte ... ab.

1. Zeichne ein Koordinatensystem

a) im Schrägbild

b) im Normalbild und trage die Punkte ein:

$$A(0|-2|0),$$

$$B(0|2|3),$$

$$C(-5|0|3),$$

$$D(2|4|4),$$

$$E(-4|2|3),$$

$$F(-2|-4|5),$$

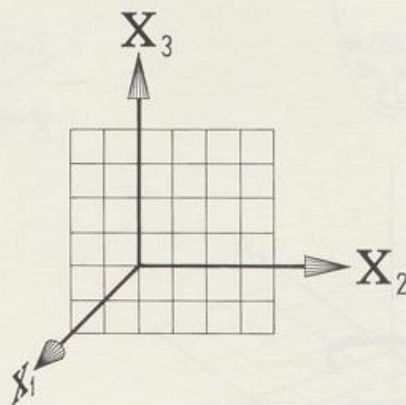
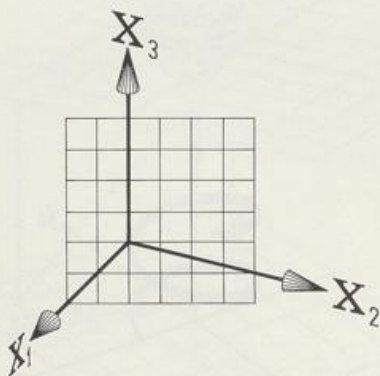
$$G(5|-2|1),$$

$$H(4|-6|-5),$$

$$I(-6|-6|-1),$$

$$J(3|6|3),$$

$$K(-3|4|-6).$$



2. Auf welcher Koordinatenachse, in welcher Koordinatenebene oder in welchem Oktanten liegen die Punkte:

$$A(1|-2|2),$$

$$B(0|0|3),$$

$$C(-\sqrt{2}|-\sqrt{2}|-2),$$

$$D(1989|4711|-\pi),$$

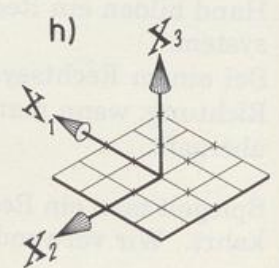
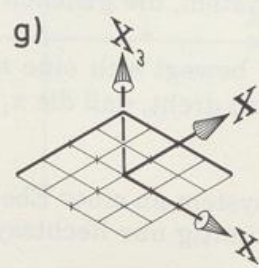
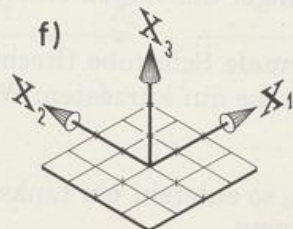
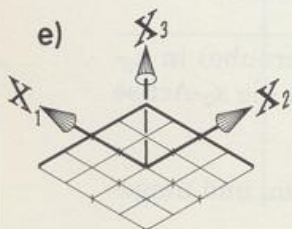
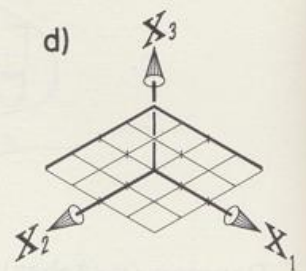
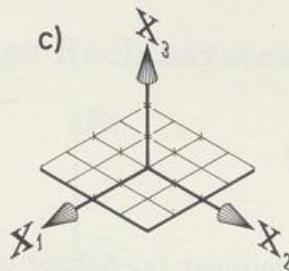
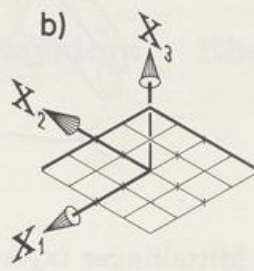
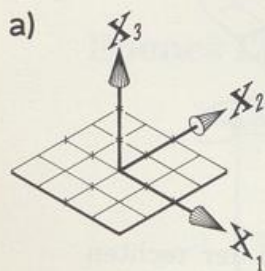
$$E(-3|33|33),$$

$$F(0|0|0),$$

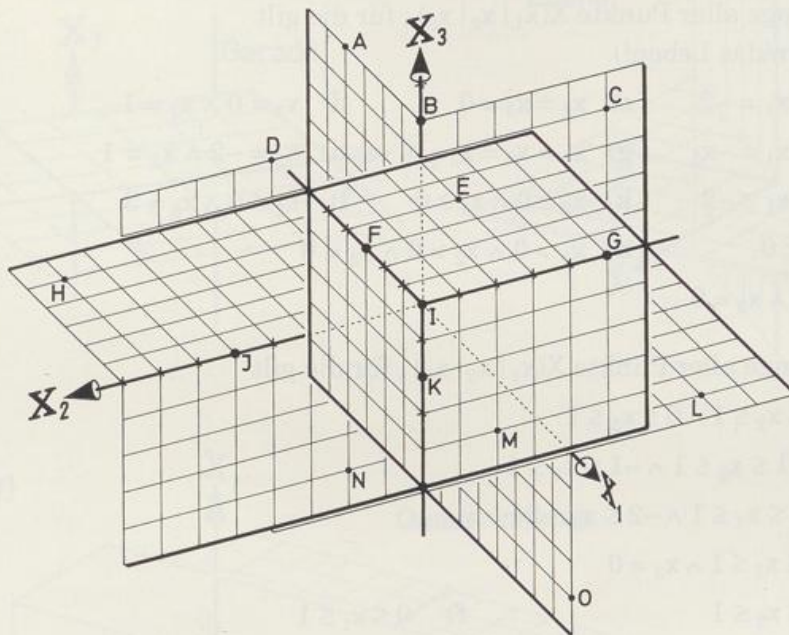
$$G(\sin 2|\sin 4|\sin 6),$$

$$H_a(a|a^2|a^3)$$

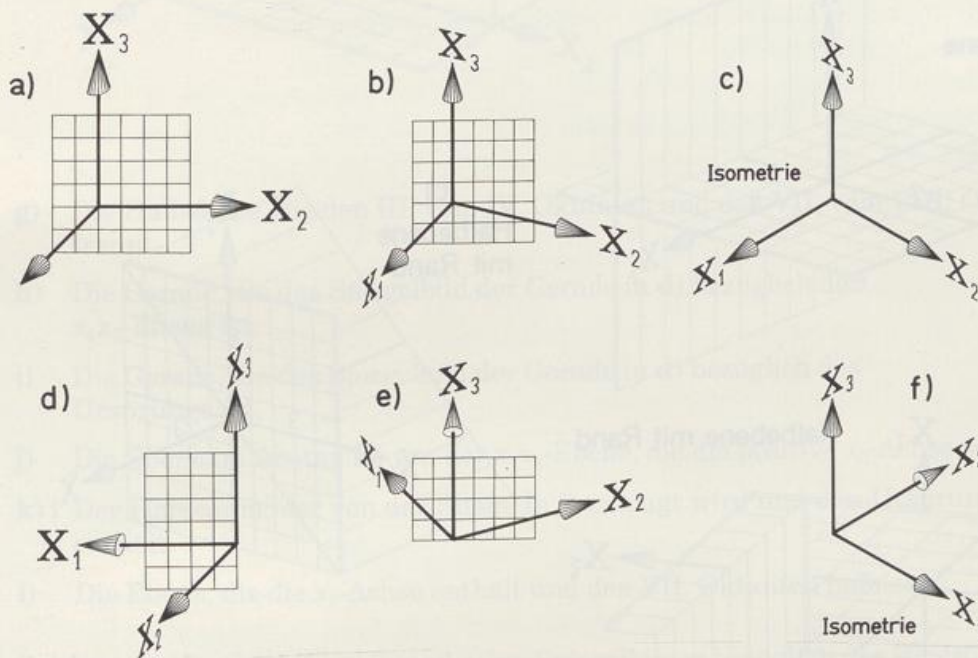
3. Von welchem Oktanten schaut man auf den Ursprung?



4. Lies die Punkte A bis O aus dem Bild ab. Die Punkte liegen auf Gitterlinien. Benachbarte parallele Gitterlinien in den Koordinatenebenen haben den Abstand 1.



5. Bestimme in jedem der gezeichneten Koordinatensysteme einen Punkt, der den Ursprung verdeckt und möglichst kleine ganzzahlige Koordinaten hat. (Das Quadratnetz ist nur als Hilfe zum Zeichnen des Koordinatensystems gedacht; wo sein Umriß die Achsen schneidet, setze man die Einheit oder ein Vielfaches davon.)



6. Bestimme in jedem Koordinatensystem von Aufgabe 5. einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten, der möglichst nah am Ursprung liegt und vom Ursprung verdeckt wird.

7. Bestimme im Schrägbild von Aufgabe 5. a) einen Punkt mit möglichst kleinen ganzzahligen Koordinaten, der den Punkt  $A(-2 | -3 | 2)$  verdeckt.

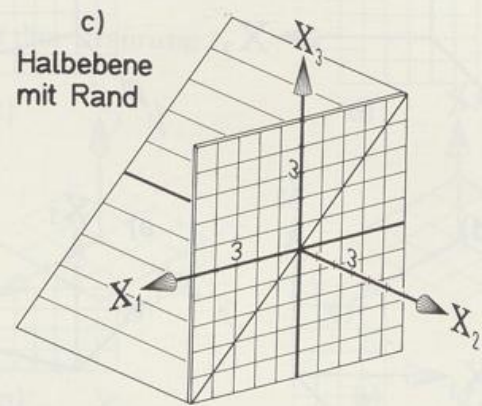
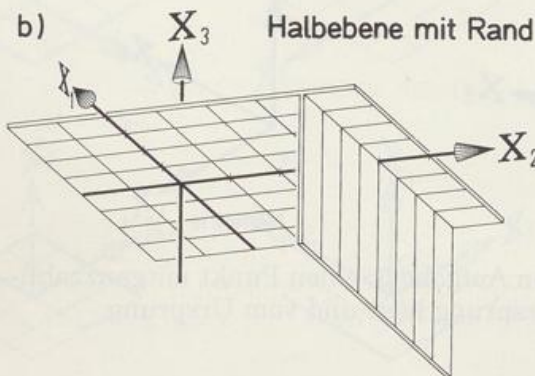
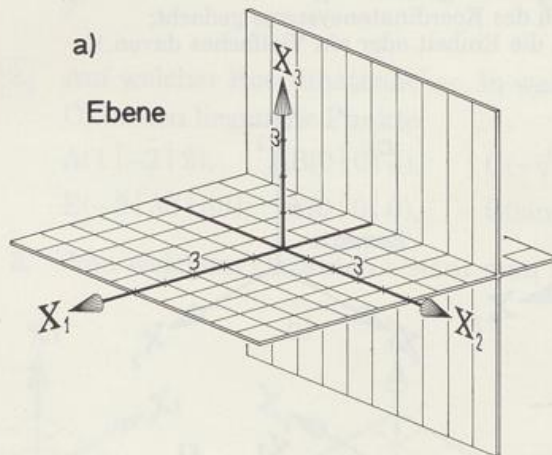
8. Beschreibe die Menge aller Punkte  $X(x_1 | x_2 | x_3)$ , für die gilt (Skizzen erleichtern das Leben!)

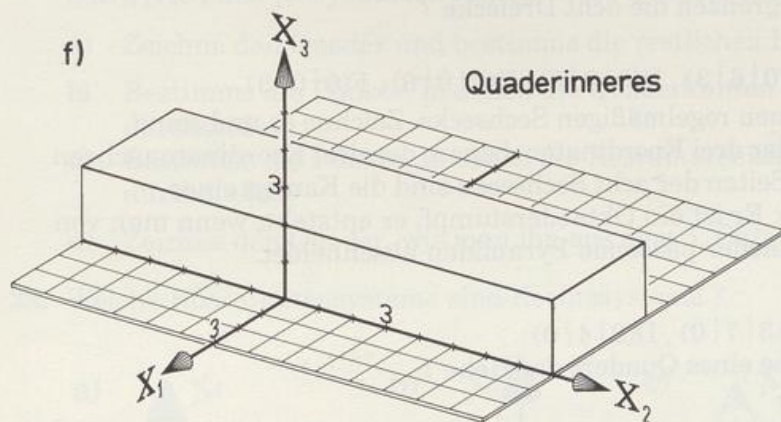
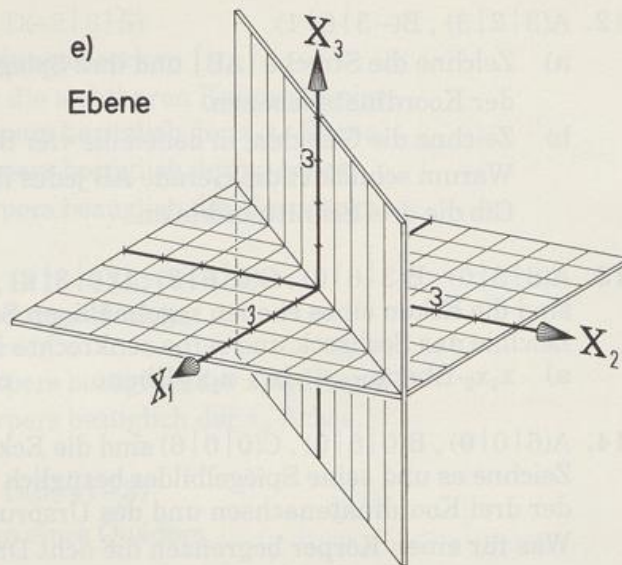
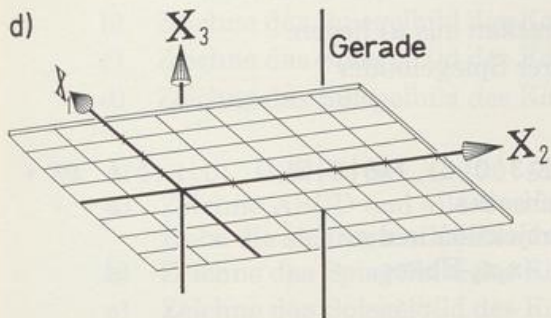
- a)  $x_2 = 0$       b)  $x_1 = -2$       c)  $x_2 = x_3 = 0$       d)  $x_3 = 0 \wedge x_2 = 1$   
 e)  $x_2 = x_3$       f)  $x_1 = -x_3$       g)  $x_1 = x_2 = x_3$       h)  $x_2 = -2 \wedge x_3 = 1$   
 i)  $x_2 < 0$       j)  $x_1 \geq -2$       k)  $x_2 \geq 0 \wedge x_3 \geq 0$       l)  $x_2 \leq 0 \wedge x_3 = 3$   
 m)  $x_1 = -x_2 \wedge x_3 < 0$       n)  $x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \wedge x_3 < 0$   
 o)  $x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \wedge x_3 = 0$

• 9. Beschreibe die Menge aller Punkte  $X(x_1 | x_2 | x_3)$ , für die gilt

- a)  $0 \leq x_1 \leq 1 \wedge 0 \leq x_2 \leq 1 \wedge 0 \leq x_3 \leq 1$   
 b)  $-1 \leq x_1 \leq 1 \wedge -1 \leq x_2 \leq 1 \wedge -1 \leq x_3 \leq 1$   
 c)  $0 \leq x_1 \leq 1 \wedge -1 \leq x_2 \leq 1 \wedge -2 \leq x_3 \leq 2$   
 d)  $0 \leq x_1 \leq 1 \wedge 0 \leq x_2 \leq 1 \wedge x_3 = 0$   
 e)  $0 \leq x_1 \leq 1 \wedge 0 \leq x_2 \leq 1$       f)  $0 \leq x_1 \leq 1$

10. Beschreibe die Punktmenge im Bild oder Text mit Koordinaten(un)gleichungen



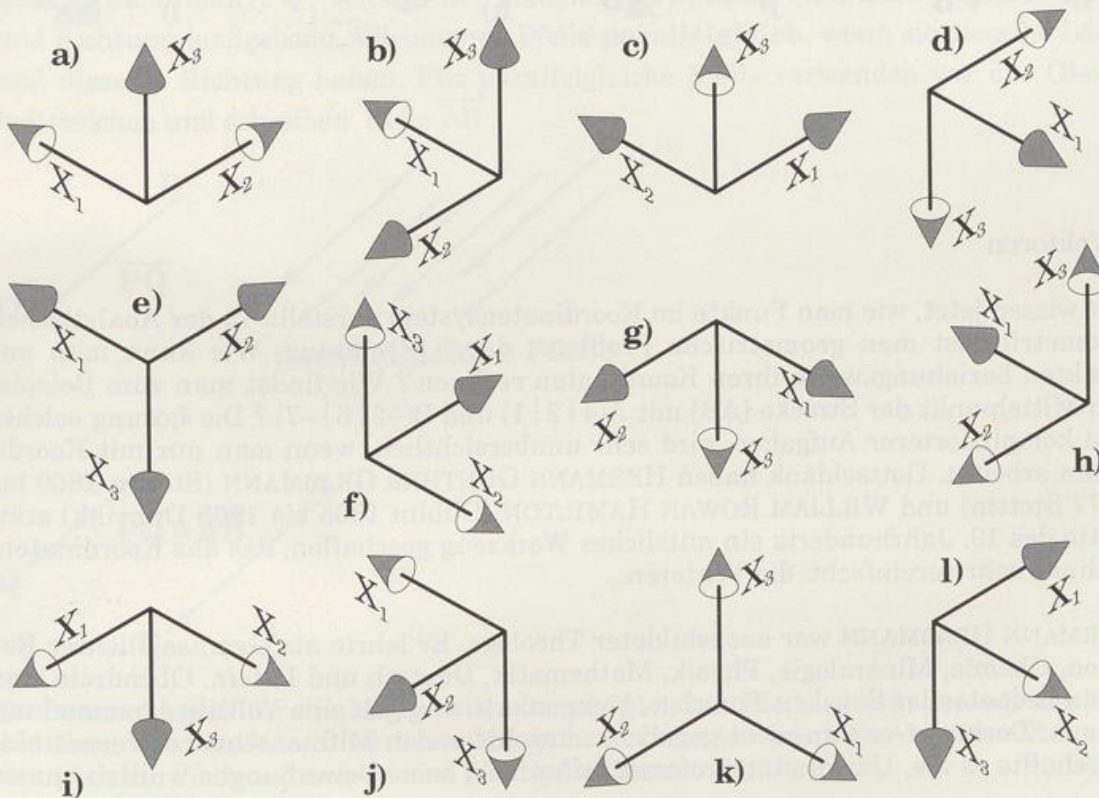


- g) Die Halbebene, die den III. vom IV. Oktanten und den VII. vom VIII. Oktanten trennt.
- h) Die Gerade, die das Spiegelbild der Gerade in **d)** bezüglich der  $x_1x_2$ -Ebene ist.
- i) Die Gerade, die das Spiegelbild der Gerade in **d)** bezüglich des Ursprungs ist.
- j) Die Ebene im Abstand 3 von der  $x_1x_2$ -Ebene, die die positive  $x_3$ -Achse schneidet.
- k) Der Halbraum, der von der Ebene in **j)** erzeugt wird und den Ursprung enthält.
- l) Die Ebene, die die  $x_1$ -Achse enthält und den VII. Oktanten halbiert.

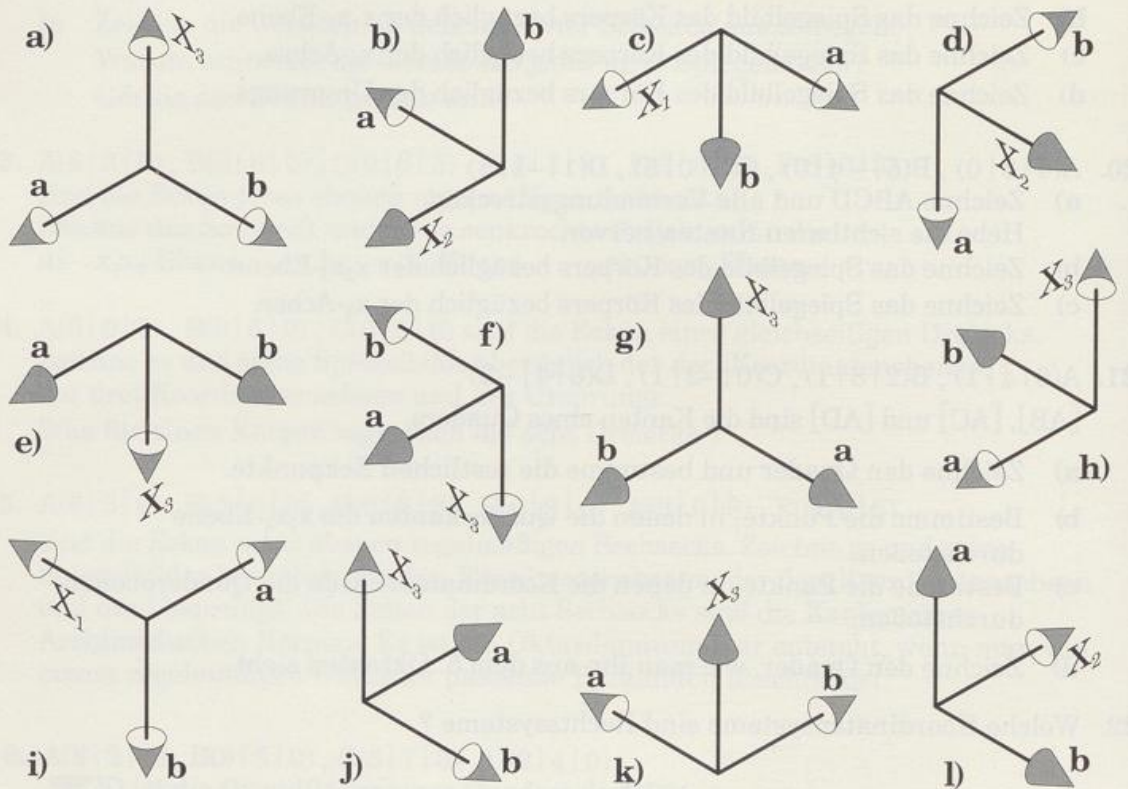
**11.** Zeichne den Punkt  $A(2 | 4 | 6)$  und seine Spiegelbilder bezüglich der Koordinatenachsen, der Koordinatenebenen und des Ursprungs. Verbinde alle Punkte so, daß ein Quaderbild entsteht. Markiere und bestimme die Punkte, in denen die Koordinatenachsen die Quaderflächen durchstoßen.

12.  $A(3|2|3)$ ,  $B(-3|6|1)$
- Zeichne die Strecke  $[AB]$  und ihre Spiegelbilder bezüglich der Koordinatenebenen.
  - Zeichne die Geraden, in denen die vier Strecken aus a) liegen. Warum schneidet die Gerade  $AB$  jedes ihrer Spiegelbilder? Gib die drei Schnittpunkte an.
- 13.  $A(6|3|0)$ ,  $B(3|6|0)$ ,  $C(0|6|3)$ ,  $D(0|3|6)$ ,  $E(3|0|6)$ ,  $F(6|0|3)$  sind die Ecken eines ebenen regelmäßigen Sechsecks. Zeichne das Sechseck und seine senkrechte Projektion in die
- $x_1x_2$ -Ebene
  - $x_1x_3$ -Ebene
  - $x_2x_3$ -Ebene.
- 14.  $A(6|0|0)$ ,  $B(0|6|0)$ ,  $C(0|0|6)$  sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Zeichne es und seine Spiegelbilder bezüglich der drei Koordinatenebenen, der drei Koordinatenachsen und des Ursprungs. Was für einen Körper begrenzen die acht Dreiecke?
- 15.  $A(6|3|0)$ ,  $B(3|6|0)$ ,  $C(0|6|3)$ ,  $D(0|3|6)$ ,  $E(3|0|6)$ ,  $F(6|0|3)$  sind die Ecken eines ebenen regelmäßigen Sechsecks. Zeichne es und seine Spiegelbilder bezüglich der drei Koordinatenebenen, der drei Koordinatenachsen und des Ursprungs. Die Seiten der acht Sechsecke sind die Kanten eines Archimedischen Körpers: Er ist ein Oktaederstumpf, er entsteht, wenn man von einem regelmäßigen Oktaeder passende Pyramiden abschneidet.
16.  $A(8|2|0)$ ,  $B(9|5|0)$ ,  $C(3|7|0)$ ,  $D(2|4|0)$   
 $ABCD$  ist die Grundfläche eines Quaders der Höhe 1.
- Zeichne den Quader
  - Zeichne das Spiegelbild des Quaders bezüglich der  $x_1x_2$ -Ebene.
  - Zeichne das Spiegelbild des Quaders bezüglich der  $x_1x_3$ -Ebene.
  - Zeichne das Spiegelbild des Quaders bezüglich der  $x_2x_3$ -Ebene.
- 17  $A(8|2|0)$ ,  $B(9|5|0)$ ,  $C(3|7|0)$ ,  $D(2|4|0)$   
 $ABCD$  ist die Grundfläche eines Quaders der Höhe 1.
- Zeichne den Quader
  - Zeichne das Spiegelbild des Quaders bezüglich der  $x_3$ -Achse.
  - Zeichne das Spiegelbild des Quaders bezüglich der  $x_2$ -Achse.
  - Zeichne das Spiegelbild des Quaders bezüglich der  $x_1$ -Achse.
- 18.  $A(6|4|1)$ ,  $B(4|6|0)$ ,  $C(5|8|2)$ ,  $D(7|6|3)$ ,  
 $E(4|3|3)$ ,  $F(2|5|2)$ ,  $G(3|7|4)$ ,  $H(5|5|5)$   
 $ABCD$  ist die Grundfläche,  $EFGH$  die Deckfläche eines Würfels.
- Zeichne den Würfel
  - Zeichne das Spiegelbild des Würfels bezüglich der  $x_1x_2$ -Ebene.
  - Zeichne das Spiegelbild des Würfels bezüglich der  $x_1x_3$ -Ebene.
  - Zeichne das Spiegelbild des Würfels bezüglich der  $x_2x_3$ -Ebene.

- 19.  $A(-4 | 2 | 0)$ ,  $B(2 | 5 | 0)$ ,  $C(0 | 6 | 5)$ ,  $D(-2 | 8 | 5)$ 
  - a) Zeichne ABCD und alle Verbindungsstrecken.  
Welcher Körper entsteht? Hebe die sichtbaren Kanten hervor.
  - b) Zeichne das Spiegelbild des Körpers bezüglich der  $x_1x_3$ -Ebene.
  - c) Zeichne das Spiegelbild des Körpers bezüglich der  $x_3$ -Achse.
  - d) Zeichne das Spiegelbild des Körpers bezüglich des Ursprungs.
  
- 20.  $A(4 | 3 | 0)$ ,  $B(5 | -4 | 0)$ ,  $C(8 | 0 | 5)$ ,  $D(1 | -1 | 5)$ 
  - a) Zeichne ABCD und alle Verbindungsstrecken.  
Hebe die sichtbaren Kanten hervor.
  - b) Zeichne das Spiegelbild des Körpers bezüglich der  $x_2x_3$ -Ebene.
  - c) Zeichne das Spiegelbild des Körpers bezüglich der  $x_3$ -Achse.
  
- 21.  $A(6 | 4 | 1)$ ,  $B(2 | 8 | 1)$ ,  $C(0 | -2 | 1)$ ,  $D(6 | 4 | -3)$   
 $[AB]$ ,  $[AC]$  und  $[AD]$  sind die Kanten eines Quaders.
  - a) Zeichne den Quader und bestimme die restlichen Eckpunkte.
  - b) Bestimme die Punkte, in denen die Quaderkanten die  $x_1x_2$ -Ebene durchstoßen.
  - c) Bestimme die Punkte, in denen die Koordinatenachsen die Quaderebenen durchstoßen.
  - d) Zeichne den Quader, wie man ihn aus dem 5. Oktanten sieht.
  
- 22. Welche Koordinatensysteme sind Rechtssysteme ?



23. Ersetze a und b so durch  $x_1$ ,  $x_2$  beziehungsweise  $x_3$ , daß ein Rechtssystem entsteht.



## 2. Vektoren

Wir wissen jetzt, wie man Punkte im Koordinatensystem darstellt. In der Analytischen Geometrie löst man geometrische Probleme durch Rechnung. Wie kann man mit Punkten beziehungsweise ihren Koordinaten rechnen? Wie findet man zum Beispiel den Mittelpunkt der Strecke  $[AB]$  mit  $A(4 | 2 | 1)$  und  $B(-2 | 6 | -7)$ ? Die Lösung solcher und komplizierterer Aufgaben wird sehr unübersichtlich, wenn man nur mit Koordinaten arbeitet. Gottseidank haben HERMANN GÜNTHER GRABMANN (Stettin 1809 bis 1877 Stettin) und WILLIAM ROWAN HAMILTON (Dublin 1805 bis 1865 Dunsink) etwa Mitte des 19. Jahrhunderts ein nützliches Werkzeug geschaffen, das das Koordinatenrechnen sehr vereinfacht: die Vektoren.

HERMANN GRABMANN war ausgebildeter Theologe. Er lehrte als Gymnasiallehrer Religion, Chemie, Mineralogie, Physik, Mathematik, Deutsch und Latein. Obendrein war er ein bedeutender Sanskrit-Forscher, komponierte und gab eine Volksliedersammlung heraus. Doch war es ihm nicht gegeben, seine Ideen den Mitmenschen zu vermitteln. Er schaffte es nie, Universitätsprofessor zu werden, seine Bewerbungen wurden immer

abgelehnt mit dem Urteil: originell, aber unverständlich. Auch sein Hauptwerk »Die lineale Ausdehnungslehre« von 1844 – er stellte darin zum ersten Mal die Vektorrechnung vor – blieb lange Zeit verkannt.

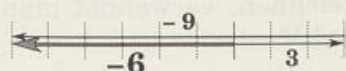
Etwa gleichzeitig mit GRAßMANN entwickelte WILLIAM HAMILTON die Quaternionenrechnung als Erweiterung des Rechnens mit komplexen Zahlen. Er war es, der darin die Bezeichnung »Vektor« eingeführt hat.

JOSIAH WILLARD GIBBS, amerikanischer Mathematiker und Physiker, (New Haven 1839 bis 1903 New Haven) und OLIVER HEAVISIDE, englischer Physiker, (London 1850 bis 1925 Homefield in Torquay) haben die Vektorrechnung vor allem für physikalische Anwendungen ausgebaut.

Nach und nach fanden auch die Mathematiker Gefallen an diesem neuen Instrument. Anfang des 20. Jahrhunderts hat sich die Vektorrechnung durchgesetzt. In vielen mathematischen und technischen Disziplinen ist sie heute unentbehrlich.

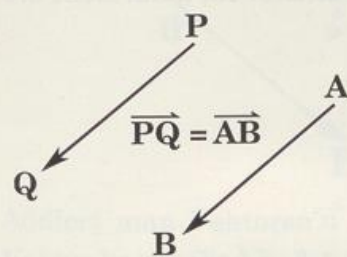
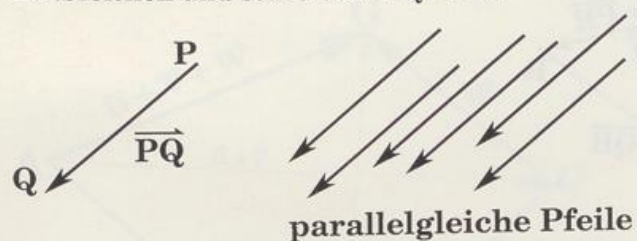
### Was sind Vektoren?

Die Addition von Zahlen läßt sich mit Pfeilen veranschaulichen. Pfeile addiert man, indem man sie »Fuß an Spitze« aneinanderhängt. Der Ergebnisvektor geht vom Fuß des ersten zur Spitze des letzten Pfeils. Diese Pfeilrechnung erweitern wir jetzt auf den Raum.



$$3 + (-9) = -6$$

Ein Pfeil ist festgelegt durch ein Paar von Punkten. Für einen Pfeil, der von P nach Q geht, schreibt man  $\overrightarrow{PQ}$ . Wie bei der Zahlen-Pfeilrechnung sind auch jetzt nur Länge und Richtung maßgebend. Wir nennen Pfeile **parallelgleich**, wenn sie dieselbe Länge und dieselbe Richtung haben. Für parallelgleiche Pfeile verwenden wir das Gleichheitszeichen und schreiben  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$ .



Als Sammelbegriff für die Menge aller parallelgleichen Pfeile verwenden wir die Bezeichnung **Vektor**. Jeder Pfeil dieser Menge heißt **Repräsentant** des Vektors. Oft nennt man auch die Pfeile selber kurz und bündig Vektoren.

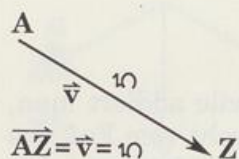
Eine ähnliche Unterscheidung macht man auch bei den Brüchen.  $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{-18}{-24}, \frac{51}{68} \dots$  sind Repräsentanten des Bruchs mit dem Wert 0,75. Auch hier nennt man jeden Repräsentanten einfachheits- halber selber Bruch.

Wir fassen zusammen:

**Definition**

Der Vektor  $\vec{PQ}$  ist die Menge aller zum Pfeil  $\overrightarrow{PQ}$  paralleleichen Pfeile.

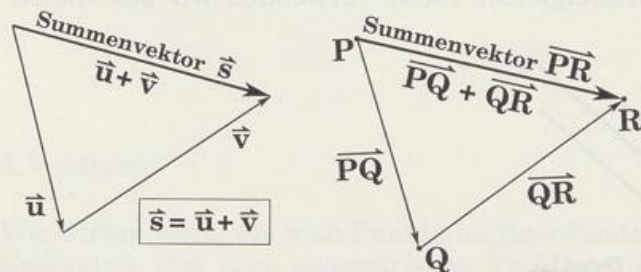
Der Vorteil dieser Definition besteht darin, daß ein Vektor an jedem Raumpunkt als Pfeil zur Verfügung steht.



Um einen Vektor unabhängig vom Repräsentanten zu bezeichnen, verwendet man auch kleine befeilte lateinische oder kleine deutsche Buchstaben.

**Addition von Vektoren**

Die Addition von Vektoren im Raum (und in der Ebene) ist so festgelegt: Man hängt an einen Pfeil des 1. Summanden einen passenden Pfeil des 2. Summanden, das heißt, einen Pfeil, der da anfängt, wo der erste aufhört. Der Ergebnisvektor führt vom Fuß des ersten zur Spitze des zweiten Pfeils. Er legt den Ergebnisvektor fest.



Bezeichnet man die Anfangs- und Endpunkte der Pfeile mit Buchstaben, dann sieht die Addition so aus:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

Regel von CHASLES (sprich schaal)  
 (Michel CHASLES, französischer Mathematiker,  
 Epernon 1793 bis 1880 Paris)

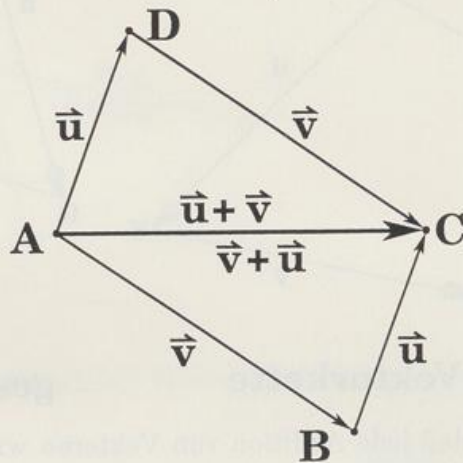
Für diese Vektoraddition gelten dieselben Rechenregeln wie für die Addition von Zahlen:

### Kommutativgesetz der Vektoraddition

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



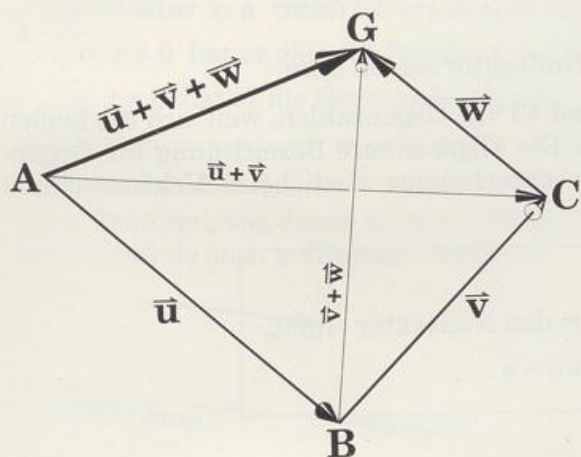
### Assoziativgesetz der Vektoraddition

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

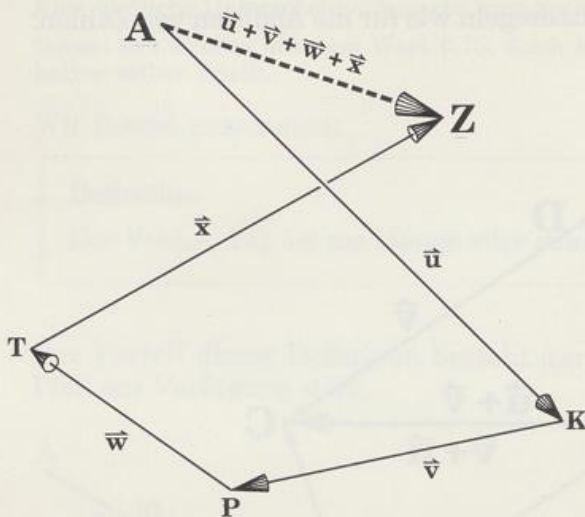
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$$

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$$

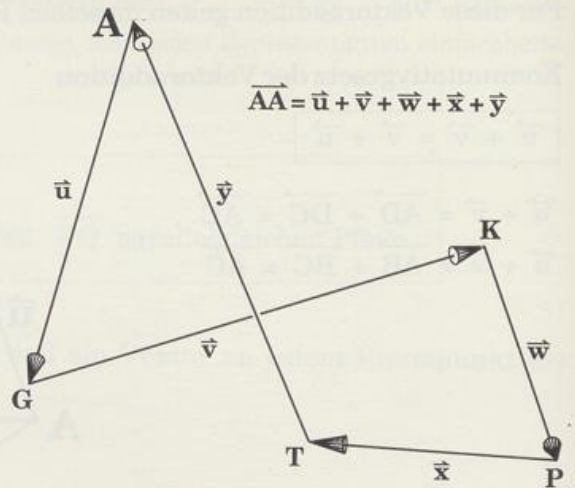
Weil die Reihenfolge der Additionen keine Rolle spielt, läßt man die Klammern meist weg und schreibt  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ .



Addiert man Vektoren  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ , dann nennt man diese Aneinanderreihung auch **Vektorkette**. Sind Fuß A des ersten und Spitze Z des letzten Pfeils verschieden, so heißt die Vektorkette **offen**: der Summenvektor  $\overrightarrow{AZ} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \dots$  hat die Richtung von A nach Z. Fallen A und Z zusammen ( $Z = A$ ), so heißt die Vektorkette **geschlossen**. Formal ergibt sich jetzt der Summenvektor  $\overrightarrow{AA}$ , ein Gebilde ohne Richtung und Ausdehnung.



### offene Vektorkette



### geschlossene Vektorkette

Wir verlangen, daß jede Addition von Vektoren wieder einen Vektor ergibt. Deshalb müssen wir  $\overrightarrow{AA}$  als Vektor zulassen. Man nennt ihn Nullvektor. Wie die Zahl 0 bewirkt seine Addition nichts, er verhält sich »neutral«.

#### Definition des neutralen Elements

Der Vektor, der beim Addieren nichts ändert, heißt **Nullvektor**. Man schreibt ihn  $\vec{0}$ .

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a},$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$

Der Nullvektor hat die Länge null.

Der Begriff der Richtung verliert beim Nullvektor seinen Sinn.

Beim Zahlenrechnen spricht man bei  $-13$  und  $13$  von Gegenzahlen, weil sich die beiden beim Addieren aufheben, also null ergeben. Die allgemeinere Bezeichnung für Gegenzahl ist inverses Element. Weil man Entsprechendes auch beim Vektorrechnen braucht, definiert man:

#### Definition des inversen Elements

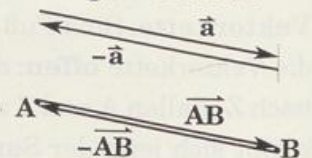
Der Vektor, der zu einem Vektor  $\vec{a}$  addiert den Nullvektor ergibt, heißt **Gegenvektor** von  $\vec{a}$ . Man schreibt ihn  $-\vec{a}$ .

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0},$$

$$\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}, -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

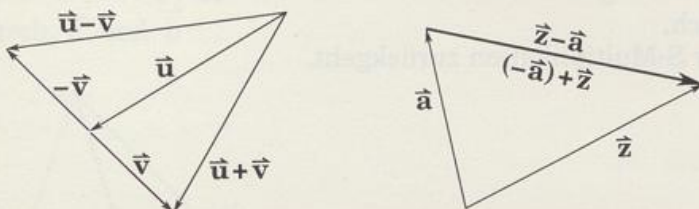
#### Gegenvektoren



Der Gegenvektor  $-\vec{a}$  von  $\vec{a}$  ist genau so lang wie  $\vec{a}$  und hat die Gegenrichtung von  $\vec{a}$ .  
 $\vec{a}$  ist Gegenvektor von  $-\vec{a}$ .  $\vec{a}$  und  $-\vec{a}$  sind Gegenvektoren.

Statt  $\vec{u} + (-\vec{v})$  schreibt man kurz  $\vec{u} - \vec{v}$  und hat damit die Subtraktion von Vektoren auf die Addition zurückgeführt.

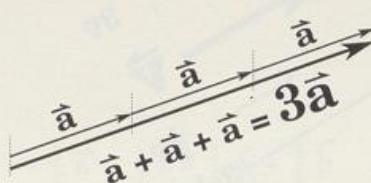
### Subtraktion - Addition



### S-Multiplikation

Wie beim Zahlenrechnen führt man auch bei Vektoren für Summen mit gleichen Summanden eine Abkürzung ein:

$$\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} =: 3 \cdot \vec{a} \quad (= 3\vec{a})$$



Der Vektor  $3\vec{a}$  ist also dreimal so lang wie  $\vec{a}$  und hat dieselbe Richtung.

Wie bei Zahlen erweitert man diese Produktdefinition auf reelle Faktoren:

#### Definition

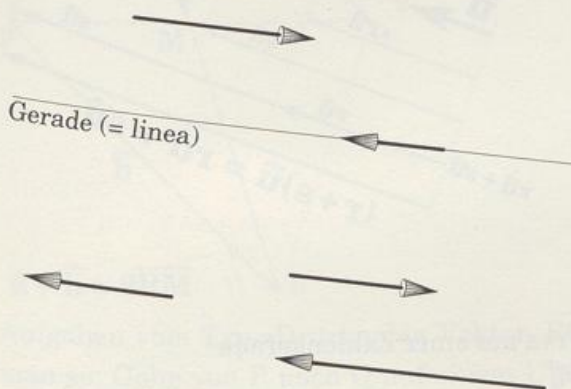
Der Vektor  $r \cdot \vec{a}$  ( $r \in \mathbb{R}$ ) ist  $|r|$ -mal so lang wie der Vektor  $\vec{a}$ .

Für  $r > 0$  hat er dieselbe Richtung wie  $\vec{a}$ ,

für  $r < 0$  hat er die Gegenrichtung von  $\vec{a}$ .

Insbesondere gilt:  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$  und  $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ .

Zwei Vektoren, von denen einer ein Vielfaches des andern ist, sind parallel; man nennt sie auch **kollineare Vektoren**.

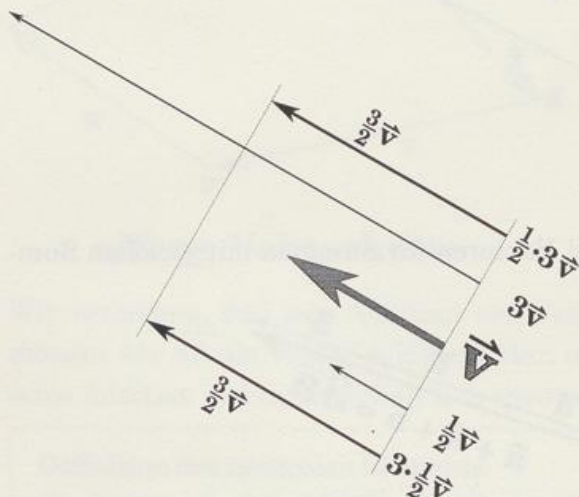


Manchmal nennt man reelle Zahlen im Gegensatz zu Vektoren auch Skalare. Deshalb heißt die Produktbildung »Skalar·Vektor« auch **S-Multiplikation**. Für die S-Multiplikation gelten ähnliche Gesetze wie für die Zahlen-Multiplikation:

### Assoziativgesetz der S-Multiplikation

$$r \cdot (s \cdot \vec{u}) = (rs) \cdot \vec{u} \quad r, s \in \mathbb{R}$$

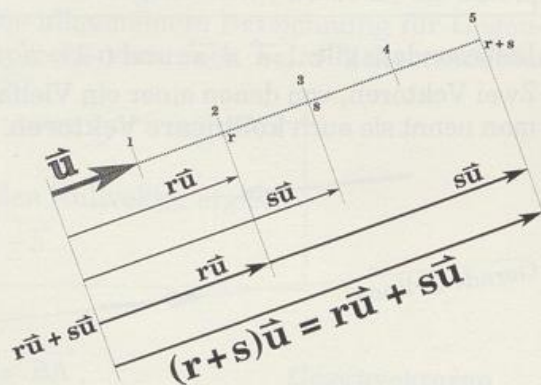
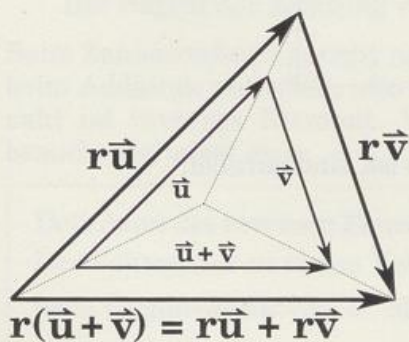
Die Begründung überlegt man sich, indem man auf die Definition der S-Multiplikation zurückgeht.



### 1. Distributivgesetz der S-Multiplikation

$$r \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = r \cdot \vec{u} + r \cdot \vec{v} \quad r \in \mathbb{R}$$

Die Begründung klappt mit dem Strahlensatz.



### 2. Distributivgesetz der S-Multiplikation

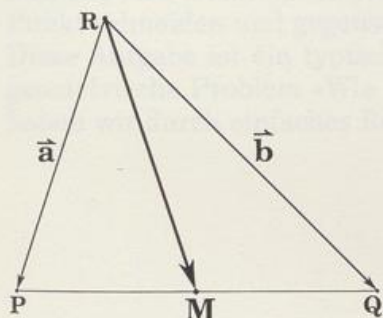
$$(r + s) \cdot \vec{u} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u} \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Dieses Gesetz beschreibt die Zahlenaddition  $r+s$  auf einer Zahlengerade in Richtung  $\vec{u}$ , die Einheit ist die Länge von  $\vec{u}$ .

## Beispiele zum Rechnen mit Vektoren

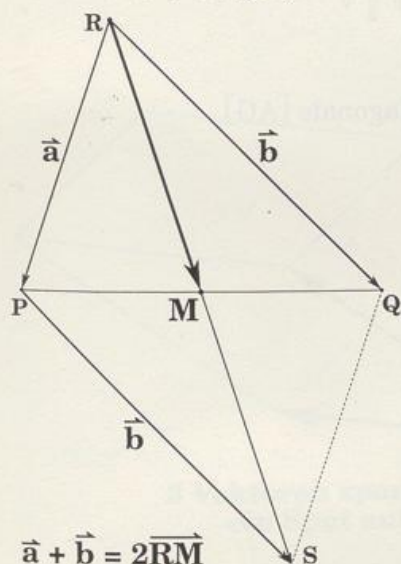
### Seitenhalbierender Vektor

Die Seiten  $[RP]$  und  $[RQ]$  des Dreiecks  $PQR$  legen die Vektoren  $\vec{a} = \overrightarrow{RP}$  und  $\vec{b} = \overrightarrow{RQ}$  fest. Man sagt auch: »Die Vektoren  $\overrightarrow{RP}$  und  $\overrightarrow{RQ}$  spannen das Dreieck  $PQR$  auf«.  $M$  ist die Mitte von  $[PQ]$ . Gesucht ist eine Darstellung des seitenhalbierenden Vektors  $\overrightarrow{RM}$  durch  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .



Lösung: 
$$\begin{aligned}\overrightarrow{RM} &= \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PM} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{2} (-\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \\ \overrightarrow{RM} &= \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})\end{aligned}$$

Der seitenhalbierende Vektor ist also das arithmetische Mittel der Vektoren, die ihn begrenzen. »Im Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen.« Mit diesem Satz hätte man das Ergebnis gleich sehen können. Betrachte dazu das Parallelogramm  $RPSQ$ , das von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannt wird.



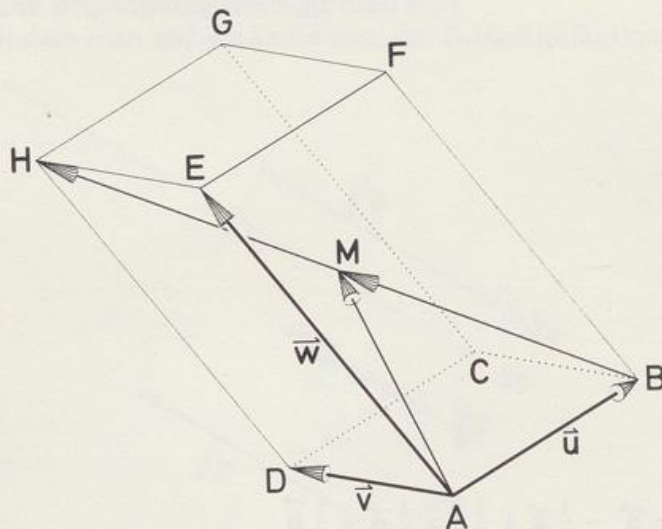
$$\vec{a} + \vec{b} = 2\overrightarrow{RM}$$

Aufgaben vom Typ »Drücke den Vektor  $\overrightarrow{PQ}$  mit den Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aus« löst man so: Gehe von  $P$  nach  $Q$  auf einem Umweg. Der Umweg setzt sich zusammen aus

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  oder aus Vektoren, die sich aus  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  berechnen lassen (offene Vektorkette). Dazu noch ein Beispiel:

### Spatmittelpunkt

Das Spat ist ein Prisma, das von sechs Parallelogrammen begrenzt ist (»schiefer Quader«). Es wird von drei Vektoren aufgespannt. Im Spat ABCDEFGH ist M der Mittelpunkt der Raumdiagonale [BH].

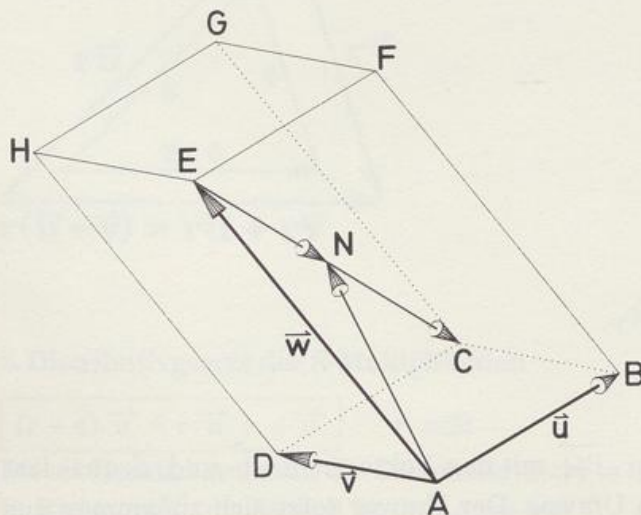


$\vec{AM}$  soll mit den Kantenvektoren  $\vec{u} = \vec{AB}$ ,  $\vec{v} = \vec{AD}$  und  $\vec{w} = \vec{AE}$  ausgedrückt werden.

**Lösung:**

$$\begin{aligned}\vec{AM} &= \vec{AB} + \vec{BM} \\ &= \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{BH} \\ &= \vec{u} + \frac{1}{2} (-\vec{u} + \vec{w} + \vec{v}) = \frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{w} + \frac{1}{2} \vec{v} \\ \vec{AM} &= \frac{1}{2} (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})\end{aligned}$$

Wegen  $\vec{AG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$  ist M auch Mitte der Raumdiagonale [AG].



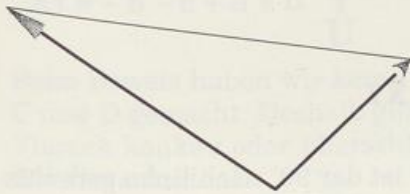
Ist N Mitte von [EC], dann gilt

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EN} \\ &= \overrightarrow{w} + \frac{1}{2} \overrightarrow{EC} \\ &= \overrightarrow{w} + \frac{1}{2} (-\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{w} + \frac{1}{2} \overrightarrow{u} + \frac{1}{2} \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AM}, \text{ also ist } N = M.\end{aligned}$$

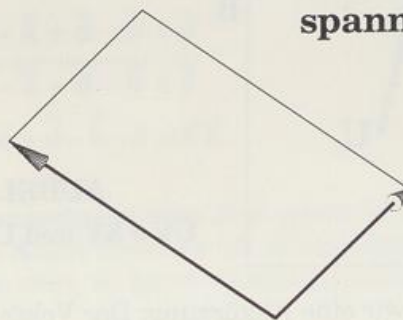
Genau so kann man schließlich noch zeigen, daß M auch Mittelpunkt der Raumdiagonale [DF] ist. Damit ist bewiesen daß sich die vier Raumdiagonalen eines Spats in einem Punkt schneiden und gegenseitig halbieren.

Diese Aufgabe ist ein typisches Beispiel für die Kraft der Vektorrechnung. Das raumgeometrische Problem »Wie liegen die vier Raumdiagonalen eines Spats zueinander?« haben wir durch einfaches Rechnen mit Vektoren gelöst. Das ist Analytische Geometrie!

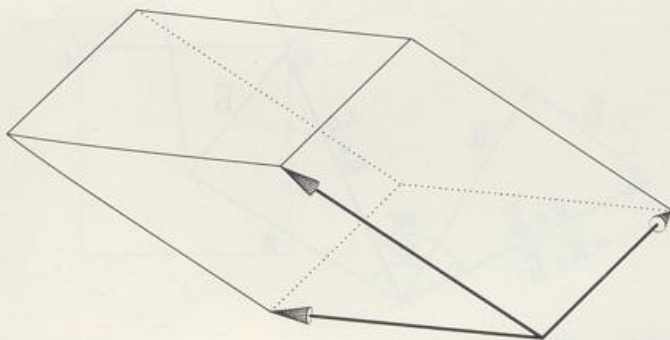
### spannende Vektoren



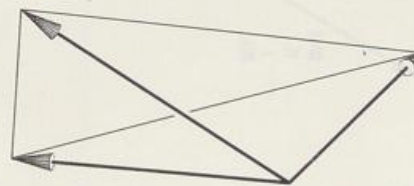
2 Vektoren spannen ein Dreieck auf



2 Vektoren spannen ein Parallelogramm auf



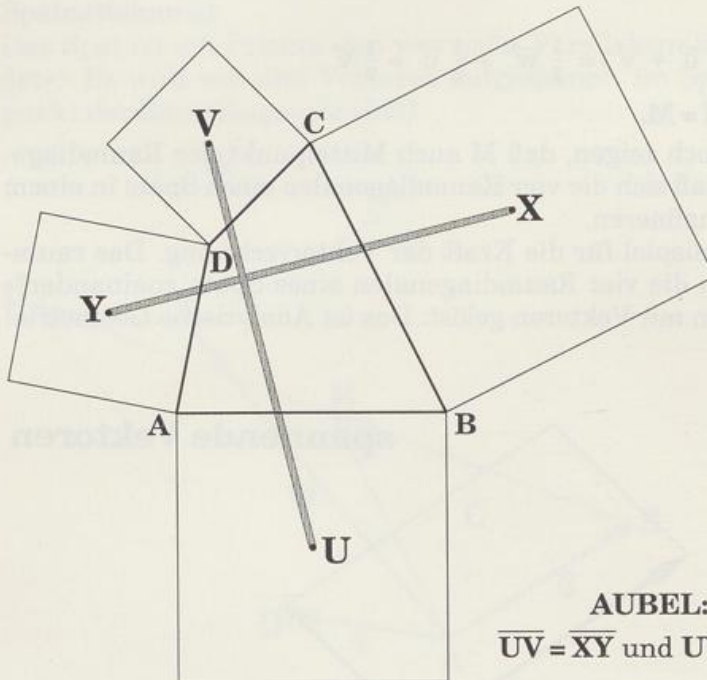
3 Vektoren spannen ein Spats auf



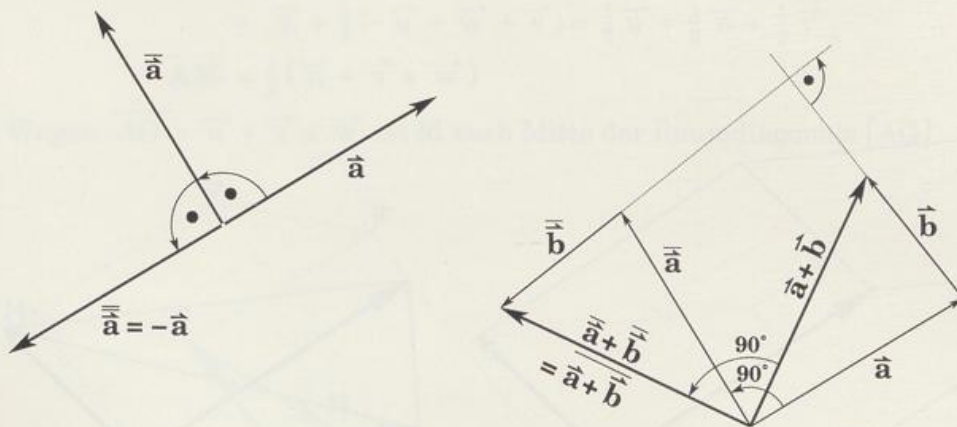
3 Vektoren spannen ein Tetraeder auf

Auch für Probleme der ebenen Geometrie bietet die Vektorrechnung oft eine verblüffend einfache Lösung, zum Beispiel für den Beweis des Aabel-Theorems:

Über den Seiten eines beliebigen Vierecks zeichnet man die Außenquadrate. Verbindet man jeweils die Mitten zweier gegenüberliegender Quadrate, so entstehen zwei Strecken, die gleich lang und zueinander senkrecht sind.

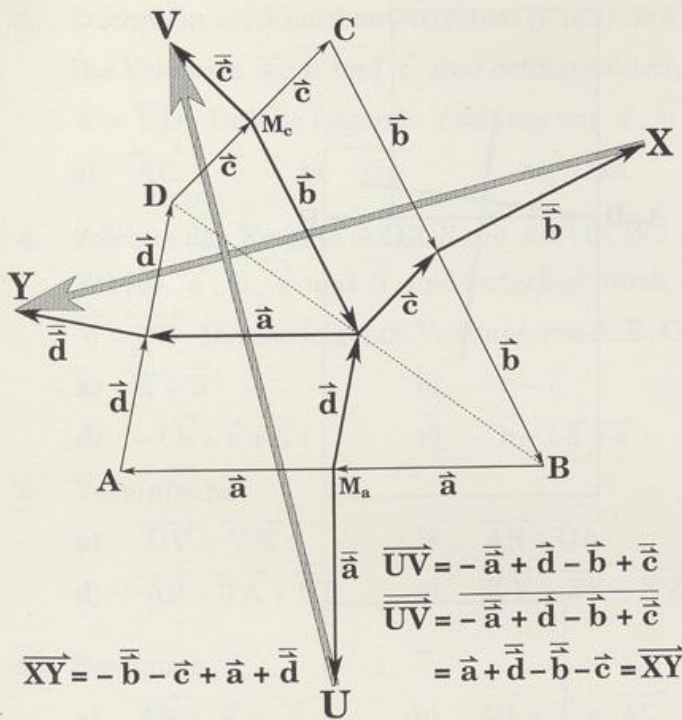


Im Beweis brauchen wir eine Abkürzung: Der Vektor  $\vec{\bar{a}}$  ist der  $90^\circ$  nach links gedrehte Vektor  $\vec{a}$ . Dann ist  $\vec{\bar{\bar{a}}} = -\vec{a}$  und  $\vec{\overline{a+b}} = \vec{\bar{a}} + \vec{\bar{b}}$ . Der Beweis steht im Bild, er verwendet  $\overline{M_a M_c} = \vec{d} - \vec{b}$ .

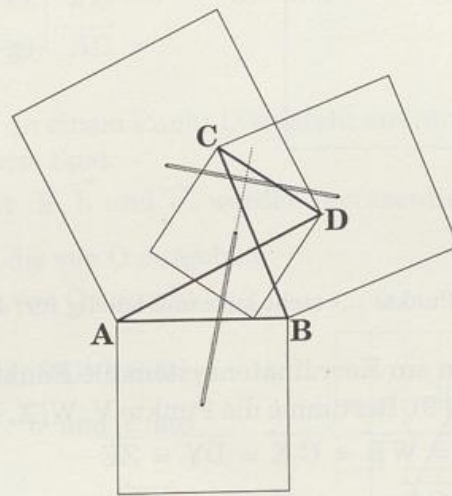
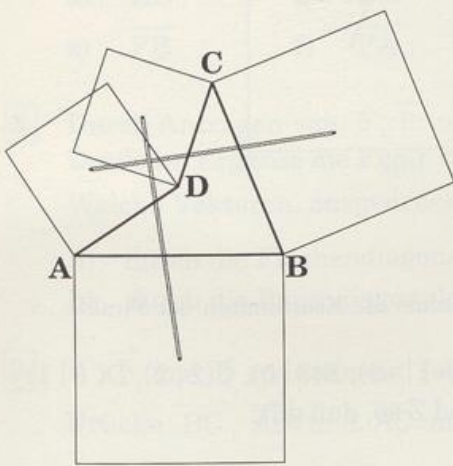


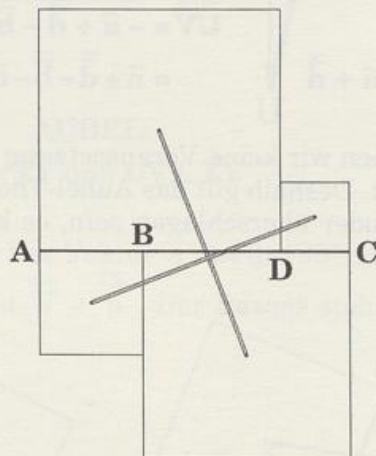
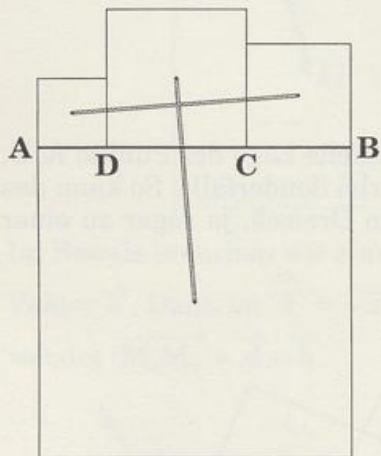
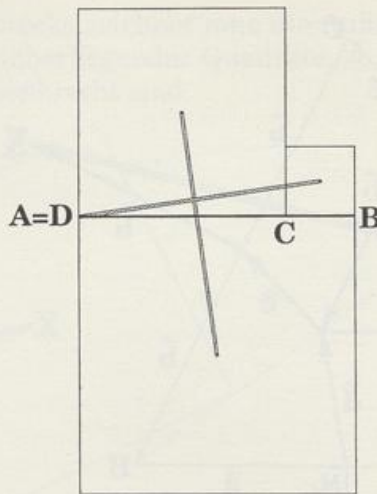
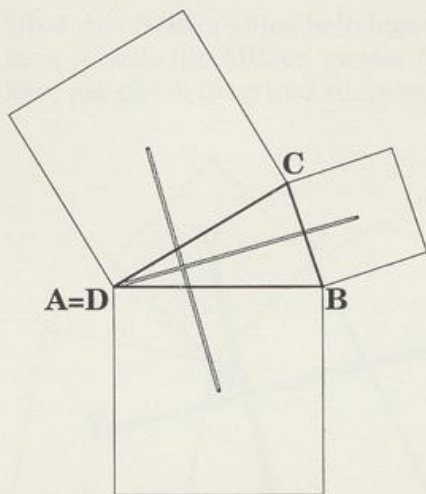
Entweder sieht man das direkt (Mittelparallelen in den Dreiecken ABD und BCD) oder erst nach trickreicher Vektorrechnung:

$$\left. \begin{aligned} \overline{M_a M_c} &= \vec{a} + 2\vec{d} + \vec{c} \\ \overline{M_a M_c} &= -\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} \end{aligned} \right\} \overline{M_a M_c} = \frac{1}{2} (\overline{M_a M_c} + \overline{M_a M_c}) = \vec{d} - \vec{b}.$$



Beim Beweis haben wir keine Voraussetzung über eine spezielle Lage der Punkte A, B, C und D gemacht. Deshalb gilt das Aabel-Theorem für allerlei Sonderfälle: So kann das Viereck konkav oder überschlagen sein, es kann zu einem Dreieck, ja sogar zu einer Strecke entarten!





### Aufgaben

»Bestimme die Punkte ...« steht kurz und bündig für: »Bestimme die Koordinaten der Punkte...«

1. Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte  $A(-1 | -2)$ ,  $B(3 | 0)$ ,  $C(2 | 2)$ ,  $D(0 | 1)$  und  $E(-2 | 3)$ . Bestimme die Punkte  $V$ ,  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  so, daß gilt:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AV} = \overrightarrow{WB} = \overrightarrow{CX} = \overrightarrow{DY} = \overrightarrow{ZE}$$

a)  $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$       b)  $\vec{v} = \overrightarrow{AO}$       c)  $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$

2. Zeichne in ein Koordinatensystem  $A(2 | 0)$ ,  $B(8 | 4)$  und  $C(4 | 8)$ . Zeichne den Summenvektor.

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$       b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$       c)  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

d)  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$       e)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

$$\begin{matrix} 13 \\ 5 & 0 & 14 \\ 5 \end{matrix}$$

3. Zeichne in ein Koordinatensystem  $A(1|1)$ ,  $B(4|1)$ ,  $C(6|3)$  und  $D(3|4)$ .

Die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  sind definiert durch  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ ,

$\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ . Drücke folgende Vektoren mit  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aus:

- a)  $\overrightarrow{AC}$       b)  $\overrightarrow{CA}$       c)  $\overrightarrow{DA}$       d)  $\overrightarrow{BD}$

4. Zeichne das Fünfeck ABCDE mit  $A(0|0)$ ,  $B(3|0)$ ,  $C(4|1)$ ,  $D(4|4)$  und  $E(1|3)$ .  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  und  $\vec{d}$  sind festgelegt durch  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$  und  $\vec{d} = \overrightarrow{DE}$ . Drücke folgende Vektoren mit A, B, C, D und E aus:

- a)  $\vec{a} + \vec{b}$       b)  $-\vec{b} - \vec{c}$       c)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$   
 d)  $-(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$       e)  $-\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})$

5. Vereinfache

- a)  $\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW}$       b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$       c)  $\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{RT}$   
 d)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{BT}$       e)  $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{XZ}$

6. Bestimme  $\vec{x}$

- a)  $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \vec{0}$       b)  $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \overrightarrow{AC}$       c)  $\overrightarrow{AB} - \vec{x} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

7. ABCDEF ist ein regelmäßiges Sechseck mit  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ .

Drücke mit  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aus:

- a)  $\overrightarrow{ED}$       b)  $\overrightarrow{DE}$       c)  $\overrightarrow{FD}$       d)  $\overrightarrow{FC}$   
 e)  $\overrightarrow{FB}$       f)  $\overrightarrow{FA}$       g)  $\overrightarrow{AD}$

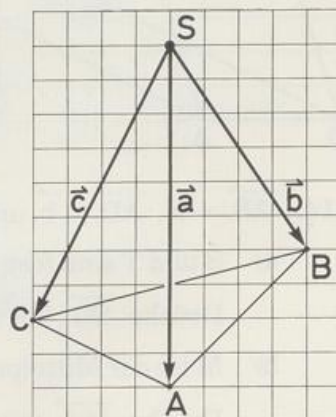
8. Durch Antragen von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  in einem Punkt O entsteht ein räumliches Dreibein. Ergänze die Figur zu einem Spat.

Welche Vektoren, ausgedrückt mit  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$ , werden repräsentiert

- a) durch die Flächendiagonalen, die von O ausgehen.  
 b) durch die Raumdiagonale, die von O ausgeht.

9.  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  spannen ein Tetraeder SABC auf.

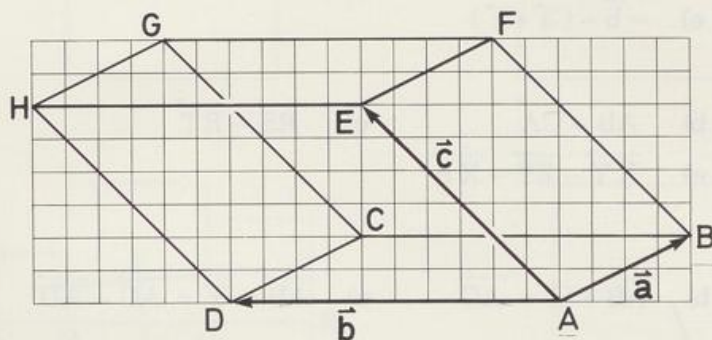
Drücke  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AC}$  mit  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aus.



10.  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  setzen im Ursprung an und bestimmen das Dreieck ABC mit  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  und  $\vec{OC} = \vec{c}$ . D, E und F sind die Mittelpunkte der Seiten [BC], [CA] und [AB]. Drücke  $\vec{DE}$ ,  $\vec{EF}$  und  $\vec{FD}$  mit  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aus.

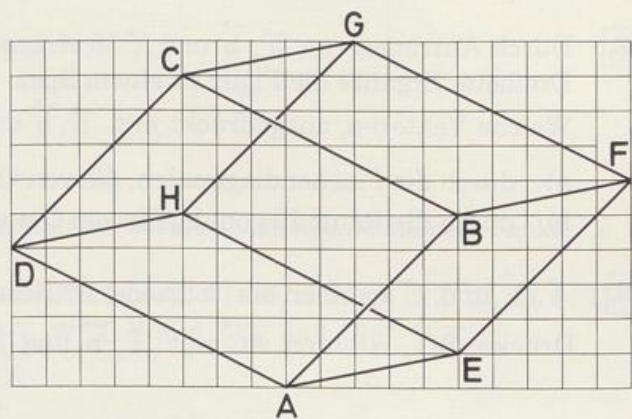
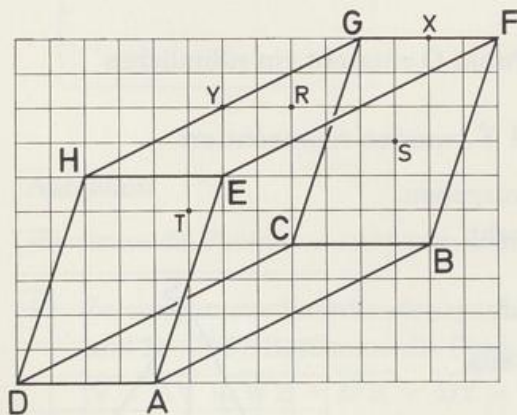
11.  $\vec{AB} = \vec{b}$  und  $\vec{AD} = \vec{d}$  spannen das Parallelogramm ABCD auf. Nimm die Punkte E und F so an, daß gilt:  $\vec{DE} = \frac{1}{3}\vec{DC}$  und  $\vec{AF} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ . Drücke  $\vec{EF}$  mit  $\vec{d}$  und  $\vec{b}$  aus.

12.  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{AD} = \vec{b}$  und  $\vec{AE} = \vec{c}$  spannen das Spat ABCDEFGH auf. Drücke  $\vec{EG}$ ,  $\vec{HF}$ ,  $\vec{EC}$ ,  $\vec{DF}$  und  $\vec{HB}$  mit  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aus.



13.  $\vec{AE} = \vec{u}$ ,  $\vec{AB} = \vec{v}$  und  $\vec{AD} = \vec{w}$  spannen das Spat ABCDEFGH auf. R, S und T sind die Mittelpunkte der Seitenflächen, X und Y sind Kantenmitten. Drücke folgende Vektoren mit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  aus.

- a)  $\vec{AT}$ ,  $\vec{HT}$ ,  $\vec{AX}$ ,  $\vec{HX}$ ,  $\vec{YD}$       b)  $\vec{RS}$ ,  $\vec{YX}$ ,  $\vec{YT}$ ,  $\vec{XT}$ ,  $\vec{ST}$



14.  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{AD} = \vec{b}$  und  $\vec{AE} = \vec{c}$  spannen das Spat ABCDEFGH auf.

- a) S und T sind festgelegt durch  $\vec{AS} = \frac{3}{5}\vec{AB}$  und  $\vec{AT} = \frac{3}{4}\vec{AD}$ .

Drücke  $\vec{SG}$ ,  $\vec{TF}$  und  $\vec{ST}$  mit  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aus.

- b) M ist der Mittelpunkt von [EC]. L liegt auf [EG] mit  $\vec{LE} = \frac{2}{3}\vec{GE}$ .

Drücke  $\vec{ML}$  mit  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aus.

15. Zeige: In jedem Dreieck ist die Summe der drei Vektoren von den Ecken zum Schwerpunkt gleich dem Nullvektor.

16. Eine Pyramide mit der Spitze S hat als Grundfläche das Rechteck ABCD.

Die Pyramide ist festgelegt durch die Vektoren  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$  und  $\overrightarrow{AS} = \vec{c}$ .

M ist der Mittelpunkt der Grundfläche, K ist der Schwerpunkt des Dreiecks BCS.

Drücke  $\overrightarrow{MK}$  mit  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aus.

• 17.  $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$  und  $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$  spannen das Tetraeder ABCD auf.

U, V, W und X sind Kantenmitten des Tetraeders.

a) Drücke  $\overrightarrow{VX}$  und  $\overrightarrow{UW}$  mit  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aus.

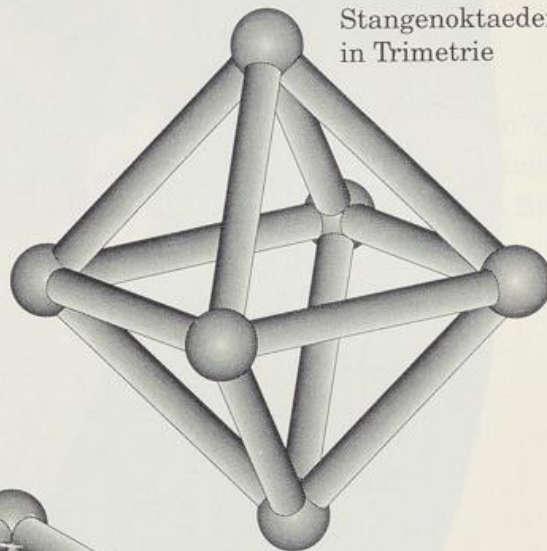
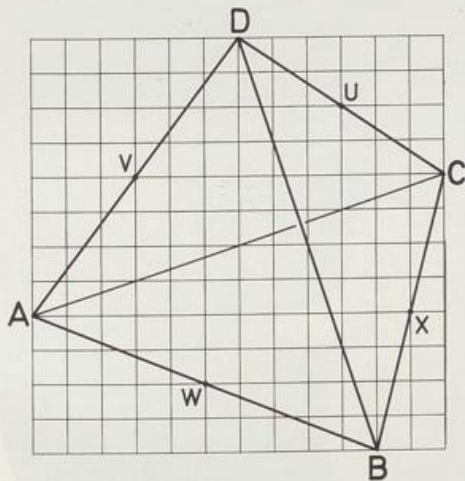
b) L ist Mittelpunkt von [VX], M ist Mittelpunkt von [UW].

Berechne  $\overrightarrow{DL}$  und  $\overrightarrow{DM}$  in Abhängigkeit von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$ .

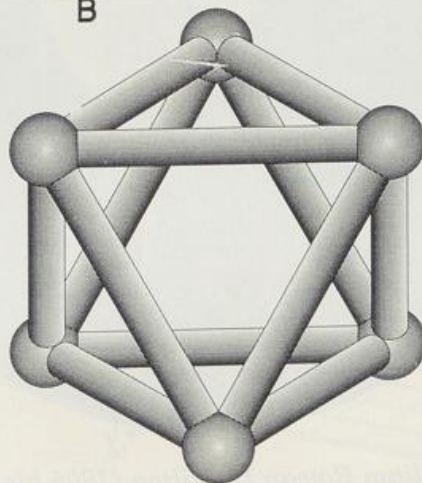
Was folgt aus dem Ergebnis?

c) Berechne  $\overrightarrow{UV}$  und  $\overrightarrow{XW}$  in Abhängigkeit von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$ .

Was folgt aus dem Ergebnis?

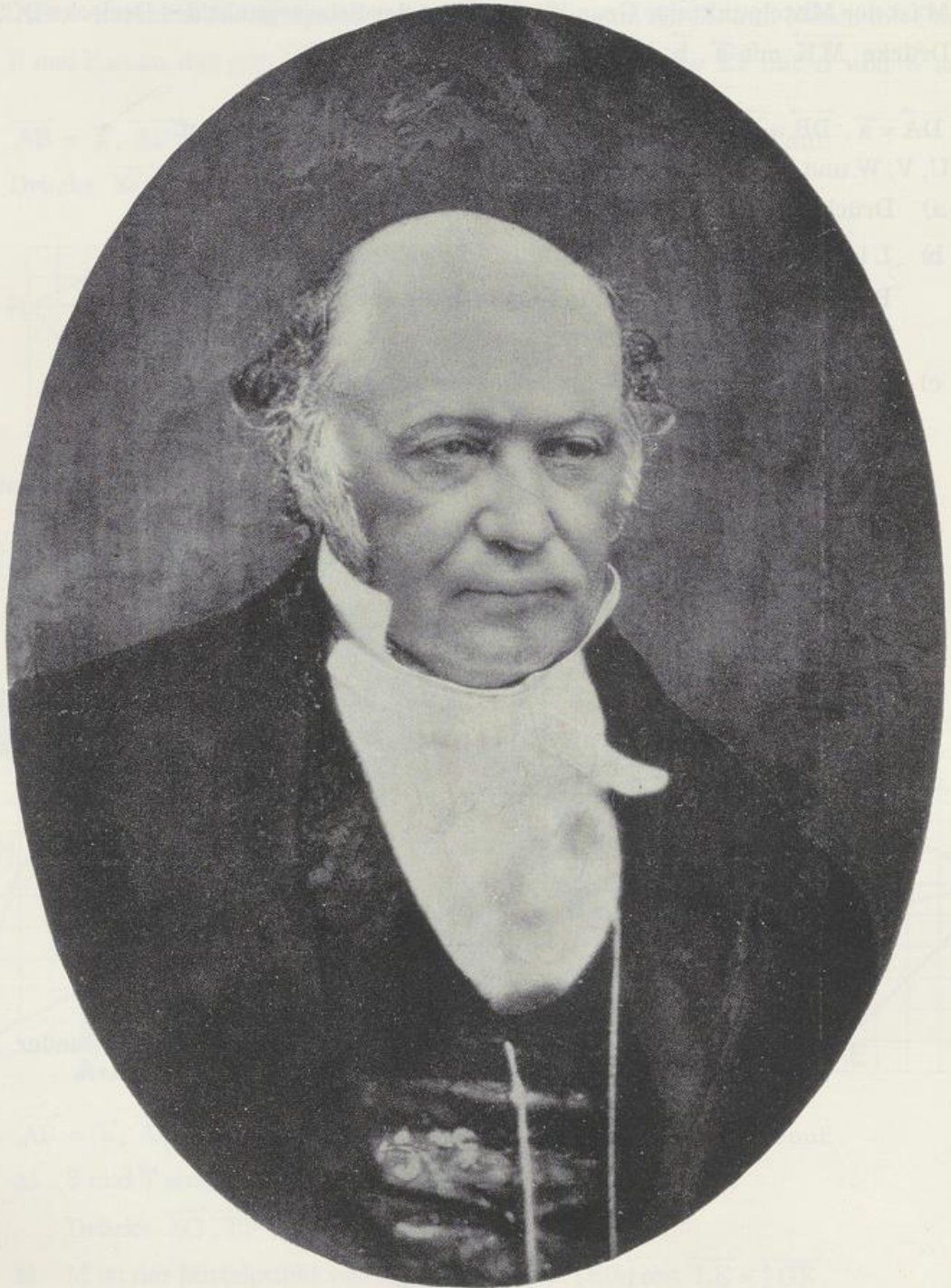


Stangenoktaeder  
in Trimetrie



Stangenoktaeder  
in Isometrie

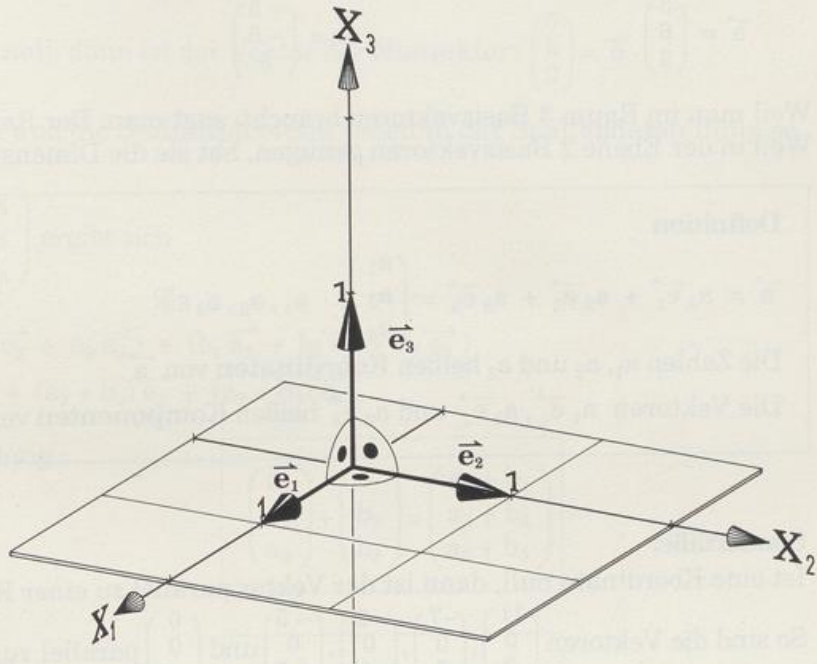
#### IV. Elementare Vektorrechnung



*William Rowan Hamilton (1805 bis 1865)*

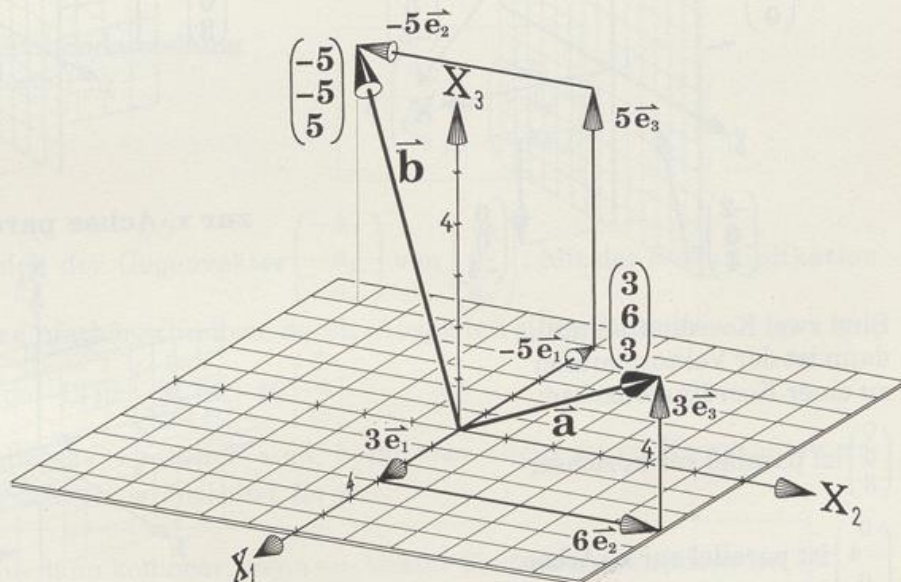
## 1. Vektorrechnung mit Koordinaten

Man zeichnet im Koordinatensystem drei Vektoren als **Basis** aus:



$\vec{e}_1$  ist der Vektor der Länge 1 in Richtung der  $x_1$ -Achse, entsprechend definiert man  $\vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$ . Die Vektoren  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$  heißen **Basisvektoren**. Jeder Vektor des Raums läßt sich eindeutig darstellen als Summe von Vielfachen dieser Basisvektoren, zum Beispiel

$$\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \quad \vec{b} = -5\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$$



$\vec{a}$  ist also durch die Zahlen 3, 6 und 3 festgelegt,  $\vec{b}$  durch  $-5, -5$  und  $5$ . Statt der Summendarstellung verwenden wir von jetzt an die praktischere Spaltendarstellung und schreiben kurz

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Weil man im Raum 3 Basisvektoren braucht, sagt man: Der Raum hat die **Dimension 3**. Weil in der Ebene 2 Basisvektoren genügen, hat sie die Dimension 2.

#### Definition

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 =: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

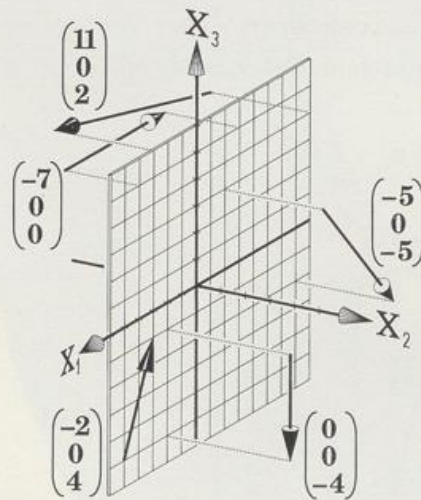
Die Zahlen  $a_1, a_2$  und  $a_3$  heißen **Koordinaten** von  $\vec{a}$ .

Die Vektoren  $a_1 \vec{e}_1, a_2 \vec{e}_2$  und  $a_3 \vec{e}_3$  heißen **Komponenten** von  $\vec{a}$ .

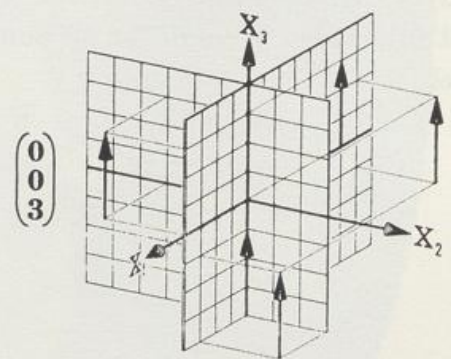
#### Sonderfälle:

Ist eine Koordinate null, dann ist der Vektor parallel zu einer Koordinatenebene.

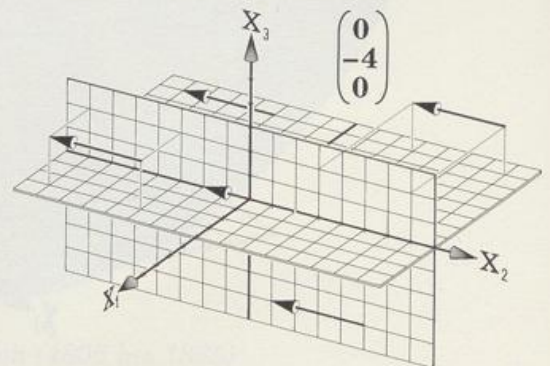
So sind die Vektoren  $\begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  parallel zur  $x_1x_3$ -Ebene.



#### zur $x_1$ -Achse paralleler Vektor



#### zur $x_2$ -Achse paralleler Vektor



Sind zwei Koordinaten null, dann ist der Vektor parallel zu einer Koordinatenachse:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  ist parallel zur  $x_3$ -Achse,

$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist parallel zur  $x_2$ -Achse.

Diese Vektoren sind auch parallel zu zwei Koordinatenebenen:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  ist parallel zur  $x_1x_3$ - und  $x_2x_3$ -Ebene,  $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist parallel zur  $x_1x_2$ - und  $x_2x_3$ -Ebene.

Sind alle drei Koordinaten null, dann ist der Vektor der Nullvektor:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

Die Addition von Vektoren und die S-Multiplikation sehen in der Spaltendarstellung so aus:

Mit  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) + (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) \\ &= (a_1 + b_1) \vec{e}_1 + (a_2 + b_2) \vec{e}_2 + (a_3 + b_3) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

### Addition in Spaltendarstellung

(zeilenweise addieren)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Auch die Subtraktion geht zeilenweise:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Mit  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $r \in \mathbb{R}$  ergibt sich

$$r \cdot \vec{a} = r(a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) = (ra_1) \vec{e}_1 + (ra_2) \vec{e}_2 + (ra_3) \vec{e}_3$$

### S-Multiplikation in Spaltendarstellung

(jede Zeile multiplizieren)

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Für  $r = -1$  ergibt sich der Gegenvektor  $\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$  von  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ . Mit der S-Multiplikation

lassen sich Vektoren einfacher schreiben, durch »Abspalten eines Faktors«.

Beispiel: Abspalten von  $-12$  in  $\begin{pmatrix} -36 \\ 24 \\ -144 \end{pmatrix} = -12 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$

Weil  $\vec{a}$  und  $r\vec{a}$  kollinear (=parallel) sind, kann man allein durch Koordinatenvergleich erkennen, ob Vektoren parallel sind. Es gilt:

$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind genau dann kollinear, wenn ein Vektor Vielfaches des andern ist.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = \mu \vec{b}, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \text{oder} \\ \vec{b} = \lambda \vec{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind kollinear.}$$

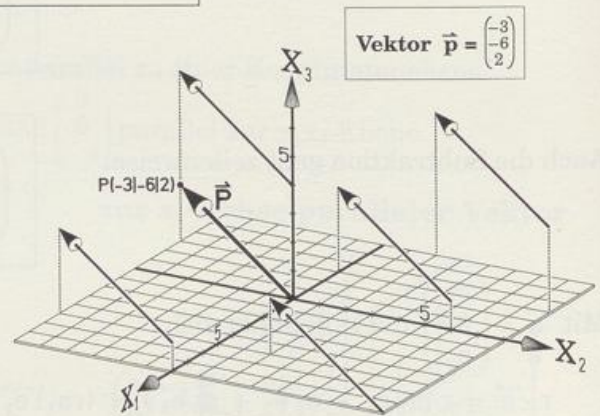
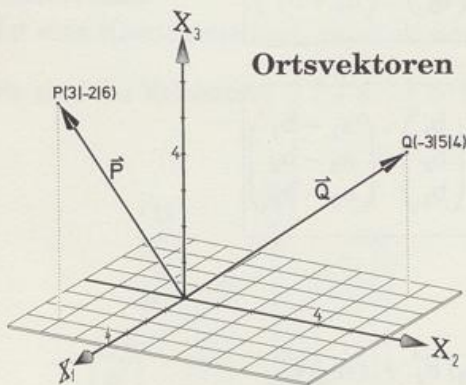
Nach dieser Festlegung ist übrigens der Nullvektor kollinear zu jedem Vektor!

Die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -28 \\ 12 \end{pmatrix}$  sind kollinear, denn  $\vec{b} = -4 \vec{a}$ .

### Ortsvektoren

Zu jedem Punkt gibt es einen Pfeil, der im Ursprung beginnt und in P endet. Dieser Pfeil legt eindeutig einen Vektor  $\overrightarrow{OP}$  fest. Wir nennen ihn **Ortsvektor** des Punkts P und bezeichnen ihn kurz mit  $\vec{P}$ . Die Vektorkoordinaten von  $\vec{P}$  stimmen mit den Punktkoordinaten von P überein.

Zu  $P(p_1 | p_2 | p_3)$  gehört  $\vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$  und umgekehrt.

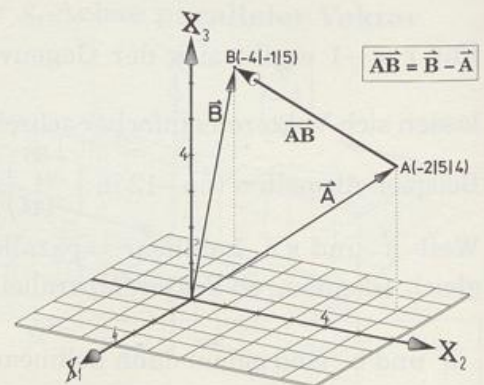


**Jeder** Vektor kann auch die Rolle eines Ortsvektors spielen und einen Punkt festlegen: Dieser Punkt ist der Endpunkt desjenigen Repräsentanten, der im Ursprung ansetzt.

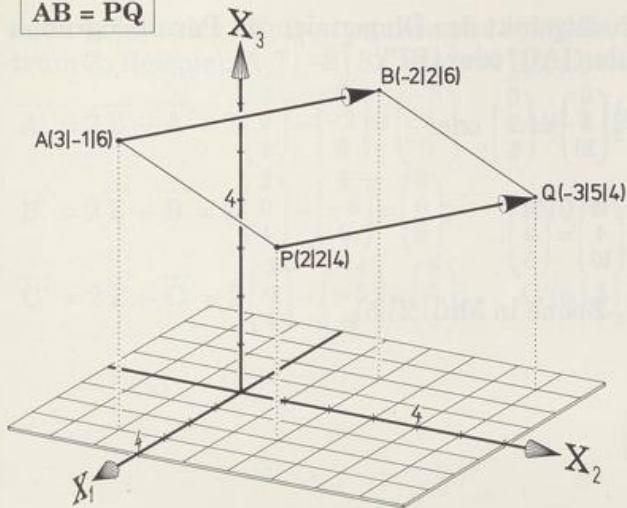
Jeder Vektor ist durch zwei Punkte festgelegt. Deshalb müssen sich seine Koordinaten aus den Koordinaten der Punkte berechnen lassen.

Verbindungsvektor  $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$



$$\vec{AB} = \vec{PQ}$$



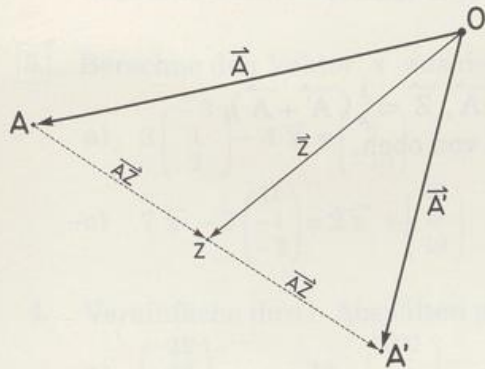
In einem Beispiel berechnen wir Verbindungsvektoren der Punkte  $A(3|-1|6)$ ,  $B(-2|2|6)$ ,  $P(2|2|4)$  und  $Q(-3|5|4)$  und beschreiben damit die Lage dieser Punkte.

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{BP} = \vec{P} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen  $\vec{AB} = \vec{PQ}$  und  $\vec{AB} \neq \mu \vec{BP}$  ( $\vec{AB}$  und  $\vec{BP}$  sind nicht parallel) ist PQBA ein Parallelogramm. Weil die dritten Koordinaten von  $\vec{AB}$  und  $\vec{PQ}$  null sind, liegen die Seiten [PQ] und [AB] parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene. Weil die zweite Koordinate von  $\vec{BP}$  null ist, liegt die Diagonale [BP] parallel zur  $x_1x_3$ -Ebene.

Sehr oft braucht man den Mittelpunkt einer Strecke:



$$\vec{M} = \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{A} + \frac{1}{2}(\vec{B} - \vec{A}) = \frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}$$

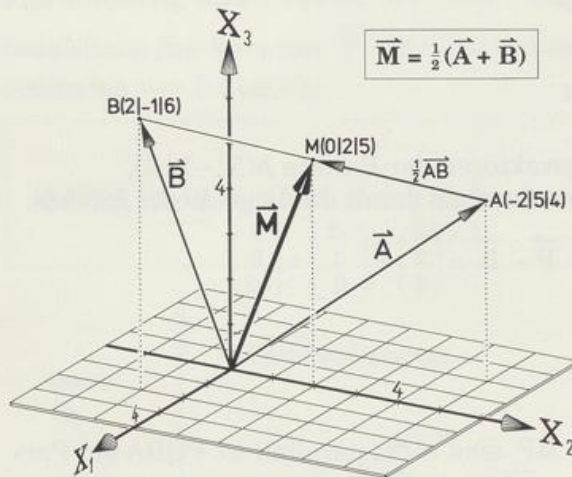
$$\text{Mittelpunkt M der Strecke [AB]: } \vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$$

Mit dieser Formel berechnen wir den Schnittpunkt der Diagonalen im Parallelogramm PQBA (oben) als Mittelpunkt der Diagonalen [AQ] oder [BP]:

$$\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{Q}) = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ oder}$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{P}) = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalen schneiden sich in der  $x_2x_3$ -Ebene in  $M(0|2|5)$ .

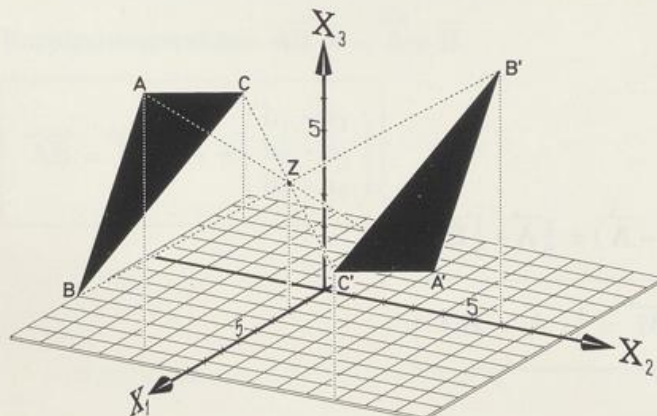


Die Spiegelung eines Punkts an einem Punkt ist mit Ortsvektoren rechnerisch schnell erledigt. Der Punkt A soll am Zentrum Z gespiegelt werden. Gesucht ist der Spiegelpunkt A'. Weil man mit Punkten nicht rechnen kann, verwenden wir ihre Ortsvektoren:

$$\vec{A}' = \vec{A} + 2\vec{AZ} = \vec{A} + 2(\vec{Z} - \vec{A}) = 2\vec{Z} - \vec{A} \quad \text{oder kürzer}$$

$$\vec{A}' = \vec{Z} + \vec{AZ} = \vec{Z} + \vec{Z} - \vec{A} = 2\vec{Z} - \vec{A}.$$

Übrigens: Nach  $\vec{Z}$  aufgelöst ergibt sich  $2\vec{Z} = \vec{A}' + \vec{A}$ ,  $\vec{Z} = \frac{1}{2}(\vec{A}' + \vec{A})$ , das ist die Strecken-Mittelpunkt-Formel von oben.



Jetzt lassen sich Figuren punktweise spiegeln, zum Beispiel das Dreieck ABC am Zentrum Z. Beispiel: A(7 | -2 | 8), B(4 | -6 | 0), C(-4 | -5 | 4) und Z(2 | 0 | 4).

$$\vec{A}' = 2\vec{Z} - \vec{A} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A'(-3 | 2 | 0)$$

$$\vec{B}' = 2\vec{Z} - \vec{B} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad B'(0 | 6 | 8)$$

$$\vec{C}' = 2\vec{Z} - \vec{C} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad C'(8 | 5 | 4)$$

### Aufgaben

1.  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Berechne

a)  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} - \vec{v}$ ,  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

b)  $2\vec{u} - 3\vec{v}$ ,  $\frac{1}{2}\vec{u} + (\vec{v} - 2\vec{w})$ ,  $\frac{1}{3}[(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}) - 3\vec{v}]$

2.  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Berechne den Vektor  $\vec{r}$ , der  $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$  zur geschlossenen Vektorkette ergänzt.

3. Berechne den Vektor  $\vec{x}$  aus den Vektorgleichungen:

a)  $3\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 4\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}$       b)  $2\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\vec{x}$

c)  $7\vec{x} - 3\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\vec{x} + \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 19 \end{pmatrix}$

4. Vereinfache durch Abspalten geeigneter Faktoren:

a)  $\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ -42 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} 300 \\ 75 \\ -225 \end{pmatrix}$       c)  $\begin{pmatrix} -9/4 \\ 3/4 \\ -3 \end{pmatrix}$

5. Gegeben: a) A(2 | 2 | 1), B(3 | 2 | -1), C(1 | 2 | 3)

b) A(0 | 2 | 4), B(1 | 8 | 0), C(2 | 1 | 4)

c) A(0 | 24 | 1), B(18 | 0 | 1), C(21 | 4 | 1)

Berechne  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{AB} + \vec{AC}$ ,  $2\vec{BC} + \vec{AC} - \vec{BA}$

6.  $A(3|0|0)$ ,  $B(-1|4|0)$ ,  $C(0|-2|0)$  und  $D(0|0|3,5)$  sind die Ecken eines Tetraeders.
- Berechne die Mittelpunkte U von [AC], V von [BC], W von [BD] und X von [AD].
  - Zeige, daß UVWX ein Parallelogramm ist und berechne den Mittelpunkt M des Parallelogramms.
  - Fertige eine saubere Zeichnung an. 
$$\begin{array}{r} 10 \\ 5 \ 0 \ 10 \\ 4 \end{array}$$
7. Ein Repräsentant  $\overrightarrow{AB}$  eines Vektors wird senkrecht in zwei Koordinatenebenen projiziert. Rekonstruiere  $\overrightarrow{AB}$  aus den Projektionen  $\overrightarrow{A_1B_1}$  und gib die Projektion in die dritte Koordinatenebene an.
- $\overrightarrow{A_2B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{A_3B_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - $\overrightarrow{A_1B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{A_2B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$
8. Die Strecke [AB] mit  $A(1|2|3)$ ,  $B(3|2|1)$  wird über B hinaus um sich selber verlängert. Berechne den Endpunkt C.
9.  $R(4|5|6)$  und  $S(7|8|9)$  teilen die Strecke [AB] in drei gleiche Teile. Berechne A und B.
10.  $\ddot{A}(0|4|5)$ ,  $\ddot{O}(3|0|5)$  und  $\ddot{U}(3|4|0)$  sind die Ecken eines Parallelogramms. Bestimme die vierte Ecke E (drei Lösungen!).
11. Vom Parallelogramm ABCD kennt man  $B(2|4|3)$  und  $C(3|0|-5)$  und den Schnittpunkt der Diagonalen  $M(-2|4|15)$ . Berechne A und D.
12. Berechne vom Spat ABCDEFGH mit  $A(9|7|5)$ ,  $B(-1|-1|-1)$ ,  $F(0|2|3)$  und  $G(1|3|5)$  die restlichen Ecken.
13.  $A(1|-3|5)$ ,  $B(-7|9|-11)$ ,  $C(13|-15|17)$   
 $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  sind die Mitten der Seiten a, b und c des Dreiecks ABC.  
 Berechne  $\overrightarrow{AM_1}$ ,  $\overrightarrow{BM_2}$  und  $\overrightarrow{CM_3}$ .
14. Berechne  $\overrightarrow{X}$  in Abhängigkeit von  $\overrightarrow{A}$ ,  $\overrightarrow{B}$  und  $\overrightarrow{C}$  so, daß gilt:  
 $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BX} + \overrightarrow{CX} = \vec{0}$ .
15.  $A(2|0|0)$ ,  $Z_1(1|2|1)$ ,  $Z_2(1|3|3)$ . A' ist das Bild von A bei Spiegelung an  $Z_1$ , A'' ist das Bild von A' bei Spiegelung an  $Z_2$ .
- Bestimme A'' und ein Zentrum Z, so daß A an Z gespiegelt A'' ergibt.
  - Zeige:  $\overrightarrow{Z_1Z_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA''}$

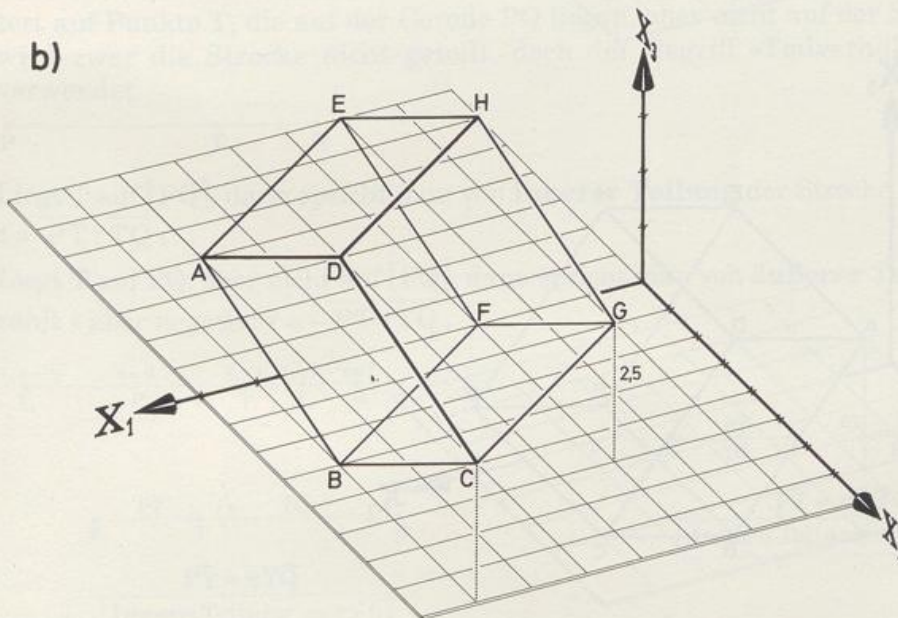
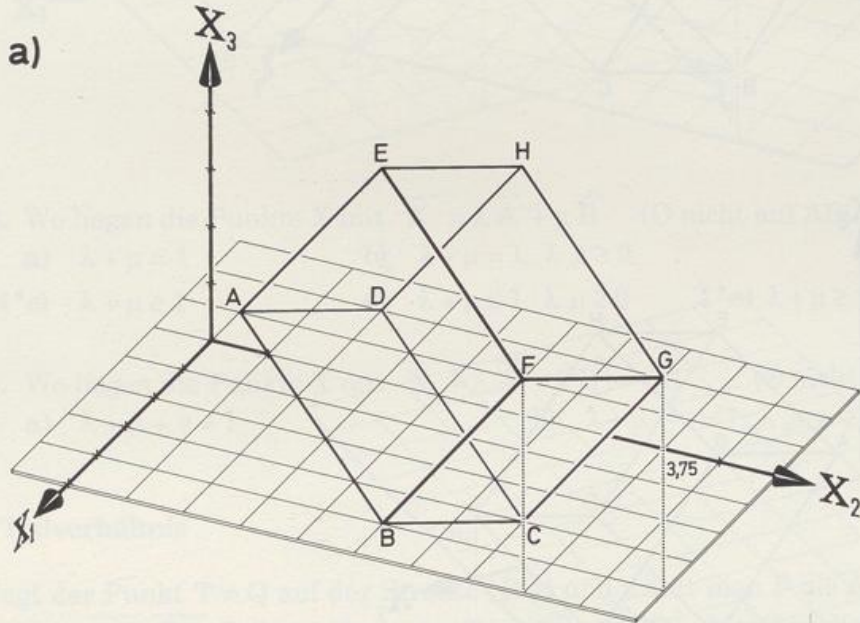
16.  $A(2|0|0)$ ,  $B(4|2|0)$ ,  $C(2|3|0)$ ,  $D(3|2|2)$ ,  $A'(0|6|2)$

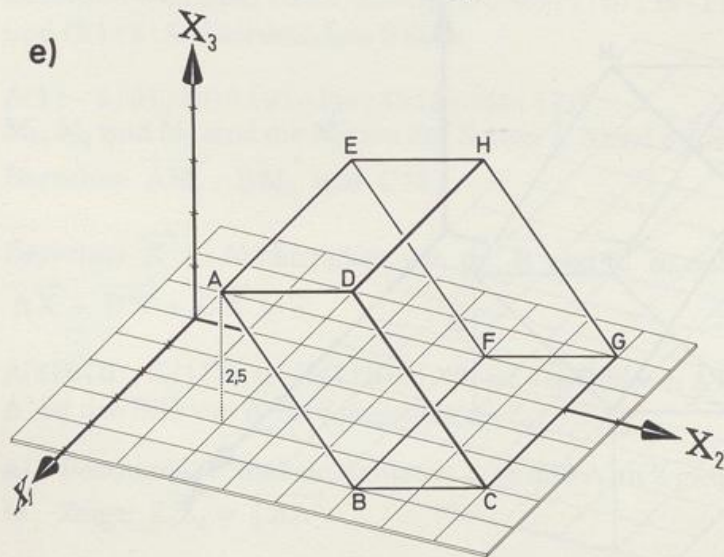
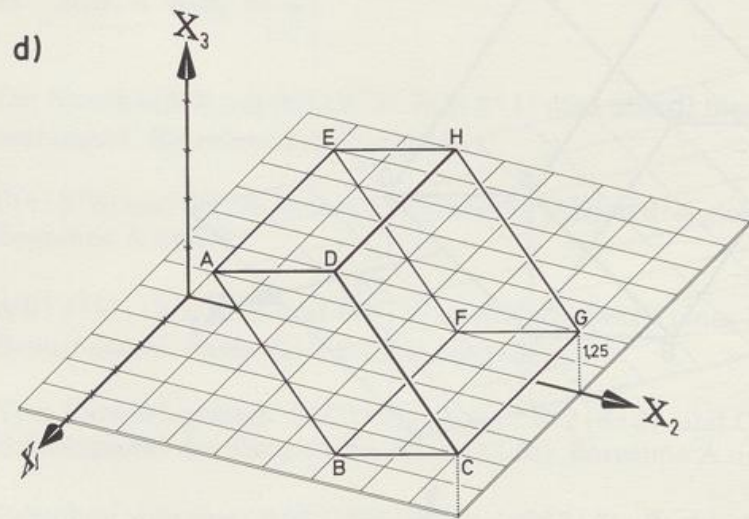
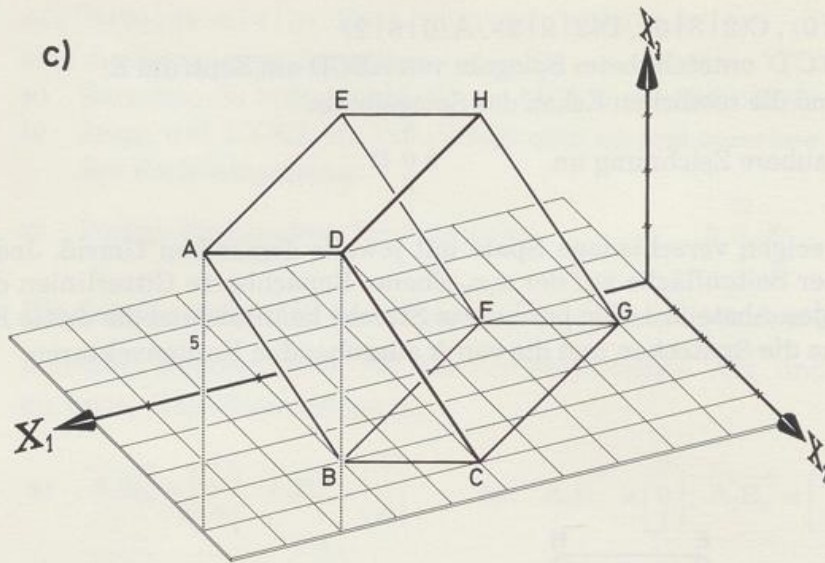
Das Tetraeder  $A'B'C'D'$  entsteht beim Spiegeln von  $ABCD$  am Zentrum  $Z$ .

a) Bestimme  $Z$  und die restlichen Ecken des Spiegelbilds.

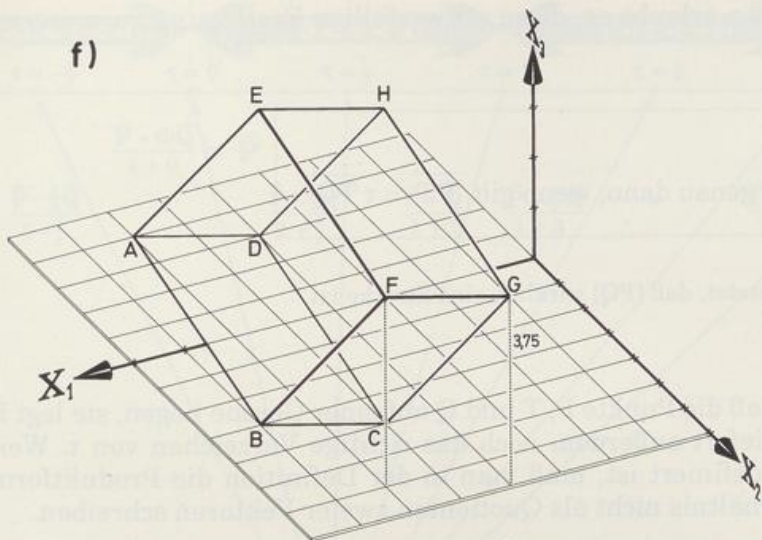
b) Fertige eine saubere Zeichnung an.  $\frac{5}{3 \ 0 \ 13}$   
6

17. Alle sechs Bilder zeigen verschiedene Spate mit jeweils demselben Umriss. Jedes Spat steht mit einer Seitenfläche auf der  $x_1x_2$ -Ebene. Benachbarte Gitterlinien der  $x_1x_2$ -Ebene haben den Abstand 1. Die punktierte Strecke kennzeichnet die dritte Koordinate. Bestimme die Spatecken und die von  $A$  ausgehenden Kantenvektoren.





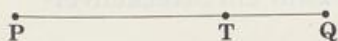
f)



- 18. Wo liegen die Punkte X mit  $\vec{X} = \lambda \vec{A} + \mu \vec{B}$  (O nicht auf AB!)
  - a)  $\lambda + \mu = 1$                       b)  $\lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geq 0$
  - c)  $\lambda + \mu \geq 1$                       d)  $\lambda + \mu \leq 1, \lambda, \mu \geq 0$                       ••e)  $\lambda + \mu \geq 1, \lambda, \mu \geq 0$
- 19. Wo liegen die Punkte X mit  $\vec{X} = \lambda \vec{A} + \mu \vec{B} + \nu \vec{C}$  (C nicht auf AB!)
  - a)  $\lambda + \mu + \nu = 1$                       b)  $\lambda + \mu + \nu = 1, \lambda, \mu, \nu \geq 0$

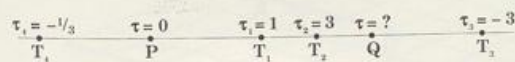
## 2. Teilverhältnis

Liegt der Punkt  $T \neq Q$  auf der Strecke  $[PQ]$  und wählt man P als Anfangspunkt, dann heißt  $\tau = \overline{PT} : \overline{TQ}$  Teilverhältnis von T bezüglich  $[PQ]$ . Man hat diese Definition erweitert auf Punkte T, die auf der Gerade PQ liegen, aber nicht auf der Strecke  $[PQ]$ . Hier wird zwar die Strecke nicht geteilt, doch der Begriff »Teilverhältnis« wird weiter verwendet.



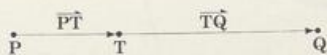
Liegt T auf  $[PQ]$ , dann spricht man von **innerer Teilung** der Strecke und zählt  $\tau$  positiv:  $\tau = \overline{PT} : \overline{TQ}$ .

Liegt T auf PQ, aber nicht auf  $[PQ]$ , dann spricht man von **äußerer Teilung** der Strecke, zählt  $\tau$  aber negativ:  $\tau = -\overline{PT} : \overline{TQ}$ .



$$\overline{PT} = \tau \overline{TQ}$$

Äußere Teilung  $\Leftrightarrow \tau < 0$



$$\overline{PT} = \tau \overline{TQ}$$

Innere Teilung  $\Leftrightarrow \tau > 0$

Die Verwendung von Vektoren erlaubt es, diese schwerfällige Festlegung zu ersetzen durch eine kurze, elegante

**Definition**

T teilt [PQ] im Verhältnis  $\tau$  genau dann, wenn gilt  $\overrightarrow{PT} = \tau \overrightarrow{TQ}$ .

Selbstverständlich ist vorausgesetzt, daß [PQ] wirklich eine Strecke ist, P und Q also verschieden sind.

Diese Definition garantiert, daß die Punkte P, T und Q auf einer Gerade liegen, sie legt P als Anfangspunkt fest und liefert außerdem noch das richtige Vorzeichen von  $\tau$ . Weil für Vektoren kein Quotient definiert ist, muß man in der Definition die Produktform wählen und kann das Teilverhältnis nicht als Quotienten zweier Vektoren schreiben.

Aus  $P(1 \mid 0 \mid 3)$ ,  $Q(1 \mid -4 \mid -1)$  und  $T(1 \mid -1 \mid 2)$  errechnet sich  $\tau$  so:

$\overrightarrow{PT} = \tau \overrightarrow{TQ}$  in Spaltendarstellung  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ , das ist ein 3,1-Gleichungssystem für  $\tau$

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 0 = 0\tau \\ \text{II} \quad -1 = -3\tau \\ \text{III} \quad -1 = -3\tau \end{array} \quad \tau = \frac{1}{3} \text{ löst alle drei Gleichungen, T teilt [PQ] im Verhältnis 1:3.}$$

Was wäre gewesen, wenn Q die Koordinaten  $(1 \mid -4 \mid 1)$  gehabt hätte? Das Gleichungssystem in  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$  hätte dann so ausgesehen:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 0 = 0\tau \\ \text{II} \quad -1 = -3\tau \\ \text{III} \quad -1 = -\tau \end{array}$$

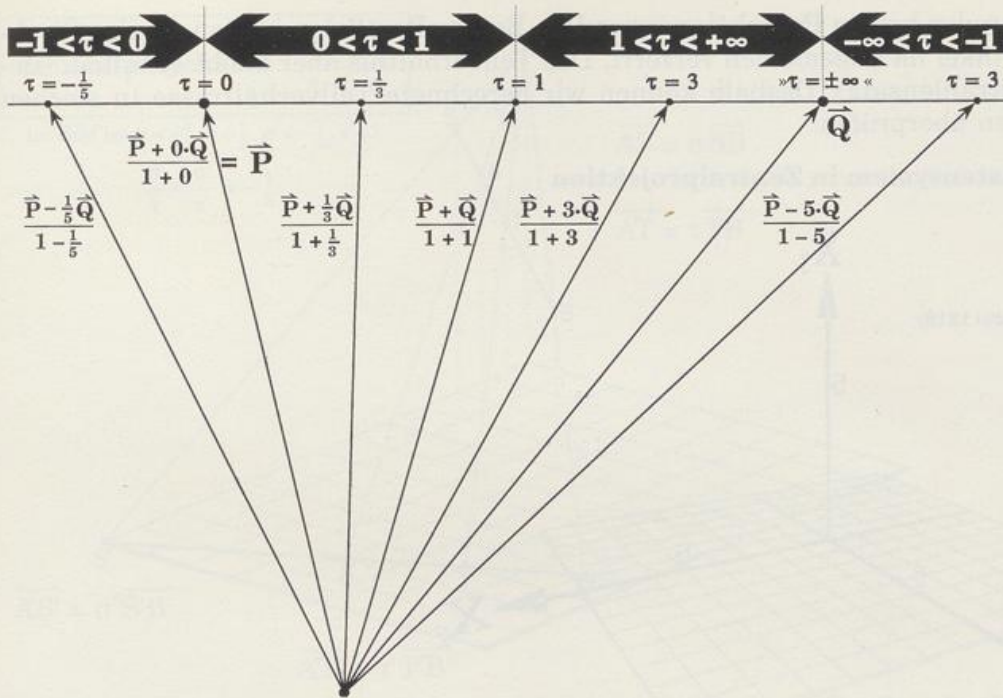
und zu einem Widerspruch geführt. Das heißt,  $\overrightarrow{PT}$  und  $\overrightarrow{TQ}$  wären nicht kollinear gewesen, P, T und Q also nicht auf einer Gerade gelegen. Es gibt zwar ein Streckenverhältnis ums Eck, aber kein Teilverhältnis ums Eck!

Sind der Anfangspunkt P, der Endpunkt Q und das Teilverhältnis  $\tau$  gegeben, dann führt eine kurze Rechnung mit Ortsvektoren zum Teilpunkt T:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PT} &= \tau \overrightarrow{TQ} \\ \overrightarrow{T} - \overrightarrow{P} &= \tau \overrightarrow{Q} - \tau \overrightarrow{T} \\ (1 + \tau) \overrightarrow{T} &= \overrightarrow{P} + \tau \overrightarrow{Q} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{P} + \tau \overrightarrow{Q}}{1 + \tau} \quad \text{mit } \tau \neq -1$$

Für jedes  $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  gibt es einen Teilpunkt.  $\tau = -1$  würde bedeuten, daß T auf PQ außerhalb [PQ], aber gleich weit weg von P und Q liegen müßte. Das ist zuviel verlangt!



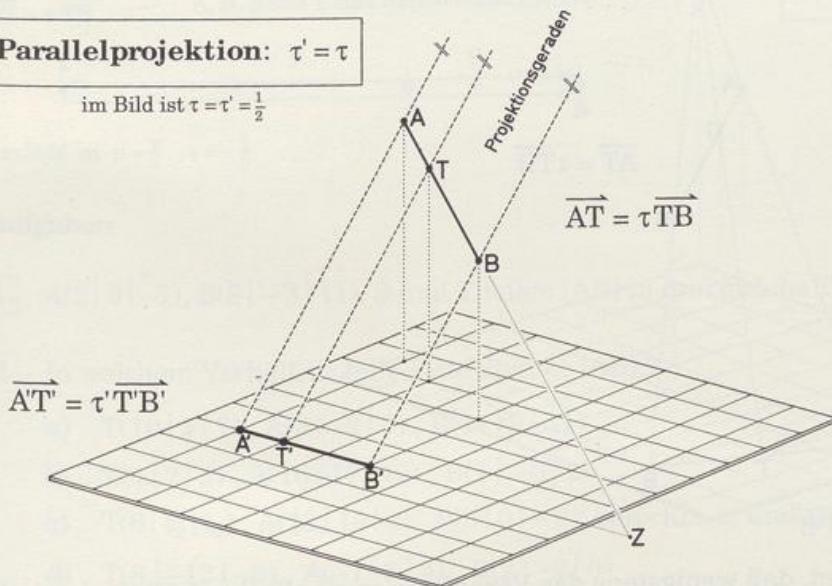
Beispiel:  $P(-2 | 1 | 0)$ ,  $Q(2 | -1 | 4)$ ,  $\tau = -\frac{1}{3}$

$$\vec{T} = \frac{\vec{P} + \tau \vec{Q}}{1 + \tau} = \frac{\vec{P} - \frac{1}{3} \vec{Q}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3\vec{P} - \vec{Q}}{2} = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$T(-4 | 2 | -2)$  teilt  $[PQ]$  im Verhältnis  $-1:3$  (äußere Teilung).

**Parallelprojektion:**  $\tau' = \tau$

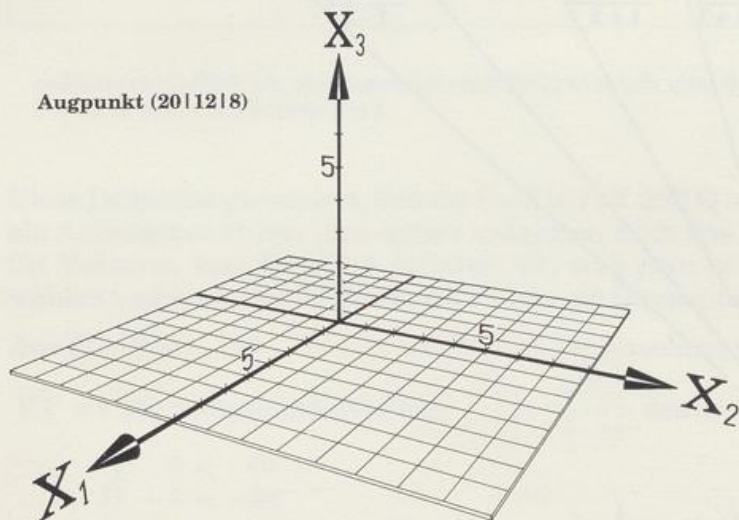
im Bild ist  $\tau = \tau' = \frac{1}{2}$



Fast alle Zeichnungen in diesem Buch, die räumliche Ansichten zeigen, sind Normalbilder in Parallelprojektion. Eine Abbildung eines Körpers in eine Ebene heißt **Parallelprojektion**, wenn die Geraden, die Urbild- und Bildpunkt verbinden, parallel sind. Die Ver-

bindungsgeraden heißen **Projektionsgeraden**. Bei der Parallelprojektion werden Strecken und Winkel im allgemeinen verzerrt. Das Teilverhältnis aber bleibt erhalten. (Beweis mit Strahlensatz). Deshalb können wir berechnete Teilverhältnisse in solchen Zeichnungen überprüfen.

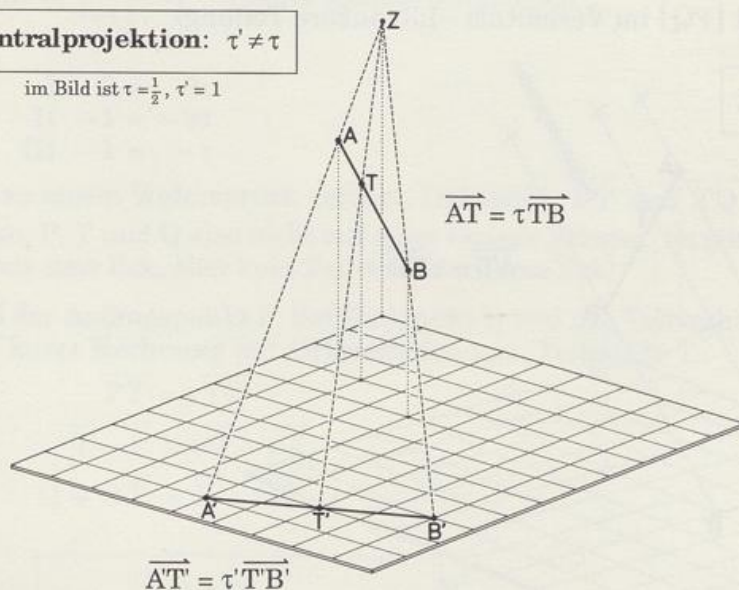
### Koordinatensystem in Zentralprojektion



Bilder, die der Wirklichkeit noch näher kommen, liefert die **Zentralprojektion**. Fotografien sind Bilder in Zentralprojektion. Zeichnungen in Zentralprojektion setzen eine anspruchsvollere Konstruktionstechnik voraus. Bei der Zentralprojektion werden nicht nur Strecken und Winkel verzerrt, auch das Teilverhältnis ändert sich im allgemeinen.

**Zentralprojektion:**  $\tau' \neq \tau$

im Bild ist  $\tau = \frac{1}{2}$ ,  $\tau' = 1$



Man kann aber beweisen, daß wenigstens das Verhältnis zweier Teilverhältnisse erhalten bleibt, wenn eine Strecke  $[AB]$  von zwei Punkten  $S$  und  $T$  im Verhältnis  $\sigma$  und  $\tau$  geteilt wird. Das Verhältnisverhältnis  $\frac{\sigma}{\tau}$  heißt auch das **Doppelverhältnis**, in dem die Punkte  $S$  und  $T$  die Strecke  $[AB]$  teilen.

Zentralprojektion:  $\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sigma'}{\tau'}$

im Bild ist  $\sigma = -\frac{1}{4}$ ,  $\tau = \frac{1}{2}$ ,  $\sigma' = -\frac{1}{2}$ ,  $\tau' = 1$

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\sigma'}{\tau'} = -\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{AS} = \sigma \overrightarrow{SB}$$

$$\overrightarrow{AT} = \tau \overrightarrow{TB}$$

$$\overrightarrow{AS'} = \sigma' \overrightarrow{S'B'}$$

$$\overrightarrow{A'T'} = \tau' \overrightarrow{T'B'}$$

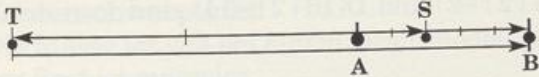
Hat das Doppelverhältnis den Wert  $-1$ , dann sagt man: S und T teilen die Strecke [AB] **harmonisch**. Dann gilt  $\frac{\sigma}{\tau} = -1$ , also  $\tau = -\sigma$ , das heißt, der eine Teilpunkt teilt [AB] außen im selben Verhältnis wie der andere innen. In der Mittelstufe haben wir bewiesen, daß auch umgekehrt A und B die Strecke [ST] harmonisch teilen. Deshalb nennt man die vier Punkte A, B, S und T **harmonische Punkte**.

$$\overrightarrow{AS} = \sigma \overrightarrow{SB}$$

$$\overrightarrow{AT} = \tau \overrightarrow{TB}$$

**Harmonische Teilung  $\tau = -\sigma$**

A, B, S und T sind harmonische Punkte



im Bild ist  $\sigma = \frac{2}{3}$ ,  $\tau = -\frac{2}{3}$

### Aufgaben

1.  $A(2 \mid 0 \mid -1)$ ,  $B(8 \mid -3 \mid 11)$ . S und T teilen [AB] in drei gleiche Teile. Berechne S und T.
2. In welchem Verhältnis teilt T die Strecke [AB]?
  - a)  $T(10 \mid 5 \mid 7)$ ,  $A(3 \mid -2 \mid 0)$ ,  $B(14 \mid 9 \mid 11)$
  - b)  $T(4 \mid 2 \mid 3)$ ,  $A(16 \mid 17 \mid 12)$ ,  $B(1 \mid -3 \mid 2)$
  - c)  $T(6 \mid t_2 \mid t_3)$ ,  $A(13 \mid 10 \mid 4)$ ,  $B(3 \mid 0 \mid -6)$ ; berechne  $t_2$  und  $t_3$
  - d)  $T(8 \mid -12 \mid -8)$ ,  $A(-1 \mid 3 \mid 4)$ ,  $B(2 \mid -2 \mid 0)$
3.  $A(0 \mid 5 \mid 3)$ ,  $B(2 \mid -5 \mid 8)$ . Berechne die Teilpunkte  $T_i$ , die [AB] im Verhältnis  $\tau_i$  teilen:
 
$$\tau_1 = \frac{1}{2}; \quad \tau_2 = 1; \quad \tau_3 = -2; \quad \tau_4 = -\frac{1}{3}.$$

4.  $T(3 \mid -1 \mid -6)$ ,  $B(-6 \mid 2 \mid 0)$ .  $T$  teilt  $[BA]$  im Verhältnis  $\tau = \frac{3}{4}$ . Berechne  $A$ .

5.  $P$  teilt  $[AB]$  im Verhältnis  $\mu$ . Zwischen welchen Grenzen liegt  $\mu$ , wenn

- a)  $P$  zwischen  $A$  und  $B$  liegt?    b)  $A$  zwischen  $B$  und  $P$  liegt?  
 c)  $B$  zwischen  $A$  und  $P$  liegt?  
 d)  $P$  zwischen  $A$  und dem Mittelpunkt von  $[AB]$  liegt?

6.  $A(1 \mid 2 \mid 9)$ ,  $B(-5 \mid 5 \mid 3)$ ,  $C(-3 \mid 4 \mid 5)$ . In welchem Verhältnis teilt

- a)  $C$  die Strecke  $[AB]$ ?    b)  $B$  die Strecke  $[AC]$ ?    c)  $A$  die Strecke  $[BC]$ ?

7.  $T$  teilt  $[AB]$  im Verhältnis  $\tau$ . In welchem Verhältnis  $\mu$  (abhängig von  $\tau$ ) teilt

- a)  $T$  die Strecke  $[BA]$ ?    b)  $B$  die Strecke  $[AT]$ ?    c)  $A$  die Strecke  $[BT]$ ?

8.  $A(13 \mid 9 \mid -3)$ ,  $B(4 \mid 0 \mid -6)$ ,  $P(7 \mid p_2 \mid p_3)$

$P$  teilt die Strecke  $[AB]$  im Verhältnis  $\mu$ . Berechne  $\mu$ ,  $p_2$  und  $p_3$ .

9.  $P(0 \mid 1,5 \mid 4)$ ,  $Q(3 \mid 0 \mid 4)$

Berechne die Punkte  $S$  und  $T$ , die  $[PQ]$  harmonisch im Verhältnis  $|\sigma| = 2$  teilen.

10.  $A(2 \mid 10 \mid 5)$ ,  $B(23 \mid -4 \mid 33)$ ,  $S(11 \mid 4 \mid 17)$

- a)  $S$  und  $T$  teilen  $[AB]$  harmonisch. Berechne  $T$ .  
 b)  $A$  und  $B$  teilen  $[ST]$  im Verhältnis  $\alpha$  und  $\beta$ . Berechne  $\alpha$  und  $\beta$ .

11.  $A(-4 \mid 12 \mid -9)$ ,  $B(14 \mid 3 \mid 6)$ .  $C(c_1 \mid 6 \mid c_3)$  liegt auf der Gerade  $AB$ .

Bestimme das Teilverhältnis  $\gamma$ , in dem  $C$  die Strecke  $[AB]$  teilt.

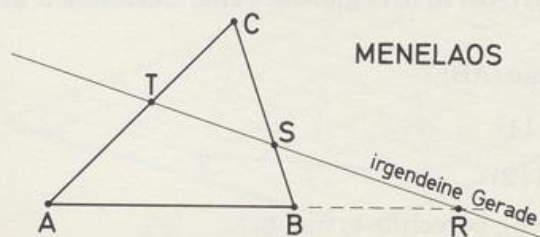
Berechne den vierten harmonischen Punkt  $D$  von  $A$ ,  $B$  und  $C$ .

12. Zeige:  $A(1 \mid 2 \mid 1)$ ,  $B(6 \mid 2 \mid -4)$ ,  $C(4 \mid 2 \mid -2)$  und  $D(16 \mid 2 \mid -14)$  sind harmonische Punkte.

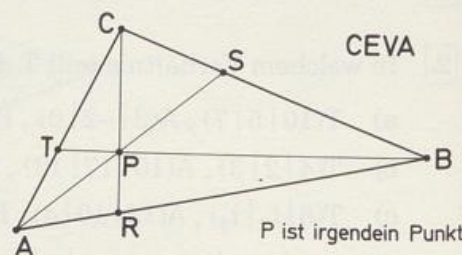
• 13. **Satz von MENELAOS**

Teilt  $R$  die Strecke  $[AB]$  im Verhältnis  $\rho$  und  $S$  die Strecke  $[BC]$  im Verhältnis  $\sigma$

und  $T$  die Strecke  $[CA]$  im Verhältnis  $\tau$ , dann gilt  $\boxed{\rho \cdot \sigma \cdot \tau = -1}$ . Überprüfe den Satz am Beispiel  $A(0 \mid 0)$ ,  $B(12 \mid 0)$ ,  $C(9 \mid 9)$ ,  $R(20 \mid 0)$ ,  $S(11 \mid 3)$ ,  $T(5 \mid 5)$ .



MENELAOS



CEVA

$P$  ist irgendein Punkt

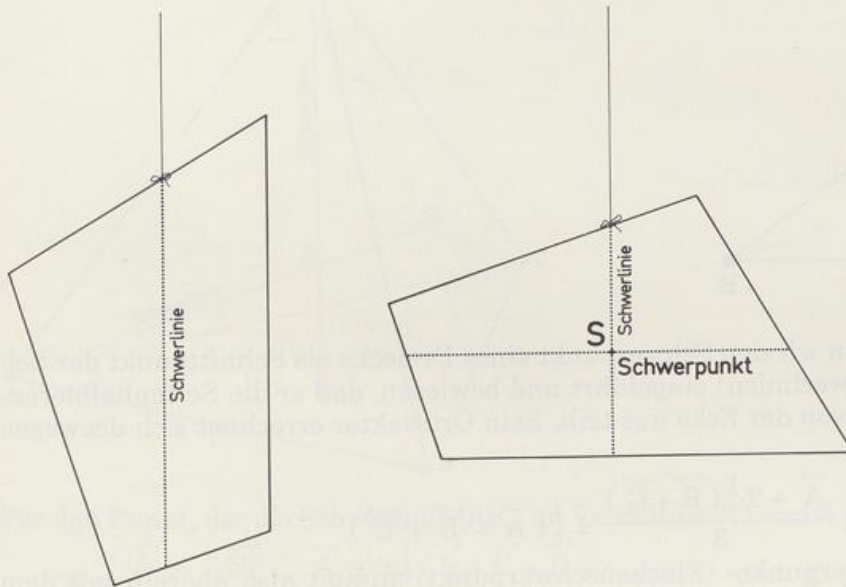
• 14. **Satz von CEVA**

Teilt  $R$  die Strecke  $[AB]$  im Verhältnis  $\rho$  und  $S$  die Strecke  $[BC]$  im Verhältnis  $\sigma$

und  $T$  die Strecke  $[CA]$  im Verhältnis  $\tau$ , dann gilt  $\boxed{\rho \cdot \sigma \cdot \tau = 1}$ . Überprüfe den Satz am Beispiel  $A(0 \mid 0)$ ,  $B(20 \mid 4)$ ,  $C(5 \mid 10)$ ,  $R(5 \mid 1)$ ,  $S(10 \mid 8)$ ,  $T(2 \mid 4)$ .

### 3. Schwerpunkt

In der Physik versteht man unter dem Schwerpunkt eines Körpers den Punkt, in dem man sich die Masse des Körpers konzentriert vorstellt. Experimentell findet man den Schwerpunkt, indem man den Körper nacheinander an zwei Punkten aufhängt; die Verlängerungen der Fäden, die »Schwerlinien«, treffen sich im Schwerpunkt S.



Bei mathematischen Körpern (Polyedern) unterscheiden wir

- **Eckenschwerpunkt**  
In jeder Ecke ist gleichviel Masse konzentriert, der Rest ist masselos.
- **Kantenschwerpunkt**  
Die Masse ist wie bei einem Drahtmodell gleichmäßig auf die Kanten verteilt, der Rest ist masselos.
- **Flächenschwerpunkt**  
Die Masse ist wie bei einem Modell aus Pappe gleichmäßig auf die Flächen verteilt, der Rest ist masselos.
- **Raumschwerpunkt**  
Die Masse ist gleichmäßig aufs Volumen verteilt.

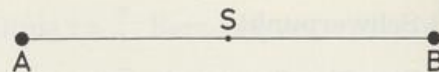
Wir kümmern uns nur um den Eckenschwerpunkt, wir bezeichnen ihn kurz mit Schwerpunkt. Er ist am leichtesten zu berechnen. Sein Ortsvektor ist das arithmetische Mittel der Ortsvektoren der  $n$  Ecken  $E_1, E_2, \dots, E_n$ .

$$\vec{S} = \frac{1}{n} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n)$$

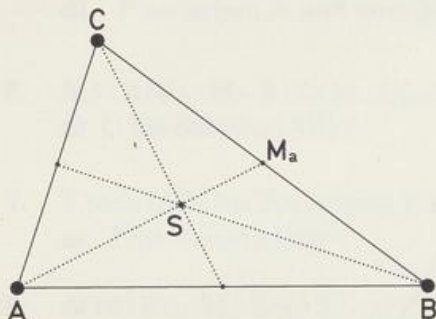
Man kann zeigen: Der so definierte Eckenschwerpunkt fällt

- bei einer Strecke mit dem Kantenschwerpunkt zusammen
- bei einem Dreieck mit dem Flächenschwerpunkt zusammen
- bei einem Tetraeder mit dem Raumschwerpunkt zusammen.

Bei der Strecke  $[AB]$  gilt  $\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$   
 $S$  ist der Mittelpunkt, er teilt  $[AB]$  im Verhältnis  $\tau = 1$ .



Beim Dreieck  $ABC$  gilt  $\vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$



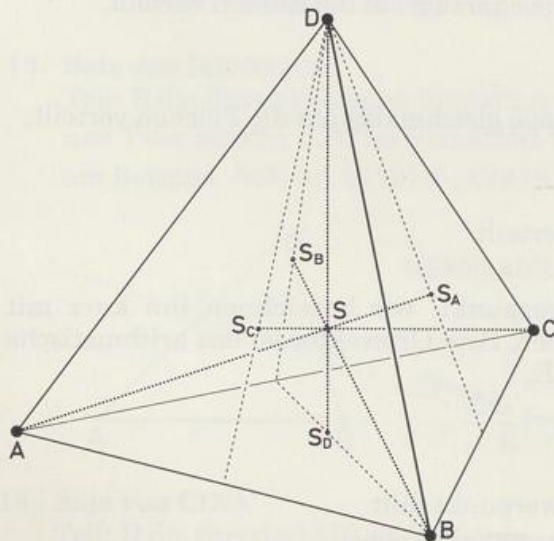
In der Mittelstufe haben wir den Schwerpunkt eines Dreiecks als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden (=Schwerlinien) eingeführt und bewiesen, daß er die Seitenhalbierenden im Verhältnis  $2 : 1$  von der Ecke aus teilt. Sein Ortsvektor errechnet sich deswegen so:

$$\vec{S} = \frac{\vec{A} + 2\vec{M}_a}{1 + 2} = \frac{\vec{A} + 2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{C})}{3} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$$

Der »Mittelstufenschwerpunkt« (Flächenschwerpunkt) stimmt also überein mit dem »Oberstufenschwerpunkt« (Eckenschwerpunkt).

Beim Tetraeder  $ABCD$  gilt  $\vec{S} = \frac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D})$

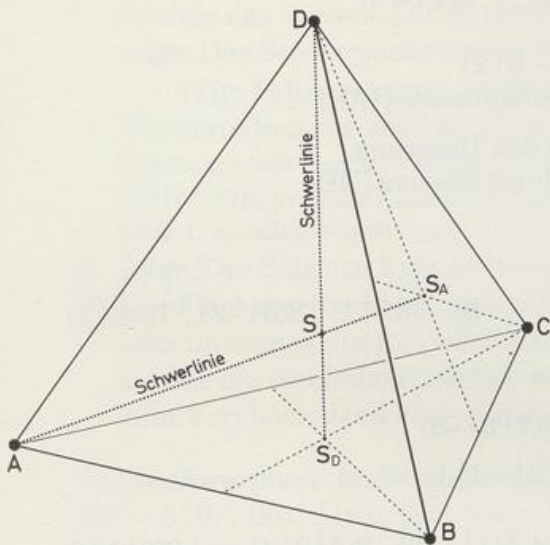
Verallgemeinert man den Begriff Schwerlinie aufs Tetraeder, so bekommt man die Verbindungsstrecke von Ecke und Schwerpunkt der Gegenfläche.



Eine Strecke wird vom Schwerpunkt im Verhältnis  $1:1$  geteilt (man kann sie als ihre eigene Schwerlinie auffassen).

Eine Schwerlinie im Dreieck wird vom Schwerpunkt im Verhältnis 2:1 von der Ecke aus geteilt.

Der Schwerpunkt im Tetraeder folgt dieser Tendenz konsequent: er teilt eine Schwerlinie im Verhältnis 3:1 von der Ecke aus, wie die Rechnung zeigt:

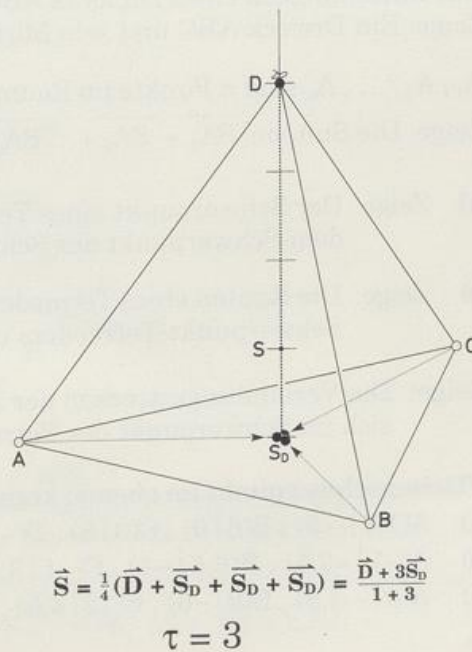
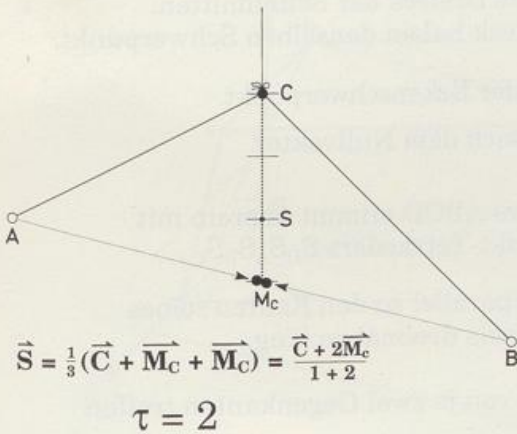


Für den Punkt, der die Schwerlinie  $[AS_A]$  im Verhältnis 3:1 von A aus teilt, gilt

$$\vec{S} = \frac{\vec{A} + 3\vec{S}_A}{1+3} = \frac{\vec{A} + 3 \cdot \frac{1}{3}(\vec{B} + \vec{C} + \vec{D})}{4} = \frac{1}{4}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}).$$

Das ist genau die Bedingung für den Eckenschwerpunkt. Weil in der Formel die vier Ecken gleichberechtigt auftreten, ist damit auch gezeigt, daß S auf jeder Schwerlinie liegt, daß diese sich also in S schneiden.

Man kann sich die Teilverhältnisse 2:1 und 3:1 auch in den beiden Bildern klarmachen:



## Aufgaben

1. Berechne den Mittelpunkt der Strecken
  - a)  $A(1|7|2)$ ,  $B(3|5|0)$
  - b)  $R(2|1)$ ,  $S(1|-5)$
2.
  - a) Ein Kreis um  $M(-2|5)$  geht durch  $A(-5|2)$ . Berechne den Endpunkt E des Kreisdurchmessers [AE].
  - b) Eine Kugel um  $M(1|2|3)$  geht durch den Ursprung. Berechne den Endpunkt E des Kugeldurchmessers [OE].
3. Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks
  - a)  $A(2|1|3)$ ,  $B(3|5|0)$ ,  $C(4|-4|9)$
  - b)  $R(2|1)$ ,  $S(3|-2)$ ,  $T(-2|4)$
4. Berechne den Schwerpunkt des Tetraeders
  - a)  $O(0|0|0)$ ,  $A(2|1|1)$ ,  $B(-12|1|3)$ ,  $C(2|6|-8)$
  - b)  $R(2|1|1)$ ,  $S(-9|3|2)$ ,  $T(1|0|8)$ ,  $U(0|-4|1)$
5.
  - a) Im Dreieck ABC mit Schwerpunkt S ist  $A(1|1|2)$ ,  $B(3|2|4)$  und  $S(0|1|3)$ . Berechne C.
  - b) Im Tetraeder ABCD mit Schwerpunkt S ist  $A(2|1|1)$ ,  $B(3|0|1)$ ,  $C(2|-1|0)$  und  $S(2|2|1)$ . Berechne D.
- 6. Die Schwerpunkte der Dreiecke, die ein Tetraeder begrenzen, sind:  $S_D(3|3|0)$ ,  $S_A(3|3|6)$ ,  $S_B(-1|3|6)$  und  $S_C(4|0|6)$ . Berechne die Ecken A, B, C und D.
7. Das Mittendreieck eines Dreiecks ABC ist das Dreieck der Seitenmitten. Zeige: Ein Dreieck ABC und sein Mittendreieck haben denselben Schwerpunkt.
8.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sind n Punkte im Raum, S ist der Eckenschwerpunkt. Zeige: Die Summe  $\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SA_2} + \dots + \overrightarrow{SA_n}$  ist gleich dem Nullvektor.
- 9.
  - a) Zeige: Der Schwerpunkt eines Tetraeders ABCD stimmt überein mit dem Schwerpunkt des Schwerpunkt-Tetraeders  $S_D S_A S_B S_C$ .
  - b) Zeige: Die Kanten eines Tetraeders sind parallel zu den Kanten seines Schwerpunkt-Tetraeders und jeweils dreimal so lang.
- 10. Zeige: Die Verbindungsstrecken der Mitten von je zwei Gegenkanten treffen sich im Schwerpunkt des Tetraeders.
- 11. **Flächenschwerpunkt im ebenen konvexen Viereck**
  - a)  $A(1,5|-3)$ ,  $B(6|0)$ ,  $C(3|6)$ ,  $D(-4,5|0)$
  - b)  $A(-1|-2,5)$ ,  $B(6,5|-1)$ ,  $C(-1|3,5)$ ,  $D(-5,5|-1)$
  - c)  $A(3|-4,5)$ ,  $B(9|-6)$ ,  $C(12|4,5)$ ,  $D(0|7,5)$

Die Diagonale AC zerlegt das Viereck in die Teildreiecke ABC mit Schwerpunkt  $S_1$  und ACD mit Schwerpunkt  $S_2$ .

Die Diagonale BD zerlegt das Viereck in die Teildreiecke BCD mit Schwerpunkt  $T_1$  und ABD mit Schwerpunkt  $T_2$ .

I Zeichne das Viereck ABCD, berechne die Schwerpunkte  $S_1, T_1, S_2$  und  $T_2$  und zeige: Das Schwerpunktviereck  $S_1T_1S_2T_2$  ist dem Viereck ABCD ähnlich.

(Tip: Seitenvektoren vergleichen!)

Wie verhalten sich die Längen entsprechender Seiten?

Das Ganze läßt sich auch räumlich deuten: Zeichne  $A(3|3|0), B(3|6|0), C(-6|3|0)$  und  $D(0|0|3,75)$  in unser räumliches Standard-KOSY in Normalprojektion:  $x_1$ -Achse mit Steigung 1,  $x_2$ -Achse mit Steigung  $-0,25$ . Welcher Zusammenhang besteht mit Aufgabe 9.b?

II Zeige: Der Satz von I gilt für jedes konvexe Viereck.

III Der Flächenschwerpunkt von ABCD teilt eine Diagonale des Schwerpunktvierecks im umgekehrten Verhältnis der Inhalte der Teildreiecke, deren Schwerpunkte sie verbindet (Hebelgesetz!). Berechne den Flächenschwerpunkt S und zum Vergleich dazu auch den Eckenschwerpunkt U.

### •• 12. Raumschwerpunkt im Doppeltetraeder

$A(0|-3|0), B(0|4|0), C(0|0|4), D(4|-1|0), E(-8|-1|0)$

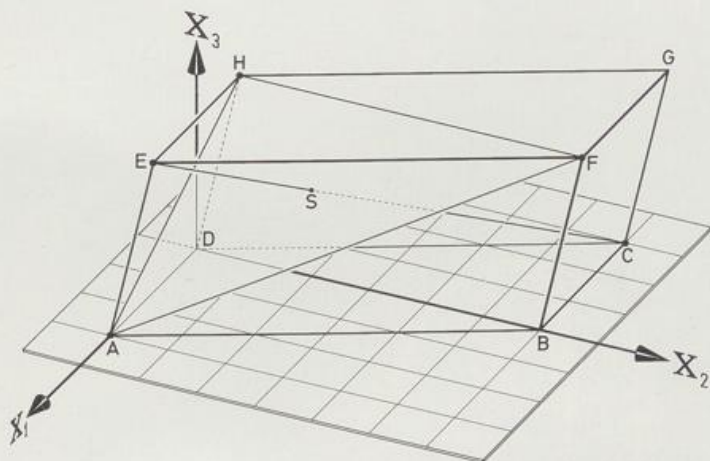
Zeichne das Doppeltetraeder, die Teiltetraeder sind ABCD und ABCE.

Berechne den Schwerpunkt S von ABCD und T von ABCE.

Der Raumschwerpunkt R von ABCDE teilt die Strecke [ST] im umgekehrten Verhältnis der Inhalte der entsprechenden Teiltetraeder.

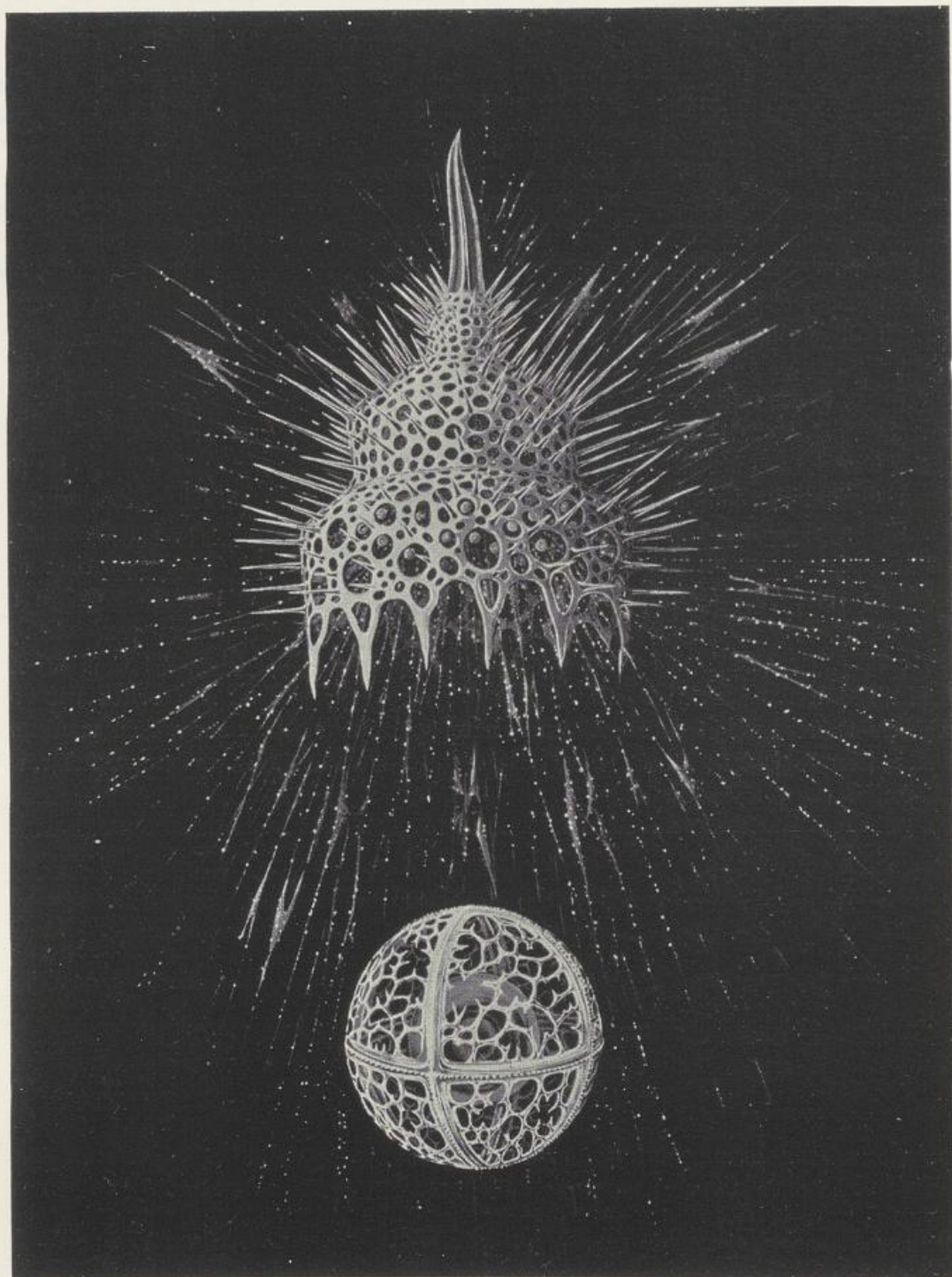
Berechne R und zum Vergleich dazu auch den Eckenschwerpunkt U.

13.  $A(3|0|0), B(0|6|0), C(-3|6|0)$  und  $G(-4,5|6|2,25)$  sind Ecken eines Spats, ABCD ist eine Seitenfläche.



- a) Bestimme die restlichen Ecken D, E, F und H.  
Zeichne das Spat, das Dreieck AFH mit Schwerpunkt S und die Raumdiagonale [CE]. (Ursprung 3,5 cm vom linken Rand entfernt)
- b) Zeige: CE schneidet das Dreieck AFH im Schwerpunkt S des Dreiecks.  
(Tip: entweder mit Ansatz  $\vec{CS} = \sigma \vec{SE}$  oder  $\vec{ES} = \lambda \vec{EC}$ )

## V. Lineare Abhängigkeit



## 1. Definitionen

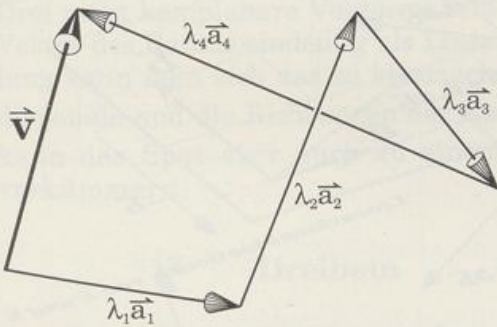
Sind zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  gegeben, so lassen sich damit beliebig viele Vektoren  $\vec{v}$  der Form

$$\vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{erzeugen.}$$

Man nennt jeden solchen Vektor  $\vec{v}$  Linearkombination von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ . Das führt zur

### Definition

$\vec{v}$  heißt **Linearkombination** der Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ , wenn gilt  $\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$



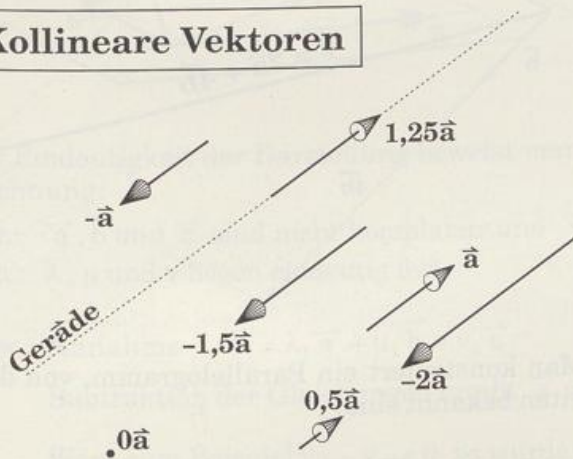
$\vec{v}$  ist **Linearkombination**  
von  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  und  $\vec{a}_4$

Eine Linearkombination von Vektoren ist also eine Summe von Vielfachen dieser Vektoren.

### Ein Vektor

Hat man nur einen einzigen Vektor  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , dann sind seine Linearkombinationen alle seine Vielfachen, das heißt, alle zu ihm kollinearen Vektoren.

### Kollineare Vektoren

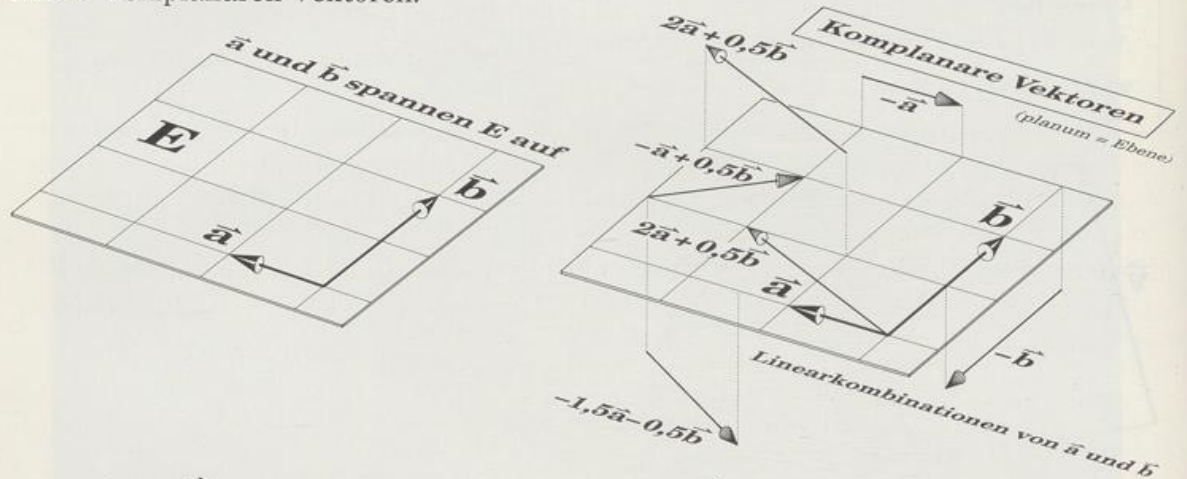


Linearkombinationen von  $\vec{a}$

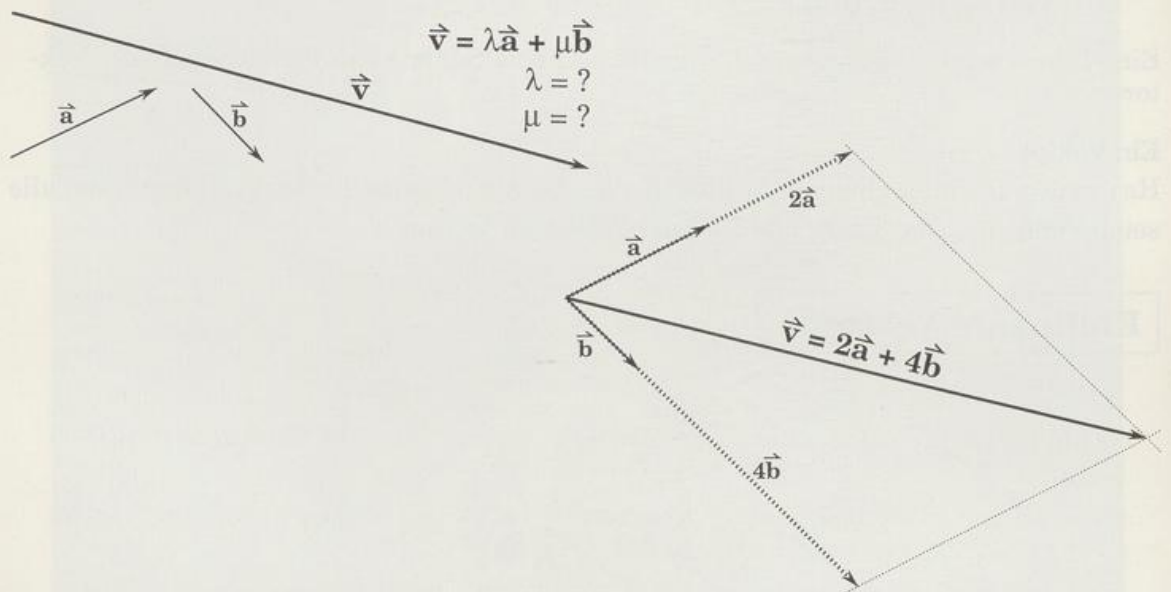
## Zwei Vektoren

Zwei nicht kollineare Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  legen im Raum (bis auf Parallelverschiebung) eine Ebene fest. Jede Linearkombination von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist parallel zu dieser Ebene. Vektoren, die alle parallel zu einer Ebene sind, heißen **komplanar** (planum(lat.) = Ebene).

Also ist die Menge der Linearkombinationen von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  gleich der Menge der zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  komplanaren Vektoren.



Sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  nicht kollinear, so ist jeder zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  komplanare Vektor  $\vec{v}$  **eindeutig** als Linearkombination von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  darstellbar.



Geometrisch ist das leicht einzusehen: Man konstruiert ein Parallelogramm, von dem eine Diagonale und die Richtungen der Seiten bekannt sind.

Algebraisch ist nicht viel schwieriger:

Vor.:  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind nicht kollinear und  $\vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Beh.:  $\lambda$  und  $\mu$  liegen eindeutig fest

Bew.: Annahme  $\vec{v} = \lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b}$   
 $\vec{v} = \lambda_2 \vec{a} + \mu_2 \vec{b}$

Subtraktion der Gleichungen ergibt  $\vec{0} = (\lambda_1 - \lambda_2) \vec{a} + (\mu_1 - \mu_2) \vec{b}$

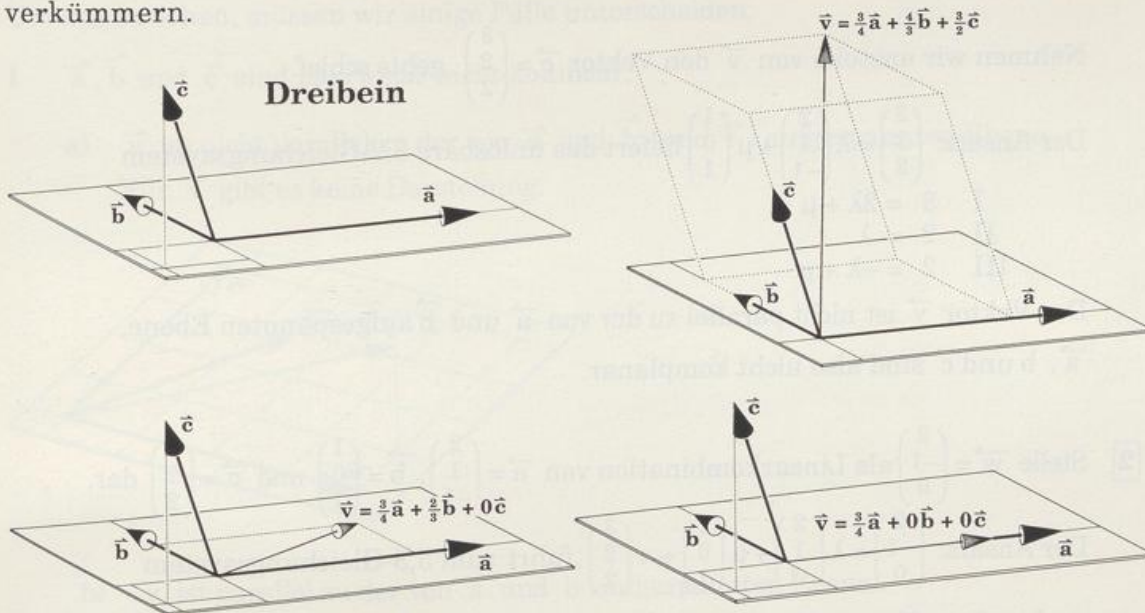
Wäre zum Beispiel  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ , so würde folgen  $\vec{a} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \vec{b}$ ,

$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  wären somit kollinear, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Deshalb gilt  $\lambda_1 = \lambda_2$  und  $\mu_1 = \mu_2$ , es gibt also nur eine Darstellung für  $\vec{v}$ .

### Drei Vektoren

Zwei Vektoren des Raums sind immer komplanar, drei Vektoren im allgemeinen nicht. Drei nicht komplanare Vektoren heißen **Dreibein**. Mit einem Dreibein läßt sich jeder Vektor des Raums eindeutig als Linearkombination darstellen. Mit etwas Raumvorstellung kann man sich das so klarmachen: Man zeichnet ein Spat, von dem eine Raumdiagonale und die Richtungen der Kanten bekannt sind. Je nach Lage des Vektors  $\vec{v}$  kann das Spat aber auch zu einem Parallelogramm oder sogar zu einer Strecke verkümmern.



Die Eindeutigkeit der Darstellung beweist man wie bei **Zwei Vektoren** durch einfache Rechnung:

Vor.:  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  sind nicht komplanar und  $\vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$ ,  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$

Beh.:  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  liegen eindeutig fest

Bew.: Annahme  $\vec{v} = \lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b} + \nu_1 \vec{c}$   $\vec{v} = \lambda_2 \vec{a} + \mu_2 \vec{b} + \nu_2 \vec{c}$

Subtraktion der Gleichungen ergibt  $\vec{0} = (\lambda_1 - \lambda_2) \vec{a} + (\mu_1 - \mu_2) \vec{b} + (\nu_1 - \nu_2) \vec{c}$

Wäre zum Beispiel  $\nu_1 - \nu_2 \neq 0$ , so würde folgen  $\vec{c} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\nu_1 - \nu_2} \vec{a} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\nu_1 - \nu_2} \vec{b}$

Damit wäre  $\vec{c}$  komplanar zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die eindeutige Darstellung eines Vektors durch ein Dreibein verwenden wir ständig bei der Koordinaten-Schreibweise von Vektoren:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ ist ja nur die Abkürzung für } \vec{v} = 3 \vec{e}_1 + 2 \vec{e}_2 - 3 \vec{e}_3$$

$\vec{v}$  ist eine eindeutige Linearkombination des Basis-Dreibeins  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$ .

Beispiele zur Berechnung von Koeffizienten in Linearkombinationen:

**1** Stelle  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  als Linearkombination von  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  dar.

Der Ansatz:  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  liefert das 3,2-Gleichungssystem

$$\text{I} \quad 3 = 2\lambda + \mu$$

$$\text{II} \quad 2 = \lambda$$

$$\text{III} \quad -3 = -\lambda + \mu \quad \text{mit der Lösung } \lambda = 2 \text{ und } \mu = -1, \text{ also } \vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}.$$

Nehmen wir anstelle von  $\vec{v}$  den Vektor  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , gehts schief.

Der Ansatz:  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  liefert das unlösbare 3,2-Gleichungssystem

$$\text{I} \quad 3 = 2\lambda + \mu$$

$$\text{II} \quad 2 = \lambda$$

$$\text{III} \quad 2 = -\lambda + \mu$$

Der Vektor  $\vec{v}$  ist nicht parallel zu der von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Ebene,  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  sind also nicht komplanar.

**2** Stelle  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  als Linearkombination von  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  dar.

Der Ansatz:  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  führt zum 3,3-Gleichungssystem

$$\text{I} \quad 2 = 2\lambda + \mu + 3\nu$$

$$\text{II} \quad -1 = \lambda + 2\nu$$

$$\text{III} \quad 0 = -\lambda + \mu + 2\nu$$

mit der Lösung  $\lambda = 1, \mu = 3$  und  $\nu = -1$ , also  $\vec{w} = \vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ .

Versucht man,  $\vec{w}$  als Linearkombination der komplanaren Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{v}$  (aus **1**) darzustellen, so stößt man auf das unlösbare Gleichungssystem

$$\text{I} \quad 2 = 2\lambda + \mu + 3\nu$$

$$\text{II} \quad -1 = \lambda + 2\nu$$

$$\text{III} \quad 0 = -\lambda + \mu - 3\nu$$

Dagegen läßt sich  $\vec{z} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$  als Linearkombination der komplanaren Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{v}$  darstellen, allerdings nicht eindeutig.

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad -4 = 2\lambda + \mu + 3\nu \\ \text{II} \quad -3 = \lambda + 2\nu \\ \text{III} \quad 5 = -\lambda + \mu - 3\nu \end{array}$$

hat die  $\infty^1$  Lösungen  $\lambda = -3 - 2t$ ,  $\mu = 2 + t$ ,  $\nu = t$  mit  $t \in \mathbb{R}$ .

Mögliche Linearkombinationen:

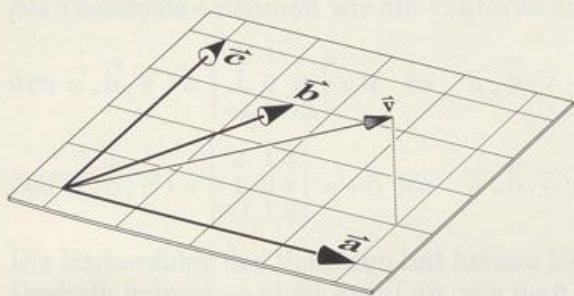
$$t = 0 \Rightarrow \vec{z} = -3\vec{a} + 2\vec{b} + 0\vec{v} \quad \text{oder} \quad t = -1 \Rightarrow \vec{z} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{v}$$

### Komplanaritäts-Kriterium

Wir haben gesehen, daß man mit einem Dreiein  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  jeden Vektor  $\vec{v}$  des Raums eindeutig als Linearkombination darstellen kann. Sind  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aber komplanar, so ist eine solche Darstellung entweder gar nicht oder nur mehrdeutig möglich. Um das zu sehen, müssen wir einige Fälle unterscheiden.

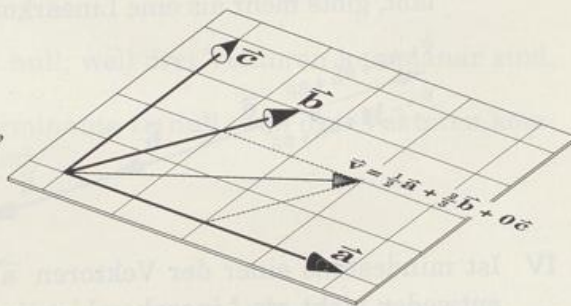
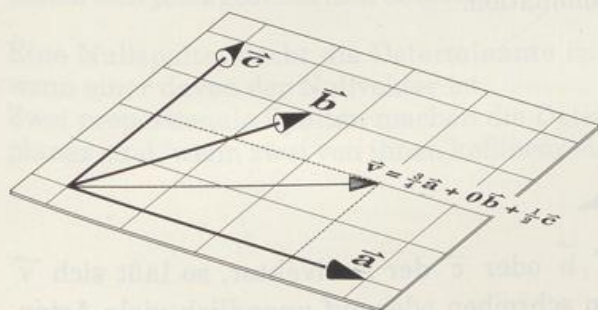
I  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  sind paarweise nicht kollinear.

- a)  $\vec{v}$  ist nicht parallel zu der von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  (und  $\vec{c}$ ) aufgespannten Ebene.  
Für  $\vec{v}$  gibt es keine Darstellung.



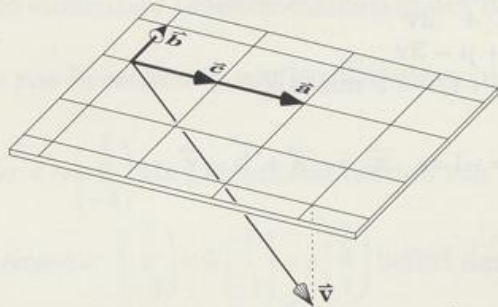
b)  $\vec{v}$  ist parallel zu der von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Ebene.

Da sich  $\vec{v}$  zum Beispiel durch  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , aber auch mit  $\vec{a}$  und  $\vec{c}$  darstellen läßt, gibts mehr als eine Linearkombination.



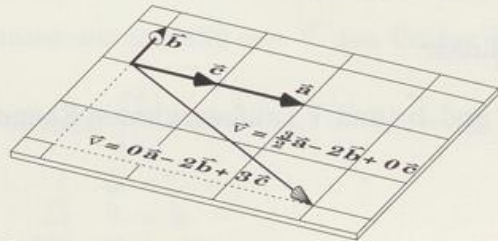
II  $\vec{a}$  und  $\vec{c}$  sind kollinear,  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  nicht.

- a)  $\vec{v}$  ist nicht parallel zu der von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  (und  $\vec{c}$ ) aufgespannten Ebene.  
Für  $\vec{v}$  gibt es keine Darstellung.



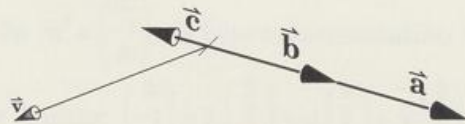
- b)  $\vec{v}$  ist parallel zu der von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Ebene.

Da sich  $\vec{v}$  zum Beispiel durch  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , aber auch mit  $\vec{a}$  und  $\vec{c}$  darstellen läßt, gibts mehr als eine Linearkombination.



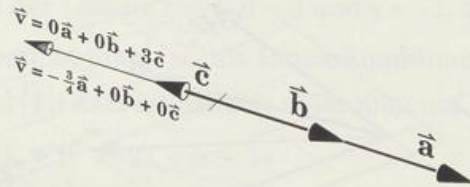
III  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  sind kollinear.

- a)  $\vec{v}$  ist nicht kollinear zu  $\vec{a}$ .  
Für  $\vec{v}$  gibt es keine Darstellung.



- b)  $\vec{v}$  ist kollinear zu  $\vec{a}$ .

Da sich  $\vec{v}$  als Linearkombination (Vielfaches) von  $\vec{a}$  oder  $\vec{b}$  oder  $\vec{c}$  darstellen läßt, gibts mehr als eine Linearkombination.



IV Ist mindestens einer der Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  oder  $\vec{c}$  der Nullvektor, so läßt sich  $\vec{v}$  entweder nicht als Linearkombination schreiben oder auf unendlich viele Arten, weil der Koeffizient des Nullvektors beliebig wählbar ist.

## Zusammenfassung

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ nicht komplanar,} \\ \vec{v} \text{ beliebig} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{für } \vec{v} \text{ gibt es eine eindeutige} \\ \text{Linearkombination von } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \end{array} \right.$$

Die Bestimmung der Koeffizienten  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  der Linearkombination  $\vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$  führt auf ein 3,3- Gleichungssystem für  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$ :

$$\begin{array}{ll} \text{I} & v_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 \\ \text{II} & v_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 \\ \text{III} & v_3 = \lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 \end{array}$$

Es hat nach der Cramer-Regel genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante  $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$  ungleich 0 ist. Die Spalten von  $D$  sind die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$ .

Wir schreiben deshalb  $D = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

### Komplanaritäts-Kriterium

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ nicht komplanar}$$

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ komplanar}$$

Als Testobjekte nehmen wir die Vektoren aus unserem Beispiel:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{v} \text{ komplanar}$$

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ nicht komplanar}$$

Die Reihenfolge der Vektoren hat keinen Einfluß auf die Komplanarität.

Deshalb kommt es nicht drauf an, wie man die Spalten in der Determinante anordnet:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \dots$$

Ist die Determinante ungleich null, dann ändert das Vertauschen zweier Spalten nur das Vorzeichen, wie Satz 4 in Kapitel II.6 lehrt. Auch die Nachbarsätze 3 und 5 lassen sich jetzt geometrisch deuten:

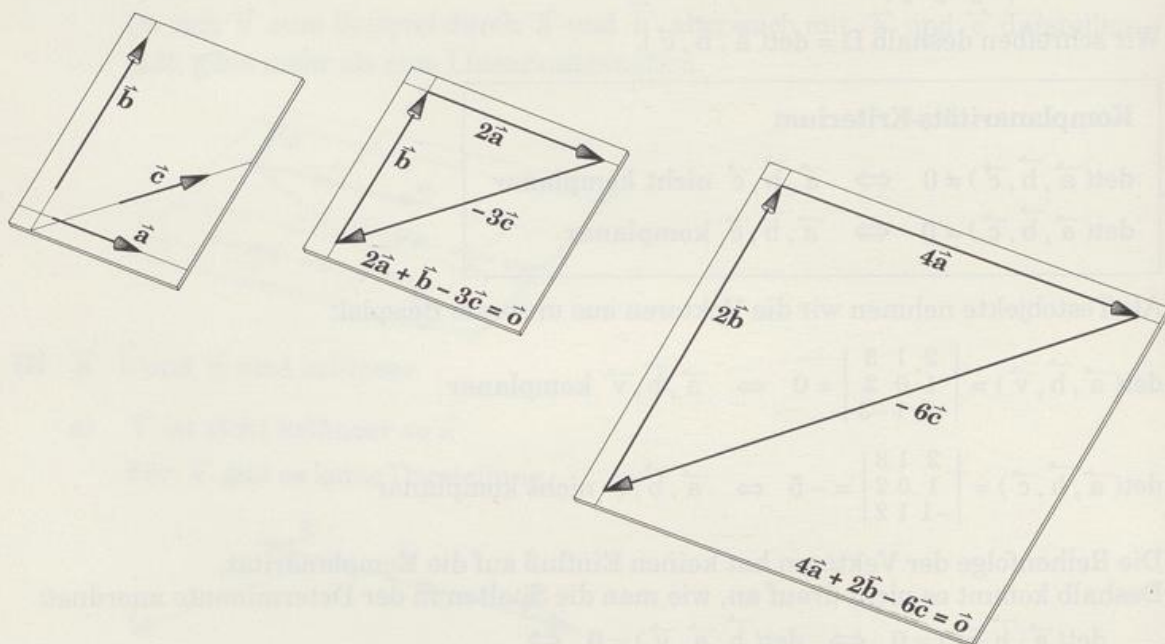
Eine Nullspalte macht die Determinante zu null, weil drei Vektoren komplanar sind, wenn einer davon der Nullvektor ist.

Zwei proportionale Spalten machen die Determinante zu null, weil drei Vektoren komplanar sind, wenn zwei von ihnen kollinear sind.

## Lineare Abhängigkeit

Die Begriffe »kollinear« und »komplanar« sind Sonderfälle der »linearen Abhängigkeit«. Allerdings ist sie erst dann wichtig, wenn man die Vektorrechnung verallgemeinert. Die entscheidende Frage ist, ob der Nullvektor als Linearkombination der gegebenen Vektoren, zum Beispiel  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$ , darstellbar ist. **Eine** Darstellung ist natürlich immer möglich:  $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$ ; man nennt sie triviale Nullsumme, bei ihr sind **alle** Koeffizienten 0. Manchmal gibt es aber auch Nullsummen, bei denen **mindestens ein** Koeffizient von 0 verschieden ist, sie heißen nichttriviale Nullsummen – Beispiel:

$\vec{0} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$ . Multipliziert man diese Gleichung mit einer Zahl, dann ergibt sich zum Beispiel:  $\vec{0} = 4\vec{a} + 2\vec{b} - 6\vec{c}$ . Hat man also eine nichttriviale Nullsumme, dann gibts unendlich viele. Geometrisch gesehen ist eine nichttriviale Nullsumme eine geschlossene Vektorkette. Die Multiplikation mit einer Zahl wirkt wie eine zentrische Streckung.



### Definition

Eine **Nullsumme** von  $n$  Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  ist eine Linearkombination dieser Vektoren, die gleich dem Nullvektor ist:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Sind alle Koeffizienten gleich 0, dann heißt die Linearkombination **triviale Nullsumme**.

Ist mindestens ein Koeffizient ungleich 0, dann heißt die Linearkombination **nichttriviale Nullsumme**.

Der Sonderfall  $n = 1$  ist auch zugelassen, obwohl man dann nicht mehr von Summe spricht.

Mit dem Begriff Nullsumme können wir jetzt endlich sagen, was man unter »linear abhängig« versteht:

**Definition**

Eine Menge von Vektoren  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , heißt **linear abhängig**, wenn sich mit ihren Vektoren eine nichttriviale Nullsumme bilden lässt. Andernfalls heißt die Menge **linear unabhängig**.

Statt »eine Menge von Vektoren  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$  ist linear abhängig« sagt man auch »die Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  sind linear abhängig«

**Satz:** Zwei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  sind genau dann linear abhängig, wenn sie kollinear sind.

Beweis: Falls  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  linear abhängig sind, dann gilt  $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$  mit  $(\lambda | \mu) \neq (0 | 0)$ .

Sei beispielsweise  $\lambda \neq 0$ , dann ist  $\vec{a} = -\frac{\mu}{\lambda} \vec{b}$ , das heißt,  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind kollinear.

Falls  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  kollinear sind, dann gilt zum Beispiel  $\vec{a} = \sigma \vec{b}$ , das heißt,

$1 \cdot \vec{a} + (-\sigma) \vec{b} = \vec{0}$ , also sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  linear abhängig.

**Satz:** Drei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  sind genau dann linear abhängig, wenn sie komplanar sind.

Beweis: Falls  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  linear abhängig sind, dann gilt  $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} = \vec{0}$  mit

$(\lambda | \mu | \nu) \neq (0 | 0 | 0)$ . Sei beispielsweise  $\mu \neq 0$ , dann ist  $\vec{b} = -\frac{\lambda}{\mu} \vec{a} - \frac{\nu}{\mu} \vec{c}$ .

$\vec{b}$  ist eine Linearkombination von  $\vec{a}$  und  $\vec{c}$ , das heißt  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  sind

komplanar. Falls  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  komplanar sind, dann gilt zum Beispiel

$\vec{a} = \sigma \vec{b} + \tau \vec{c}$ , das heißt,  $1 \cdot \vec{a} + (-\sigma) \vec{b} + (-\tau) \vec{c} = \vec{0}$ ,

also sind  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  linear abhängig.

**Satz:** Vier Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  im Raum sind immer linear abhängig.

Beweis: Falls  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  nicht komplanar sind, dann läßt sich  $\vec{d}$  eindeutig schreiben

als  $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$ , das heißt, es gibt die nichttriviale Nullsumme

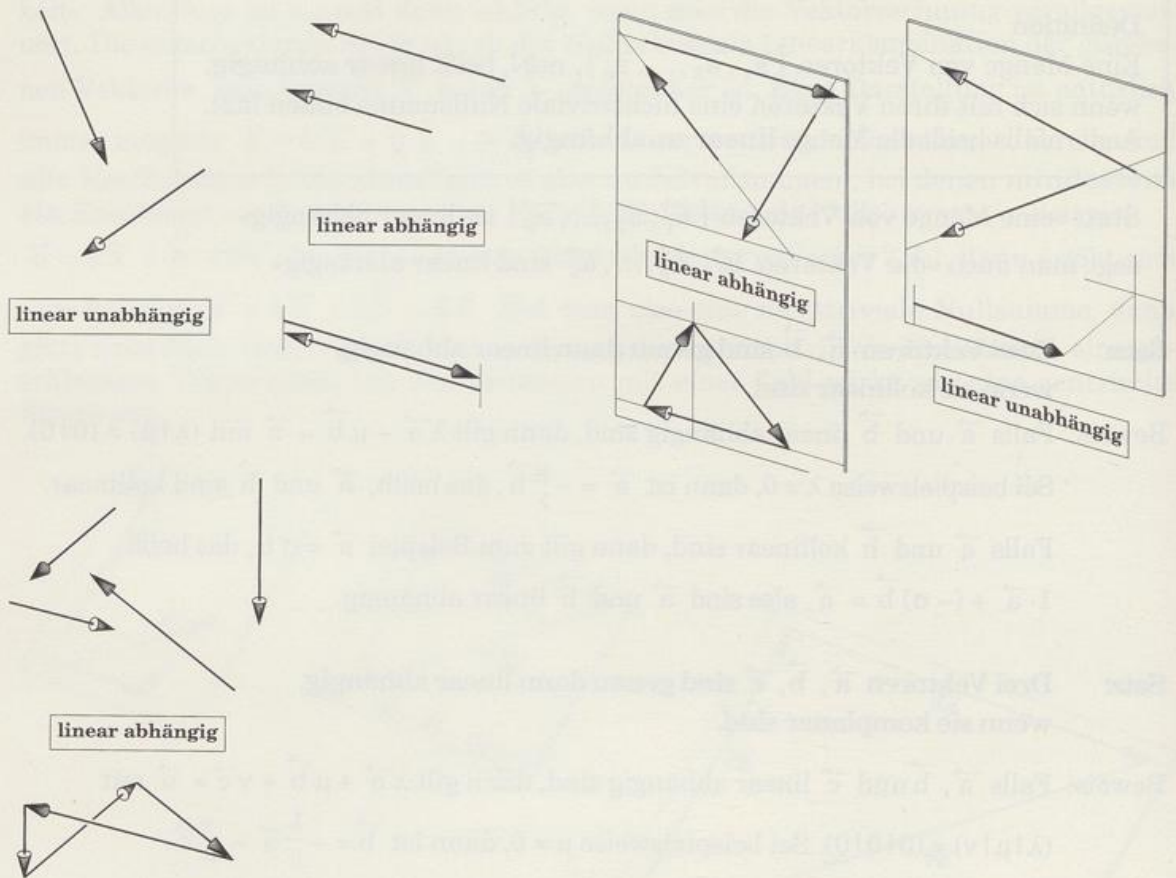
$\vec{0} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} - 1 \cdot \vec{d}$ , also sind  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  und  $\vec{d}$  linear abhängig.

Falls  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  komplanar sind, dann gibt es eine nichttriviale Nullsumme

$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} = \vec{0}$  und damit auch die nichttriviale Nullsumme

$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} + 0 \cdot \vec{d} = \vec{0}$ , also sind auch dann  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  und  $\vec{d}$  linear abhängig.

## Zusammenfassung (Bild)



## Aufgaben

1. Stelle  $\vec{c}$  als Linearkombination von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  dar:

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$     $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$     $\vec{c} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$     $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$     $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$     $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$     $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix}$

d)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$     $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$     $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\text{e) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 13 \\ -39 \\ 26 \end{pmatrix}$$

2. Stelle  $\vec{d}$  als Linearkombination von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  dar:

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 21 \end{pmatrix}$$

3. Untersuche auf Komplanarität:

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -14 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Untersuche, ob die Punkte A, B und C auf einer Gerade liegen:

$$\text{a) } A(2|0|1) \quad B(3|2|0) \quad C(1|-2|2)$$

$$\text{b) } A(4|4|-1) \quad B(1|2|-1) \quad C(1|0|0)$$

$$\text{c) } A(3|1|1) \quad B(7|3|3) \quad C(1|0|0)$$

$$\text{d) } A(1|-2|2) \quad B(-1|2|-2) \quad C(0|0|0)$$

5. Untersuche, ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen:  
(Tip: Verbindungsvektoren!)

a)  $A(0|0|2)$        $B(1|-1|1)$        $C(2|-2|0)$        $D(3|3|1)$   
 b)  $A(0|0|0)$        $B(1|1|1)$        $C(-3|0|-1)$        $D(3|0|1)$   
 c)  $A(1|0|1)$        $B(2|3|4)$        $C(-1|1|0)$        $D(2|1|2)$

6.  $\vec{a} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$        $\vec{b} = \vec{u} + \vec{v}$        $\vec{c} = 2\vec{u} - \vec{v}$   
 Zeige:  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  sind komplanar.

7. Bestimme t bis z so, daß die Vektoren kollinear sind:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ w \\ 2 \end{pmatrix} (!)$$

8. Bestimme a bis f so, daß die Vektoren komplanar sind:

a)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$       c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$       d)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ e \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

9. Bestimme a so, daß die Vektoren komplanar sind:

a)  $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-a \end{pmatrix}$       c)  $\begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} a+5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ a-5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ a+3 \end{pmatrix}$       e)  $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$       f)  $\begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-a \end{pmatrix}$

g)  $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$       h)  $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a+2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$       i)  $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$       j)  $\begin{pmatrix} a-1 \\ a-2 \\ a-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+1 \\ a+2 \\ a+3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

10.  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}$

- a) Zeige:  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  und  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{v}$  sind komplanar.  
 b) Zeige: Mit  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  läßt sich nur die triviale Nullsumme bilden.  
 Gib je eine nichttriviale Nullsumme der Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  beziehungsweise  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{v}$  an.  
 c) Schreibe  $\vec{v}$  auf zwei Arten als Linearkombination von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$ .

11. Zeige:

- a) Eine Vektormenge, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.  
 b) Eine Vektormenge, die zwei kollineare Vektoren enthält, ist linear abhängig.

12. Was kann man vom Vektor  $\vec{x}$  sagen, wenn

- a)  $\{\vec{x}\}$  linear unabhängig ist?      b)  $\{\vec{x}\}$  linear abhängig ist?

• 13.  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  seien linear unabhängig.

Untersuche  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  auf lineare Abhängigkeit:

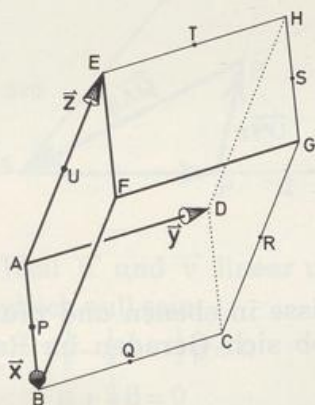
- a)  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$       b)  $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{v} = \vec{b} - 2\vec{a}$   
 c)  $\vec{u} = 2\vec{a} + 6\vec{b}$ ,  $\vec{v} = -\vec{a} - 3\vec{b}$       d)  $\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ ,  $\vec{v} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$

• 14.  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  seien linear unabhängig.

Untersuche  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  auf lineare Abhängigkeit:

- a)  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{v} = \vec{b} + \vec{c}$ ,  $\vec{w} = \vec{a} + \vec{c}$   
 b)  $\vec{u} = \vec{c} - \vec{a}$ ,  $\vec{v} = \vec{b} - \vec{c}$ ,  $\vec{w} = \vec{b} - \vec{a}$   
 c)  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ,  $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{w} = \vec{a} - \vec{c}$

15.  $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{y} = \overrightarrow{AD}$  und  $\vec{z} = \overrightarrow{AE}$  spannen das Spat ABCDEFGH auf mit  $A(1|1|0)$ ,  $B(5|3|0)$ ,  $D(-1|3|0)$  und  $E(-3|1|2)$ . P, Q, R, S, T und U sind Kantenmitten.



Berechne diese Kantenmitten und den Spatmittelpunkt M.

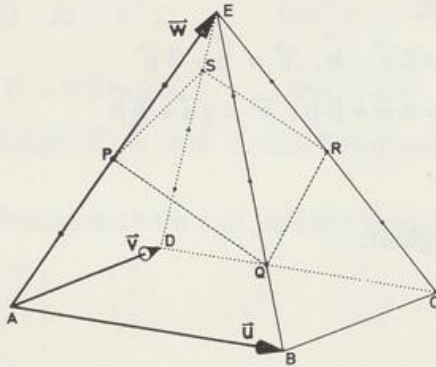
Zeige, daß die folgenden Punkte in einer Ebene liegen, und untersuche, ob der Spatmittelpunkt M in dieser Ebene liegt.

- a) G, T, A, Q      b) A, C, S, T  
 c) P, C, S, E      d) P, Q, R, S, T, U

• 16.  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  und  $\vec{z}$  spannen das Spat ABCDEFGH auf. P, Q, R, S, T und U sind Kantenmitten. Zeige, daß die folgenden Punkte in einer Ebene liegen, und untersuche, ob der Spatmittelpunkt M in dieser Ebene liegt. (Bild wie Aufgabe 15.)

- a) G, T, A, Q      b) A, C, S, T  
 c) P, C, S, E      d) P, Q, R, S, T, U

17.  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$  und  $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$  spannen die Pyramide ABCDE auf mit  $A(2 | -3 | 0)$ ,  $B(2 | 5 | 0)$ ,  $D(-2 | -1 | 0)$  und  $E(0 | 2 | 7)$ . ABCD ist ein Parallelogramm. Die Kanten, die durch E gehen, sind jeweils durch drei Punkte gleichmäßig unterteilt. Untersuche, ob das Viereck PQRS eben ist.



18.  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  spannen die Pyramide ABCDE auf. ABCD ist ein Parallelogramm. Die Kanten, die durch E gehen, sind jeweils durch drei Punkte gleichmäßig unterteilt. Untersuche, ob das Viereck PQRS eben ist.

## 2. Anwendungen

Mit der linearen Unabhängigkeit kann man Teilverhältnisse in ebenen und räumlichen Figuren bestimmen und außerdem untersuchen, ob sich Geraden im Raum schneiden. Dazu zwei Beispiele.

- 1 Die Seitenhalbierenden im Dreieck teilen sich im Verhältnis 2 : 1 von der Ecke aus.

### Vektorbeweis

Die linear unabhängigen Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  spannen das Dreieck ABC auf.

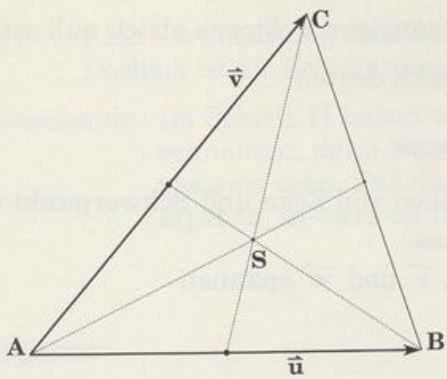
Geschlossene Vektorkette mit S als Ecke:  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SA} = \vec{0}$

Wir drücken die drei Vektoren der Vektorkette mit  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  aus:

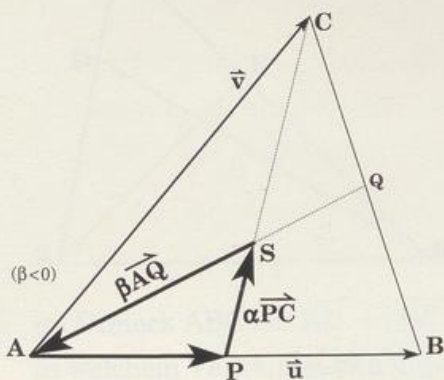
$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{u}$$

$$\overrightarrow{PS} = \alpha \overrightarrow{PC} = \alpha(-\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v})$$

$$\overrightarrow{SA} = \beta \overrightarrow{AQ} = \beta(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) \quad (\beta \text{ ist negativ!})$$



Einsetzen in die Vektorkette:  $\frac{1}{2}\vec{u} + \alpha(-\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) = \vec{0}$   
 Sortieren:  $\vec{u} \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta) + \vec{v} \cdot (\alpha + \frac{1}{2}\beta) = \vec{0}$



Weil  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten der Nullsumme gleich null sein:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta &= 0 \\ \alpha + \frac{1}{2}\beta &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen  $\alpha = \frac{1}{3}$  und  $\beta = -\frac{2}{3}$ .

Das heißt,  $\vec{PS} = \frac{1}{3}\vec{PC}$  oder  $\overline{PS} : \overline{SC} = 1 : 2$  und  $\vec{SA} = -\frac{2}{3}\vec{AQ}$  oder  $\overline{AS} : \overline{SQ} = 2 : 1$ .

Diese Teilverhältnisse ergeben sich unabhängig davon, welche Seitenhalbierende man nimmt. Deshalb gehen alle drei Seitenhalbierenden durch denselben Punkt S; dieser teilt sie im Verhältnis 2 : 1.

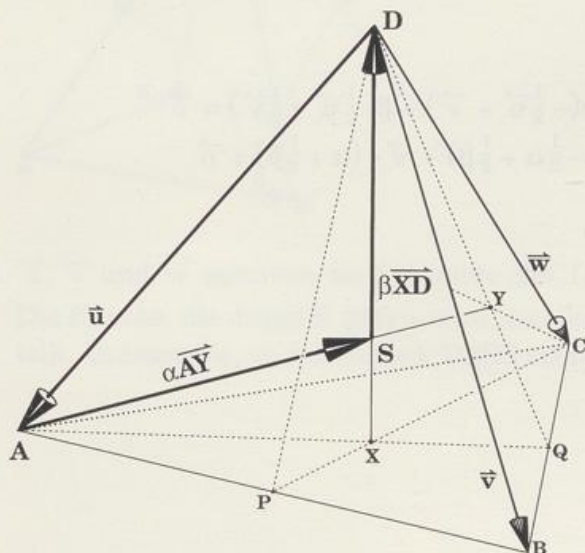
Dieses Beispiel zeigt das Prinzip, nach dem man solche Aufgaben löst:

- I Skizze machen und Vektoren festlegen:
  - 2 linear unabhängige Vektoren bei Aufgaben in der Ebene
  - 3 linear unabhängige Vektoren bei Aufgaben im Raum
- II geschlossene Vektorkette mit Teilpunkt als Ecke hinschreiben
- III jeden Vektor der Vektorkette durch die linear unabhängigen Vektoren ausdrücken, dabei Variable für unbekannte Koeffizienten einführen

- IV sortieren und die Koeffizienten der linear unabhängigen Vektoren gleich null setzen  
 V Gleichungssystem lösen und Ergebnis geometrisch deuten

Nach diesem Schema lösen wir eine Aufgabe im Raum:

- 2 Im Tetraeder teilen sich die Verbindungsstrecken von Ecke und Schwerpunkt der Gegenfläche im Verhältnis 3 : 1 von der Ecke aus.  
 Beweis: Die linear unabhängigen Vektoren  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  spannen das Tetraeder ABCD auf.



I  $\vec{u} = \overrightarrow{DA}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{DB}$ ,  $\vec{w} = \overrightarrow{DC}$

II  $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

III  $\overrightarrow{AS} = \alpha \overrightarrow{AY} = \alpha(-\vec{u} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DQ}) = \alpha(-\vec{u} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w}))$   
 $= \alpha(-\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w})$

$\overrightarrow{SD} = \beta \overrightarrow{XD} = \beta(\frac{2}{3}\overrightarrow{PC} - \vec{w}) = \beta(\frac{2}{3}(\overrightarrow{PD} + \vec{w}) - \vec{w})$   
 $= \beta(\frac{2}{3}(-\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}) - \vec{w}) = \beta(-\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w})$

$\overrightarrow{DA} = \vec{u}$

Einsetzen:  $\alpha(-\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}) + \beta(-\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w}) + \vec{u} = \vec{0}$

IV  $\vec{u} \cdot (1 - \alpha - \frac{1}{3}\beta) + \vec{v} \cdot (\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta) + \vec{w} \cdot (\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta) = \vec{0}$

$1 - \alpha - \frac{1}{3}\beta = 0$

$\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta = 0$

$\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta = 0$

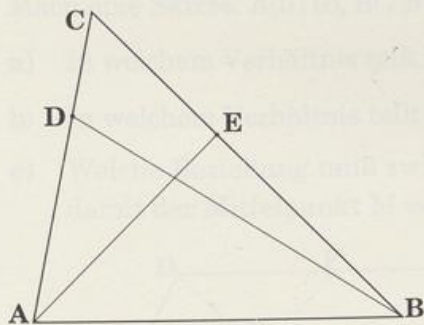
V  $\alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{3}{4}; \overrightarrow{SD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{XD}, \overrightarrow{DS} : \overrightarrow{SX} = 3 : 1$   
 $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AY}, \overrightarrow{AS} : \overrightarrow{SY} = 3 : 1$

Eine Vertauschung der Ecken hat keinen Einfluß aufs Ergebnis.  
Deshalb ist die Behauptung bewiesen.

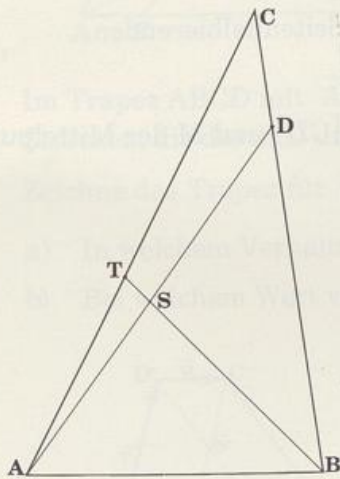
Bemerkung: Im Schritt II haben wir angenommen, daß sich die Geraden DX und AY schneiden, denn nur dann existiert S. Die Lösbarkeit des Gleichungssystems zeigt, daß die Annahme richtig war. Hätte sich ein Widerspruch ergeben, so wäre die Annahme falsch gewesen.

### Aufgaben

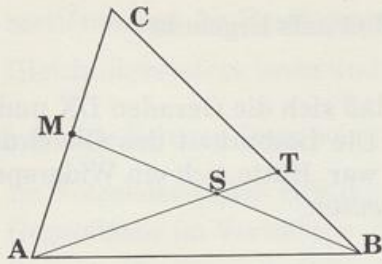
1. Im Dreieck ABC ist  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$  und  $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ .  
In welchen Verhältnissen teilen sich [AE] und [BD] ?



2. Im Dreieck ABC ist  $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$  und  $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ . BS schneidet AC in T.  
In welchem Verhältnis teilt T die Strecke [AC] beziehungsweise S die Strecke [BT]?

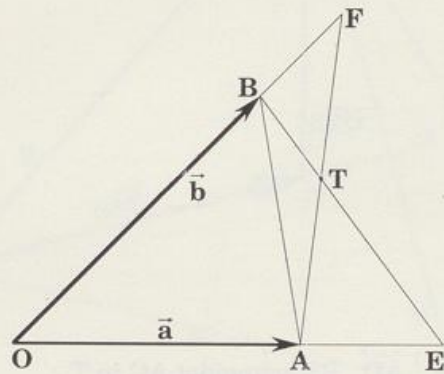


3. Im Dreieck ABC ist M die Mitte von [AC]. T teilt [BC] im Verhältnis 1:2 von B aus.  
AT schneidet BM in S.  
a) In welchem Verhältnis teilt S die Strecke [AT] von A aus ?  
b) Nun sei  $A(0 | 0 | 0)$ ,  $B(2 | 2 | -4)$  und  $C(8 | -4 | -16)$ . Berechne S.

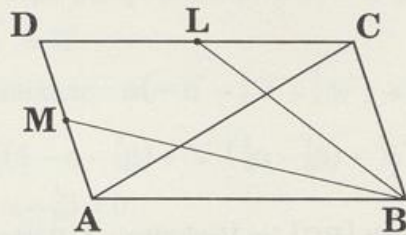


4. Im Dreieck OAB ist  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OE} = k\vec{a}$  und  $\overrightarrow{OF} = m\vec{b}$ .  
EB und AF schneiden sich in T. Berechne

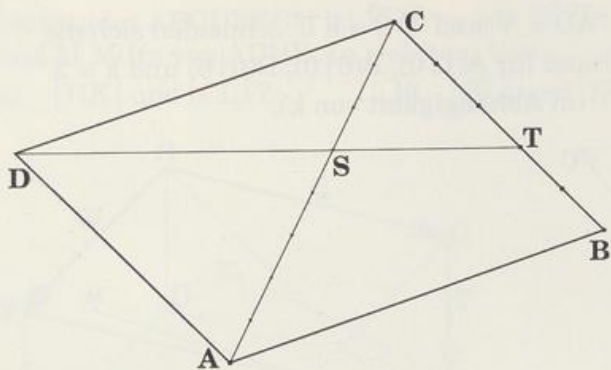
a)  $\overrightarrow{AT}$ ,  $\overrightarrow{BT}$       b)  $\overrightarrow{ET} : \overrightarrow{TB}$ ,  $\overrightarrow{AT} : \overrightarrow{TF}$



- c) Berechne T für  $A(14 | 0)$ ,  $k = \frac{3}{2}$  und  $B(12 | 12)$ ,  $m = \frac{4}{3}$ .  
d) Zeige: Sind AB und EF parallel, so liegt T auf der Seitenhalbierenden von [AB] oder ihrer Verlängerung.
5. Im Parallelogramm ABCD ist L der Mittelpunkt von [CD] und M der Mittelpunkt von [DA]. In welchem Verhältnis teilen sich  
a) [AC] und [BM]?      b) [AC] und [BL]?

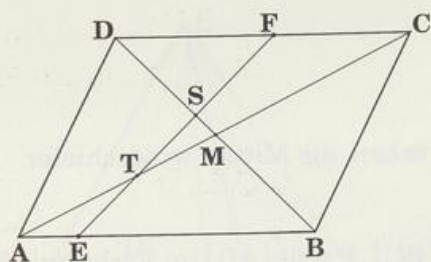


6. Im Parallelogramm ABCD teilt T die Seite [BC] im Verhältnis  $x : y$  von B aus. DT schneidet AC in S. Mach eine Zeichnung für  $A(5 | 0)$ ,  $B(14 | 3)$ ,  $C(9 | 8)$ ,  $D(0 | 5)$  und  $x : y = 2 : 3$ . Zeige: S teilt die Diagonale [AC] im Verhältnis  $r : s = x : y + 1$  von A aus.



- 7. Im Parallelogramm ABCD gilt:  $\overline{AE} : \overline{EB} = k$ ,  $\overline{CF} : \overline{FD} = m$ .  
 Mach eine Skizze:  $A(0|0)$ ,  $B(7,5|0)$ ,  $C(10|5)$ ,  $D(2,5|5)$ ,  $k = 1:4$ ,  $m = 7:8$

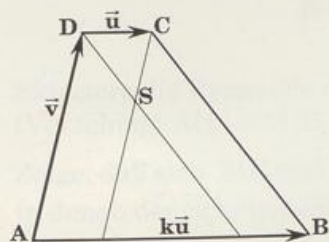
- In welchem Verhältnis teilt S die Diagonale [BD] ?
- In welchem Verhältnis teilt T die Diagonale [AC] ?
- Welche Beziehung muß zwischen m und k bestehen, damit der Mittelpunkt M von ABCD auf [EF] liegt ?



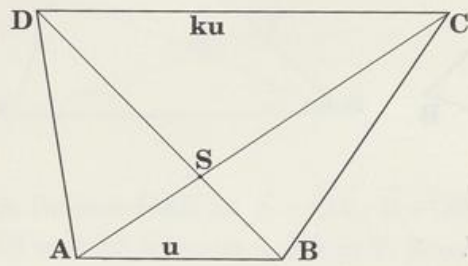
- 8. Im Trapez ABCD mit  $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ ,  $\overrightarrow{DC} = \vec{u}$  und  $\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$  schneiden sich in S die Strecken, die durch D und C gehen und zu den Schenkeln parallel sind.

Zeichne das Trapez für  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 6 \end{pmatrix}$  und  $k = 4$ .

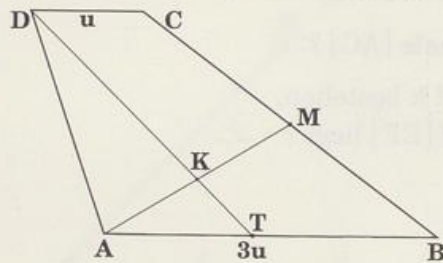
- In welchem Verhältnis (in Abhängigkeit von k) teilt S die Strecken ?
- Bei welchem Wert von k liegt S auf AB ?



- 9. Im Trapez ABCD mit  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$  und  $\overrightarrow{DC} = k\vec{u}$  schneiden sich die Diagonalen in S. Zeichne das Trapez für  $A(1|0)$ ,  $B(6|0)$ ,  $D(0|6)$  und  $k = 2$ . Berechne  $\overline{AS} : \overline{SC}$  und  $\overline{BS} : \overline{SD}$  (in Abhängigkeit von k).

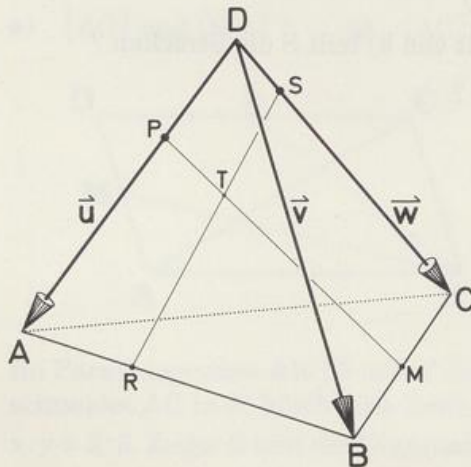


- 10. Im Trapez ABCD mit  $\overrightarrow{DC} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$  und  $\overrightarrow{AB} = 3\vec{u}$  ist M die Mitte von [BC] und K die Mitte von [AM]. DK und AB schneiden sich in T. Zeichne das Trapez für  $A(2|0)$ ,  $B(11|0)$ ,  $D(0|6)$ . Berechne  $\overline{DK} : \overline{KT}$  und  $\overline{AT} : \overline{TB}$ .

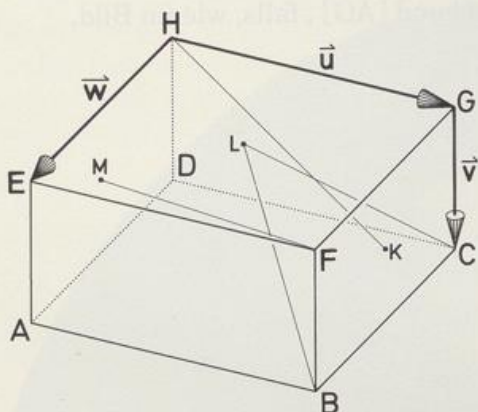


- 11. Zeige: Im Tetraeder halbieren sich die Strecken, die Mitten windschiefer Kanten verbinden.

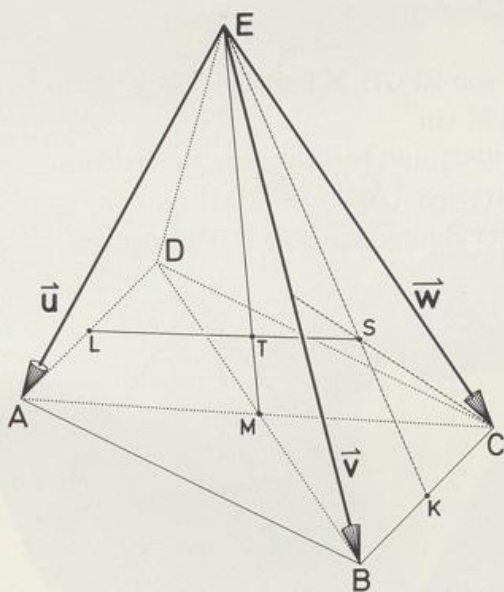
- 12. Im Tetraeder ABCD halbiert M die Kante [BC], P teilt [AD] im Verhältnis 2 : 1. R liegt auf [AB] mit  $\overrightarrow{AR} = r\overrightarrow{AB}$ , S liegt auf [DC] mit  $\overrightarrow{DS} = s\overrightarrow{DC}$ . Gib eine Beziehung für r und s so an, daß sich MP und RS schneiden. In welchen Verhältnissen teilen sich [MP] und [RS] ?



13. Im Quader ABCDEFGH ist K Mitte von BCGF, L Mitte von EFGH und M Mitte von ADHE. In welchem Verhältnis teilen sich
- a)  $[HK]$  und  $[CL]$ ?      b)  $[BL]$  und  $[FM]$ ?

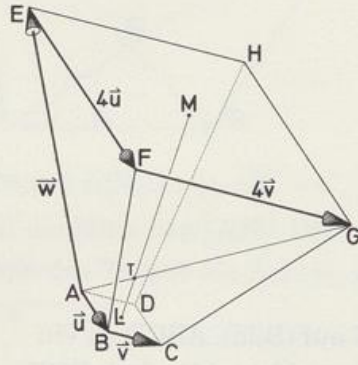


- 14.  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  spannen die Pyramide ABCDE auf (Bild). ABCD ist ein Parallelogramm mit Mitte M, S ist der Schwerpunkt im Dreieck BCE, K und L sind Kantenmitten.

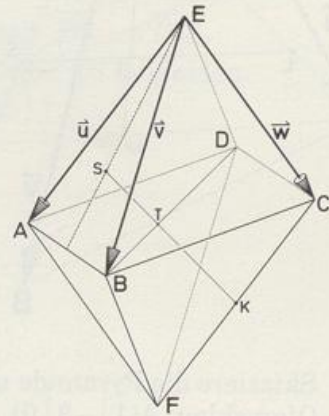
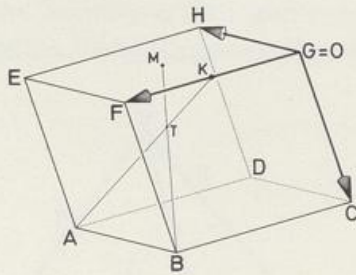


- a) Skizziere die Pyramide und trage alle oben genannten Stücke ein.  
(Vorschlag:  $A(1 | -3 | 0)$ ,  $B(3 | 3 | 0)$ ,  $C(-1 | 3 | 0)$  und  $E(-1,5 | -2 | 5)$ )
- b) Zeige, daß sich ME und LS schneiden, und berechne die Verhältnisse, in denen der Schnittpunkt T die Strecken  $[ME]$  und  $[LS]$  teilt.
- c) Berechne T für  $A(1 | -3 | 0)$ ,  $B(3 | 3 | 0)$ ,  $C(-1 | 3 | 0)$  und  $E(-1,5 | -2 | 5)$ .
- d) Die Gerade CT schneidet die Kante  $[AE]$  in X.  
In welchen Verhältnissen teilt X die Strecken  $[AE]$  und  $[TS]$ ?

- 15.  $\vec{u}, \vec{v}$  und  $\vec{w}$  spannen den Pyramidenstumpf ABCDEFGH auf. L und M sind Mitten der Parallelogramme ABCD und EFGH.
  - Zeige, daß sich [LM] und [AG] schneiden, und berechne die Teilverhältnisse.
  - Berechne den Schnittpunkt T von [LM] und [AG], falls, wie im Bild,
$$A = O, \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2,5 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$



- 16.  $\vec{u} = \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{w} = \overrightarrow{GC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1,5 \end{pmatrix}$  spannen das Spat ABCDEFGH auf: M ist Mitte von EFGH, K halbiert [GF].
  - Zeichne das Spat und trage K und M ein.
  - Zeige, daß sich AK und BM schneiden, und berechne die Verhältnisse, in denen der Schnittpunkt T die Strecken [AK] und [BM] teilt.
  - Berechne T und zeige, daß T auf der Raumdiagonale [DF] liegt.



- 17.  $\vec{u}, \vec{v}$  und  $\vec{w}$  spannen das Oktaeder ABCDEF auf. ABCD ist ein Parallelogramm, sein Mittelpunkt halbiert [EF]. S ist Schwerpunkt von ABE.
  - Zeichne die Figur für  $A(1,5 | -2 | 0), B(2,5 | 0 | 0), C(-1,5 | 2 | 0)$  und  $E(-0,5 | 0 | 3,5)$ .
  - In welchem Verhältnis muß K die Kante [CF] teilen, damit SK die Diagonale [BD] schneidet?

## \*VI. Der abstrakte Vektorraum



*Hermann Günther Graßmann (1809 bis 1877)*

GRABMANN und HAMILTON haben die Vektorrechnung geschaffen, um ein anschauliches Werkzeug zur Lösung geometrischer Probleme zu haben. Bei längerem Umgang mit Vektoren entdeckte man in der Folgezeit Strukturen, die auch in anderen Bereichen der Mathematik eine Rolle spielten. In ihrem Drang zur Abstraktion ließen die Mathematiker die geometrische Einkleidung fallen und schufen so den **abstrakten Vektorraum**. Seine Definition entwickelte sich allmählich und war erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts abgeschlossen. Seitdem versteht man unter einem Vektorraum eine nicht leere Menge  $V$ , deren Elemente (genannt Vektoren) folgende Eigenschaften haben:

### Definition

**I** Je zwei Elemente  $a, b \in V$  kann man verknüpfen und man bekommt als Ergebnis wieder ein Element aus  $V$ ; dieses bezeichnet man mit  $a+b$ . Die Verknüpfung heißt **Addition**, sie soll denselben Axiomen genügen wie die Zahlenaddition:

**K**  $a + b = b + a$                       Kommutativgesetz

**A**  $a + (b + c) = (a + b) + c$       Assoziativgesetz

**N** Es gibt ein Element  $0$  in  $V$ , so daß für alle  $a$  gilt  $a + 0 = a$   
 $0$  heißt **neutrales Element der Addition** oder **Nullvektor**.

**I** Zu jedem  $a$  gibt es ein Element  $\bar{a} \in V$ , so daß gilt  $a + \bar{a} = 0$   
 $\bar{a}$  heißt **inverses Element** zu  $a$ . Statt  $\bar{a}$  schreibt man auch  $-a$ .

**II** Es gibt eine Verknüpfung von Zahlen aus  $\mathbb{R}$  und Elementen aus  $V$ , die jedem  $\rho \in \mathbb{R}$  und  $a \in V$  ein Element aus  $V$  zuordnet; dieses bezeichnet man mit  $\rho \cdot a$ . Die Verknüpfung heißt **S-Multiplikation**, sie soll denselben Axiomen genügen wie die S-Multiplikation geometrischer Vektoren:

**D<sub>s</sub>**  $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$       Distributivgesetz für Zahlen (Skalare)

**D<sub>v</sub>**  $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$       Distributivgesetz für Vektoren

**A<sub>s</sub>**  $(\alpha\beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$               Assoziativgesetz für Zahlen

**N<sub>s</sub>**  $1 \cdot a = a$                               1 heißt **neutrales Element der S-Multiplikation**.

Ein Vektor im abstrakten Sinn ist also nichts anderes als ein Element eines so festgelegten Vektorraums.

### Modelle

Betrachten wir dazu einige Beispiele, »Modelle« des Axiomensystems, wie die Mathematiker gern sagen:

#### **V<sub>1</sub> Menge der geometrischen Vektoren des Raums**

Sie war unser Prototyp fürs Axiomensystem.

## V<sub>2</sub> Arithmetischer Vektorraum

Die Elemente sind n-Tupel reeller Zahlen, man schreibt sie als

Zeilen  $(a_1 | a_2 | \dots | a_n)$  oder Spalten  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ .

Man addiert Stelle für Stelle:

$$(a_1 | a_2 | \dots | a_n) + (b_1 | b_2 | \dots | b_n) = (a_1 + b_1 | a_2 + b_2 | \dots | a_n + b_n).$$

Die S-Multiplikation verteilt den Skalar  $\alpha \in \mathbb{R}$  auf alle Stellen:

$$\alpha \cdot (a_1 | a_2 | \dots | a_n) = (\alpha a_1 | \alpha a_2 | \dots | \alpha a_n).$$

Der Nullvektor ist  $(0 | 0 | \dots | 0)$ .

Der zu  $(a_1 | a_2 | \dots | a_n)$  inverse Vektor ist  $(-a_1 | -a_2 | \dots | -a_n)$ .

Den Vektorraum der n-Tupel reeller Zahlen nennt man auch  $\mathbb{R}^n$ .

## V<sub>3</sub> Vektorraum der Polynome bis zum Grad n

Nehmen wir  $n = 3$ . Dann sind die Elemente des Vektorraums Polynome der Form  $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  mit  $a_i \in \mathbb{R}$ .

Addition und S-Multiplikation erledigen wir wie in der Algebra üblich:

$$(4x^3 - 5x^2 + 12x - 7) + (2x^3 + 6x^2 + 10) = 6x^3 + x^2 + 12x + 3$$

$$4 \cdot (4x^3 - 5x^2 + 12x - 7) = 16x^3 - 20x^2 + 48x - 28.$$

Der Nullvektor ist das Polynom  $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ .

Der zu  $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  inverse Vektor ist  $-a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0$ .

## V<sub>4</sub> Vektorraum der Funktionen mit gleicher Definitionsmenge D

Addition und Subtraktion geschehen wie gewohnt:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\rho \cdot f)(x) = \rho \cdot f(x)$$

Der Nullvektor ist die Funktion mit dem Term  $f(x) = 0$ .

Die Funktion  $-f$  ist die Inverse von  $f$ .

### Basis und Dimension

Wie beim geometrischen Vektorraum definiert man auch beim abstrakten Vektorraum die lineare Unabhängigkeit:

#### Definition

Eine Menge von Vektoren  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , heißt **linear abhängig**, wenn sich mit ihren Vektoren eine nichttriviale Nullsumme bilden läßt. Andernfalls heißt die Menge **linear unabhängig**.

Im Vektorraum der Polynome bis zum Grad 3 sind zum Beispiel die Vektoren  $p_1(x) = 1$ ,  $p_2(x) = x$ ,  $p_3(x) = x^2$  und  $p_4(x) = x^3$  linear unabhängig.

Nullsumme:  $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 + \lambda_4 \cdot x^3 = 0$ .

Weil diese Gleichung für alle  $x$  gelten muß, folgt  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ . Es gibt somit nur die triviale Nullsumme.

### Definition

Eine Menge von Vektoren  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , heißt **Basis des Vektorraums V**, wenn sie linear unabhängig ist und wenn jeder Vektor  $a \in V$  als Linearkombination von  $b_1, b_2, \dots, b_n$  darstellbar ist. Die Anzahl  $n$  heißt **Länge der Basis**.

Zu jedem Vektorraum gibt es viele verschiedene Basen. Man kann beweisen, daß alle Basen gleich viele Vektoren enthalten, also dieselbe Länge haben. Diese Länge nennt man **Dimension des Vektorraums**.

Im Vektorraum der Polynome bis zum Grad 3 sind zum Beispiel  $\{1, x, x^2, x^3\}$  und  $\{1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3\}$  zwei verschiedene Basen. Dieser Vektorraum hat also die Dimension 4.

Im geometrischen Vektorraum haben wir die Vektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$  in Richtung der drei Achsen als Basisvektoren verwendet. Der anschauliche Raum ist dreidimensional.

Der arithmetische Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  hat die Dimension  $n$ .

Eine mögliche Basis ist  $\{(1|0|\dots|0), (0|1|\dots|0), \dots, (0|0|\dots|1)\}$ .

Es gibt sogar Vektorräume mit unendlich vielen Basisvektoren; ihnen schreibt man die Dimension unendlich zu. Ein Beispiel ist der Vektorraum aller Polynome mit der Basis  $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$ .

Beispiel für Basiswechsel

Im Vektorraum der Polynome bis zum Grad 3 ist das Polynom  $p(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{13}{3}x - \frac{10}{9}$  in der Basis  $\{1, x, x^2, x^3\}$  dargestellt. Wählt man die Basis  $\{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$ , dann findet man die neuen Koordinaten durch Koeffizientenvergleich in der Gleichung

$$\frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{13}{3}x - \frac{10}{9} = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$$

$$x^3: \frac{1}{9} = d$$

$$x^2: -\frac{4}{3} = c - 3d, \quad \Rightarrow c = -1$$

$$x: \frac{13}{3} = b - 2c + 3d, \quad \Rightarrow b = 2$$

$$1: -\frac{10}{9} = a - b + c - d, \quad \Rightarrow a = 2$$

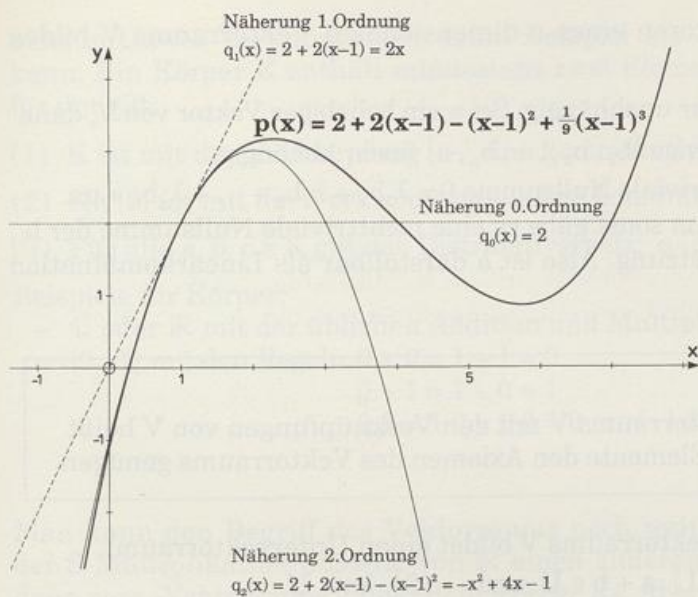
Also gilt  $p(x) = 2 \cdot 1 + 2(x-1) - 1 \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{9}(x-1)^3$ . Diese Darstellung heißt auch Taylor-Entwicklung des Polynoms  $p(x)$  an der Stelle  $x = 1$ .

Nahe bei  $x = 1$  sind die Terme  $(x-1)^k$  umso kleiner, je größer  $k$  ist. Läßt man jeweils die kleinsten Summanden der Taylor-Entwicklung weg, dann bleiben Näherungspolynome  $q_k(x)$  übrig, deren Graphen sich bei  $x = 1$  dem Graphen von  $p$  anschmiegen:

$$q_2(x) = 2 + 2(x-1) - (x-1)^2 = -x^2 + 4x - 1, \quad \text{Näherung 2.Ordnung, Schmiegeparabel bei } x = 1$$

$$q_1(x) = 2 + 2(x-1) = 2x, \quad \text{Näherung 1.Ordnung, Tangente bei } x = 1$$

$$q_0(x) = 2, \quad \text{Näherung 0.Ordnung, Parallele zur } x\text{-Achse}$$



### Sätze

Vieles, was wir im geometrischen Vektorraum kennengelernt haben, gilt in allgemeiner Form auch in beliebigen Vektorräumen. Beispiele:

- 1** Ist  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  eine Basis eines Vektorraums  $V$ , dann läßt sich jeder Vektor  $a \in V$  *eindeutig* als Linearkombination aus  $b_1, b_2, \dots, b_n$  darstellen. Die Koeffizienten  $\lambda_i$  der Darstellung  $a = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$  heißen **Koordinaten** von  $a$  bezüglich der verwendeten Basis.

Beweis: Annahme  $a = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$

$$a = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$$

Subtraktion ergibt:  $0 = (\lambda_1 - \mu_1)b_1 + (\lambda_2 - \mu_2)b_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)b_n$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

ist die Nullsumme trivial, das heißt  $\lambda_i = \mu_i$ .

- 2** In einem Vektorraum  $V$  der Dimension  $n$  sind je  $n+1$  Vektoren linear abhängig.

Beweis:  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  sei eine Basis eines Vektorraums  $V$  und  $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$  eine Teilmenge von  $V$ . Bildet man mit den Vektoren  $a_i$  eine Nullsumme  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1} = 0$  und ersetzt alle  $a_i$  durch ihre Basisdarstellungen, dann ergibt sich wegen der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren ein homogenes System von  $n$  Gleichungen mit den  $n+1$  Unbekannten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ . Ein solches System hat unendlich viele, also auch nichttriviale Lösungen.

- 3** Alle Basen eines Vektorraums  $V$  sind gleich lang.

Beweis:  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  sei die kürzeste Basis. Dann sind nach Satz **2** je  $n+1$  Vektoren von  $V$  linear abhängig. Also kann es keine längere Basis geben.

- 4 Je  $n$  linear unabhängige Vektoren eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums  $V$  bilden eine Basis.

Beweis:  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  sei linear unabhängig. Sei  $a$  ein beliebiger Vektor von  $V$ , dann ist nach Satz 2 die Menge  $\{b_1, b_2, \dots, b_n, a\}$  linear abhängig.

Es gibt also eine nichttriviale Nullsumme  $0 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n + \mu a$ .  $\mu$  ist sicher nicht 0, denn sonst gäbe es eine nichttriviale Nullsumme der  $b_i$ , entgegen der Voraussetzung. Also ist  $a$  darstellbar als Linearkombination der  $b_i$ .

#### Definition

Eine Teilmenge  $U \neq \{\}$  eines Vektorraums  $V$  mit den Verknüpfungen von  $V$  heißt **Untervektorraum**, wenn seine Elemente den Axiomen des Vektorraums genügen.

- 5 Eine Teilmenge  $U \neq \{\}$  eines Vektorraums  $V$  bildet einen Untervektorraum, wenn für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $a, b \in U$  gilt (1)  $a + b \in U$  und (2)  $\lambda a \in U$

Beweis: Die Axiome  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{D}_s$ ,  $\mathbf{D}_v$ ,  $\mathbf{A}_s$  und  $\mathbf{N}_s$  gelten in  $U$  automatisch, weil sie in  $V$  gelten.

Für  $\lambda = 0$  beziehungsweise  $\lambda = -1$  ergibt sich der Nullvektor beziehungsweise das Inverse von  $a$  in  $U$ .

Beispiel: Ist  $0 \neq a \in V$ , dann bildet die Menge aller Vielfachen von  $a$  einen Untervektorraum von  $V$ .

Beweis: (1)  $\mu_1 a + \mu_2 a = (\mu_1 + \mu_2) a \in V$   
 (2) ist nach Definition erfüllt.

#### Gruppe und Körper

Mit zunehmender Abstrahierung ist nicht nur der Vektor-Begriff, sondern auch der Zahl-Begriff verallgemeinert worden. In seiner »Linealen Ausdehnungslehre« beschreibt GRABMANN 1844 zum ersten Mal eine abstrakte Struktur, die man heute **kommutative Gruppe** nennt. GRABMANN versteht darunter eine nichtleere Menge  $G$ , für deren Elemente eine Verknüpfung (zum Beispiel als »+« geschrieben) definiert ist. Für diese Verknüpfung müssen die Axiome  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{I}$  gelten.

Beispiele für kommutative Gruppen:

- $\mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{R}$  mit der üblichen Addition als Verknüpfung
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit der üblichen Multiplikation als Verknüpfung
- geometrischer Vektorraum mit der Vektoraddition als Verknüpfung
- Menge der zentrischen Streckungen mit gleichem Zentrum und der Nacheinanderausführung als Verknüpfung
- Menge der Kongruenzabbildungen, die ein Quadrat auf dieses Quadrat abbilden mit der Nacheinanderausführung als Verknüpfung

1879 hat Richard DEDEKIND (Braunschweig 1831 bis 1916 Braunschweig) den Begriff **Körper** eingeführt als Verallgemeinerung von Zahlbereichen wie  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{R}$ , in denen

man mit zwei Verknüpfungen (zum Beispiel als »+« und »·« geschrieben) arbeiten kann. Ein Körper  $K$  enthält mindestens zwei Elemente, meist mit 0 und 1 bezeichnet, für ihn gilt:

- (1)  $K$  ist mit der Verknüpfung »+« eine kommutative Gruppe (neutrales Element 0)
- (2)  $K \setminus \{0\}$  ist mit der Verknüpfung »·« eine kommutative Gruppe (neutrales Element 1)
- (3) Für alle  $a, b, c \in K$  gilt das Distributivgesetz:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beispiele für Körper:

- $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{R}$  mit der üblichen Addition und Multiplikation als Verknüpfungen
- $\{0, 1\}$  mit den Regeln  $0 + 0 = 1 + 1 = 0$   
 $0 + 1 = 1 + 0 = 1$   
 $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$  und  $1 \cdot 1 = 1$

Man kann den Begriff des Vektorraums noch weiter verallgemeinern, wenn man bei der  $S$ -Multiplikation anstelle von  $\mathbb{R}$  einen anderen Körper  $K$  verwendet. Man spricht dann vom »Vektorraum  $V$  über dem Körper  $K$ «. Aber davon lassen wir besser die Finger!

## Aufgaben

### Modelle

1. Zeige: Für alle  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $a \in V$  gilt  
**a)**  $(-\mu) \cdot a = -(\mu \cdot a)$     **b)**  $\mu \cdot (-a) = -(\mu \cdot a)$     **c)**  $(-\mu) \cdot (-a) = \mu \cdot a$
2. Zeige: Für alle  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $a, b \in V$  gilt  $\mu \cdot (a - b) = \mu \cdot a - \mu \cdot b$
3. Warum ist die Menge aller Polynome von genau zweitem Grad (Koeffizient  $a_2 \neq 0$ ) kein Vektorraum mit den Verknüpfungen von  $V_3$ ?
4. Zeige:  $M = \{a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 \mid a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 2, 4\}$  ist ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit den Verknüpfungen von  $V_3$ .
5. Im arithmetischen Vektorraum  $\mathbb{R}^4$  sind gegeben  $a = (-1 \mid 3 \mid 2 \mid -4)$  und  $b = (2 \mid 7 \mid -1 \mid -3)$ . Berechne  $a + b$ ,  $5 \cdot a$ ,  $-b$ ,  $2 \cdot a - 3 \cdot b$ .
6. Sind folgende Mengen von Tripeln Vektorräume mit den Verknüpfungen von  $V_2$ ?  
**a)**  $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a = 2b \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$   
**b)**  $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a \leq b \leq c \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$   
**c)**  $M = \{(a \mid b \mid c) \mid ab = 0 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$   
**d)**  $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a = b = c \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$   
**e)**  $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a = b^2 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$   
**f)**  $M = \{(a \mid b \mid c) \mid k_1a + k_2b + k_3c = 0 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$   $k_i$  seien feste reelle Zahlen.

7.  $M$  sei die Menge aller Paare reeller Zahlen.  
 Zeige:  $M$  ist kein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ,  
 wenn die Verknüpfungen  $\gg\ll$  und  $\gg\cdot\ll$  so definiert werden:  
 a)  $(a|b) + (c|d) = (a+c|b+d)$ ,  $\mu \cdot (a|b) = (\mu \cdot a|b)$   
 b)  $(a|b) + (c|d) = (a|b)$ ,  $\mu \cdot (a|b) = (\mu \cdot a|\mu \cdot b)$   
 c)  $(a|b) + (c|d) = (a+c|b+d)$ ,  $\mu \cdot (a|b) = (\mu^2 \cdot a|\mu^2 \cdot b)$
8. Zeige: Die folgenden Mengen von Tripeln reeller Zahlen sind keine Vektorräume über  $\mathbb{R}$  mit den Verknüpfungen von  $\mathbf{V}_2$ :  
 a)  $M = \{(a|b|c) | a \geq 0\}$   
 b)  $M = \{(a|b|c) | a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$   
 c)  $M = \{(a|b|c) | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
9.  $M$  sei die Menge aller Paare reeller Zahlen.  
 Eine Verknüpfung  $\gg\ll$  sei durch  $(a|b) + (c|d) = (a+c|b+d)$ ,  
 eine Verknüpfung  $\gg\cdot\ll$  sei durch  $\mu \cdot (a|b) = (\mu \cdot a|0)$  definiert.  
 Zeige: In  $M$  sind bis auf  $N_5$  alle Axiome eines Vektorraums erfüllt.  
 Man kann daraus schließen, daß das Axiom  $N$  nicht aus den andern Axiomen folgt.  
 (Siehe auch nächste Aufgabe.)
10. In der Menge  $V \neq \{0\}$  sei eine Verknüpfung  $\gg\ll$  so definiert, daß  $V$  eine kommutative Gruppe ist. Als Verknüpfung  $\gg\cdot\ll$  sei definiert  $\mu \cdot a = 0$  für alle  $a \in V$  und  $\mu \in \mathbb{R}$ .  
 Zeige: Bis auf  $N_5$  sind alle Axiome des Vektorraums erfüllt.

### Basis und Dimension

1. a) Schreibe  $a = -3x^2 - 8x + 1$  als Linearkombination der Vektoren  
 $u = -4x^2 + x - 2$  und  $v = x^2 - 2x + 1$   
 aus dem Vektorraum der Polynome bis zum Grad 2.  
 b) Schreibe  $a = -3x^2 + x + 4$  als Linearkombination der Vektoren  
 $u = -2x^2 + 5x + 1$ ,  $v = -3x^2 + 2$  und  $w = x^2 + 3x$   
 aus dem Vektorraum der Polynome bis zum Grad 2.
2. Untersuche die folgenden Mengen von Vektoren aus dem Vektorraum der Polynome bis zum Grad 3 auf lineare Unabhängigkeit  
 a)  $\{1 - 4x + 2x^2 + 3x^3, -x^3 + 4x^2 + 2x + 1, 2 - x - 3x^2 + 5x^3\}$   
 b)  $\{3x^3 - 2x^2 - 5x + 1, 1 - 4x - 3x^2 + 4x^3, 9x^3 - 7x^2 - 7x + 2\}$
3. Zeige für den Vektorraum der  $n$ -Tupel:  
 a) Die Menge  $\{(1|0|\dots|0), (0|1|\dots|0), \dots, (0|0|\dots|1)\}$  ist linear unabhängig.  
 b) Nimmt man zur Menge von a) einen beliebigen Vektor hinzu, so wird sie linear abhängig. Gib ein Beispiel an.

4. Zeige: Die Vektoren  $a = (1|3|5)$ ,  $b = (0|-1|2)$  und  $c = (0|0|1)$  bilden eine Basis des Vektorraums der reellen Tripel.
5.  $a = (1|2|0)$ ,  $b = (-1|3|1)$  und  $c = (1|-13|-3)$  gehören dem Vektorraum  $V$  der reellen Tripel an.
- a) Ist  $\{a, b, c\}$  eine Basis von  $V$ ?
- b) Welche Bedingung müssen  $u, v$  und  $w$  erfüllen, damit der Vektor  $(u|v|w)$  als Linearkombination von  $a, b$  und  $c$  darstellbar ist?
6. Gib  $a = (-2|5|3)$  und  $b = (a|b|c)$  aus dem Vektorraum der reellen Tripel in Koordinatenschreibweise an bezüglich der Basis
- a)  $\{(1|0|0), (0|1|0), (0|0|1)\}$       b)  $\{(1|1|1), (1|1|0), (1|0|0)\}$
7.  $\{a, b, c\}$  sei eine Basis eines Vektorraums. Zum Vektor  $u = 7 \cdot a - 2 \cdot b - c$  wird der Vektor  $\mu \cdot v$  mit  $v = -3 \cdot a + 5 \cdot b + c$  addiert ( $\mu \in \mathbb{R}$ ). Für welchen  $\mu$ -Wert ist die  $a$ -Komponente von  $u + \mu \cdot v$  gleich null?
8.  $\{a, b, c\}$  sei eine Basis eines Vektorraums. Welcher vom Vektor  $u = 3 \cdot a + 4 \cdot b - 2 \cdot c$  linear abhängige Vektor hat die Komponente  $-2a$ ?
9. Berechne aus der Gleichung  $3 \cdot a + 5 \cdot b - 4 \cdot c = 0$  die Koordinaten der Vektoren:  $a$  bezüglich der Basis  $\{b, c\}$ ,  $b$  bezüglich der Basis  $\{a, c\}$ ,  $c$  bezüglich der Basis  $\{a, b\}$ .
10. a) Zeige:  $a = (1|2|1)$ ,  $b = (3|5|0)$  und  $c = (2|0|0)$  sind eine Basis des Vektorraums  $V$  der reellen Tripel.
- b) Berechne bezüglich der Basis  $\{a, b, c\}$  die Koordinaten des Vektors  $d = (0|-1|2)$ . Gib auch seine Komponenten an.
11. Bestimme die Taylorentwicklung der Funktion  $f$  mit dem Term  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 25x - 24$  an der Stelle  $x = 2$  sowie die Näherungen der Ordnungen 2, 1 und 0 von  $f(x)$  dort. Was bedeutet die Näherung 2. Ordnung?
12. Ist  $M = \{(a|a|b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  mit den Verknüpfungen von  $\mathbf{V}_2$  ein Vektorraum? Nenne gegebenenfalls eine Basis und die Dimension von  $M$ .
13. Es sind 3 Vektoren aus dem Vektorraum  $V$  der reellen Tripel gegeben. Prüfe nach, ob der von ihnen gebildete Vektorraum  $U$  der gesamte Vektorraum  $V$  ist. Welche Dimension hat  $U$ ?
- a)  $(1|4|-1), (3|-1|2), (2|0|1)$       b)  $(1|1|0), (0|1|1), (3|1|-2)$
14. Ist jedes Element des Vektorraums  $V$  der reellen Tripel darstellbar als Linearkombination der Elemente  $(1|4|2)$ ,  $(6|1|1)$  und  $(3|5|2)$ ?
15. Zeige: Die Vektormenge  $\{(1|1|1|1), (0|1|1|1), (0|0|1|1), (0|0|0|1)\}$  des Vektorraums  $V$  der reellen Quadrupel ist eine Basis von  $V$ .

16.  $U$  sei der Vektorraum, der von den Vektoren  $a = 2x^2 - 2x + 1$ ,  $b = 3x^2 - x + 4$  und  $c = x^2 - 7x - 7$  des Vektorraums  $V$  der Polynome bis zum Grad 2 gebildet wird. Gib eine Basis und die Dimension von  $U$  an.
17.  $U$  sei der Vektorraum, der von den Vektoren  $a = (1 \mid 5 \mid -3)$ ,  $b = (2 \mid 1 \mid -4)$  und  $c = (3 \mid -3 \mid -5)$  des Vektorraums  $V$  der reellen Tripel aufgespannt wird. Gib eine Basis und die Dimension von  $U$  an.
18. Untersuche, ob die folgenden Vektormengen eine Basis des Vektorraums  $V$  der reellen Tripel sind
- a)  $\{(2 \mid -1 \mid -3), (4 \mid 7 \mid 1)\}$       b)  $\{(1 \mid 0 \mid 5), (2 \mid 1 \mid -7), (-4 \mid -2 \mid 1), (6 \mid 0 \mid 3)\}$   
c)  $\{(1 \mid 0 \mid -1), (3 \mid 2 \mid 1), (-1 \mid -4 \mid -7)\}$       d)  $\{(1 \mid 2 \mid 1), (2 \mid 5 \mid 1), (3 \mid 4 \mid 5)\}$
19. Welche Dimension hat der Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$ , der aufgespannt wird von:
- a)  $\{(-3 \mid 2 \mid 3), (1 \mid -\frac{2}{3} \mid -1)\}$       b)  $\{(1 \mid 1 \mid 1), (2 \mid 3 \mid -2)\}$   
c)  $\{x^2 + 2x - 1, 2x^2 + 4x - 2\}$       d)  $\{x^2 - 4x + 3, -2x^2 + 5x + 1\}$
20. Untersuche, ob die angegebenen Mengen einen Vektorraum bilden. Nenne gegebenenfalls seine Dimension.
- a) Die Menge der Lösungen des Gleichungssystems  

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \quad \text{als Teilmenge von } \mathbb{R}^3$$
- b) Die Menge der Lösungen des Gleichungssystems  

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 9 \quad \text{als Teilmenge von } \mathbb{R}^3$$
21. a) Welche Dimension hat der Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$ :  $V = \{(a \mid b \mid 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  ?  
b) Zeige:  $\{u, v\}$  mit  $u = (2 \mid 5 \mid 0)$  und  $v = (0 \mid 1 \mid 0)$  ist eine Basis von  $V$ .
22. Untersuche auf lineare Abhängigkeit:
- a) Vektorraum der reellen Tripel:  $\{(2 \mid -5 \mid 0), (-1 \mid 3 \mid 7), (-6 \mid 1 \mid 1), (-3 \mid 4 \mid 9)\}$   
b) Vektorraum der Polynome bis zum Grad 2:  $\{2x, 2 - x^2, -3x^2 + x + 4, \frac{1}{2} - \sqrt{2}x\}$
23. Im Vektorraum  $V = \mathbb{R}^4$  sind die Vektoren  $u = (1 \mid 2a \mid 0 \mid 1)$ ,  $v = (a \mid 0 \mid 2a \mid 1)$  und  $w = (a \mid 1 \mid a \mid 0)$  gegeben.
- a) Für welche Werte von  $a$  ist  $\{u, v, w\}$  linear abhängig ?  
b) Wähle für  $a$  einen Wert so, daß die Menge  $\{u, v, w\}$  linear unabhängig ist und ergänze diese Vektormenge zu einer Basis des  $\mathbb{R}^4$ .
- 24. Zeige: Ist  $\{a, b\}$  eine Basis eines zweidimensionalen Vektorraums, so ist  $\{u, v\}$  mit  $u = \lambda \cdot a + \mu \cdot b$  und  $v = \sigma \cdot a + \tau \cdot b$  genau dann eine Basis, wenn  $\lambda\tau \neq \mu\sigma$  ist.

- 25. Die Menge  $M$  aller Linearkombinationen der Vektoren  $a = (x+1)^2$  und  $b = (x-1)^2$  aus dem Vektorraum der Polynome bis zum Grad 2 ist auch ein Vektorraum. Den Termen  $(x+1)^2$  und  $(x-1)^2$  sind durch  $x \mapsto (x+1)^2$  und  $x \mapsto (x-1)^2$  Funktionen mit den Gleichungen  $y = (x+1)^2$  und  $y = (x-1)^2$  zugeordnet, deren Graphen Parabeln sind.

a) Beschreibe die Graphen der Funktionen, die den Elementen von  $M$  zugeordnet werden können. Zeige, daß gilt: Es gibt

genau eine } Parabel(n) mit dem  $\begin{cases} x_s \neq \pm 1 \\ x_s = \pm 1 \wedge y_s \neq 0 \\ x_s = \pm 1 \wedge y_s = 0 \end{cases}$   
keine } Scheitel  $(x_s | y_s)$ , wenn  
unendlich viele }

b) Zeige: Durch Übergang zur neuen Basis  $\{a + b, a - b\}$  vereinfacht sich Aufgabe a).

c) Zu den Elementen des Vektorraums  $M$  gehören die Vektoren  $u = x^2 + 1$  und  $v = 2x^2 + 2$ . Warum ist  $\{u, v\}$  keine Basis von  $M$ ?

26. Zeige: Die Vektormenge  $\{(x-1)^2, x^2, (x+1)^2\}$  ist eine Basis des Vektorraums der Polynome bis zum Grad 2. Das heißt:  
Aus den Termen  $(x-1)^2, x^2$  und  $(x+1)^2$  der zugehörigen Parabeln läßt sich jeder Term  $ax^2 + bx + c$  der zugehörigen, beliebigen Parabel  $p$  durch Linearkombination erzeugen.

Stelle mit der Basis  $\{(x-1)^2, x^2, (x+1)^2\}$  den Term der Parabel dar, die die Gleichung  $y = x^2 + 2x + 2$  hat.

27. Jedem Vektor  $u = ax + b$  des Vektorraums der Polynome bis zum Grad 1 wird durch  $y = ax + b$  die Gleichung einer Gerade zugeordnet.

Man spricht von »Geradentermen«  $ax + b$ .

- a) Gib 2 Geraden an, deren Terme so beschaffen sind, daß sie eine Basis des Vektorraums bilden.  
b) Nenne 2 Geradenterme, bei denen diese Forderung nicht erfüllt ist.

28. Welche Dimension (in Abhängigkeit von  $\mu \in \mathbb{R}$ ) hat der Vektorraum aller Linearkombinationen der Vektoren  $a, b, c$  und  $d$  aus  $\mathbb{R}^4$ .

a)  $a = (1 | 1 | 0 | 0), b = (0 | 0 | 1 | 1), c = (1 | 1 | 1 | \mu^2), d = (1 | \mu^2 | 1 | \mu)$

b)  $a = (0 | 2 | 4 | 1), b = (-2 | \mu | 4\mu | 1), c = (0 | -\mu | -3 | 0), d = (1 | 0 | 1 | 1)$

29.  $a = (1 | -1 | 2), b = (0 | 2 | 1), c = (1 | 3 | 4), d = (1 | 1 | 0)$

Bestimme die Dimension des Vektorraums

a) aller Linearkombinationen von  $a, b, c$  ( $V_a$ )

b) aller Linearkombinationen von  $d$  ( $V_b$ )

c)  $V_a \cap V_b$

30.  $a = (1 | -1 | 1), b = (1 | \mu | \mu), \mu \in \mathbb{R}$ . Ergänze  $\{a, b\}$  zu einer Basis von  $\mathbb{R}^3$ .  
Für welche Werte von  $\mu$  ist die Aufgabe nicht lösbar?

### Sätze

1.  $a = (2 \mid -1 \mid -4)$  und  $b = (-3 \mid 0 \mid 2)$  spannen den Untervektorraum  $U$  des Vektorraums  $V$  der reellen Tripel auf.
  - a) Welche Dimension hat  $U$ ?
  - b) Welche der folgenden Vektoren gehören  $U$  an:  
 $u = (0 \mid -3 \mid -8)$ ,  $v = (-1 \mid -1 \mid 3)$ ,  $w = (1 \mid 0 \mid 0)$
  
2. Zeige:  
 $p = (1 \mid -5/7 \mid 3)$  ist auf mehrere Arten darstellbar als Linearkombination von  $a = (2 \mid -1 \mid 4)$ ,  $b = (-3 \mid 0 \mid 1)$  und  $c = (-4 \mid -1 \mid 6)$ . (Siehe Satz 1)
  
3. Zeige:
  - a) Jede Obermenge einer linear abhängigen Vektormenge ist linear abhängig.
  - b) Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Vektormenge ist linear unabhängig.
  
4. Zeige: Sind  $a$  und  $b$  Vektoren des Vektorraums  $V$ ,  
dann ist  $U := \{\lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$  ein Untervektorraum von  $V$ .  
Welche Dimension kann  $U$  haben?
  
5. Untersuche, ob mit den Verknüpfungen von  $V_2$  die folgenden Tripelmengen Untervektorräume des Vektorraums  $V$  der reellen Tripel sind:
  - a)  $M = \{(a \mid b \mid 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
  - b)  $M = \{(a \mid b \mid c) \mid a + b + c = 0 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$
  - c)  $M = \{(a \mid b \mid 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
  - d)  $M = \{(2a \mid 0 \mid 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
  - e)  $M = \{(a - b \mid a + b \mid a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
  - f)  $M = \{(4a \mid 3a \mid a^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$
  
6. Zeige: Die Schnittmenge von Untervektorräumen eines Vektorraums  $V$  ist wieder ein Untervektorraum von  $V$ .  
Gib ein Beispiel dafür an, daß dieser Satz für die Vereinigung von Untervektorräumen nicht gilt.
  
7. Sei  $V$  der Vektorraum der Polynome bis zum Grad 2. Zeige, daß die folgenden Mengen Untervektorräume bilden, und gib jeweils eine Basis und die Dimension an:
  - a) Menge aller Polynome bis zum Grad 2 mit der Nullstelle 0.
  - b) Menge aller Polynome bis zum Grad 2 mit den Nullstellen 0 und 1.
  - c) Menge aller Polynome bis zum Grad 3 mit den Nullstellen 0, 1 und -1.
  
8. Beweise den Satz oder gib ein Gegenbeispiel an:  
Wenn die Menge von Vektoren  $\{a, b, c \mid a, b, c \neq 0\}$  linear abhängig ist, dann ist  $c$  darstellbar als Linearkombination von  $a$  und  $b$ .
  
9. Es sei  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  linear unabhängig, aber  $\{a_1, a_2, \dots, a_m, b\}$  linear abhängig.  
Zeige:  $b$  läßt sich darstellen als Linearkombination der  $a_i$ .

10. Zeige: Ist  $\{b_1, b_2, b_3\}$  eine Basis eines dreidimensionalen Vektorraums  $V$ , dann ist auch  $\{b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3, b_2 + \sigma b_3, b_3\}$  eine Basis von  $V$  mit beliebigen reellen Konstanten.

11. a) Zeige: Im Vektorraum der Funktionen über  $\mathbb{R}$  sind die Funktionen mit dem Termen  $f(x) = 1$   
 $g(x) = \sin x$   
 $h(x) = \cos x$  linear unabhängig.

b) Sind im Vektorraum der Funktionen über  $\mathbb{R}$  die folgenden Funktionen linear unabhängig?  $f(x) = 1$   
 $g(x) = (\sin x)^2$   
 $h(x) = (\cos x)^2$

### Gruppe und Körper

1. Zeige: Legt man in der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen beziehungsweise in der Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen die gewöhnliche Addition und Multiplikation als Verknüpfungen » + « und » · « zugrunde, so kann als Vektorraum aufgefaßt werden:  
 a)  $\mathbb{R}$  über  $\mathbb{R}$       b)  $\mathbb{R}$  über  $\mathbb{Q}$       c)  $\mathbb{Q}$  über  $\mathbb{Q}$   
 Warum ist  $\mathbb{Q}$  kein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ?

2. Gib für die Vektorräume, wenn möglich, die Dimension und eine Basis an:  
 a)  $\mathbb{Q}$  über  $\mathbb{Q}$       b)  $\mathbb{R}$  über  $\mathbb{R}$       c)  $\mathbb{R}$  über  $\mathbb{Q}$

3. Zeige: Im Vektorraum  $\mathbb{R}$  über  $\mathbb{Q}$  sind linear unabhängig  
 a) die Vektoren  $1$  und  $\sqrt{2}$       b) die Vektoren  $1, \sqrt{2}$  und  $\sqrt{3}$

4.  $G$  sei die Gruppe der Kongruenzabbildungen, die ein Quadrat auf dieses Quadrat abbilden mit der Nacheinanderausführung als Verknüpfung.  
 Wieviel Elemente hat  $G$ ?

5.  $V$  sei der Vektorraum der Tripel über dem Körper  $\{0;1\}$  (siehe *Gruppe und Körper*)  
 a) Gib alle seine Vektoren an.  
 b) Welcher Vektor  $x$  ist Lösung der Gleichung?  
 $\alpha) x + x = 0$        $\beta) x + (1 | 0 | 1) = (0 | 1 | 0)$

6. Restklassenkörper modulo 3  
 Zeige: Die Menge  $\{0; 1; 2\}$  bildet einen Körper, wenn man die Verknüpfungen so definiert:  
 $a + b = \text{Rest von } (a+b) \text{ bei Division durch } 3,$   
 $a \cdot b = \text{Rest von } (a \cdot b) \text{ bei Division durch } 3.$

## VII. Geraden im Raum

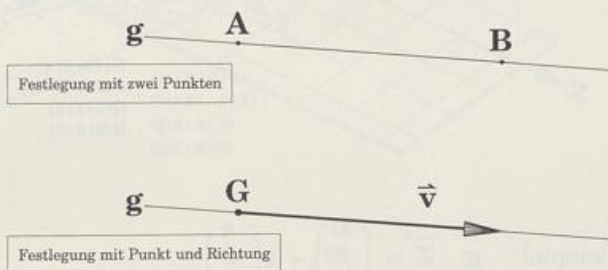
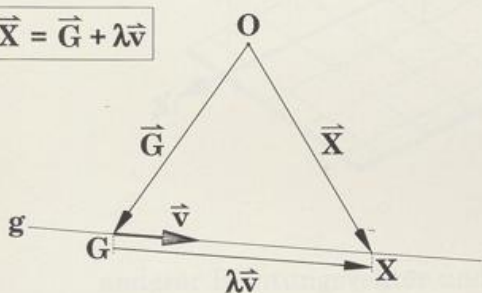


## 1. Geradengleichung

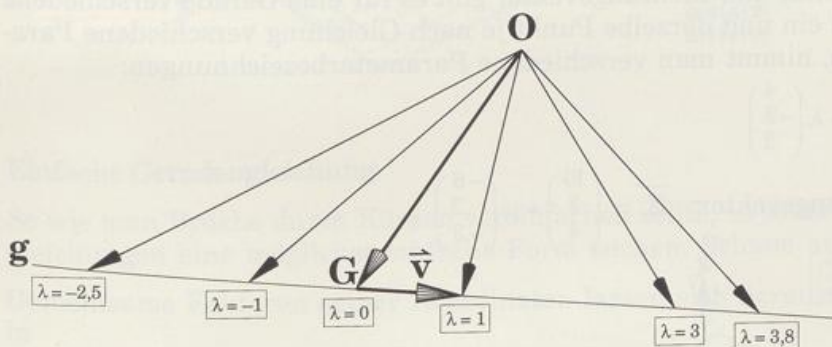
In der Analytischen Geometrie löst man geometrische Probleme durch Rechnung. Deshalb muß man die geometrischen Figuren wie Geraden und Ebenen mit Gleichungen beschreiben. Zur Aufstellung einer Geradengleichung braucht man die **Bestimmungsstücke** der Gerade:

- zwei Punkte A und B  
oder
- einen Punkt G und einen Vektor  $\vec{v}$  in Richtung der Gerade.

$$\vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{v}$$



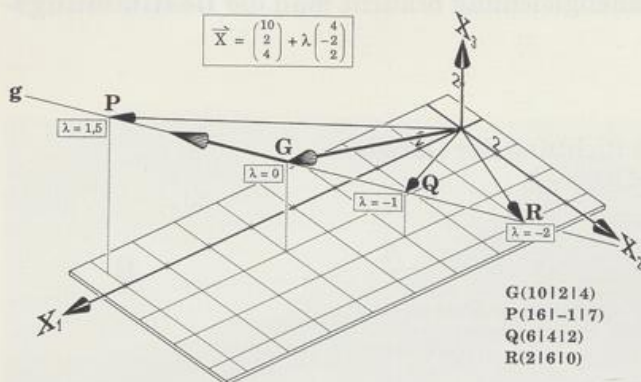
Eine Geradengleichung beschreibt die Ortsvektoren  $\vec{X}$  aller Geradenpunkte. Für diese Beschreibung eignet sich die Festlegung durch Punkt und Richtung am besten: Man wählt einen Punkt G der Gerade g als **Aufpunkt** und einen Vektor  $\vec{v}$  in Richtung von g als **Richtungsvektor**. Der Ortsvektor  $\vec{X}$  eines beliebigen Geradenpunkts X läßt sich dann darstellen als Summe von  $\vec{G}$  und einem Vielfachen von  $\vec{v}$ :  $\vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{v}$ . Der Faktor  $\lambda$  heißt **Parameter** des Punkts X. Durchläuft der Parameter  $\lambda$  alle reellen Zahlen, so beschreibt die Gleichung alle Punkte der Gerade; bildlich gesehen tastet dann die Spitze des Ortsvektors  $\vec{X}$  alle Geradenpunkte ab.



### Zusammenfassung

Ist G ein beliebiger Punkt der Gerade g und  $\vec{v}$  ein Vektor in Richtung g, dann nennt man  $g: \vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}$  eine Gleichung von g. G heißt Aufpunkt,  $\vec{v}$  Richtungsvektor und  $\lambda$  Parameter der Geradengleichung.

Man nennt eine solche Geradengleichung auch Parameterform oder Punkt-Richtungs-Form. Sie ist freilich nur sinnvoll, solange  $\vec{v}$  nicht der Nullvektor ist. Die Bedingung  $\lambda \in \mathbb{R}$  läßt man aus Bequemlichkeit meist weg.



Beispiel:  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0: \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, G(10|2|4)$  liegt auf  $g$  (klar!)

$\lambda = 1,5: \vec{X} = \begin{pmatrix} 16 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, P(16|-1|7)$  liegt auf  $g$

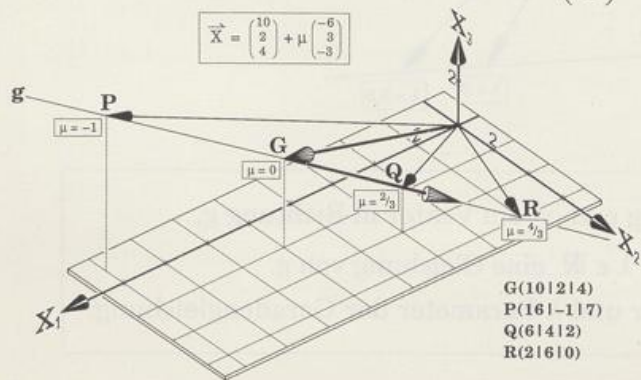
$\lambda = -1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, Q(6|4|2)$  liegt auf  $g$

$\lambda = -2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, R(2|6|0)$  liegt auf  $g$ .

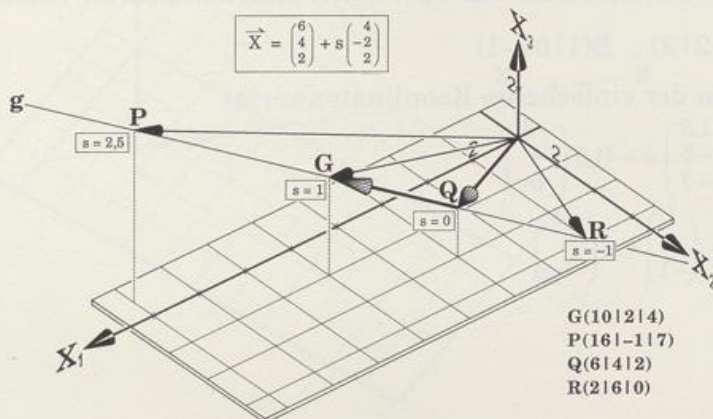
Je nach Wahl von Aufpunkt und Richtungsvektor gibt es für eine Gerade verschiedene Gleichungen. Weil dann ein und derselbe Punkt je nach Gleichung verschiedene Parameterwerte haben kann, nimmt man verschiedene Parameterbezeichnungen:

Beispiel:  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

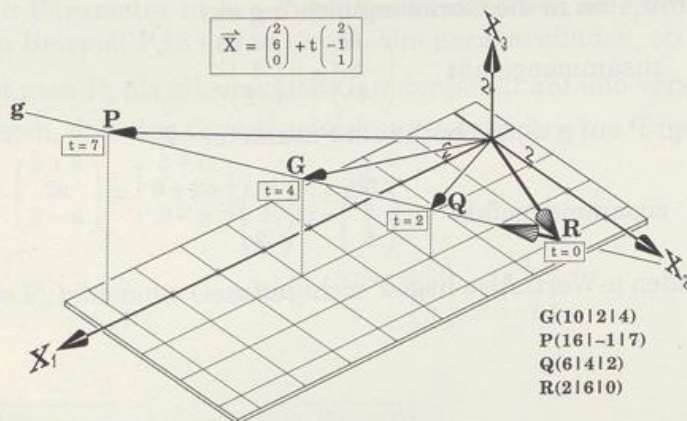
anderer Richtungsvektor:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$



anderer Aufpunkt:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$



anderer Richtungsvektor und anderer Aufpunkt:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



### Einfache Geradengleichung

So wie man Brüche durch Kürzen vereinfachen sollte, so sollte man auch bei Geradengleichungen eine möglichst einfache Form suchen. Schaue auf den Richtungsvektor!

Gemeinsame Faktoren seiner Koordinaten lassen sich herausziehen, zum Beispiel  $-3$  in

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{einfacher} \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geometrisch bedeutet das den Übergang zu einem kollinearen Richtungsvektor. Beim Ortsvektor des Aufpunkts ist dieses Verfahren im allgemeinen verboten! Man würde dadurch die Gerade ja parallel verschieben.

### Gerade durch zwei Punkte

Sind von der Gerade  $h$  zwei Punkte  $A$  und  $B$  bekannt, so wählt man einen davon als Aufpunkt. Als Richtungsvektor nimmt man  $\overrightarrow{AB}$  oder einen dazu kollinearen Vektor:

Gegeben:  $A(-0,5|2|2)$ ,  $B(1|0|-1)$

Aufpunkt:  $B$  (wegen der einfacheren Koordinatenwerte)

Richtung:  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = -0,5 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Gleichung:  $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

### Punkt auf Gerade ?

Liegen die Punkte  $P(-6|-5|5)$  und  $Q(14|0|7)$  auf der Gerade  $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ?

Wir setzen die Punktkoordinaten in die Geradengleichung ein

$$P: \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{zusammengefaßt} \quad \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\mu = -2$ , paßt! Also liegt  $P$  auf  $g$  und gehört zum Parameter  $-2$ .

$$Q: \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{zusammengefaßt} \quad \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Es gibt keinen passenden  $\mu$ -Wert. Also liegt  $P$  nicht auf  $g$ .

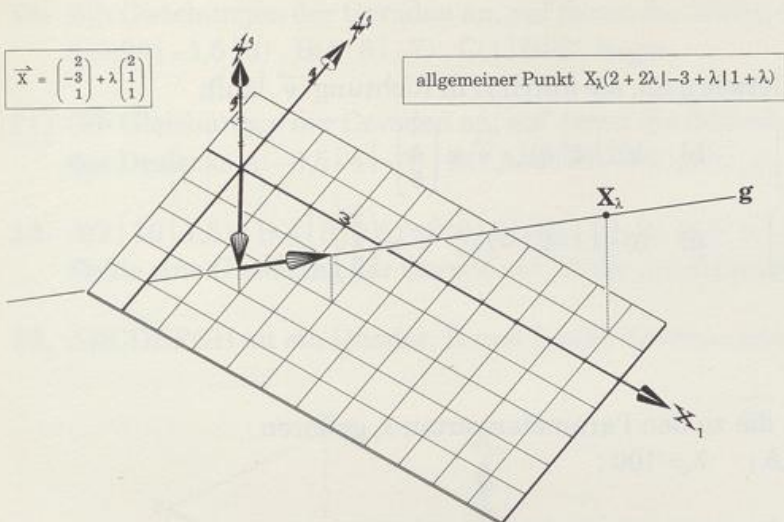
### Allgemeiner Geradenpunkt

Manchmal ist es nützlich, mit dem »**allgemeinen Geradenpunkt**« zu arbeiten. Sein Ortsvektor ergibt sich, wenn man die rechte Seite der Geradengleichung zusammenfaßt. So hat von

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{der allgemeine Punkt } X_\lambda \text{ den Ortsvektor } \overrightarrow{X}_\lambda = \begin{pmatrix} 2+2\lambda \\ -3+\lambda \\ 1+\lambda \end{pmatrix}$$

Mit dem allgemeinen Punkt findet man zum Beispiel bequem den Punkt  $P$  auf  $g$ , der 5 Einheiten über der  $x_1x_2$ -Ebene liegt. Für ihn gilt  $x_3 = 5$ , also  $1 + \lambda = 5$ . Der Punkt hat den

Parameterwert  $\lambda = 4$ ; eingesetzt in  $\overrightarrow{X}_\lambda$  ergibt sich  $\overrightarrow{X}_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Ergebnis:  $P(10|1|5)$

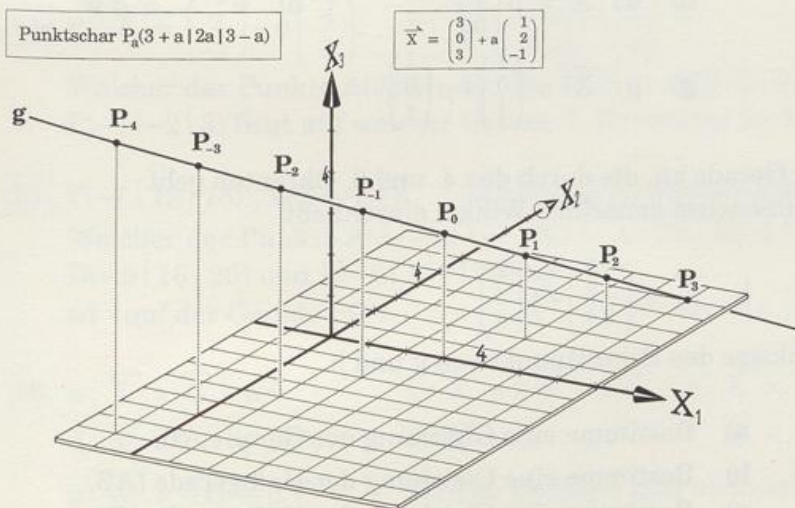


### Punktschar

Kommt ein Parameter in den Punktkoordinaten vor, so spricht man von einer Punktschar, zum Beispiel  $P_a(3+a | 2a | 3-a)$ . Um herauszufinden, ob die Schar  $P_a$  eine Gerade bildet, faßt man  $P_a$  als allgemeinen Geradenpunkt auf und versucht, den Ortsvektor  $\vec{P}_a$  so zu zerlegen, daß eine Geradengleichung entsteht:

$$\vec{P}_a = \begin{pmatrix} 3+a \\ 2a \\ 3-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+a \\ 0+2a \\ 3-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Punkte  $P_a$  bilden die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$



## Aufgaben

1. Gib eine Gleichung der Gerade  $g$  an, die durch  $A$  in Richtung  $\vec{v}$  läuft:

a)  $A(0|3|1)$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$       b)  $A(2|4|6)$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

c)  $A(0|0|0)$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$       d)  $A(-1|-2|-7)$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

2.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechne die Punkte  $P_i$ , die zu den Parameterwerten  $\lambda_i$  gehören  
 $\lambda_1=1$ ;  $\lambda_2=0$ ;  $\lambda_3=-1,5$ ;  $\lambda_4=100$ ;

3. Stelle die Gleichung der Gerade  $g$  auf, die durch  $A(1|2|3)$  geht und parallel ist zur

a)  $x_1$ -Achse      b)  $x_3$ -Achse      c) Gerade  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

4. Gib Gleichungen der drei Koordinatenachsen an.

5. Gib Gleichungen der Geraden an, die die Winkel zwischen  $x_1$ -Achse und  $x_3$ -Achse halbieren.

6. Beschreibe die besondere Lage der Geraden im Koordinatensystem. Zeichnung im Koordinatensystem für a) bis d)!

a)  $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$       b)  $b: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c)  $c: \vec{X} = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$       d)  $d: \vec{X} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$       e)  $e: \vec{X} = \sigma \vec{w}$

f)  $f: \vec{X} = \vec{F} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$       g)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

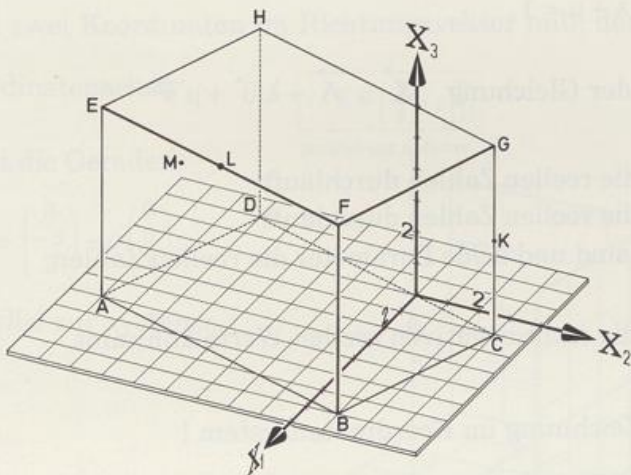
7. Gib eine Gleichung der Gerade an, die durch den 4. und 6. Oktanten geht und mit jeder Koordinatenachse denselben Winkel einschließt.

8.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$ ,       $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Überlege dir an einer Skizze den Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ .

9.  $A(1|2|3)$ ,  $B(5|6|7)$
- a) Bestimme eine Gleichung der Gerade  $AB$ .  
 b) Bestimme eine Gleichung der Halbgerade  $[AB]$ .  
 c) Bestimme eine Gleichung der Halbgerade  $AB]$ .  
 d) Bestimme eine Gleichung der Strecke  $[AB]$ .

10. Gib Gleichungen der Geraden an, auf denen die Seiten des Dreiecks  $A(0,25 | -1,5 | 3)$ ,  $B(4 | 6 | -7)$ ,  $C(1 | 0 | 2)$  liegen.
11. Gib Gleichungen der Geraden an, auf denen die Seitenhalbierenden  $s_a$ ,  $s_b$  und  $s_c$  des Dreiecks  $A(-5,5 | 4 | -3)$ ,  $B(7,5 | 0 | 9)$ ,  $C(11,5 | 2 | 9)$  liegen.
12.  $A(2 | 10 | 1,5)$ ,  $B(4 | 8 | 0,5)$ ,  $C(6 | 6 | -2)$ ,  $D(-8 | 4 | 0)$  ist ein Tetraeder. Stelle eine Gleichung der Gerade auf, in der die Schwerlinie liegt, die durch D geht.
13. ABCDEFGH ist ein Quader; K und L sind Kantenmitten, M ist Flächenmitte.



Lies die Koordinaten aus dem Bild ab und gib Gleichungen der Geraden an:

- a) EF und FG      b) BE und BG      c) DF und AG  
d) CM und BM      e) KL und LM

14.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Welcher der Punkte  $A(3 | 2 | -5)$ ,  $B(-1 | 2 | 3)$ ,  $C(2 | 0 | 5)$ ,  $D(1 | 1 | 1)$  und  $E(-1 | -2 | 3)$  liegt auf welcher Gerade? Zeichnung im Koordinatensystem!

15.  $P(-7 | 12 | 18)$ ,  $Q(3 | -8 | 8)$  Zeichnung im Koordinatensystem!

Welcher der Punkte  $A(4 | -10 | 7)$ ,  $B(1 | -4 | 10)$ ,  $C(-1 | 0 | -12)$ ,  $D(-9 | 16 | 20)$  und  $E(-6 | 10 | 17)$  liegt

- a) auf der Gerade PQ?      b) auf der Strecke [PQ]?

- 16. a:  $\vec{X} = \vec{G} + \mu \vec{v}$       b:  $\vec{X} = 2\vec{G} + \mu \vec{v}$       c:  $\vec{X} = \vec{G} + \mu \cdot 2\vec{v}$   
d:  $\vec{X} = 2\vec{G} + \mu \cdot 2\vec{v}$       e:  $\vec{X} = \vec{G} - \mu \vec{v}$       f:  $\vec{X} = -\vec{G} + \mu \vec{v}$   
g:  $\vec{X} = -\vec{G} - \mu \vec{v}$       Welche Geraden sind identisch im Fall  
a)  $G \neq O$ ,  $\vec{G}, \vec{v}$  nicht parallel      b)  $G \neq O$ ,  $\vec{G}$  parallel  $\vec{v}$

17.  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$  beschreiben dieselbe Gerade.

- Welchen  $\mu$ -Wert hat der Punkt für  $\lambda = 1$  ?
- Welchen  $\lambda$ -Wert hat der Punkt für  $\mu = -2$  ?
- Welche Beziehung besteht zwischen  $\lambda$  und  $\mu$  eines Geradenpunkts ?

• 18. Wie bewegt sich der Punkt X mit dem Ortsvektor  $\vec{X} = \frac{\vec{A} + \mu \vec{B}}{1 + \mu}$ , wenn  $\mu$  alle erlaubten reellen Zahlen durchläuft ?

19. Zeige: Ein Punkt P mit dem Ortsvektor  $\vec{P} = \lambda \vec{A} + \mu \vec{B}$  liegt genau dann auf der Gerade AB, wenn gilt:  $\lambda + \mu = 1$ .

• 20. Welche Punktmenge wird von der Gleichung  $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$  ( $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ ) beschrieben, wenn

- $\lambda$  konstant ist, während  $\mu$  die reellen Zahlen durchläuft
- $\mu$  konstant ist, während  $\lambda$  die reellen Zahlen durchläuft
- $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  linear abhängig sind und beide Parameter die reellen Zahlen durchlaufen
- $\lambda$  konstant ist, während  $\mu$  die nicht negativen reellen Werte annimmt.

21.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  Zeichnung im Koordinatensystem !

- Welcher Punkt von  $g$  liegt 2 Einheiten vor der  $x_2x_3$ -Ebene ?
- Welche Punkte von  $g$  haben von der  $x_1x_3$ -Ebene den Abstand 8 ?
- Welche Punkte von  $g$  liegen 1 Einheit unter der  $x_1x_2$ -Ebene ?

22. Auf der Gerade durch  $A(12 | 24 | 36)$  und  $B(12 | 42 | 63)$  liegen die Mittelpunkte von Kugeln mit Radius 12.

- Zwei Kugeln berühren die  $x_1x_3$ -Ebene. Berechne die Mittelpunkte und die Berührungspunkte.
- Wo berühren die Kugeln die  $x_2x_3$ -Ebene ?

23. Kugeln mit Radius 23 rollen auf der Gerade  $r$  auf der  $x_2x_3$ -Ebene;  $r$  geht durch  $P(0 | 5 | 6)$  und  $Q(0 | 6 | 5)$ . Wo liegen die Kugelmittelpunkte ?

24.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A(a_1 | a_2 | 8)$ ,  $B(-12 | k | -k)$ ,  $C(c | 1 | 1)$ ,  $D(2k | -3k | k)$ ,  $E(4k - 3 | 1 | 2k)$

Berechne die fehlenden Koordinaten in A bis E so, daß diese Punkte auf  $g$  liegen.

25. Liegen die Punkte  $P_a$  auf einer Gerade? Stelle gegebenenfalls eine Gleichung

der Gerade auf.

a)  $P_a(1+2a \mid 2-7a \mid -1-2a)$

b)  $P_a(3a-2 \mid 4 \mid -6a)$

c)  $P_a(a \mid 1 \mid 0)$

d)  $P_a(1+a \mid 1-a \mid a+1)$

e)  $P_a(a^2 \mid a \mid a+1)$

f)  $P_a(\frac{2}{a} \mid 0 \mid \frac{1}{a})$

## 2. Lage im Koordinatensystem

### Parallel zu einer Koordinatenachse

Sind zwei Koordinaten im Richtungsvektor null, dann ist die Gerade parallel zu einer Koordinatenachse.

So ist die Gerade f:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

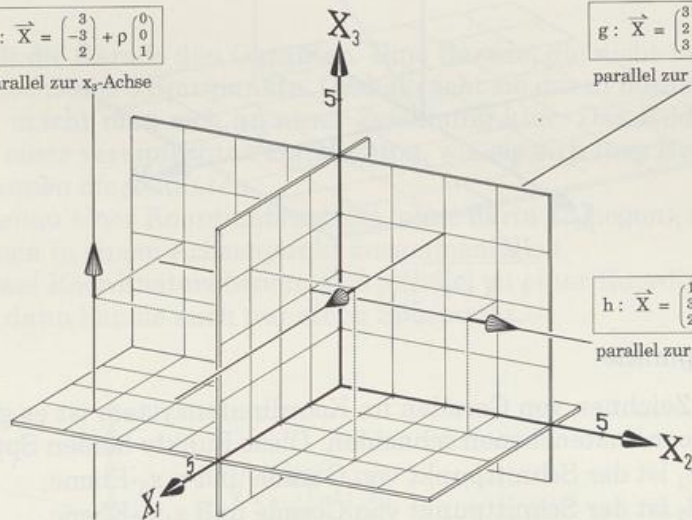
parallel zur  $x_3$ -Achse.

$$f: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

parallel zur  $x_3$ -Achse

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

parallel zur  $x_1$ -Achse



$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

parallel zur  $x_2$ -Achse

### Parallel zu einer Koordinatenebene

Ist eine Koordinate im Richtungsvektor null, dann ist die Gerade parallel zu einer Koordinatenebene.

Die Gerade c:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist parallel zur  $x_1x_3$ -Ebene.

$$a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

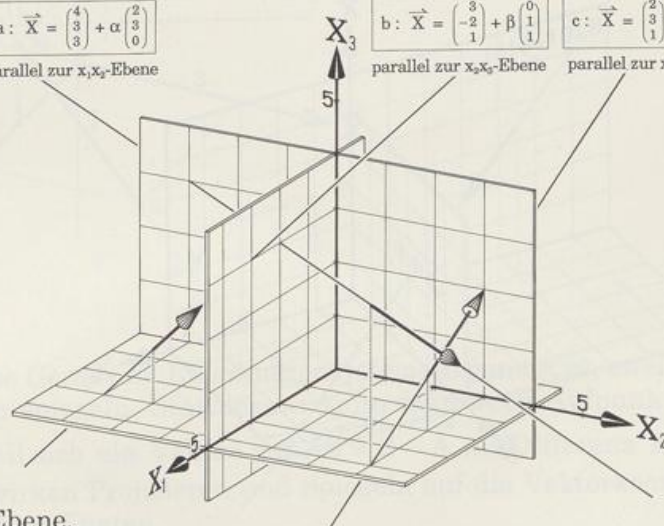
parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene

$$b: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

parallel zur  $x_2x_3$ -Ebene

$$c: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

parallel zur  $x_1x_3$ -Ebene



Die Gerade f:

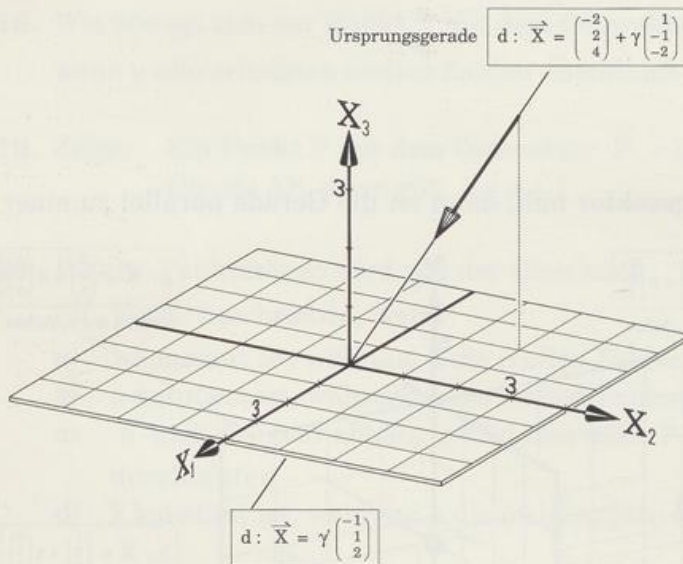
$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist parallel zur  $x_2x_3$ - und  $x_1x_3$ -Ebene.

## Ursprungsgerade

Ist der Ortsvektor des Aufpunkts ein Vielfaches des Richtungsvektors, dann geht die Gerade durch den Ursprung, zum Beispiel

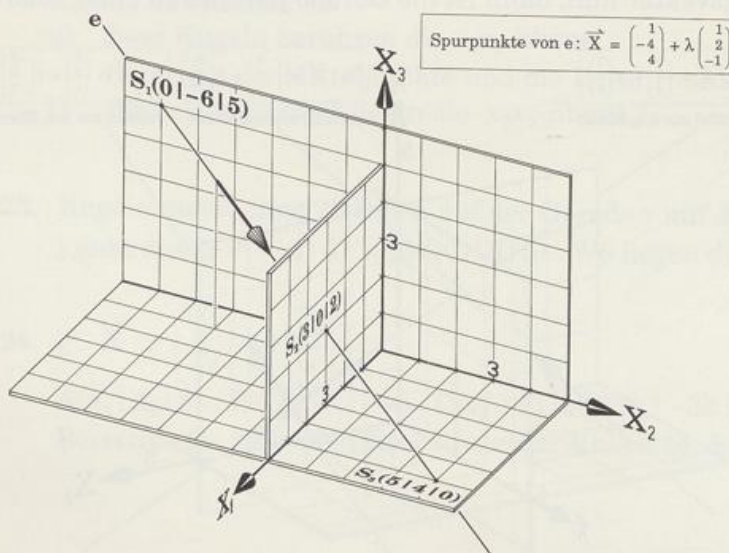
$$d: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ einfachere Gleichung } d: \vec{X} = \gamma' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



## Spurpunkte

Fürs Zeichnen von Geraden im Koordinatensystem ist es gut zu wissen, wo die Geraden die Koordinatenebenen schneiden. Diese Punkte heißen Spurpunkte  $S_i$ :

- $S_1$  ist der Schnittpunkt von Gerade und  $x_2x_3$ -Ebene,
- $S_2$  ist der Schnittpunkt von Gerade und  $x_1x_3$ -Ebene,
- $S_3$  ist der Schnittpunkt von Gerade und  $x_1x_2$ -Ebene,



Die Berechnung der Spurpunkte  $S_i$  ist recht einfach:

Setze die  $i$ -te Koordinate im allgemeinen Geradenpunkt gleich null und berechne den zugehörigen Parameterwert. Beispiel

$$e: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ allgemeiner Geradenpunkt } \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 + \mu \\ -4 + 2\mu \\ 4 - \mu \end{pmatrix}$$

$$S_1(0 | ? | ?)$$

$$x_1 = 0$$

$$1 + \mu = 0$$

$$\mu = -1$$

$$S_1(0 | -6 | 5)$$

$$S_2(? | 0 | ?)$$

$$x_2 = 0$$

$$-4 + 2\mu = 0$$

$$\mu = 2$$

$$S_2(3 | 0 | 2)$$

$$S_3(? | ? | 0)$$

$$x_3 = 0$$

$$4 - \mu = 0$$

$$\mu = 4$$

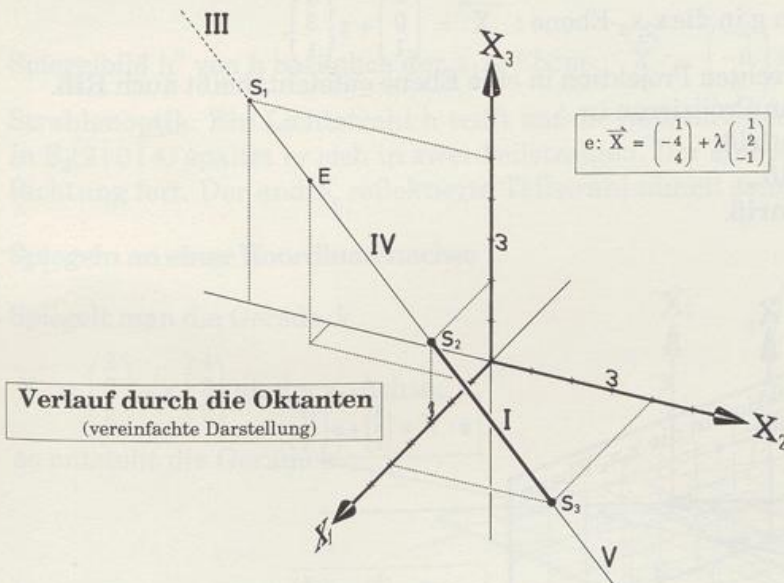
$$S_3(5 | 4 | 0)$$

### Verlauf durch die Oktanten

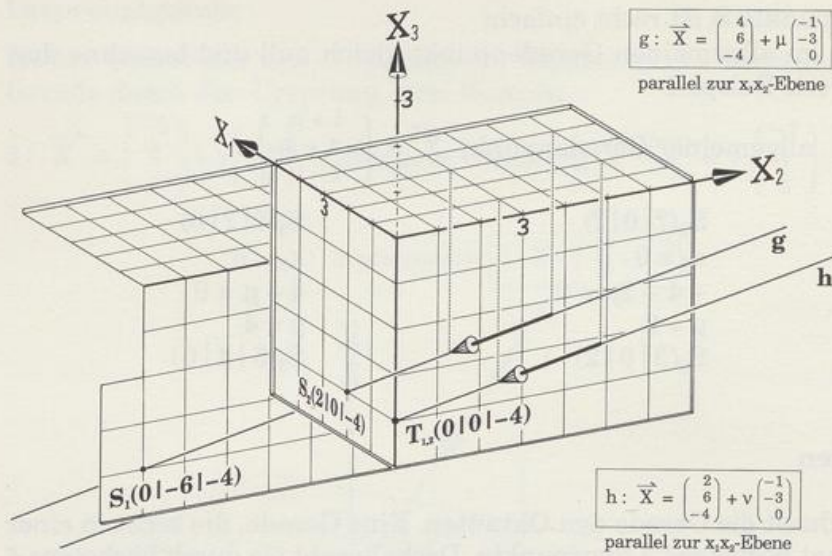
An jedem Spurpunkt wechselt die Gerade den Oktanten. Eine Gerade, die nicht in einer Koordinatenebene liegt, hat höchstens 3 Spurpunkte. Deshalb geht sie durch höchstens 4 Oktanten. Welche das sind, macht man sich an einer Zeichnung klar. Das Bild zeigt wieder die Gerade  $e$ , aber in einer vereinfachten Darstellung, wie sie sich fürs Heft eignet. Die römischen Ziffern nennen die Oktanten.

Ist eine Gerade parallel zu genau einer Koordinatenebene (ohne darin zu liegen), so hat sie 2 Spurpunkte. Diese können in einem Achsenpunkt zusammenfallen.

Ist eine Gerade parallel zu zwei Koordinatenebenen, also parallel zu einer Koordinatenachse (ohne darin zu liegen), dann hat sie auch nur einen Spurpunkt.



Projiziert oder spiegelt man eine Gerade im Koordinatensystem, so genügt es, zwei ihrer Punkte zu projizieren oder zu spiegeln. Stattdessen kann man auch Aufpunkt und Richtungsvektor nehmen. Weil sich ein Vektor  $\vec{v} = \overrightarrow{AE} = \vec{E} - \vec{A}$  als Differenz zweier Ortsvektoren schreiben lässt, wirken Projizieren und Spiegeln auf die Vektorkoordinaten genau so wie auf die Punktkoordinaten.



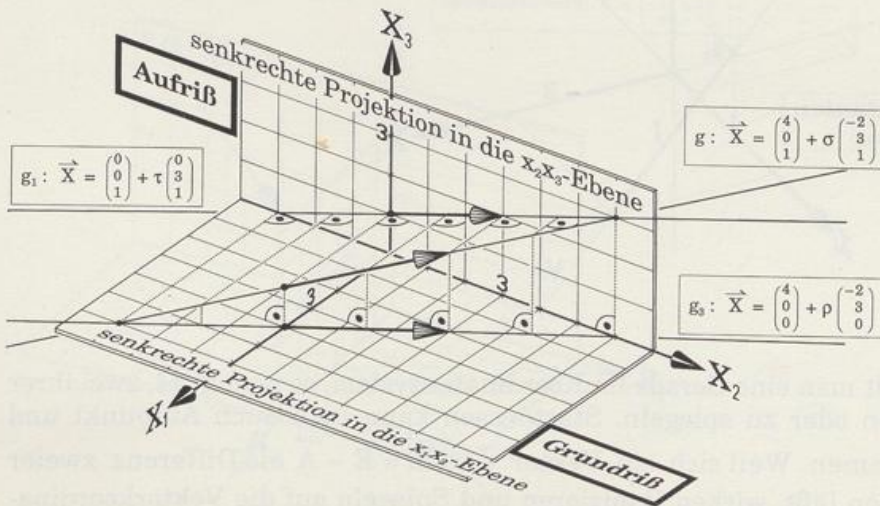
### Senkrechte Projektion in eine Koordinatenebene

Projiziert man die Gerade  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  senkrecht in die  $x_2x_3$ -Ebene, so entsteht die Gerade  $g_1$ ; die Bestimmung ihrer Gleichung ist recht einfach: Setze die 1. Koordinate im Aufpunkt und im Richtungsvektor gleich null.

Senkrechte Projektion  $g_1$  von  $g$  in die  $x_2x_3$ -Ebene:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Das Bild, das bei einer senkrechten Projektion in eine Ebene entsteht, heißt auch **Riß**. So entsteht beim senkrechten Projizieren in

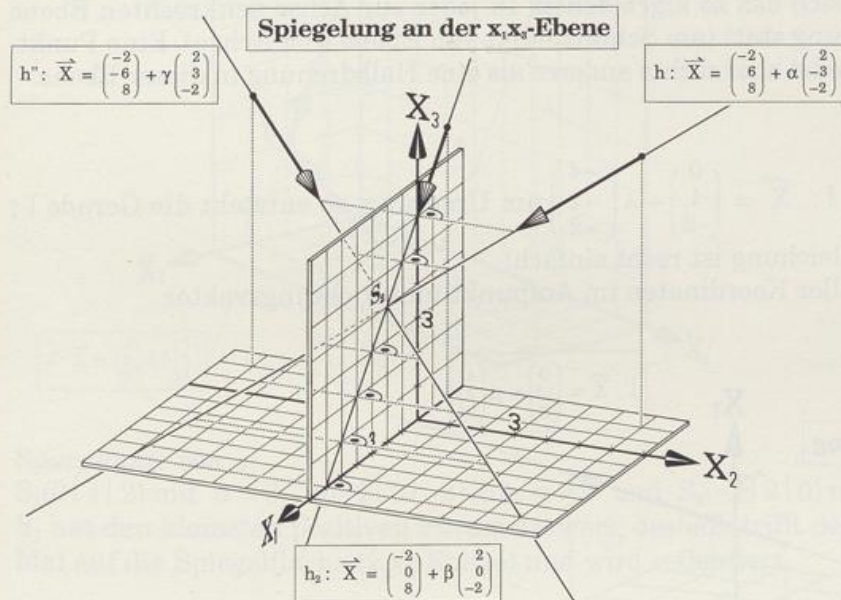
- die  $x_1x_2$ -Ebene der **Grundriß**,
- die  $x_2x_3$ -Ebene der **Aufriß**,
- die  $x_1x_3$ -Ebene der **Seitenriß**.



### Spiegeln an einer Koordinatenebene

Spiegelt man die Gerade  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$  an der  $x_1x_3$ -Ebene,

so entsteht die Gerade  $h''$ ; die Bestimmung ihrer Gleichung ist recht einfach:  
Ändere das Vorzeichen der 2. Koordinate im Aufpunkt und Richtungsvektor.



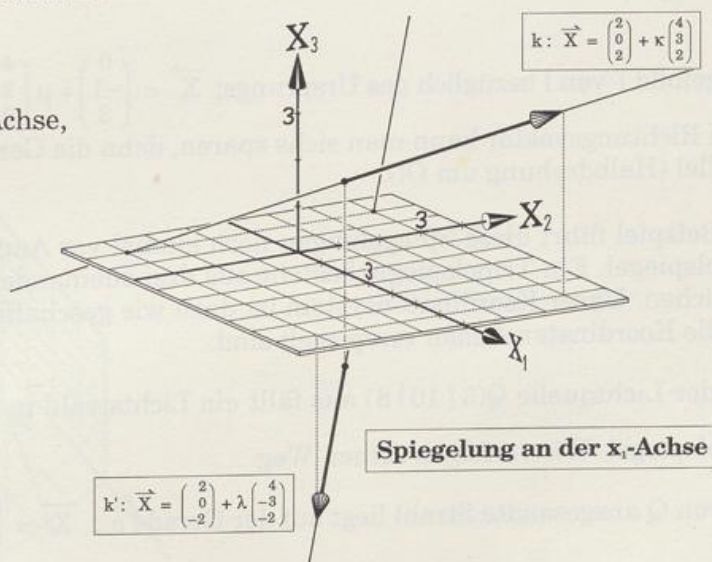
Spiegelbild  $h''$  von  $h$  bezüglich der  $x_1x_3$ -Ebene:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Das erinnert an die Strahlenoptik: Ein Lichtstrahl  $h$  trifft auf die halbdurchlässige Fläche der  $x_1x_3$ -Ebene. In  $S_2(2|0|4)$  spaltet er sich in zwei Teilstrahlen. Der eine setzt seinen Weg in der alten Richtung fort. Der andere, reflektierte Teilstrahl nimmt seinen Weg auf  $h''$ .

### Spiegeln an einer Koordinatenachse

Spiegelt man die Gerade  $k$ :

$\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  an der  $x_1$ -Achse,

so entsteht die Gerade  $k'$ ;



die Bestimmung ihrer Gleichung ist recht einfach:

Ändere die Vorzeichen der 2. und 3. Koordinate im Aufpunkt und Richtungsvektor.

Spiegelbild  $k'$  von  $k$  bezüglich der  $x_1$ -Achse:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

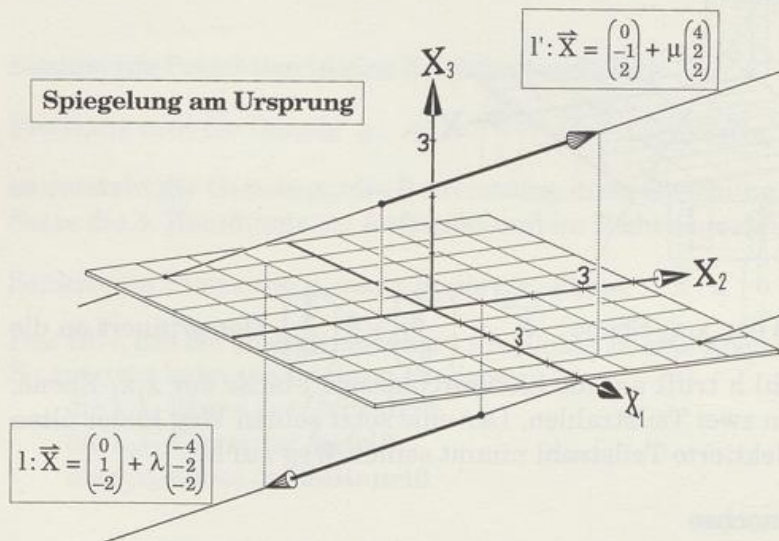
Die Spiegelung an einer Achse im Raum ist gleichbedeutend mit einer Halbdrehung um diese Achse. Man kann sich das so klarmachen: In jeder zur Achse senkrechten Ebene findet eine Punktspiegelung statt (am Schnittpunkt von Ebene und Achse). Eine Punktspiegelung in einer Ebene ist aber nichts anderes als eine Halbdrehung in dieser Ebene.

### Spiegeln am Ursprung

Spiegelt man die Gerade  $l: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  am Ursprung, so entsteht die Gerade  $l'$ ;

die Bestimmung ihrer Gleichung ist recht einfach:

Ändere die Vorzeichen aller Koordinaten im Aufpunkt und Richtungsvektor.



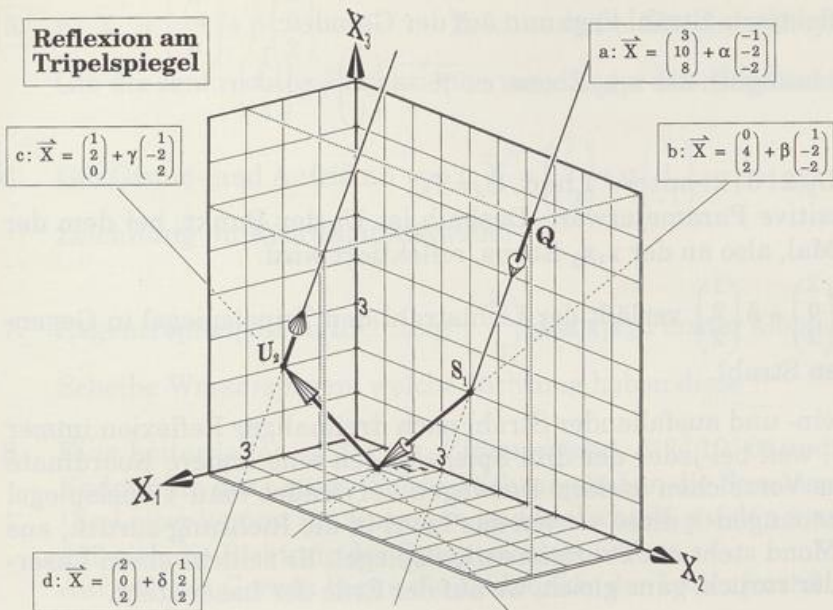
Spiegelbild  $l'$  von  $l$  bezüglich des Ursprungs:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Beim Richtungsvektor kann man sich sparen, denn die Gerade und ihr Spiegelbild sind parallel (Halbdrehung um O!).

Ein Beispiel führt diese Spiegelungen noch einmal vor Augen: Reflexion des Lichts am Tripelspiegel. Ein Tripelspiegel besteht aus drei zueinander senkrechten, ebenen Spiegelflächen. Unser Koordinatensystem ist dazu wie geschaffen, wenn wir uns vorstellen, daß die Koordinatenebenen verspiegelt sind.

Von der Lichtquelle  $Q(3 | 10 | 8)$  aus fällt ein Lichtstrahl in Richtung  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  auf den Tripelspiegel. Wir verfolgen seinen Weg.

Der von  $Q$  ausgesandte Strahl liegt auf der Gerade  $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ .



**Spurpunkte von a:**

$S_1(0|4|2)$  mit  $\alpha = 3$ ,  $S_2(-2|0|-2)$  mit  $\alpha = 5$  und  $S_3(-1|2|0)$  mit  $\alpha = 4$ .

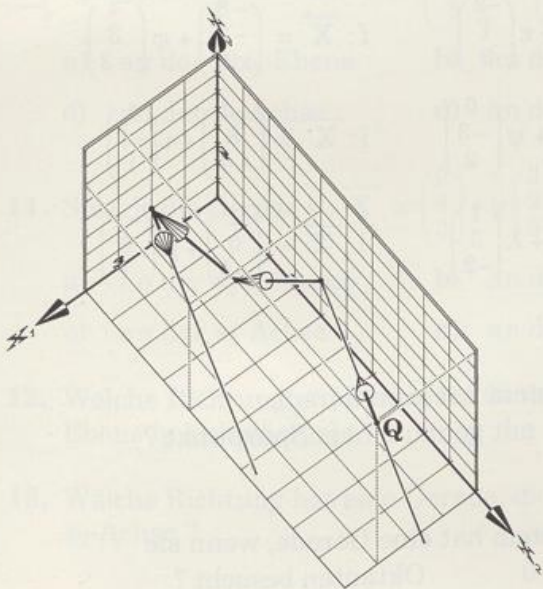
$S_1$  hat den kleinsten positiven Parameterwert; deshalb trifft der Strahl dort zum ersten Mal auf die Spiegelfläche ( $x_2x_3$ -Ebene) und wird reflektiert.

Der reflektierte Strahl liegt auf der Gerade b. b ist das Spiegelbild von a bezüglich der

$x_2x_3$ -Ebene. Als Aufpunkt von b nehmen wir  $S_1$ , b:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

**Spurpunkte von b:**

$T_1(0|4|2)$  mit  $\beta = 0$ ,  $T_2(2|0|-2)$  mit  $\beta = 2$  und  $T_3(1|2|0)$  mit  $\beta = 1$ .  $T_3$  liegt  $T_1$  am nächsten, deshalb wird der Strahl bei  $T_3$  gespiegelt (jetzt an der  $x_1x_2$ -Ebene).



Der zum zweiten Mal reflektierte Strahl liegt nun auf der Gerade c.

c ist das Spiegelbild von b bezüglich der  $x_1x_2$ -Ebene.  $c: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Spurpunkte von c:

$U_1(0|4|-2)$  mit  $\gamma = -1$ ,  $U_2(2|0|2)$  mit  $\gamma = 1$  und  $U_3 = T_3$ .

$\gamma = 1$  ist der kleinste positive Parameterwert. Deshalb ist  $U_2$  der Punkt, bei dem der Lichtstrahl zum dritten Mal, also an der  $x_1x_3$ -Ebene, reflektiert wird.

Auf der Gerade d:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  verläßt der Lichtstrahl den Tripelspiegel in Gegenrichtung zum einfallenden Strahl.

Beim Tripelspiegel sind ein- und ausfallender Strahl nach dreimaliger Reflexion immer entgegengesetzt parallel, weil bei jeder der drei Spiegelungen eine andere Koordinate des Richtungsvektors das Vorzeichen ändert. Deswegen verwendet man Tripelspiegel bei Rückstrahlern (»Katzenaugen«); diese werfen das Licht in die Richtung zurück, aus der es kommt. Auf dem Mond steht ein Präzisionstripelspiegel. Er schickt einen Laserblitz jedem seiner Absender zurück, ganz gleich, wo auf der Erde der Laser steht.

## Aufgaben

1. Gib eine Gleichung der Gerade g durch  $P(1|-2|3)$  an, für die gilt:

- a) g ist parallel zur  $x_2$ -Achse      b) g ist parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene  
c) g ist parallel zur  $x_2x_3$ -Ebene      d) g geht durch den Ursprung.

Zeichnung im Koordinatensystem !

2. Bestimme die Spurpunkte und den Oktantenverlauf der Geraden a bis l:

$$a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b: \vec{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c: \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad f: \vec{X} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} + \psi \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad i: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + \iota \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$j: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad k: \vec{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ -21 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad l: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeichnung im Koordinatensystem !

3. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat eine Gerade

- a) mit genau zwei Spurpunkten?      b) mit genau einem Spurpunkt?  
c) mit keinem Spurpunkt?

4. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat eine Gerade, wenn sie

- a) 3      b) 2      c) 1      d) 0      Oktanten besucht?

5.  $r: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  Zeichnung im Koordinatensystem !

Gib die senkrechten Projektionen von  $r$  in die drei Koordinatenebenen an.

6. Gib Grund- und Aufriß an von  $s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Zeichnung im Koordinatensystem!

7. Regentropfen, die in Richtung  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  ans  $x_1x_3$ -Fenster klopfen, hinterlassen auf der Scheibe Wasserspuren; welche Richtung haben diese ?

8. Eine Leiter lehnt an der  $x_2x_3$ -Zimmerwand,  $A(2 | 10 | 0)$  und  $B(0 | 10 | 10)$  sind die Endpunkte der Leiter. Welche Richtung haben die Sprossen ?  
Die Leiter kommt ins Rutschen und klatscht so auf den  $x_1x_2$ -Fußboden, daß sich die Richtung der Sprossen nicht ändert.  
Auf welcher Gerade liegen die Endpunkte der Leiter jetzt ?

9.  $t_3$  ist Grundriß,  $t_1$  ist Aufriß der Gerade  $t$ . Gib eine Gleichung von  $t$  an:

a)  $t_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t_3: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• b)  $t_3: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, t_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zeichnung im Koordinatensystem !

In der Darstellenden Geometrie sind Geraden gewöhnlich in Grund- und Aufriß (als Zeichnung) gegeben.

10. Spiegle die Gerade  $u: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  Zeichnung im Koordinatensystem !

- a) an der  $x_1x_3$ -Ebene      b) an der  $x_1x_2$ -Ebene  
c) an der  $x_3$ -Achse      d) an der  $x_1$ -Achse      e) am Ursprung.

11. Spiegle die Gerade  $v: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \chi \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  Zeichnung im Koordinatensystem !

- a) an der  $x_1x_3$ -Ebene      b) an der  $x_1x_2$ -Ebene  
c) an der  $x_3$ -Achse      d) an der  $x_1$ -Achse      e) am Ursprung.

12. Welche Richtung(en) kann eine Gerade haben, wenn sie bei Spiegelung an der  $x_1x_2$ -Ebene in sich übergeht ?

13. Welche Richtung hat eine Gerade, die parallel ist zu ihrem Spiegelbild bezüglich der  $x_2$ -Achse ?

- 14. Die  $x_1x_3$ -Ebene und die  $x_2x_3$ -Ebene seien Spiegelebenen, die  $x_1x_2$ -Ebene sei durchsichtig, also keine Spiegelebene. Auf welcher Gerade verläßt ein Lichtstrahl diesen Winkelspiegel, wenn er von  $Q(9 | 4 | 3)$  in Richtung  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$  einfällt?

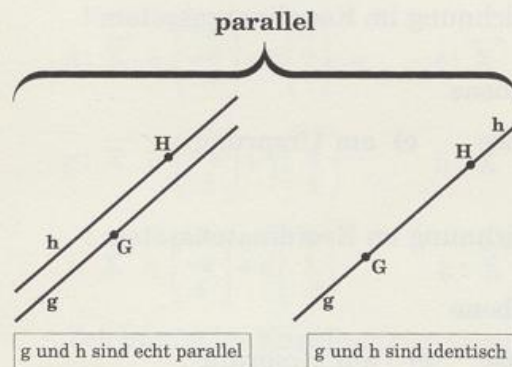
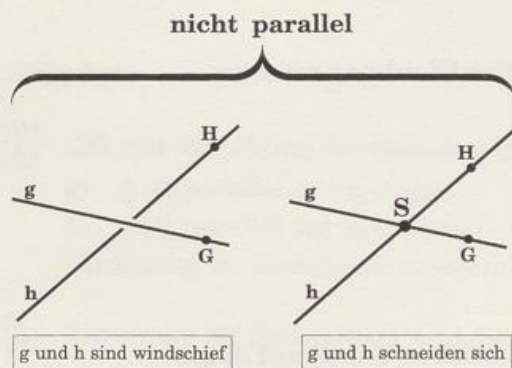
- 15. Das Koordinatensystem sei ein Tripelspiegel.

Von  $Q(4 | 5 | 2)$  fällt ein Lichtstrahl in Richtung  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ein.

Berechne eine Gleichung der Gerade, auf der er den Spiegel verläßt.  
Zeichnung im Koordinatensystem !

### 3. Lage zweier Geraden

Für die Lage zweier Geraden im Raum gibt es vier typische Fälle:



Welcher Fall vorliegt, kann man anhand der Geradengleichungen entscheiden. Zuerst schaut man auf die Richtungsvektoren.

$$g: \vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{u} \qquad h: \vec{X} = \vec{H} + \mu \vec{v}$$

## Parallel

Sind die Richtungsvektoren kollinear, dann sind die Geraden parallel oder sogar identisch. Liegt G auf h (beziehungsweise H auf g), so sind g und h identisch, andernfalls echt parallel.

Man kann auch den Verbindungsvektor  $\overrightarrow{GH}$  der Aufpunkte berechnen und mit den Richtungsvektoren der Geraden vergleichen. Ist er dazu kollinear, so sind g und h identisch, andernfalls echt parallel.

## Nicht parallel

Sind die Richtungsvektoren nicht kollinear, dann schneiden sich die Geraden oder sie sind windschief. Für den Schnittpunkt S gilt

$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{G} + \lambda_s \overrightarrow{u} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{S} = \overrightarrow{H} + \mu_s \overrightarrow{v}$$

also  $\overrightarrow{G} + \lambda_s \overrightarrow{u} = \overrightarrow{H} + \mu_s \overrightarrow{v}$ , »Gleichsetzen der Geraden«

$\lambda_s$  und  $\mu_s$  sind die Lösungen des 3,2-Gleichungssystems

$$\overrightarrow{G} + \lambda \overrightarrow{u} = \overrightarrow{H} + \mu \overrightarrow{v}$$

(den Index s lassen wir einfachheitshalber weg)

Sind g und h windschief, so ergibt sich ein Widerspruch beim Lösen des Gleichungssystems.

1. Beispiel:  $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

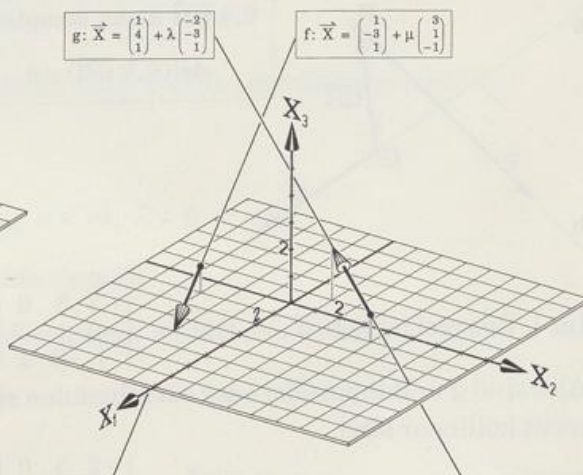
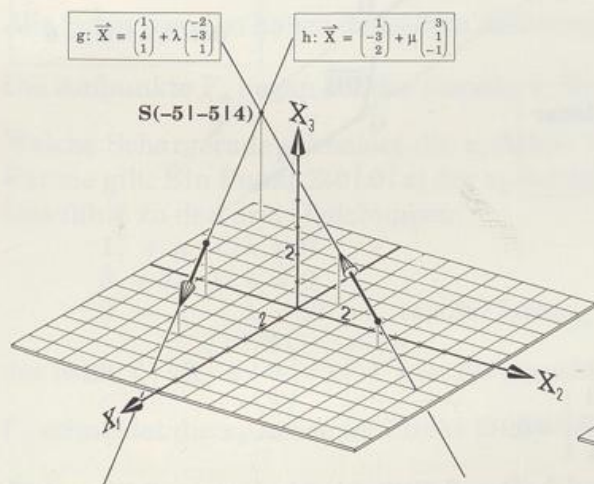
Gleichsetzen I  $1 - 2\lambda = 1 + 3\mu$

II  $4 - 3\lambda = -3 + \mu$

III  $1 + \lambda = 2 - \mu$

und Auflösen ergibt  $\lambda = 3, \mu = -2$ .

S berechnet man, indem man  $\lambda$  in die Gleichung für g oder  $\mu$  in die Gleichung für h einsetzt:  $S(-5 | -5 | 4)$



2. Beispiel:  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, f: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gleichsetzen

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 1 - 2\lambda = 1 + 3\mu \\ \text{II} \quad 4 - 3\lambda = -3 + \mu \\ \text{III} \quad 1 + \lambda = 1 - \mu \end{array}$$

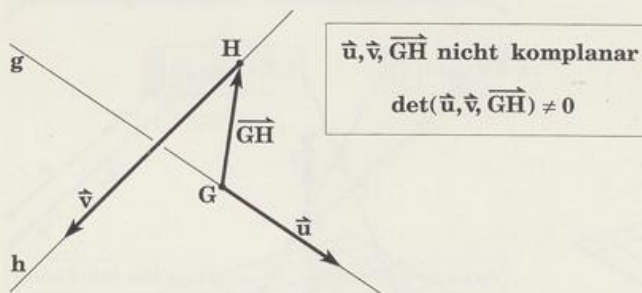
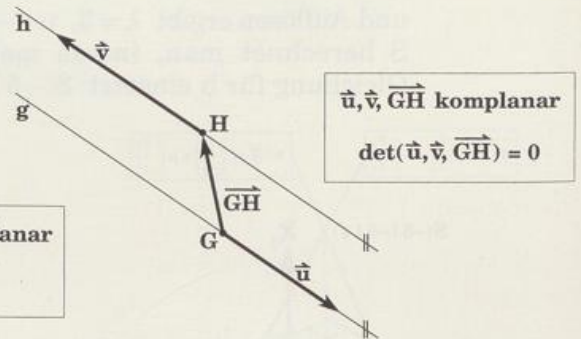
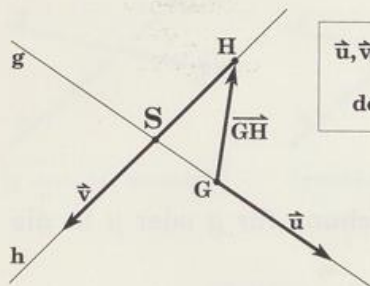
und Auflösen ergibt einen Widerspruch. Das System hat keine Lösung, das heißt, es gibt keinen Schnittpunkt S: Die Geraden sind windschief.

Falls man das Verfahren »Gleichsetzen der Geraden« auf parallele Geraden anwendet, ergibt sich beim Lösen des Gleichungssystems auch ein Widerspruch. Wendet man es auf identische Geraden an, so ergeben sich  $\infty^1$  Lösungen.

### Determinanten-Verfahren

Zwei Geraden sind genau dann windschief, wenn sie nicht in einer Ebene liegen. Gleichbedeutend damit ist, daß ihre Richtungsvektoren und der Aufpunkt-Verbindungsvektor nicht komplanar sind. Darüber gibt die Determinante schnell Auskunft:

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ und } h \text{ sind windschief} \\ g \text{ und } h \text{ schneiden sich} \\ g \text{ und } h \text{ sind echt parallel} \\ g \text{ und } h \text{ sind identisch} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{GH}) = 0$$



Im 1. Beispiel ist  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{GH}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ .

Also sind g und h parallel oder sie schneiden sich. Parallelität scheidet aus, weil  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  nicht kollinear sind.

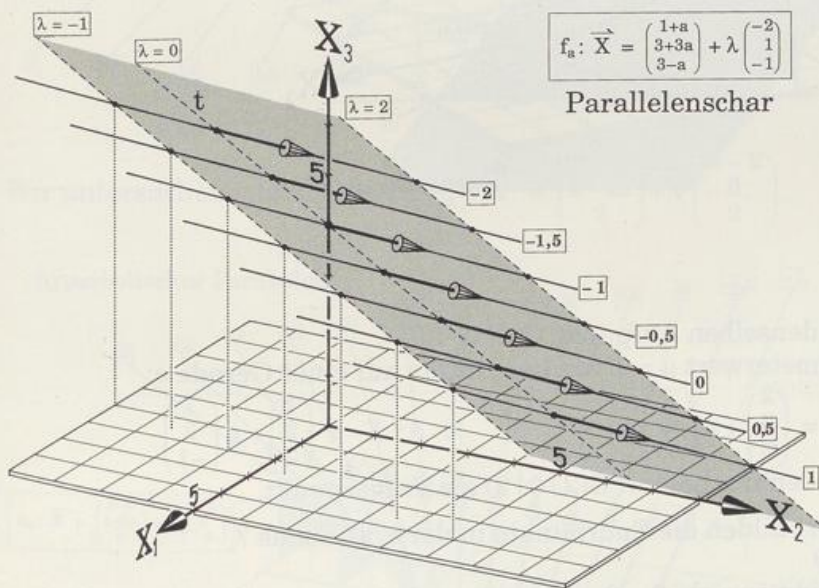
Im 2. Beispiel ist  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{GH}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ . g und h sind windschief!

## Geradenscharen

Kommt in einer Geradengleichung außer dem Geradenparameter (zum Beispiel  $\lambda$ ) noch ein Parameter (zum Beispiel  $a$ ) vor, dann beschreibt die Gleichung eine Geradenschar. Zu jedem **Scharparameter**  $a$  gehört eine Gerade der Schar. Man kann nun bei einer Schar Wünsche äußern, sich zum Beispiel Geraden mit bestimmten Eigenschaften herauspicken oder den Ort von Punkten mit bestimmten Eigenschaften bestimmen. Wir behandeln die einfachen Fälle:  $a$  tritt nur linear auf.

- Scharparameter nur im Aufpunkt

$$f_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 3+3a \\ 3-a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Alle Schargeraden haben denselben Richtungsvektor:  $f_a$  ist eine Parallelschar.

Die Aufpunkte  $F_a$  liegen auf der Gerade:  $t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Welche Schargerade schneidet die  $x_3$ -Achse?

Für sie gilt: Ein Punkt  $Z(0|0|z)$  der  $x_3$ -Achse ist auch Punkt einer Schargerade  $f_a$ .

Das führt zu den drei Gleichungen:

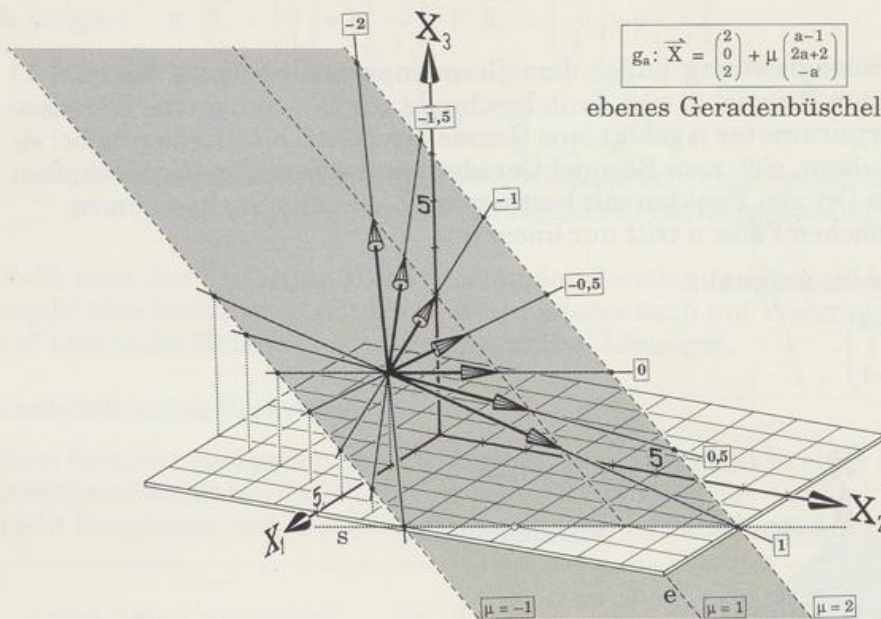
$$\begin{aligned} 1 + a - 2\lambda &= 0 \\ 3 + 3a + \lambda &= 0 \\ 3 - a - \lambda &= z \end{aligned} \quad \text{mit der Lösung } a = -1, \lambda = 0, z = 4,$$

das heißt  $f_{-1}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ist die gesuchte Gerade,

$f_{-1}$  schneidet die  $x_3$ -Achse im Punkt  $Z(0|0|4)$  mit dem Parameterwert  $\lambda = 0$ .

- Scharparameter nur im Richtungsvektor

$$g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a-1 \\ 2a+2 \\ -a \end{pmatrix}$$



Alle Schargeraden haben denselben Aufpunkt  $G(2|0|2)$ .

Die Punkte, die zum Parameterwert  $\mu = 1$  gehören, liegen auf einer Gerade e:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} a-1 \\ 2a+2 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$g_a$  ist also ein ebenes Geradenbüschel mit  $G(2|0|2)$  als Trägerpunkt.

Welchen geometrischen Ort bilden die Spurpunkte in der  $x_1x_2$ -Ebene?

Aus  $x_3 = 0$  folgt  $2 - \mu a = 0$

$a = 0$ : es ergibt sich der Widerspruch  $2 = 0$ , das heißt,  
 $g_0$  hat keinen Spurpunkt in der  $x_1x_2$ -Ebene,  
 $g_0$  ist also echt parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene.

$a \neq 0$ :  $\mu = \frac{2}{a}$  eingesetzt in  $g_a$  liefert den geometrischen Ort der

$$\text{Spurpunkte } \vec{S}_{3a} = \begin{pmatrix} 4 - 2/a \\ 4 + 4/a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{a} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0$$

Der geometrische Ort ist die »Gerade« s mit der Gleichung

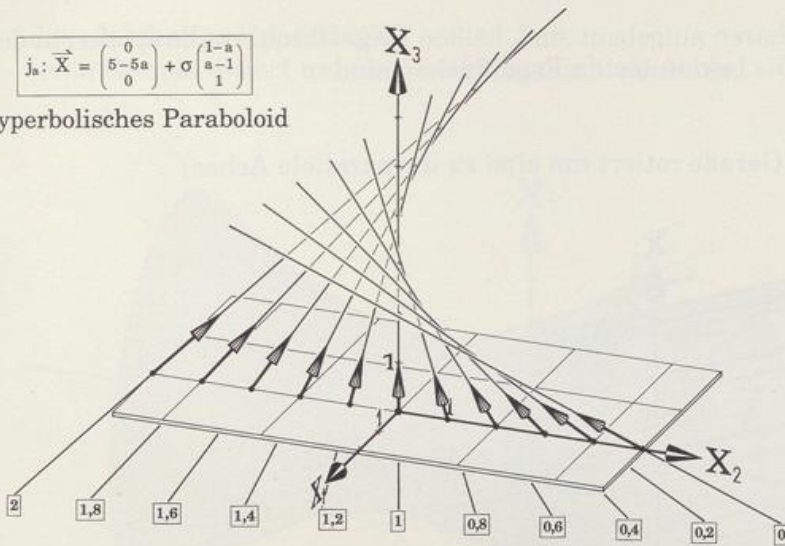
$$s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ohne den Aufpunkt } (4|4|0), \text{ weil } \alpha = \frac{1}{a} \text{ nicht null sein kann.}$$

- Scharparameter im Aufpunkt und im Richtungsvektor

Auch solche Scharen bilden meist eine Fläche im Raum. Sie sind allerdings nicht mehr eben, sondern wie ein Sattel in zwei Richtungen gekrümmt, zum Beispiel die Schar  $j_a$  (siehe Bild, Aufgabe 23.). Die Mathematiker haben solchen Flächen den exotischen Namen *hyperbolisches Paraboloid* gegeben.

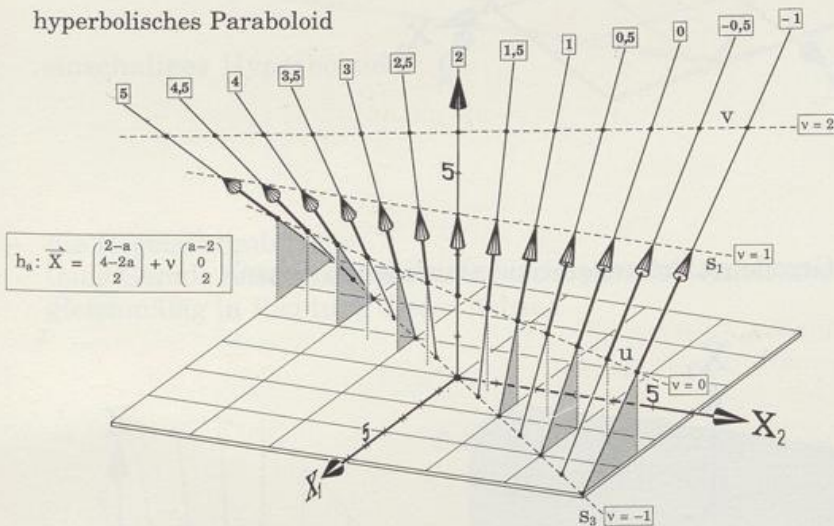
$$j_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hyperbolisches Paraboloid



Wir untersuchen jetzt die Schar  $h_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 4-2a \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

hyperbolisches Paraboloid



$$h_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 4-2a \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

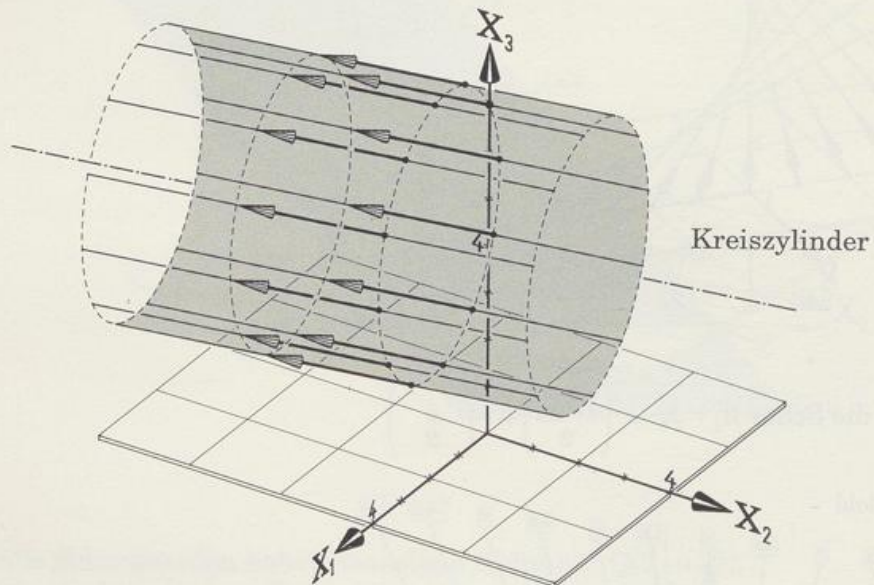
Alle Schargeraden  $h_a$  sind parallel zur  $x_1x_3$ -Ebene, denn bei allen Richtungsvektoren ist die 2. Koordinate gleich null (graue Steigungsdreiecke im Bild!). Das Bild erweckt den Eindruck, als ob die Punkte mit gleichem Parameterwert  $v$  auf anderen Geraden lägen, die selber wieder eine Schar bildeten. Um diese zu finden, halten wir  $v$  als Scharparameter fest und lassen wir  $a$  als Geradenparameter laufen. Wir nehmen den allgemeinen Geradenpunkt und sortieren um

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 4-2a \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a+av-2v \\ 4-2a \\ 2+2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2v \\ 4 \\ 2+2v \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} v-1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

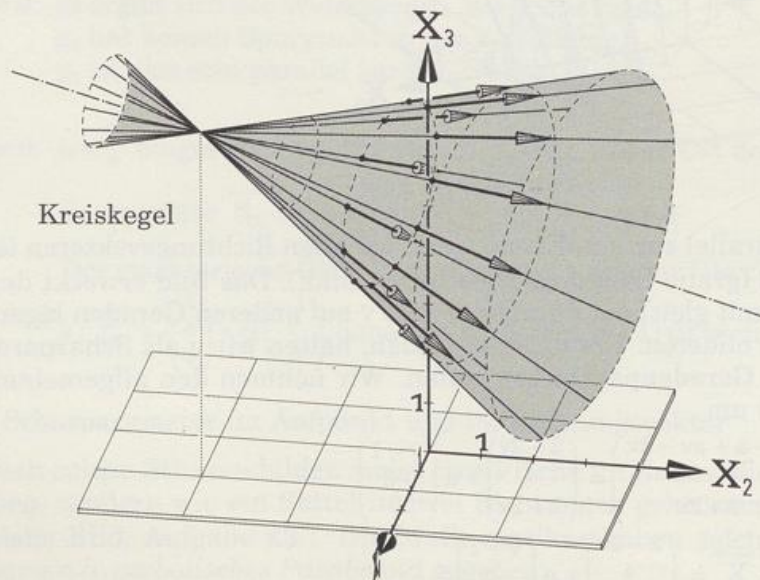
und bekommen die Schar  $q_v: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2-2v \\ 4 \\ 2+2v \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} v-1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Flächen, die aus Geradenscharen aufgebaut sind, heißen **Regelflächen**. Sie spielen in der Technik eine große Rolle. Die bekanntesten Regelflächen sind

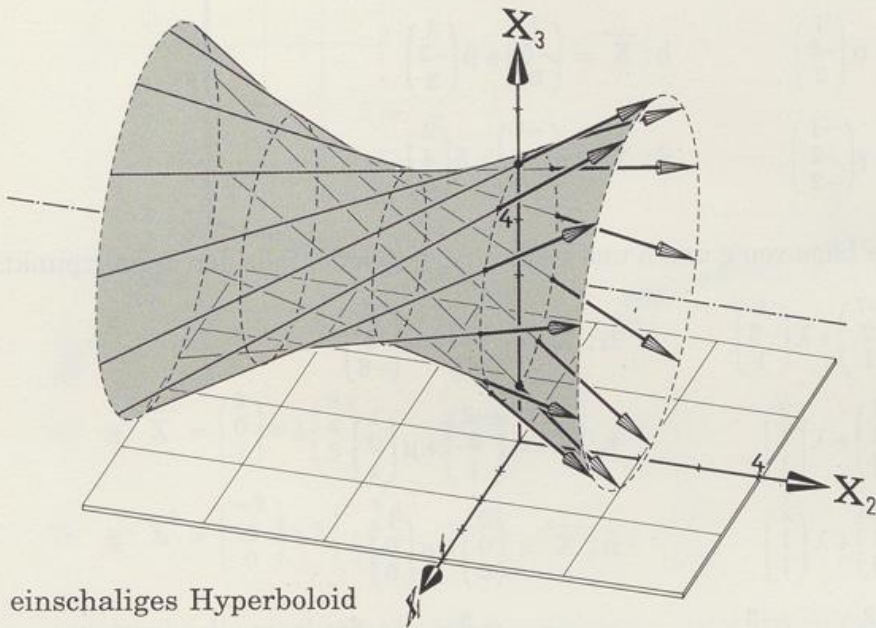
- die Ebene
- der Kreiszylinder (eine Gerade rotiert um eine zu ihr parallele Achse)



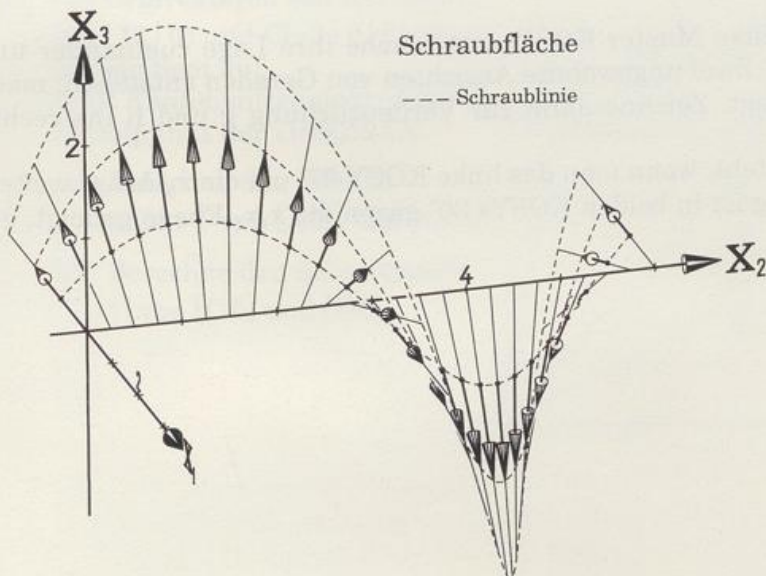
- der Kreiskegel (eine Gerade rotiert um eine sie schneidende Achse)



- das einschalige Hyperboloid  
(eine Gerade rotiert um eine zu ihr windschiefe Achse)



- die Regelschraubfläche  
(eine Gerade rotiert um eine zu ihr nicht parallele Achse und verschiebt sich dabei gleichmäßig in Richtung dieser Achse).



## Aufgaben

1.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  Welche Lage hat  $g$  zu

a:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  b:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

c:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  d:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Untersuche die Lage von  $g$  und  $h$  und bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt:

a)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  h:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

b)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  h:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  h:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

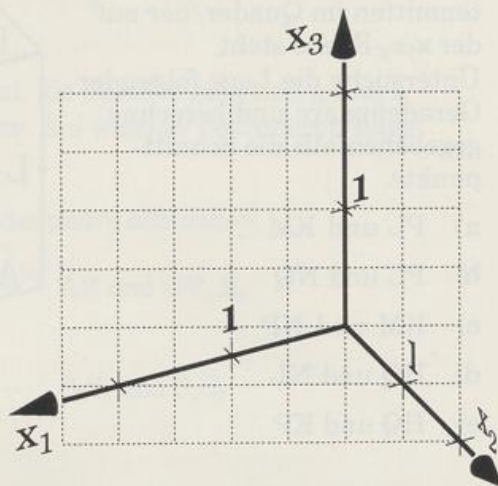
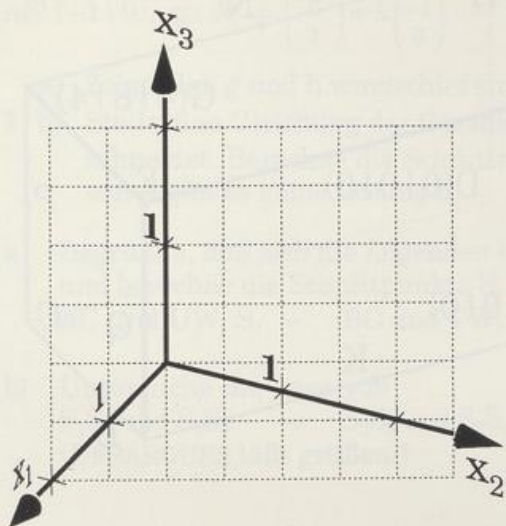
d)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$  h:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$

e)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$  h:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

3.  $A(-5 | 4 | -2)$ ,  $B(6 | -3 | 4)$ ,  $C(10 | -6 | 18)$ ,  $D(0 | 0 | 22)$ . Zeige durch Berechnung des Diagonalschnittpunkts, daß ABCD ein ebenes Viereck ist.

4. Zeichne  $g$  und  $h$  ins linke Muster-KOSY, untersuche ihre Lage zueinander und ihre Lage zur  $x_3$ -Achse. Zwei ungewohnte Ansichten von Geraden entstehen; mach dir klar, woran das liegt. Zeichne dann zur Verdeutlichung  $g$  und  $h$  ins rechte KOSY.

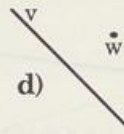
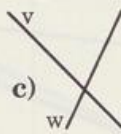
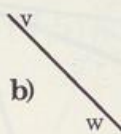
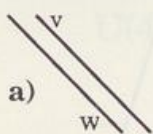
(Das rechte KOSY entsteht, wenn man das linke KOSY  $37^\circ$  um die  $x_3$ -Achse weiterdreht, die Blickrichtung ist in beiden KOSYs  $30^\circ$  gegen die  $x_1x_2$ -Ebene geneigt, geneigter Leser!)



a)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

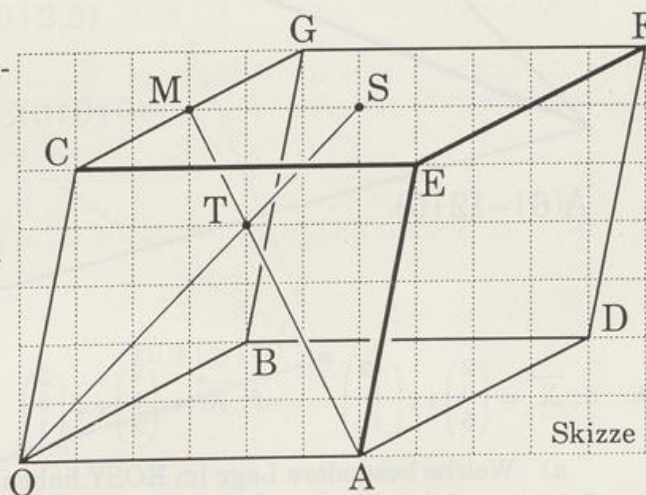
b)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. Beschreibe die möglichen Lagen der Geraden  $v$  und  $w$  im Raum, die bei bestimmter Blickrichtung so ausschauen:



6. Die Ortsvektoren von  $A(6|0|3)$ ,  $B(6|12|0)$  und  $C(-3|0|6)$  spannen ein Spat auf.  $M$  ist Kantenmittelpunkt,  $S$  ist Mittelpunkt der Deckfläche.

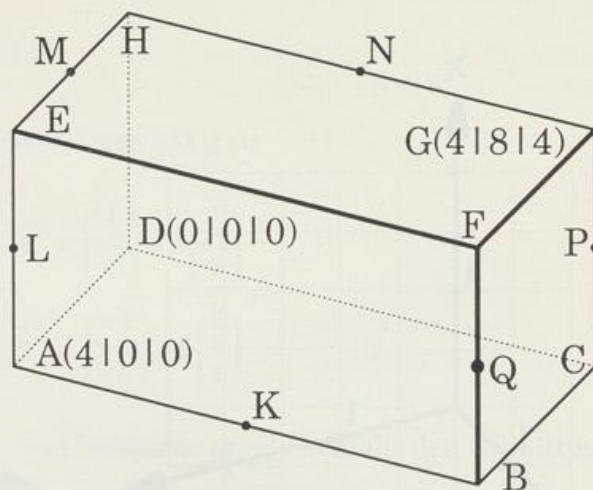
- a) Berechne den Schnittpunkt  $T$  von  $[AM]$  und  $[OS]$ .  
 b) Berechne den Schnittpunkt  $U$  von  $[CT]$  und  $[OD]$ .



7. K, L, M, N, P und Q seien Kantenmitten im Quader, der auf der  $x_1x_2$ -Ebene steht.

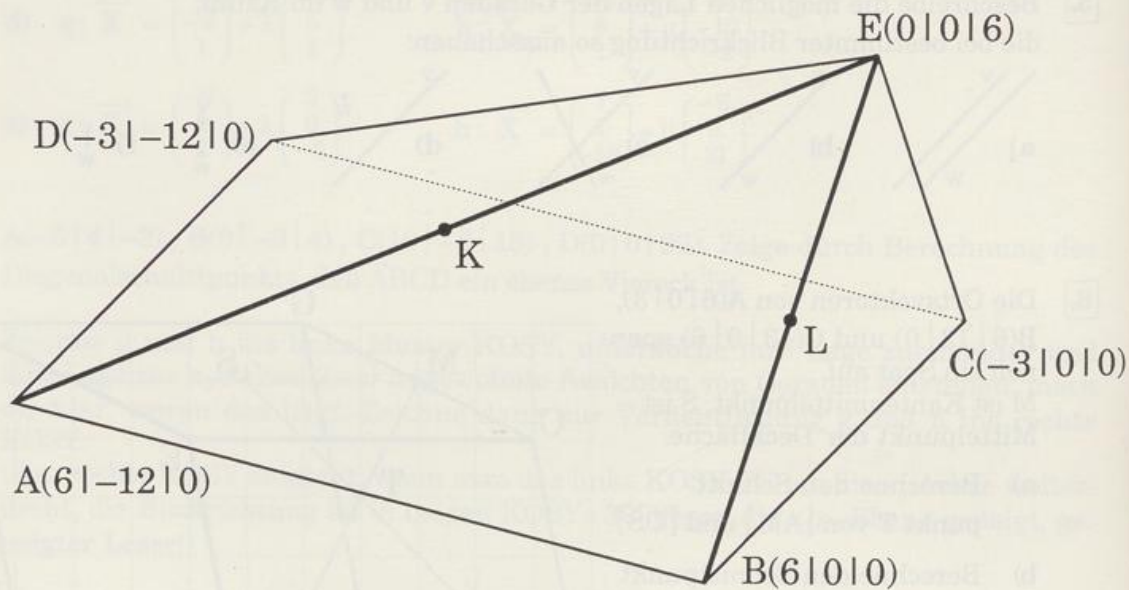
Untersuche die Lage folgender Geradenpaare und berechne gegebenenfalls die Schnittpunkte.

- PL und KM
- PL und NQ
- KM und NP
- HQ und NL
- HQ und KP



8. K und L sind Kantenmitten der vierseitigen Pyramide ABCDE.

- Zeige, daß sich CK und DL schneiden, und berechne den Schnittpunkt S.
- Untersuche die Lage von AC und ES. Schnittpunkt T?
- Untersuche die Lage von DK und CL. Schnittpunkt U?



9.  $e: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$        $f: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$        $g: \vec{X} = \gamma \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

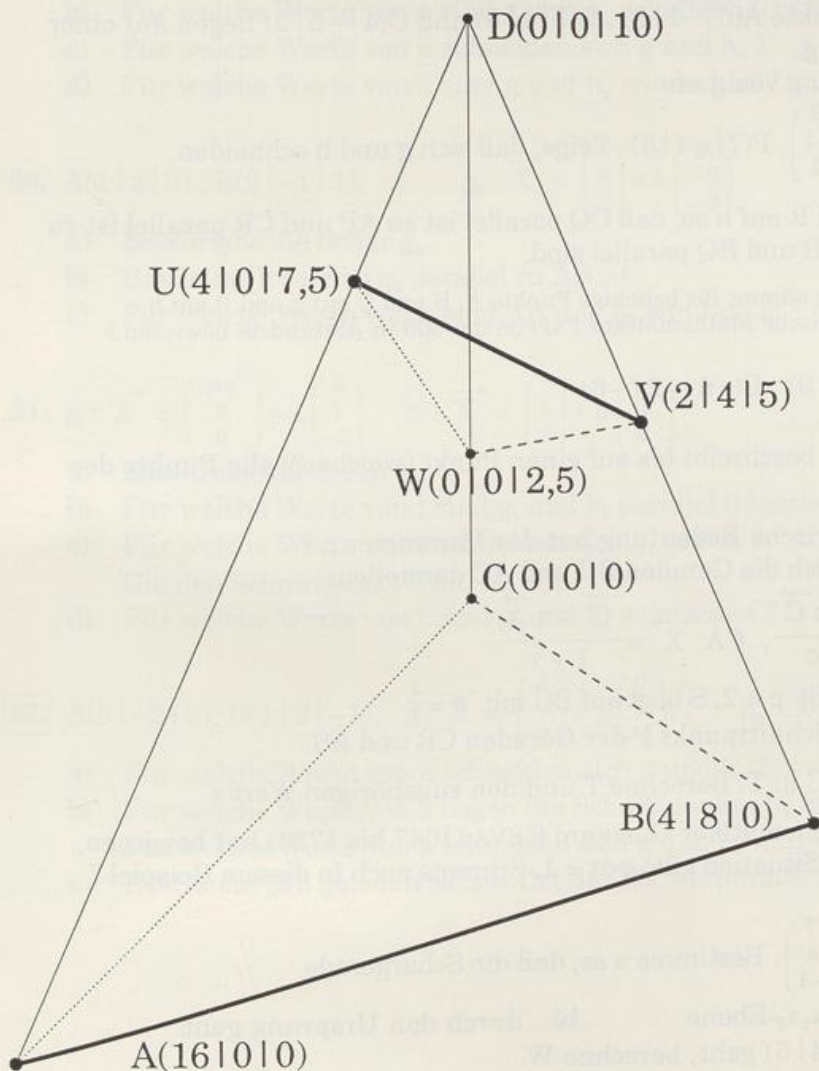
- Welche besondere Lage im KOSY haben e und g?
- e und f sind windschief. Stelle eine Gleichung der Gerade h auf, die parallel zu g ist und e und f schneidet. Berechne die Schnittpunkte. Bei welcher besonderen Lage von g gibt es keine Lösung?

10.  $A(2|-1|0)$ ,  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

- a) Zeige, daß  $g$  und  $h$  windschief sind.  
 • b) Stelle eine Gleichung der Gerade  $k$  auf, die durch  $A$  geht und  $g$  und  $h$  schneidet. Berechne die Schnittpunkte. Bei welcher besonderen Lage von  $A$  gibt es keine Lösung?

11. a) Begründe, daß sich die folgenden Geradenpaare schneiden, und berechne die Schnittpunkte  $S_i$ :  
 $AC$  und  $UV$ ,  $S_1$  -  $BC$  und  $VW$ ,  $S_2$  -  $AB$  und  $UV$ ,  $S_3$

- b) Untersuche die Lage von  
 $S_1S_2$  und  $S_2S_3$  -  $S_2S_3$  und  $S_3S_1$  -  $S_3S_1$  und  $S_1S_2$   
 (DESARGUES läßt grüßen!)



12.  $A(1 | -3 | 3)$ ,  $B(3 | 1 | -3)$ ,  $C(1 | -1 | 3)$  und  $D(1 | 3 | 3)$  bilden ein Tetraeder.  
 Zeige durch Rechnung: Die Strecken, die die Mitten zweier windschiefer Kanten verbinden, schneiden sich alle in einem Punkt  $S$ .  
 In welchem Verhältnis teilt  $S$  diese Verbindungsstrecken?  
 (Diese Eigenschaften hat jedes Tetraeder!)

• 13. a:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \\ -9 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,    b:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 31 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

- a) Untersuche die Lage von a und b.  
 b) Bestimme eine Gleichung der Mittelparallele m von a und b.  
 c) a' entsteht, wenn a eine Halbdrehung um b macht.  
 Bestimme eine Gleichung von a'.  
 d) b' entsteht, wenn man b an a spiegelt.  
 Bestimme eine Gleichung von b'.

- 14. a) Zeige: Die Punkte  $A(6 | -1 | 6)$ ,  $B(7 | 1 | 8)$  und  $C(4 | -5 | 2)$  liegen auf einer Gerade g.  
 Gib eine Gleichung von g an.

b)  $h: \vec{X} = \vec{P} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $P(7 | -4 | 5)$ . Zeige, daß sich g und h schneiden.

- c) Bestimme Q und R auf h so, daß CQ parallel ist zu AP und CR parallel ist zu BP. Zeige, daß AR und BQ parallel sind.

(Diese Behauptung stimmt für beliebige Punkte A, B und C auf g und P auf h.  
 Das hat der griechische Mathematiker PAPPOS um 300 in Alexandria bewiesen.)

- 15.  $A(6 | -2 | 0)$ ,  $B(6 | 4 | 9)$ ,  $C(-6 | -2 | -6)$

a)  $\vec{X} = \frac{\vec{A} + \rho \vec{B}}{1 + \rho}$  beschreibt bis auf einen Punkt (welcher?) alle Punkte der Gerade AB.

Welche geometrische Bedeutung hat der Parameter  $\rho$ ?  
 Ebenso lassen sich die Geraden BC und AC darstellen:

BC:  $\vec{X} = \frac{\vec{B} + \sigma \vec{C}}{1 + \sigma}$ ,    CA:  $\vec{X} = \frac{\vec{C} + \tau \vec{A}}{1 + \tau}$

- b) R liegt auf AB mit  $\rho = 2$ , S liegt auf BC mit  $\sigma = \frac{3}{2}$ .  
 Bestimme den Schnittpunkt P der Geraden CR und AS.  
 c) BP schneidet AC in T. Berechne T und den zugehörigen Wert  $\tau$ .

Der italienische Mathematiker Giovanni CEVA (1647 bis 1734) hat bewiesen, daß in einer solchen Situation gilt:  $\rho\sigma\tau = 1$ . Stimmts auch in diesem Beispiel?

16.  $g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} -14 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$ . Bestimme a so, daß die Schargerade

- a) parallel ist zur  $x_1x_3$ -Ebene                      b) durch den Ursprung geht  
 c) durch  $W(w_1 | -4 | 5)$  geht, berechne W.

17.  $h_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4a \\ 4 \\ 13-6a \end{pmatrix}$ . Bestimme  $a$  so, daß die Schargerade
- parallel ist zur  $x_1x_2$ -Ebene
  - die  $x_2x_3$ -Ebene nicht schneidet
  - durch den Ursprung geht
  - die  $x_3$ -Achse schneidet, berechne den Schnittpunkt.
18.  $A(a \mid -2 \mid 3)$  und  $B(a+4 \mid 0 \mid 5)$  legen die Schar  $k_a$  fest. Welche Schargeraden schneiden die Koordinatenachsen? Berechne die Schnittpunkte.

Für die Aufgaben 19. bis 22. empfiehlt sich das Determinantenverfahren.

19.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$       $h_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ -a \end{pmatrix}$

- Beschreibe die Schar  $h_a$ .
- Für welche Werte von  $a$  sind  $g$  und  $h_a$  parallel (identisch)?
- Für welche Werte von  $a$  schneiden sich  $g$  und  $h_a$ ?
- Für welche Werte von  $a$  sind  $g$  und  $h_a$  windschief?

20.  $A(1 \mid 2 \mid 2)$ ,  $B(2 \mid -1 \mid 1)$       $g_k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2k \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$

- Beschreibe die Schar  $g_k$ .
- Bestimme  $k$  so, daß  $g_k$  parallel zu  $AB$  ist.
- Für welche Werte von  $k$  sind  $AB$  und  $g_k$  windschief?

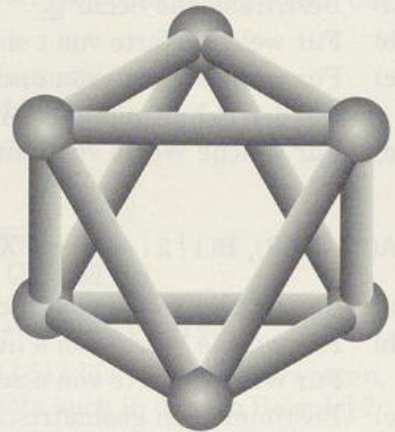
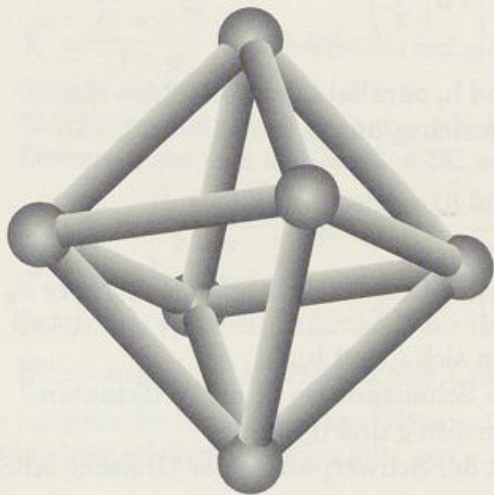
21.  $g_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2+t^2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$       $h_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$

- Beschreibe die Schar  $g_t$ .
- Für welche Werte von  $t$  sind  $g_t$  und  $h_t$  parallel (identisch)?
- Für welche Werte von  $t$  schneiden sich  $g_t$  und  $h_t$ ?  
Gib den Schnittpunkt  $S$  an.
- Für welche Werte von  $t$  sind  $g_t$  und  $h_t$  windschief?

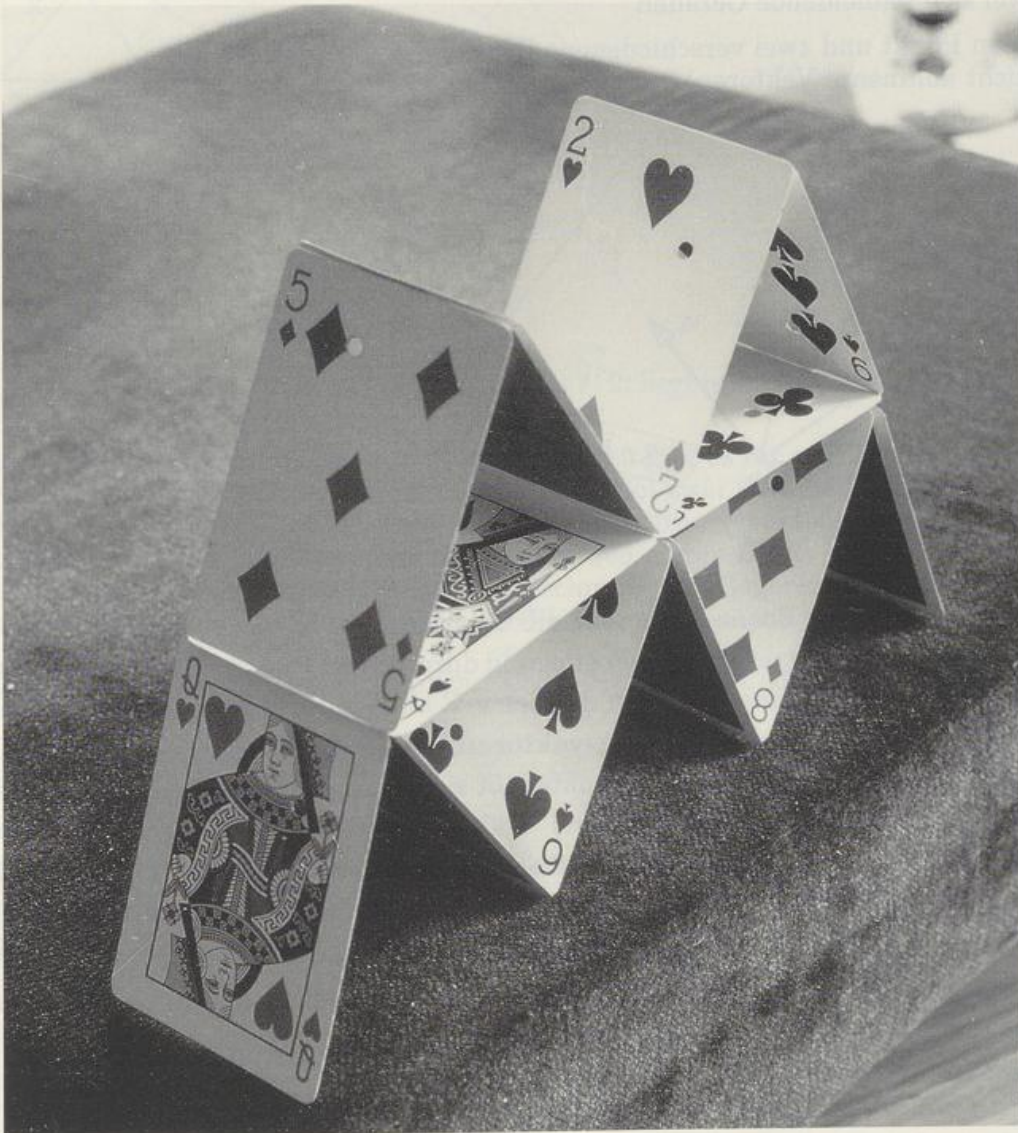
22.  $A(3 \mid -2 \mid 2)$ ,  $B(1 \mid 2 \mid -1)$ ,  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,      $h_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2-a \\ 1+a \end{pmatrix}$

- Für welche Werte von  $a$  schneiden sich  $g$  und  $h_a$ ?
- Für welche Werte von  $a$  liegen die Schnittpunkte  $S_a$  im IV. Oktanten?  
Für welche Werte von  $a$  schneiden sich  $g$  und  $h_a$  in  $A$ ?
- Bestimme den geometrischen Ort der Schwerpunkte der Dreiecke  $ABS_a$ .

- 23.  $j_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 
  - a) Welche Schargerade geht durch  $P(-45 | 0 | 5)$ ?
  - b) Welche Schargeraden sind parallel zu  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ?
  - c) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die zum Parameterwert  $\mu = 2$  gehören.
  - d) Bestimme den geometrischen Ort der Spurpunkte in der  $x_1x_3$ -Ebene.
  - e) Zeige, daß je zwei Schargeraden windschief sind.
  
- 24.  $k_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5a \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1+a \\ 2-3a \\ 0 \end{pmatrix}$ . Stelle eine Gleichung für die Schar der Geraden auf, auf denen die Punkte mit jeweils gleichem Parameterwert  $\tau$  liegen.
  
- 25.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 Stelle eine Gleichung für die Schar der Geraden auf, die  $g$  und  $h$  treffen und zur  $x_1x_3$ -Ebene parallel sind.
  
- 26.  $a: \vec{X} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $b: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $c: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 Stelle eine Gleichung für die Schar der Geraden auf, die  $a$ ,  $b$  und  $c$  schneiden.



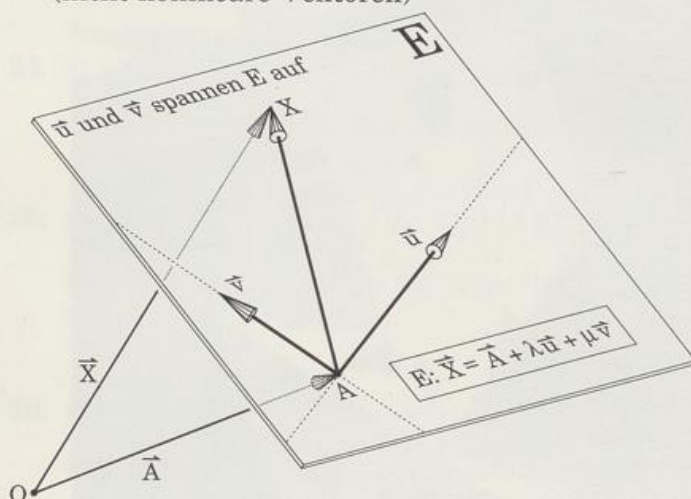
## VIII. Ebenen



## 1. Ebenengleichungen

Eine Ebene im Raum ist eindeutig bestimmt durch

- drei Punkte, die nicht auf einer Gerade liegen
- eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Gerade liegt
- zwei echt parallele Geraden
- zwei sich schneidende Geraden
- einen Punkt und zwei verschiedene Richtungen (nicht kollineare Vektoren)



Eine Gleichung einer Ebene beschreibt die Ortsvektoren  $\vec{X}$  aller Ebenenpunkte. Für diese Beschreibung eignet sich die Festlegung durch einen Punkt und zwei Richtungen am besten. Man wählt einen Punkt A der Ebene E als **Aufpunkt** und zwei nicht kollineare Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  als **Richtungsvektoren**, die parallel zur Ebene liegen. Der Ortsvektor  $\vec{X}$  eines beliebigen Ebenenpunkts läßt sich dann darstellen als Summe von  $\vec{A}$  und einer Linearkombination von  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ :  $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ .  $\lambda, \mu$  heißen **Parameter** des Punkts X. Die Gleichung heißt **Parametergleichung** oder **Punkt-Richtungs-Gleichung** der Ebene.

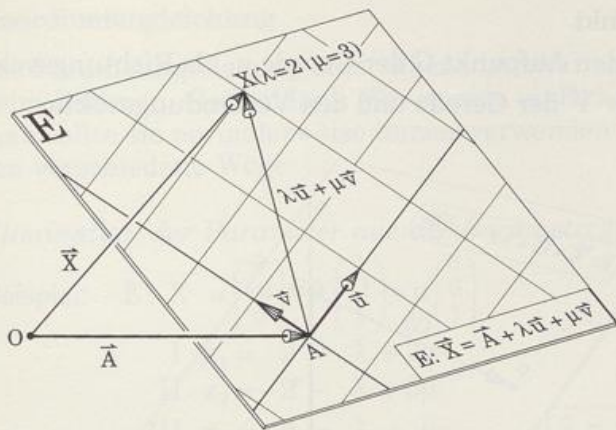
Jeder Punkt der Ebene ist eindeutig durch das Parameterpaar  $(\lambda | \mu)$  festgelegt.  $\vec{A}, \vec{u}$  und  $\vec{v}$  bestimmen in der Ebene also ein (meist) schiefwinkliges Koordinatensystem mit A als Ursprung und  $(\lambda | \mu)$  als Punktkoordinaten.

### Zusammenfassung

Ist A irgendein Punkt der Ebene E und sind  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  zwei zu E parallele, nicht kollineare Vektoren, dann nennt man **E**:  $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$   $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  eine Parametergleichung von E.

A heißt Aufpunkt,  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  heißen Richtungsvektoren,  $\lambda$  und  $\mu$  heißen Parameter der Ebenengleichung.

Die Bedingung  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  läßt man aus Bequemlichkeit meist weg.



Beispiel:  $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

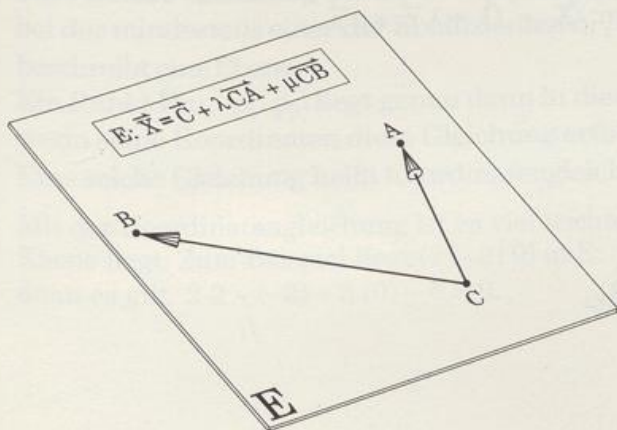
zu  $\lambda = -1, \mu = 2$  gehört  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $P(5 | 7 | 2)$  liegt in E.

Je nach Wahl von Aufpunkt und Richtungsvektoren gibt es für eine Ebene (wie bei einer Gerade) verschiedene Parametergleichungen. Bei zwei Parametergleichungen, die ein und dieselbe Ebene beschreiben, müssen die Richtungsvektoren komplanar sein. Komplanarität sieht man gewöhnlich nicht auf den ersten Blick: Bei Ebenen erkennt man Parallelität oder Identität erst nach Rechnung (im Gegensatz zur Gerade). Die Ebene E (oben) kann zum Beispiel auch die Gleichung haben

$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ , es gilt nämlich:  $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

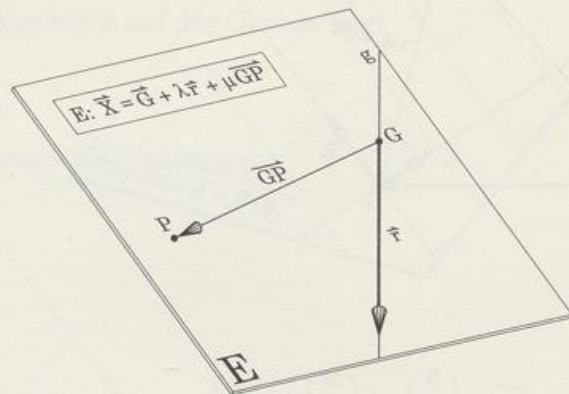
### Ebene durch drei Punkte

Als Aufpunkt wählt man einen der drei Punkte. Als Richtungsvektoren wählt man zwei linear unabhängige der 6 möglichen Verbindungsvektoren, zum Beispiel:  $\vec{X} = \vec{C} + \lambda \vec{CA} + \mu \vec{CB}$ .



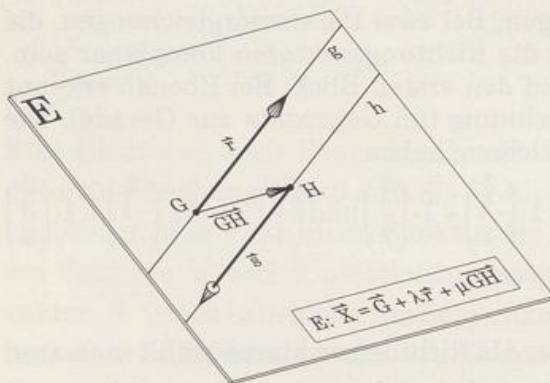
### Ebene durch eine Gerade und einen Punkt

Als Aufpunkt wählt man zum Beispiel den Aufpunkt  $G$  der Gerade  $g$ , als Richtungsvektoren zum Beispiel den Richtungsvektor  $\vec{r}$  der Gerade und den Verbindungsvektor  $\overrightarrow{GP}$ :  $\vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{r} + \mu \overrightarrow{GP}$ .



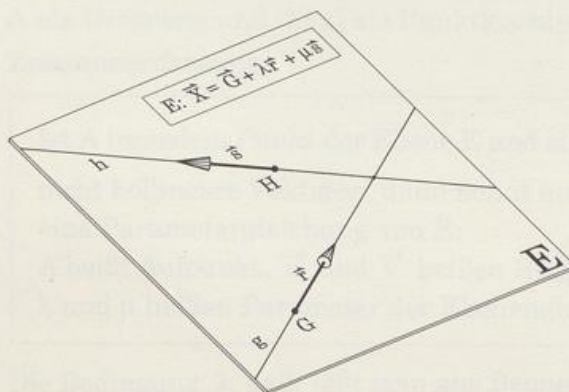
### Ebene durch zwei Parallelen

Als Aufpunkt wählt man zum Beispiel den Aufpunkt  $G$  der Gerade  $g$ , als Richtungsvektoren zum Beispiel den Richtungsvektor  $\vec{r}$  der Gerade  $g$  und den Vektor  $\overrightarrow{GH}$ , der die Aufpunkte der Geraden  $g$  und  $h$  verbindet:  $\vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{r} + \mu \overrightarrow{GH}$ .



### Ebene durch zwei sich schneidende Geraden

Als Aufpunkt wählt man zum Beispiel den Aufpunkt  $G$  der Gerade  $g$ , als Richtungsvektoren am besten gleich die der Geraden:  $\vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{r} + \mu \vec{s}$ .



## Koordinatengleichung

Die Parametergleichung einer Ebene ist zwar recht anschaulich, aber sehr unhandlich beim Rechnen. Gottseidank gibt es eine einfachere Beschreibung mit einer Gleichung, man sollte sie normalerweise immer verwenden: die Koordinatengleichung. Zu ihr führen verschiedene Wege:

### Elimination der Parameter aus der Parametergleichung

Beispiel:  $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

I  $x_1 = 2 + \lambda + 3\mu$

II  $x_2 = -2 - \lambda + 3\mu$

III  $x_3 = 0 + \lambda + \mu$

$$\lambda = x_3 - \mu$$

I'  $x_1 = 2 + x_3 + 2\mu$

$$2\mu = x_1 - 2 - x_3$$

II'  $x_2 = -2 - x_3 + 4\mu$

II''  $x_2 = -6 - 3x_3 + 2x_1$

II'' ist die Beziehung zwischen den Koordinaten des allgemeinen Ebenenpunkts  $X(x_1 | x_2 | x_3)$ . Wir ordnen um und bekommen die Koordinatengleichung:  $E: 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6 = 0$

Man kann zeigen, daß jede solche lineare Koordinatengleichung (bei der nicht alle Koeffizienten zugleich null sind) eine Ebene beschreibt. Zum Beweis braucht man nur zwei der Koordinaten als freie Parameter zu nehmen. Wir führen es an unserm Beispiel vor:

$$E: 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6 = 0,$$

$$x_1 = \sigma,$$

$$x_3 = \tau,$$

$$x_2 = -6 + 2\sigma - 3\tau \quad \text{oder vektoriell geschrieben:}$$

$$E: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \\ -6 + 2\sigma - 3\tau \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

das ist eine der unendlich vielen Parametergleichungen von E.

### Satz

Jede lineare Gleichung der Form  $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$ ,  
bei der mindestens einer der Koeffizienten  $n_1, n_2, n_3$  ungleich null ist,  
beschreibt eine Ebene.

Ein Punkt  $P(p_1 | p_2 | p_3)$  liegt genau dann in dieser Ebene,  
wenn seine Koordinaten diese Gleichung erfüllen:  $n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 + n_0 = 0$ .

Eine solche Gleichung heißt **Koordinatengleichung der Ebene**.

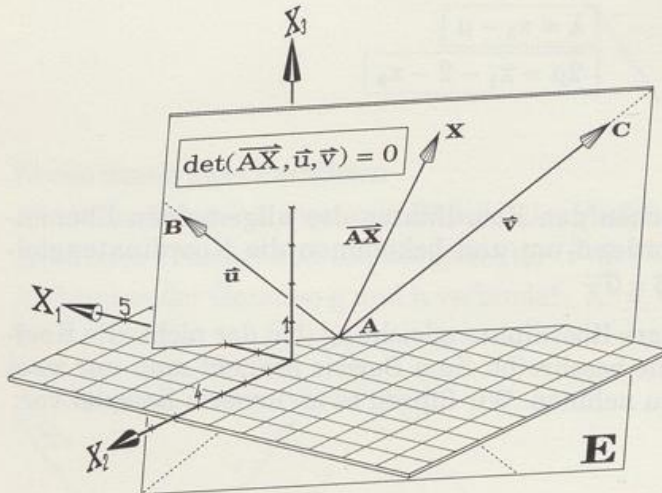
Mit der Koordinatengleichung ist es viel leichter zu entscheiden, ob ein Punkt in einer Ebene liegt. Zum Beispiel liegt  $(2 | -2 | 0)$  in  $E: 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6 = 0$ ,  
denn es gilt  $2 \cdot 2 - (-2) - 3 \cdot (0) - 6 = 0$ .

Multipliziert man eine Koordinatengleichung mit einer Zahl ( $\neq 0$ ), so ändert sich die Lösungsmenge nicht, die beiden Gleichungen beschreiben dieselbe Ebene. Man vereinfacht eine Koordinatengleichung so, daß die Koeffizienten teilerfremde, ganze Zahlen sind,

Beispiel: E:  $6x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 36 = 0 \parallel :3$     F:  $-\frac{3}{2}x_1 + \frac{9}{4}x_2 - 3x_3 + 9 = 0 \parallel \cdot(-\frac{4}{3})$   
 E:  $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 12 = 0$     F:  $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 12 = 0$     (E = F!)

*\*Determinantenmethode*

Ein Punkt X liegt genau dann in der Ebene, wenn die Vektoren  $\overrightarrow{AX}$ ,  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  komplanar sind, das heißt  $\det(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$ . Rechnet man diese Determinante aus, dann steht die Koordinatengleichung da.



Beispiel (von oben): E:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,     $\overrightarrow{AX} = \vec{X} - \vec{A} = \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 + 2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 - 2 & 1 & 3 \\ x_2 + 2 & -1 & 3 \\ x_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1 - 2) \cdot (-4) - (x_2 + 2) \cdot (-2) + x_3 \cdot 6 = 0$$

$$-4x_1 + 8 + 2x_2 + 4 + 6x_3 = 0$$

$$-4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 12 = 0 \parallel :(-2) \quad \text{E: } 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6 = 0$$

Sind von einer Ebene drei Punkte bekannt, so findet man die Koordinatengleichung direkt mit der Determinantenmethode (ohne Umweg über die Parametergleichung),

Beispiel: A(0 | -2 | 0), B(2 | 2 | 4), C(-6 | -5 | 6)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 2 \\ x_2 + 2 & 2 & 1 \\ x_3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1) \cdot (-6) - (x_2 + 2) \cdot (-6) + x_3 \cdot (-3) = 0$$

$$\text{E: } 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 4 = 0$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\overrightarrow{AX}}$

Zur Kontrolle empfiehlt es sich, den einen oder andern Punkt einzusetzen.

## Aufgaben

1. Gib eine Parametergleichung der Ebene E an, die den Punkt  $P(-2 | 1 | 7)$  enthält und von den Vektoren  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$  aufgespannt wird.
2. Gib die Punkte A, B, C und D an, die in der Ebene E:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$  liegen und die Parameterwerte haben  
 $A(\lambda = 0 | \mu = 0)$ ,  $B(\lambda = 0 | \mu = 1)$ ,  $C(\lambda = 1 | \mu = 0)$ ,  $D(\lambda = 1 | \mu = 1)$ .
3. Untersuche, ob die Punkte  $A(1 | 4 | 6)$ ,  $B(5 | -7 | 0)$  und  $C(14 | 2 | 7)$  in der Ebene E:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  liegen, und nenne gegebenenfalls die zugehörigen Parameterwerte. Zeichnung im Koordinatensystem!
4. Stelle eine Parametergleichung der Ebene E(ABC) auf mit den Punkten
  - a)  $A(2 | 1 | 3)$ ,  $B(-1 | 0 | 5)$ ,  $C(2 | -7 | 3)$
  - b)  $A(2 | 1 | -3)$ ,  $B(7 | -1 | 5)$ ,  $C(-3 | 3 | -11)$  (!)
5. Gib eine Parametergleichung der Ebene an, die festgelegt ist durch
  - a)  $U(1 | 0 | -1)$ ,  $V(0 | 0 | 0)$ ,  $W(-2 | -4 | 1)$
  - b)  $P(1 | 2 | -1)$ ,  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - c)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
  - d)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
6.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}$ ,  $f: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$   
Bestimme eine Parametergleichung der Ebene E, die g enthält und parallel ist zu f.
7.  $A(7 | -1 | 5)$ ,  $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $b: \vec{X} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Gib eine Parametergleichung der Ebene E an, die A enthält und parallel ist zu a und b.
8. Welche Punktmenge beschreibt die Gleichung  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ , wenn gilt:  $-\infty < \lambda < +\infty$  und  $-1 \leq \mu < 1$ ?

• 9. Welche Punktmengen beschreiben die Parametergleichungen ( $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ )

a)  $\vec{X} = \vec{P} + \frac{1}{\mu} \vec{u}, \quad \mu \neq 0$

b)  $\vec{X} = \frac{\mu}{\mu-1} \vec{u}, \quad \mu \neq 1$

c)  $\vec{X} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda + \mu = 1$

d)  $\vec{X} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda + \mu < 1$

• 10.  $A(3|0|2)$ ,  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  Bestimme eine Parametergleichung der Halbebene  $H$ , die den Punkt  $A$  enthält und von der Gerade  $g$  begrenzt ist?  
Zeichnung im Koordinatensystem!

11. Führe die Parametergleichungen über in Koordinatengleichungen:

a)  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c)  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d)  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

e)  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$

f)  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

12. Prüfe, welche der Punkte  $A(1|2|-2)$ ,  $B(0|0|0)$  und  $C(2|0|1)$  in der Ebene liegen

a)  $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$

b)  $F: 3x_1 - x_3 = 5$

c)  $G: x_2 = 0$

13. Bestimme den Parameter  $a$ , so, daß  $P(1|2|-5)$  in der Ebene liegt

a)  $E: x_1 - 2x_2 + x_3 - a = 0$

b)  $F: ax_1 + x_2 = 0$

c)  $G: 2x_1 - 3x_2 + ax_3 = 2a$

14. Gib Koordinatengleichungen der Koordinatenebenen an.

15. Gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, die festgelegt ist durch

a)  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b)  $P(-1|3|3)$ ,  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c)  $A(1|1|-4)$ ,  $B(0|2|1)$ ,  $C(-3|-1|-2)$

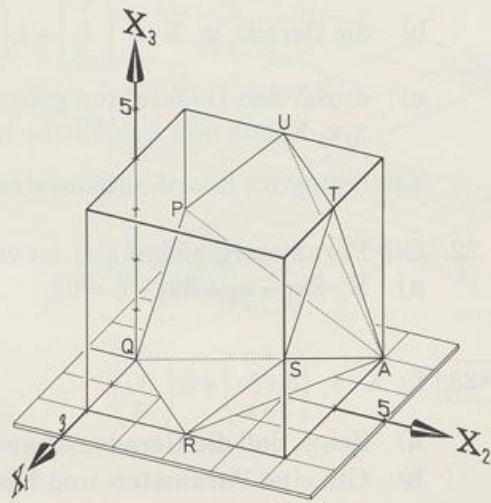
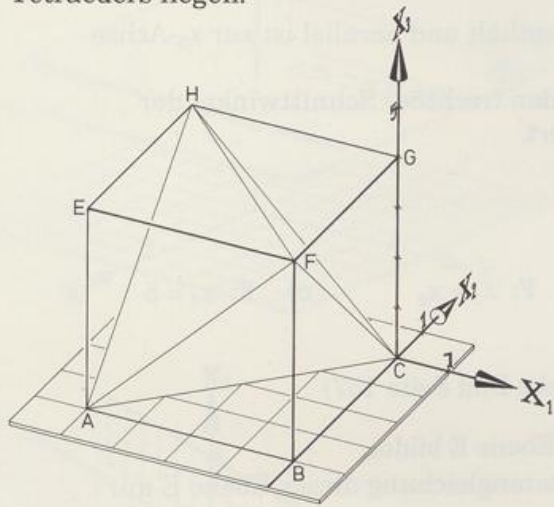
d)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $k: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

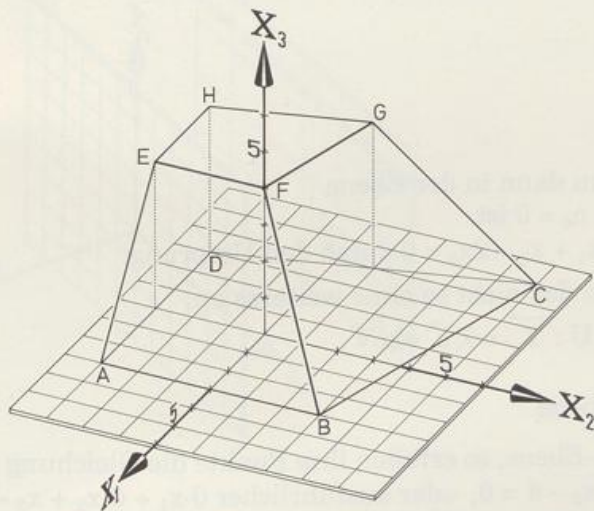
16.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ ,  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Zeige, daß sich  $g$  und  $h$  schneiden, und gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, in der  $g$  und  $h$  liegen.

17. Die Würfecken A, C, F und H sind die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders. Bestimme Koordinatengleichungen der Ebenen, in denen die Seitenflächen des Tetraeders liegen.



- 18. In einem Würfel liegt eine regelmäßige sechsseitige Pyramide. Die Ecken ihrer Grundseite P, Q, R, S, T und U sind Kantenmitten des Würfels. Bestimme Koordinatengleichungen der Ebenen, in denen die Grundfläche und die Seitenflächen der Pyramide liegen.
- 19. Die oberen vier Ecken des Sechsecks liegen gleich weit über der  $x_1x_2$ -Ebene.
- Begründe, daß das Sechseck ein Pyramidenstumpf ist, und berechne die Pyramidenspitze S.
  - Bestimme Koordinatengleichungen der Ebenen, in denen die Seitenflächen des Sechsecks liegen.



20. Die Ebenen E und F haben eine besondere Lage im Koordinatensystem. Beschreibe diese und stelle Koordinatengleichungen der Ebenen auf.

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

21. Gib eine Koordinatengleichung der Ebene an, die
- durch  $P(1 \mid 2 \mid -2)$  geht und parallel ist zur  $x_1x_3$ -Ebene
  - die Gerade  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  enthält und parallel ist zur  $x_3$ -Achse
  - durch den II. Oktanten geht und den (rechten) Schnittwinkel der  $x_1x_3$ -Ebene und  $x_2x_3$ -Ebene halbiert.

Zeichnung im Koordinatensystem !

22. Gib Parametergleichungen an von:

- a) E:  $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 6 = 0$       b) F:  $x_1 = x_2$       c) F:  $x_3 = 5$

•23.  $f_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 3+3a \\ 3-a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  (siehe Bild Seite 157)

- Zeige, daß die Geradenschar eine Ebene E bildet.
- Gib eine Parameter- und Koordinatengleichung dieser Ebene E an.

•24.  $g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a-1 \\ 2a+2 \\ -a \end{pmatrix}$  (siehe Bild Seite 158)

- Zeige, daß alle Geraden der Schar in einer Ebene F liegen.
- Gib eine Parameter- und Koordinatengleichung dieser Ebene F an.
- Welche Ebenenpunkte kommen in der Geradenschar nicht vor ?

25.  $j_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-5a \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1-a \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (siehe Bild Seite 159)

Zeige, daß die Geraden der Schar nicht in einer Ebene liegen.

## 2. Lage im Koordinatensystem

### Ursprungsebene

Der Ursprung  $O(0 \mid 0 \mid 0)$  liegt genau dann in der Ebene

E:  $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$ , wenn  $n_0 = 0$  ist.

Zum Beispiel geht die Ebene U:  $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$  durch den Ursprung.

Der Parametergleichung sieht man das nicht so ohne weiteres an,

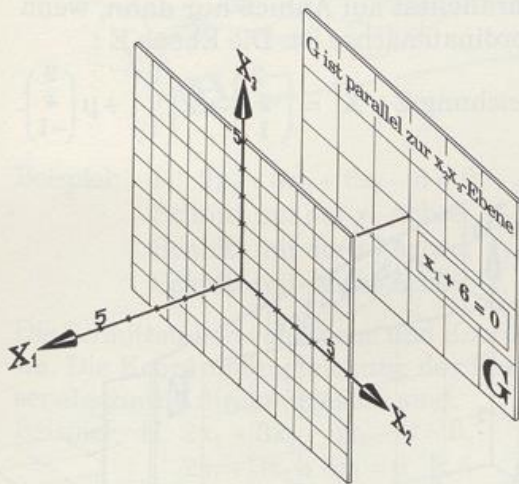
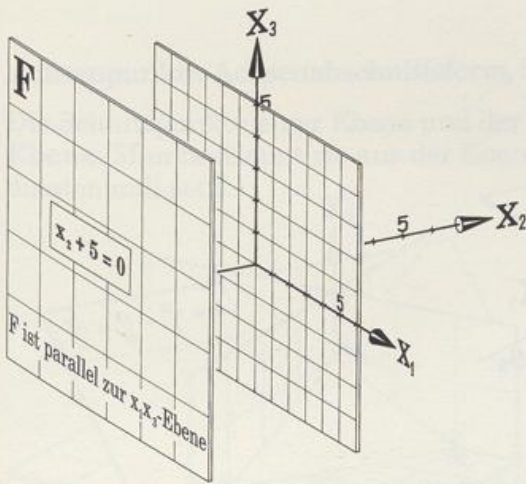
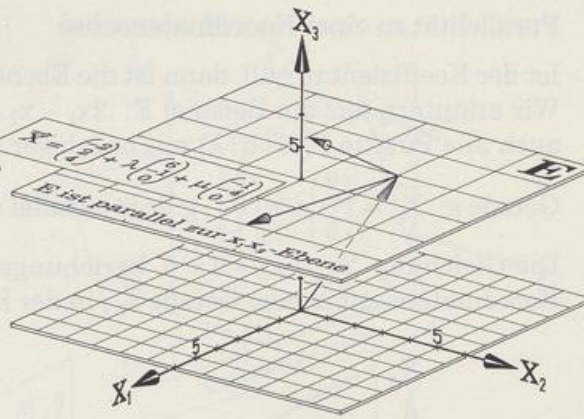
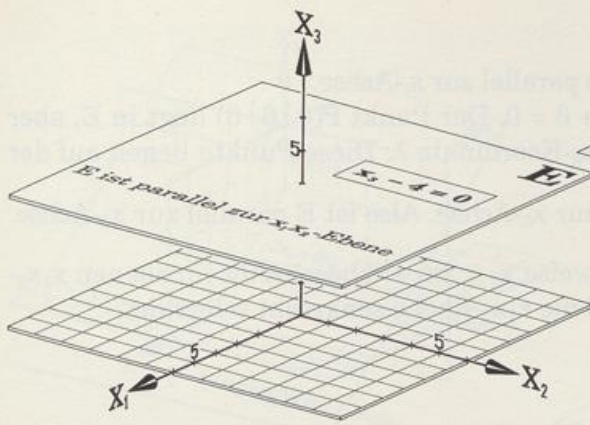
außer der Ursprung ist Aufpunkt,  $U: \vec{X} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ .

### Parallelität zu einer Koordinatenebene

Liegt E im Abstand 4 über der  $x_1x_2$ -Ebene, so erfüllen ihre Punkte die Gleichung  $x_3 = 4$ .

Ihre Koordinatengleichung lautet  $x_3 - 4 = 0$ , oder ausführlicher  $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 - 4 = 0$ .

Allgemein gilt: Sind die Koeffizienten  $n_i$  und  $n_j$  gleich null, so ist die Ebene parallel zur  $x_ix_j$ -Ebene.



In der Parametergleichung erkennt man diese Parallelität daran, daß in beiden Richtungsvektoren dieselbe Koordinate null ist. Die Ebene  $E: x_3 - 4 = 0$  hat zum Beispiel die

Parametergleichung  $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

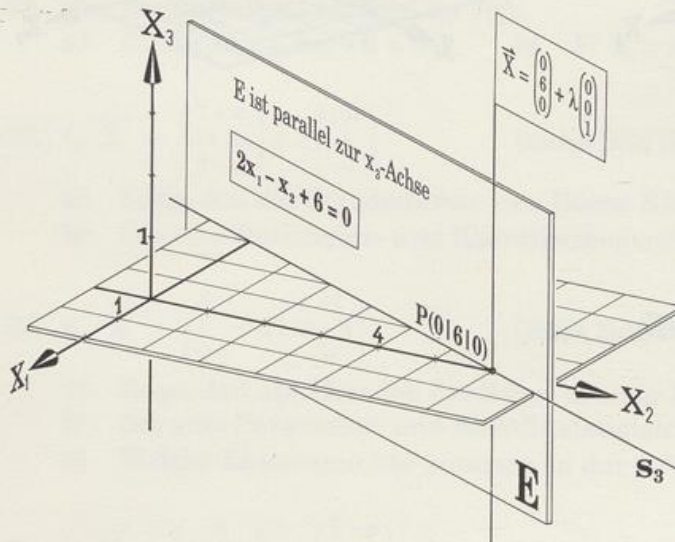
### Parallelität zu einer Koordinatenachse

Ist der Koeffizient  $n_i$  null, dann ist die Ebene parallel zur  $x_i$ -Achse.

Wir erläutern das am Beispiel  $E: 2x_1 - x_2 + 6 = 0$ . Der Punkt  $P(0|6|0)$  liegt in  $E$ , aber auch alle Punkte  $P_\lambda(0|6|\lambda)$  mit beliebiger  $x_3$ -Koordinate  $\lambda$ . Diese Punkte liegen auf der

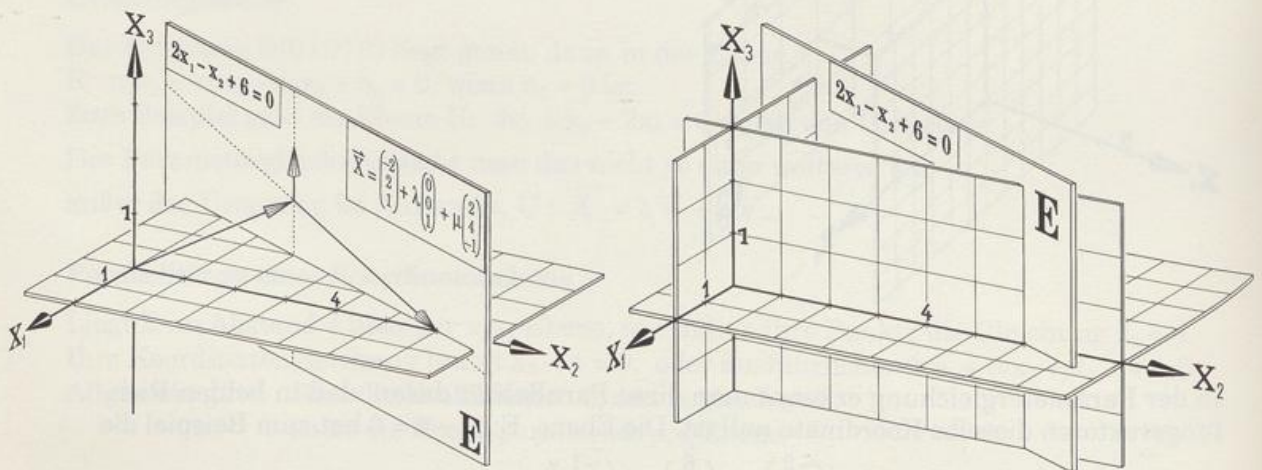
Gerade  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $g$  liegt parallel zur  $x_3$ -Achse. Also ist  $E$  parallel zur  $x_3$ -Achse.

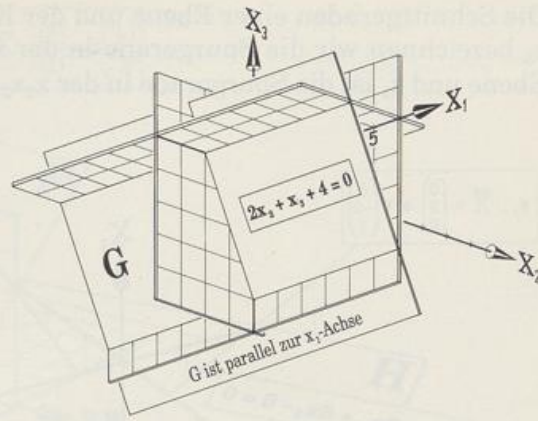
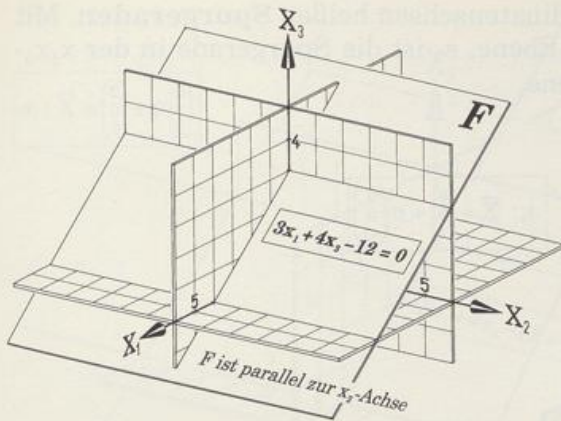
Die Gleichung  $2x_1 - x_2 + 6 = 0$  beziehungsweise  $x_2 = 2x_1 + 6$  beschreibt im ebenen  $x_1x_2$ -Koordinatensystem eine Gerade  $s_3$ , in der  $E$  die  $x_1x_2$ -Ebene senkrecht schneidet.



In der Parametergleichung erkennt man diese Parallelität auf Anhieb nur dann, wenn einer der Richtungsvektoren parallel zu einer Koordinatenachse ist. Die Ebene  $E$ :

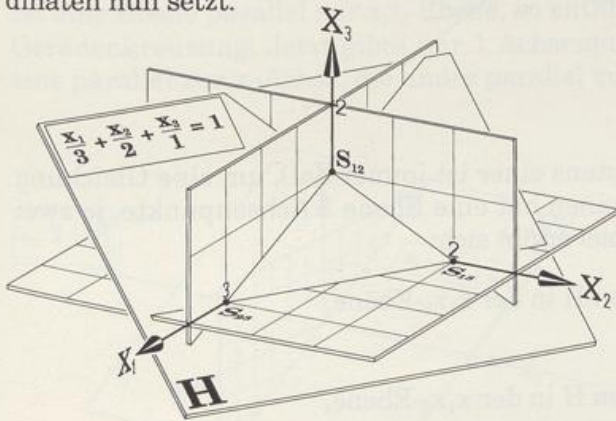
$2x_1 - x_2 + 6 = 0$  hat zum Beispiel die Parametergleichung  $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ .





### Achsenpunkte, Achsenabschnittsform, Spurgeraden

Die Schnittpunkte einer Ebene und der Koordinatenachsen heißen **Achsenpunkte der Ebene**. Man bestimmt sie aus der Koordinatengleichung, indem man jeweils zwei Koordinaten null setzt.



Beispiel: H:  $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6 = 0$

Schnitt mit der  $x_1$ -Achse:  $x_2 = x_3 = 0$ ,  $x_1 = 3$ ,  $S_{23}(3|0|0)$

Schnitt mit der  $x_2$ -Achse:  $x_1 = x_3 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $S_{13}(0|2|0)$

Schnitt mit der  $x_3$ -Achse:  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$ ,  $S_{12}(0|0|1)$

Die Schnittstellen von Ebene und Koordinatenachsen heißen **Achsenabschnitte der Ebene**. Die Koordinatengleichung der Ebene läßt sich schnell so umformen, daß diese Achsenabschnitte direkt ablesbar sind.

Beispiel: H:  $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6 = 0$

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 6 \quad || : 6$$

$$\text{Achsenabschnittsform von H: } \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{1} = 1,$$

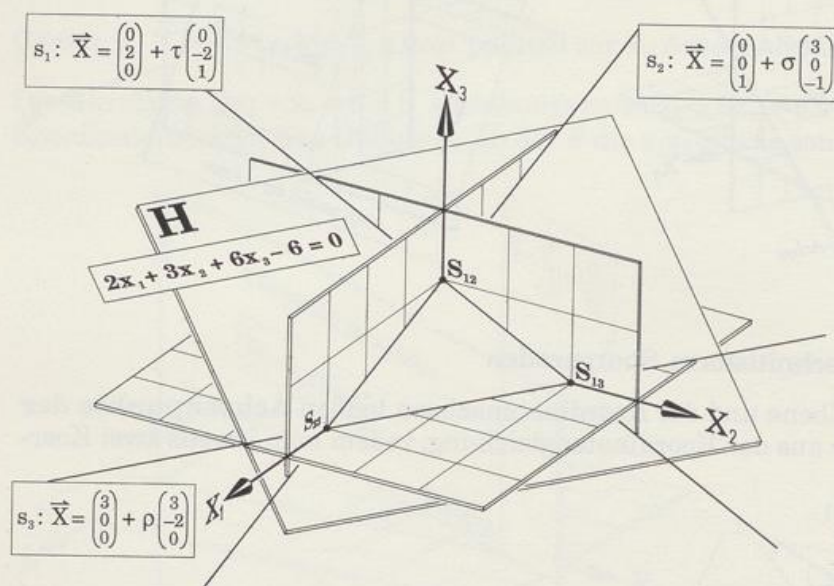
H hat die Achsenabschnitte  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 2$  und  $a_3 = 1$ .

Allgemein:

$$\text{Achsenabschnittsform } \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$$

die Achsenpunkte sind  $(a_1|0|0)$ ,  $(0|a_2|0)$  und  $(0|0|a_3)$ .

Die Schnittgeraden einer Ebene und der Koordinatenachsen heißen **Spurgeraden**. Mit  $s_3$  bezeichnen wir die Spurgerade in der  $x_1x_2$ -Ebene,  $s_2$  ist die Spurgerade in der  $x_1x_3$ -Ebene und  $s_1$  ist die Spurgerade in der  $x_2x_3$ -Ebene.



Wir verwenden die Achsenpunkte (mindestens einer ist immer da!), um eine Gleichung einer Spurgerade aufzustellen. Im allgemeinen hat eine Ebene 3 Achsenpunkte, je zwei davon legen eine Spurgerade fest. Im Beispiel ergibt sich:

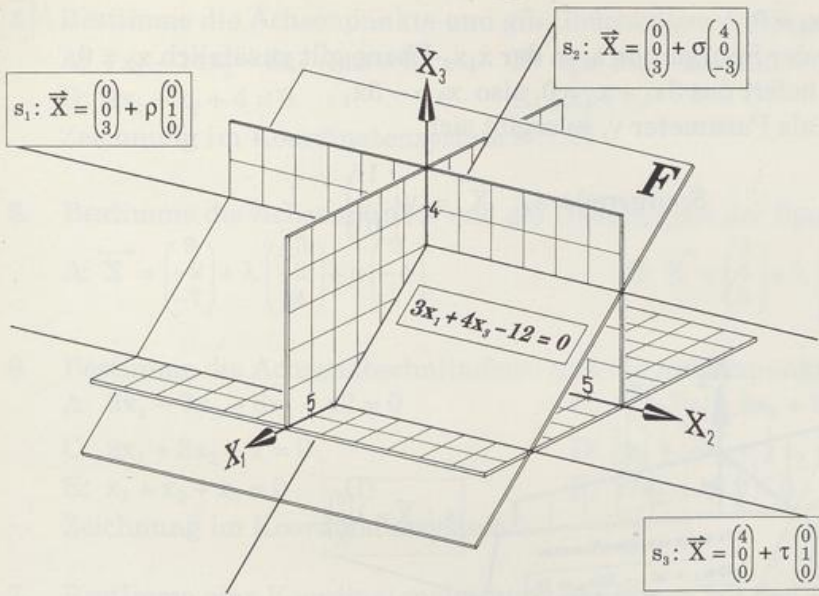
$$s_3: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist die Spurgerade von H in der } x_1x_2\text{-Ebene,}$$

$$s_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ist die Spurgerade von H in der } x_1x_3\text{-Ebene,}$$

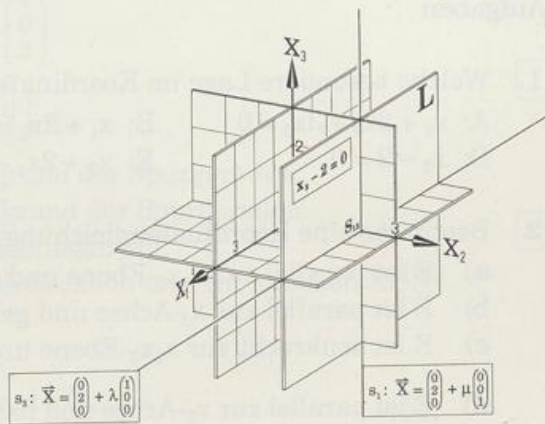
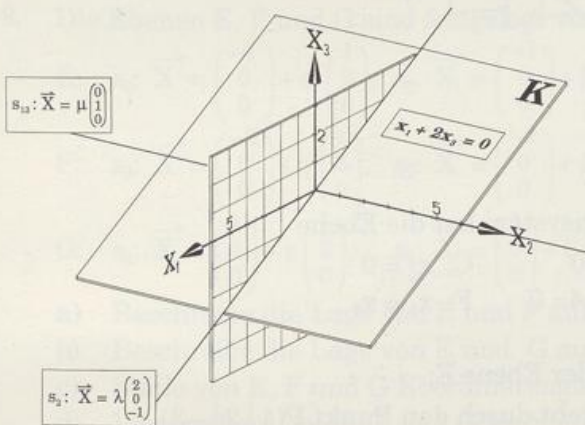
$$s_1: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist die Spurgerade von H in der } x_2x_3\text{-Ebene.}$$

Im allgemeinen bilden die Spurgeraden ein Dreieck mit den Achsenpunkten als Ecken. Dieses Dreieck heißt **Spurdreieck**. Mit ihm läßt sich die Lage einer Ebene im Koordinatensystem besonders gut veranschaulichen.

Ist eine Ebene echt parallel zur  $x_1$ -Achse, so entartet das Spurdreieck zu einer Doppelkreuzung mit einem Parallelenpaar: Jetzt gibts nur 2 Achsenpunkte, 2 Spurgeraden sind parallel zur  $x_1$ -Achse und stehen senkrecht auf der 3. Spurgerade. Enthält eine Ebene die  $x_1$ -Achse, so entartet das Spurdreieck zu einer senkrechten Geradenkreuzung: die eine Spurgerade ist die  $x_1$ -Achse, die andre liegt in der  $x_1x_3$ -Ebene. Zum Beispiel enthält die Ebene K:  $x_1 + 2x_3 = 0$  die  $x_2$ -Achse.



Ist eine Ebene parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene, so entartet das Spurdreieck zu einer senkrechten Geradenkreuzung: Jetzt gibts nur 1 Achsenpunkt, von den beiden Spurgeraden ist die eine parallel zur  $x_1$ -Achse, die andre parallel zur  $x_2$ -Achse.



Am schwierigsten zu veranschaulichen und im Bild wiederzuerkennen sind Ebenen, die durch den Ursprung, aber nicht durch eine Koordinatenachse gehen: Die drei Achsenpunkte fallen im Ursprung zusammen, das Spurdreieck entartet zum Ursprung. Auch die Spurgeraden gehen durch den Ursprung; ihre Gleichungen findet man durch Lösen eines Gleichungssystems.

Beispiel:  $U: 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$

Für die Punkte der Spurgerade  $s_3$  in der  $x_1x_2$ -Ebene gilt zusätzlich  $x_3 = 0$ ,  
in  $U$  eingesetzt liefert das  $3x_1 + x_2 = 0$ , also  $x_2 = -3x_1$ .

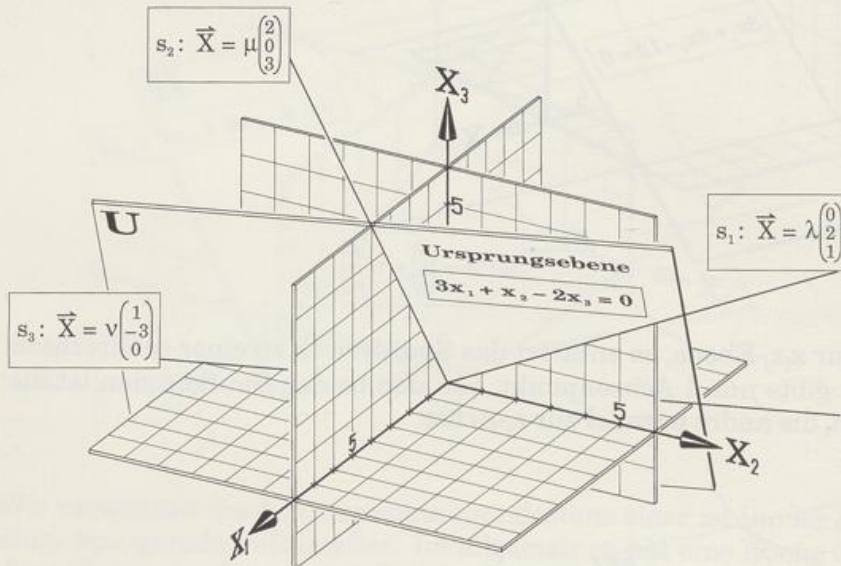
Nimmt man  $x_1$  als Parameter  $v$ , so ergibt sich

$$x_1 = v$$

$$x_2 = -3v$$

$$x_3 = 0$$

$$\text{Spurgerade } s_3: \vec{X} = v \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



### Aufgaben

1. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Ebene

A:  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

B:  $x_1 + 2x_2 = 0$

C:  $x_1 = 0$

D:  $x_2 - 2 = 0$

E:  $x_2 + 2x_3 - 4 = 0$

F:  $x_1 = x_2$

2. Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E:

a) E ist parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene und geht durch den Punkt  $P(1 | 2 | -3)$ .

b) E ist parallel zur  $x_2$ -Achse und geht durch  $P(1 | 0 | 0)$  und  $Q(0 | 0 | 1)$ .

c) E ist senkrecht zur  $x_2x_3$ -Ebene und geht durch O und  $P(0 | 1 | 1)$ .

d) E ist parallel zur  $x_2$ -Achse und hat die Spurgerade  $s_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

e) E ist senkrecht zur  $x_3$ -Achse und geht durch  $P(\pi | \sqrt{17} | 4)$ .

3. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Ebene

A:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

B:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

C:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

D:  $\vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

E:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Bestimme die Achsenpunkte und gib Gleichungen der Spurgeraden an

A:  $7x_1 - 14x_2 - 6x_3 - 42 = 0$

B:  $x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 15 = 0$

C:  $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$

D:  $2x_1 - x_2 + 4 = 0$

E:  $2x_1 = x_2$

F:  $x_2 + 2 = 0$

Zeichnung im Koordinatensystem !

5. Bestimme die Achsenpunkte und gib Gleichungen der Spurgeraden an

A:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

B:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. Bestimme die Achsenabschnittsform und die Achsenpunkte

A:  $3x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 42 = 0$

B:  $x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 21 = 0$

C:  $2x_1 + 3x_2 + 1 = 0$

D:  $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5} = 0$

E:  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  (!)

F:  $17x_2 + 10,2 = 0$

Zeichnung im Koordinatensystem !

7. Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene mit den Achsenpunkten:

a)  $(1|0|0), (0|2|0), (0|0|3)$

b)  $(-2|0|0), (0|2|0), (0|0|-2)$

c) nur  $(0|-3|0)$  und  $(0|0|5)$

d) nur  $(0|0|7)$

Zeichnung im Koordinatensystem !

• 8. Die Ebenen E, F und G sind festgelegt von zwei Spurgeraden:

E:  $s_3: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

F:  $s_3: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

G:  $s_3: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Beschreibe die Lage von E und F aufgrund der Spurgeraden.

b) Beschreibe die Lage von E und G aufgrund der Spurgeraden.

c) Stelle von E, F und G Koordinatengleichungen auf.

d) Veranschauliche E, F und G als Spurdreiecke in unserm üblichen KOSY.

• 9.  $s_3: \vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $s_2: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$  mit  $a, b, c, d \neq 0$

seien Spurgeraden einer Ebene U.

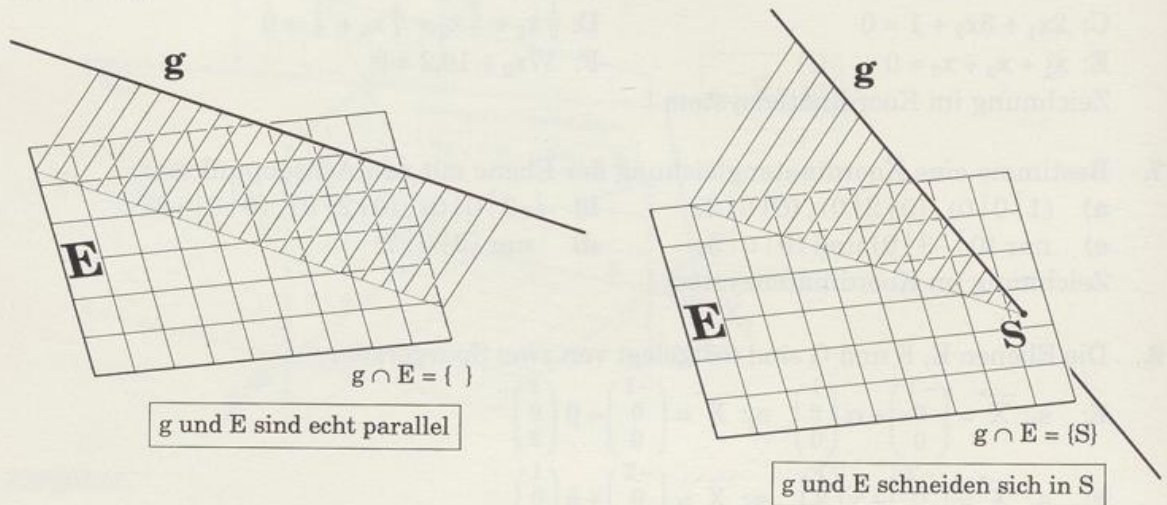
Bestimme eine Gleichung der Spurgerade  $s_1$  in Abhängigkeit von  $a, b, c$  und  $d$ .

10. Eine Ebene sei so festgelegt, daß ihre drei Achsenpunkte vom Ursprung die Entfernung  $e$  ( $>0$ ) haben.

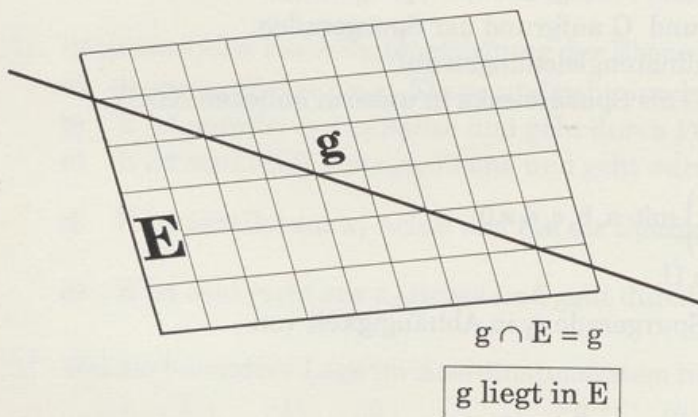
- Wieviel solcher Ebenen sind möglich ?  
Beschreibe sie mit Koordinatengleichungen.
- Welchen Körper begrenzen diese Ebenen ?  
Berechne sein Volumen  $V$  und seine Oberfläche  $F$ .

### 3. Ebene und Gerade

Eine Gerade  $g$  kann eine Ebene  $E$  in einem Punkt schneiden, echt parallel zu  $E$  sein oder in  $E$  liegen.



Um den richtigen Fall herauszufinden, nehmen wir zunächst immer an, daß sich Gerade und Ebene schneiden, und suchen den Schnittpunkt.



#### Parametergleichung der Ebene

Für die Berechnung des Schnittpunkts setzt man die Ortsvektoren der allgemeinen Punkte von Gerade und Ebene gleich. Es ergibt sich ein 3,3-Gleichungssystem für die drei Parameter.

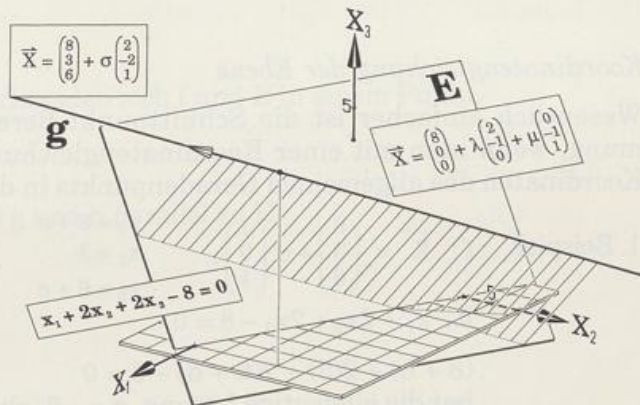
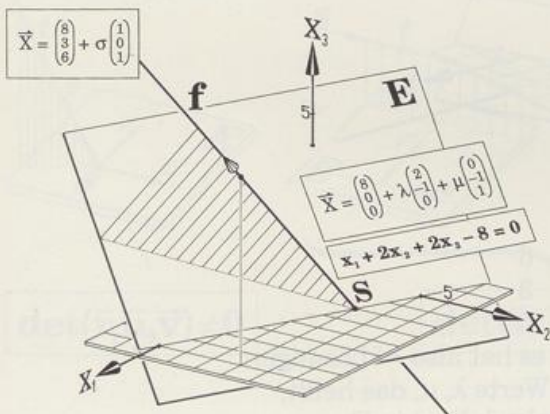
1. Beispiel:

$$\left. \begin{aligned} f: \vec{X} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ E: \vec{X} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \text{ » Gleichsetzen «}$$

$$\begin{array}{l} \text{Das System} \\ \text{I} \quad 2\lambda - \sigma = 0 \\ \text{II} \quad -\lambda - \mu = 3 \\ \text{III} \quad \mu - \sigma = 6 \end{array}$$

hat die eindeutige Lösung  $\sigma = -6$ ,  $\mu = 0$ ,  $\lambda = -3$ .

Durch Einsetzen, zum Beispiel von  $\sigma$  in die Geradengleichung bekommt man den Schnittpunkt  $S(2 \mid 3 \mid 0)$ .



2. Beispiel:

$$\begin{aligned} g: \vec{X} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ E: \vec{X} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{Das System} \\ \text{I} \quad 2\lambda - 2\sigma = 0 \\ \text{II} \quad -\lambda - \mu + 2\sigma = 3 \\ \text{III} \quad \mu - \sigma = 6 \end{array}$$

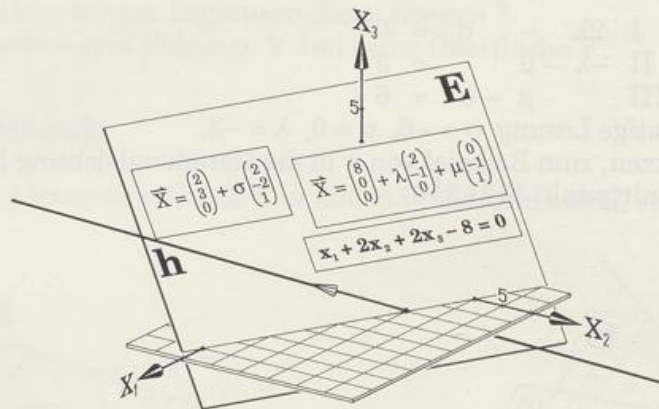
$$\lambda = \sigma$$

führt zu dem Widerspruch:

$$\begin{array}{l} \text{II}' \quad \mu - \sigma = -3 \\ \text{III}' \quad \mu - \sigma = 6 \end{array}$$

Es gibt also keinen Schnittpunkt:  $g$  und  $E$  sind echt parallel.

3. Beispiel:  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Das System  $\begin{array}{l} \text{I} \quad 2\lambda - 2\sigma = -6 \\ \text{II} \quad -\lambda - \mu + 2\sigma = 3 \\ \text{III} \quad \mu - \sigma = 0 \end{array}$

wird gelöst von  $\mu = \sigma$ ,  $\lambda = -3 + \sigma$ ; es hat also  $\infty^1$  Lösungen:  
zu jedem Wert  $\sigma$  gibt es passende Werte  $\lambda, \mu$ , das heißt,  
jeder Geradenpunkt ist Schnittpunkt:  $h$  liegt in  $E$ .

### Koordinatengleichung der Ebene

Wesentlich einfacher ist die Schnittpunkt-Berechnung, und damit die Lagebestimmung, wenn man mit einer Koordinatengleichung der Ebene arbeitet. Man setzt die Koordinaten des allgemeinen Geradenpunkts in die Koordinatengleichung ein.

1. Beispiel:  $f: \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} x_1 = 8 + \sigma \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 6 + \sigma \end{array}$   
 $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8 = 0$

$$(8 + \sigma) + 2(3) + 2(6 + \sigma) - 8 = 0$$

hat die eindeutige Lösung  $\sigma = -6$ , also schneiden sich  $f$  und  $E$  in  $S(2 | 3 | 0)$ .

2. Beispiel:  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8 = 0$$

$8 + 2\sigma + 2(3 - 2\sigma) + 2(6 + \sigma) - 8 = 0 \Rightarrow 18 = 0$ . Wegen des Widerspruchs gibt es keinen Schnittpunkt:  $g$  und  $E$  sind echt parallel.

3. Beispiel:

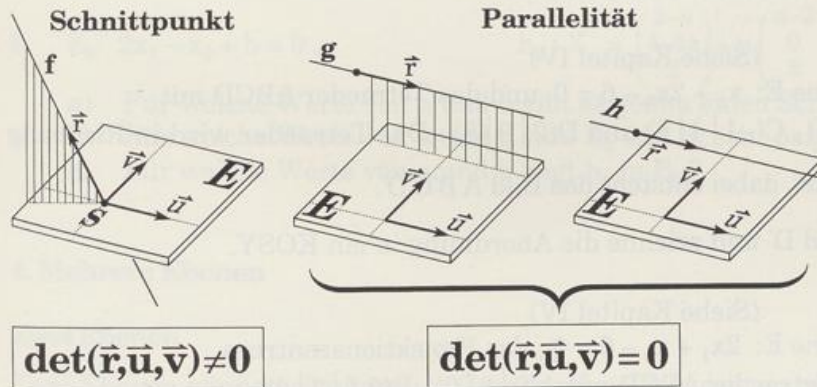
$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8 = 0$$

$$2 + 2\sigma + 2(3 - 2\sigma) + 2(\sigma) - 8 = 0 \Rightarrow 0 \cdot \sigma = 0$$

Für  $\sigma$  ist alles erlaubt, jeder Geradenpunkt ist Schnittpunkt:  $h$  liegt in  $E$ .

Wenn man bloß wissen will, ob sich eine Gerade und eine Ebene (Parametergleichung!) in einem Punkt schneiden oder parallel sind, dann empfiehlt sich der Determinantentest:



In den drei Beispielen sieht das so aus:

1. Beispiel:  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ , also schneiden sich  $f$  und  $E$  in einem Punkt.

2. Beispiel:  $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ , also sind  $g$  und  $h$  parallel zu  $E$ .

### Aufgaben

1.  $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $j: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Bestimme die Lage von Ebene und Gerade.  
Berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

2. Gegeben sind die Ebenen und Geraden:

$$E: x_1 - 2x_2 + x_3 - 1 = 0, \quad F: 2x_1 - x_2 - x_3 - 8 = 0$$

$$a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c: \vec{X} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme von jeder Gerade ihre Lage zu E und F.  
Berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

- 3. **Parallelprojektion** (Siehe Kapitel IV)  
Gegeben sind die Ebene E:  $x_1 + 2x_3 - 6 = 0$  und das Tetraeder ABCD mit  $A(2 | 0 | 5)$ ,  $B(-1 | 2 | 0)$ ,  $C(-1 | 4 | 8)$  und  $D(2 | 0 | 8)$ . Das Tetraeder wird in Richtung  $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  in E projiziert, dabei entsteht das Bild A'B'C'D'.  
Berechne A', B', C' und D' und zeichne die Anordnung in ein KOSY.
- 4. **Zentralprojektion** (Siehe Kapitel IV)  
Gegeben sind die Ebene E:  $2x_1 + x_2 - 6 = 0$ , das Projektionszentrum  $Z(11 | 8 | 0)$  und das Tetraeder ABCD mit  $A(9 | 6 | 0)$ ,  $B(5,5 | 7 | 3)$ ,  $C(6 | 6 | 1)$  und  $D(8 | 6 | 2)$ . Das Tetraeder wird zentral in die Ebene E projiziert, dabei entsteht das Bild A'B'C'D'.  
Berechne A', B', C' und D' und zeichne die Anordnung in ein KOSY.
- 5. Die Würfecken A, C, F und H sind die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders. (Siehe Aufgabe 17. auf Seite 177)
  - a) In welchem Punkt schneidet die Raumdiagonale HB die Ebene ACF?
  - b) In welchen Punkten schneidet die Gerade durch die Kantenmitten von [GC] und [AE] das Tetraeder?

• 6.  $A(2|-1|0)$ ,  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Stelle eine Gleichung der Gerade  $k$  auf, die durch  $A$  geht und  $g$  und  $h$  schneidet.  
Berechne die Schnittpunkte.

Ein möglicher Lösungsweg führt über eine Hilfsebene  $H$  zum Ergebnis.  
(Tip:  $H$  geht durch  $A$  und eine der beiden Geraden, Skizze hilft!).

7.  $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $g_a: \vec{X} = \sigma \begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ 1 \end{pmatrix}$

Welche Schargerade ist parallel zu  $E$ ? Ist sie echt parallel?

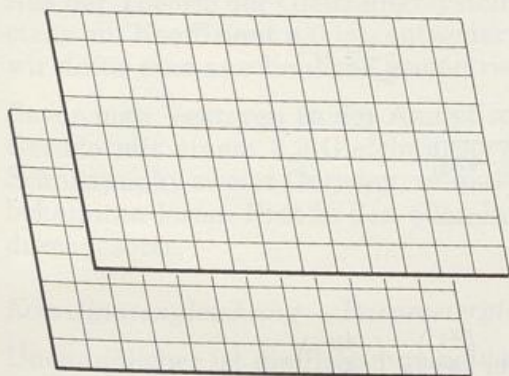
• 8.  $E_b: 2x_1 - x_2 + b = 0$ ,  $h_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 4-2a \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Für welche Werte von  $a$  und  $b$  gibt es genau einen Schnittpunkt?
- Für welche Werte von  $a$  und  $b$  sind  $E_b$  und  $h_a$  echt parallel?
- Für welche Werte von  $a$  und  $b$  liegt  $h_a$  in  $E_b$ ?

#### 4. Mehrere Ebenen

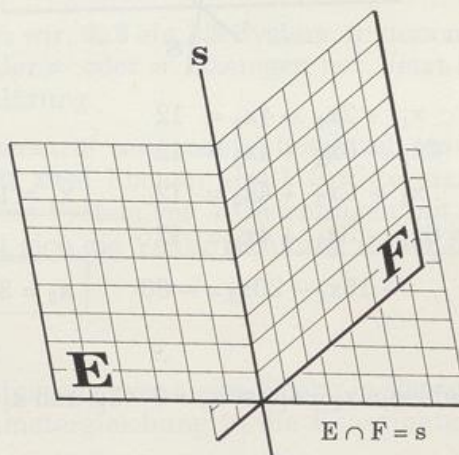
##### Zwei Ebenen

Zwei Ebenen können sich in einer Gerade schneiden, echt parallel oder identisch sein.



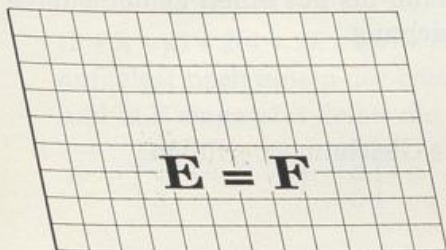
$$E \cap F = \{ \}$$

E und F sind echt parallel



$$E \cap F = s$$

E und F schneiden sich in  $s$

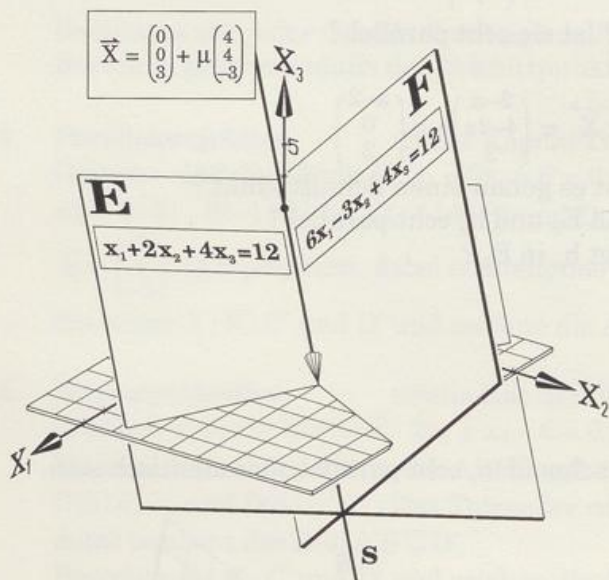


E und F sind identisch

Um den richtigen Fall herauszufinden, nehmen wir zunächst immer an, daß sich beide Ebenen schneiden, und suchen die Schnittgerade. Die Berechnung der Schnittgerade ist mit Koordinatengleichungen am einfachsten.

### Koordinatengleichung – Koordinatengleichung

Die Koordinaten der Punkte, die in beiden Ebenen liegen, müssen beide Koordinatengleichungen erfüllen, also Lösungen eines 2,3-Gleichungssystems sein.



$$\text{E: } x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12$$

$$\text{F: } 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$$

$$\text{I } x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12$$

$$x_1 = 12 - 2x_2 - 4x_3$$

$$\text{II } 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$$

$$\text{II' } -15x_2 - 20x_3 = -60$$

$$x_3 = 3 - \frac{3}{4}x_2$$

Bei Wahl von  $x_2 = 4\mu$  ist  $x_3 = 3 - 3\mu$  und  $x_1 = 4\mu$ , oder  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\mu \\ 4\mu \\ 3 - 3\mu \end{pmatrix}$

Gleichung der Schnittgerade s von E und F:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

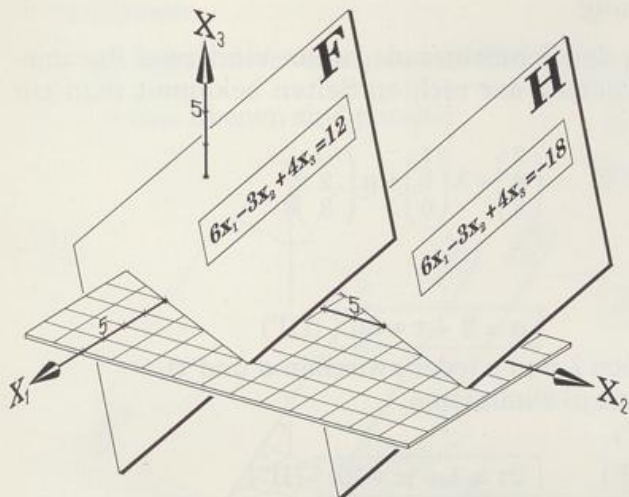
Die Parallelität zweier Ebenen erkennt man bei Koordinatengleichungen mit einem Blick: Die Koeffizienten der  $x_i$  der einen Gleichung sind bis auf einen gemeinsamen Faktor identisch mit den Koeffizienten der andern Gleichung:

$$\text{F: } 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$$

$$\text{H: } 12x_1 - 6x_2 + 8x_3 = -36$$

Es gibt keinen Punkt, dessen Koordinaten beide Gleichungen erfüllen.

H und F sind echt parallel.



Ist die ganze Gleichung der einen Ebene ein Vielfaches der andern, so sind beide Ebenen identisch:

$$F: 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 12$$

$$G: -3x_1 + 1,5x_2 - 2x_3 = -6$$

Die Gleichung von F ist das  $(-2)$ -fache der Gleichung von G.

F und G sind identisch.

Aus der Theorie der Gleichungssysteme wissen wir, daß ein 2,3-System, in dem mindestens ein Koeffizient  $\neq 0$  ist, entweder keine oder  $\infty^1$  oder  $\infty^2$  Lösungen hat. Jetzt haben wir dafür eine anschauliche geometrische Erklärung.

Bevor man Vektoren in der Analytischen Geometrie verwendete, beschrieb man eine Gerade mit einem 2,3-Gleichungssystem (mit zwei Ebenen also!). Suchte man den Schnittpunkt zweier Geraden, so mußte man ein System von 4 Gleichungen mit 3 Unbekannten lösen. Erst in den 60er-Jahren hat sich die Vektorrechnung in der Schule durchgesetzt.

### Koordinatengleichung - Parametergleichung

Umständlicher ist die Bestimmung der Schnittgerade, wenn eine Ebene in Parametergleichung vorliegt. Man setzt die  $x_i$  der Parametergleichung in die Koordinatengleichung ein:

$$E: x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 12$$

$$F: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \lambda - \mu \\ 4 + 2\lambda + 2\mu \\ 3 + 3\mu \end{pmatrix} \text{ in E eingesetzt ergibt}$$

$$(2 + \lambda - \mu) + 2(4 + 2\lambda + 2\mu) + 4(3 + 3\mu) = 12, \quad 5\lambda + 15\mu = -10,$$

$$\text{aufgelöst nach einem der beiden Parameter} \quad \lambda = -2 - 3\mu$$

und in F eingesetzt liefert die Gleichung der Schnittgerade

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2 - 3\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

### Parametergleichung – Parametergleichung

Noch langwieriger wird die Berechnung der Schnittgerade, wenn man zwei Parametergleichungen verwendet. Durch Gleichsetzen der rechten Seiten bekommt man ein 3,4-System:

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad F: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$I \quad -6\sigma + 2\tau - \lambda + \mu = -4$$

$$II \quad \sigma + \tau - 2\lambda - 2\mu = 3$$

$$III \quad \sigma - \tau - 3\mu = 2$$

$$\sigma = 2 + \tau + 3\mu \quad (III')$$

Wir brauchen eine Beziehung zwischen  $\lambda$  und  $\mu$  (oder zwischen  $\sigma$  und  $\tau$ ). Deshalb muß man  $\sigma$  und  $\tau$  (oder  $\lambda$  und  $\mu$ ) eliminieren.

$$III' \text{ in } I \quad 4\tau + \lambda + 17\mu = -8 \quad (I')$$

$$III' \text{ in } II \quad 2\tau - 2\lambda + \mu = 1 \quad (II'') \quad 2\tau = 1 - \mu + 2\lambda \quad (II''')$$

$$II'' \text{ in } I' \quad 5\lambda + 15\mu = -10,$$

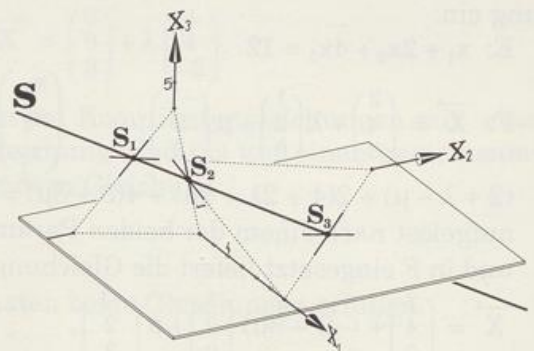
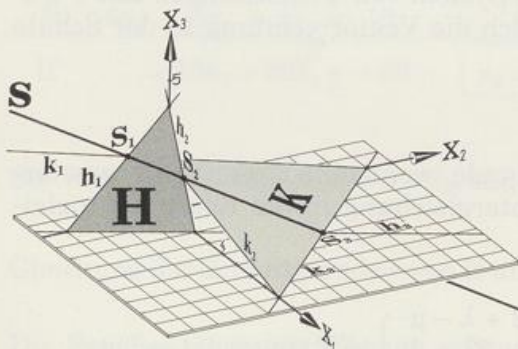
$\lambda = -2 - 3\mu$  eingesetzt in F liefert wieder die Gleichung der Schnittgerade.

Kennt man die Spurgeraden zweier Ebenen, so geht die Zeichnung der Schnittgerade leicht von der Hand: Die Schnittgerade verbindet nämlich die Schnittpunkte von je zwei Spurgeraden in derselben Koordinatenebene.

Beispiel: H:  $2x_1 - x_2 + x_3 - 4 = 0$   
hat die Achsenpunkte  $H_{12}(0|0|4)$ ,  $H_{13}(0|-4|0)$  und  $H_{23}(2|0|0)$ .

K:  $x_1 + x_2 + 4x_3 - 8 = 0$   
hat die Achsenpunkte  $K_{12}(0|0|2)$ ,  $K_{13}(0|8|0)$  und  $K_{23}(8|0|0)$ .

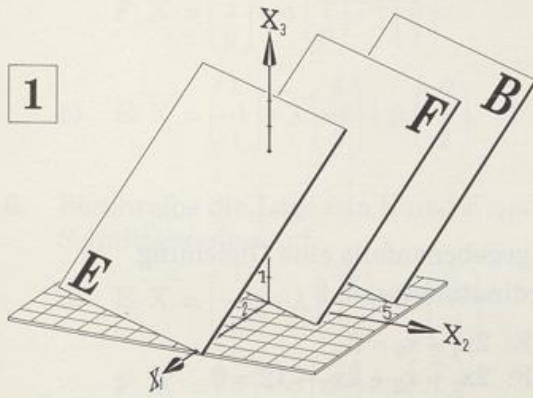
H und K schneiden sich in s:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ .



### Drei Ebenen

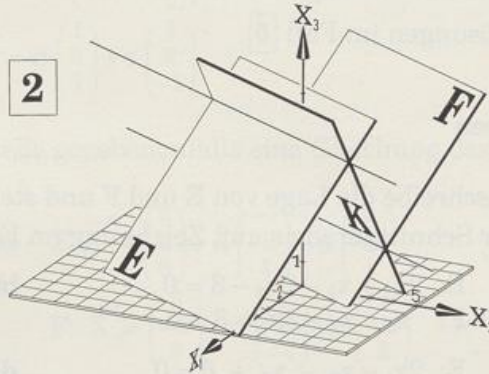
Für die Lage dreier verschiedener Ebenen gibt es fünf charakteristische Fälle:

1 die drei Ebenen sind parallel

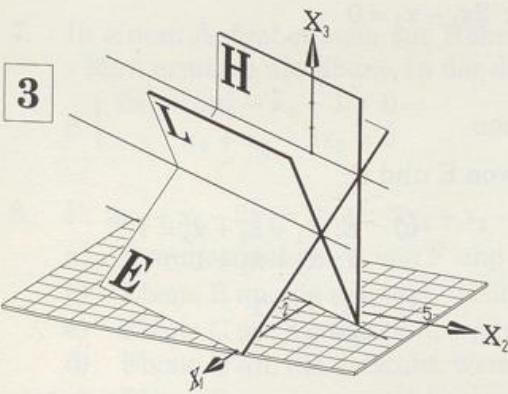


2 genau zwei Ebenen sind parallel;

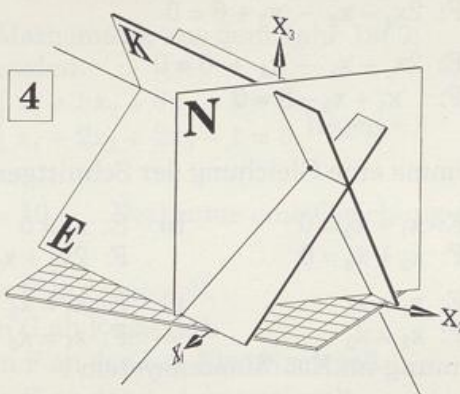
es gibt genau zwei parallele Schnittgeraden



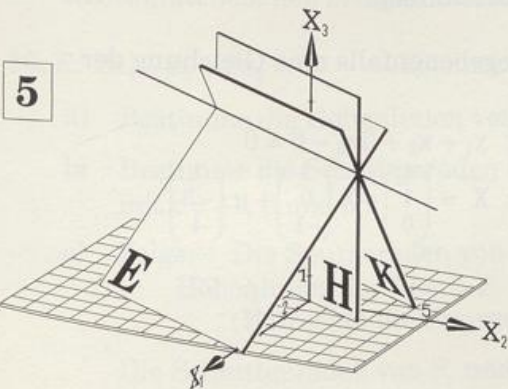
3 es gibt drei parallele Schnittgeraden



4 es gibt genau einen gemeinsamen Punkt



5 es gibt genau eine gemeinsame Schnittgerade



Sind die drei Ebenen durch Koordinatengleichungen gegeben (wir betrachten nur diesen Fall), dann müssen gemeinsame Punkte das zugehörige 3,3-Gleichungssystem erfüllen. Die fünf Fälle veranschaulichen die möglichen Lösungsmengen, die wir vom 3,3-System kennen:

- keine Lösung in den Fällen **1**, **2** und **3**
- genau eine Lösung im Fall **4**
- $\infty^1$  Lösungen im Fall **5**

### Aufgaben

**1.** Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf. Zeichnung im Koordinatensystem !

- |   |  |
|---|--|
| a) E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$<br>F: $x_1 - x_2 + 3x_3 - 3 = 0$  | b) E: $2x_1 - x_2 = 0$<br>F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$            |
| c) E: $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$<br>F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$ | d) E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$<br>F: $2x_1 - x_2 + 2x_3 + 8 = 0$ |
| e) E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$<br>F: $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$      | f) E: $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$<br>F: $2x_1 - x_2 = 0$                  |
| g) E: $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$<br>F: $x_1 + x_2 - 3 = 0$          |  |

**2.** Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade von E und F:

- |   |  |   |
|---|--|---|
| a) E: $x_1 + x_2 = 0$<br>F: $x_2 + x_3 = 0$ | b) E: $x_1 = 0$<br>F: $2x_2 + x_3 = 1$ | c) E: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$<br>F: $x_1 + x_2 = 1$ |
| d) E: $x_1 = x_2$<br>F: $x_2 = x_3$         | e) E: $x_1 = x_2$<br>F: $x_1 = x_3$    | f) E: $x_1 = 1$<br>F: $x_2 = 2$                   |

Zeichnung im Koordinatensystem !

**3.** E:  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$   
F:  $2x_1 + x_2 + x_3 + 4 = 0$

Wähle der Reihe nach  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  als Parameter und versuche, jeweils eine Gleichung der Schnittgerade zu bestimmen.

**4.** Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf.

- |   |  |
|---|--|
| a) E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0$<br>F: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | b) E: $x_1 + x_2 + 3x_3 - 6 = 0$<br>F: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
|---|--|

5. Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade von E und F

$$\text{a) } \begin{aligned} \text{E: } \vec{X} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{b) } \text{E: } \vec{X} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \text{F: } \vec{X} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{F: } \vec{X} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \text{E: } \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{F: } \vec{X} = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6. Beschreibe die Lage von E und F und stelle gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgerade s auf.

$$\text{a) } \begin{aligned} \text{E: } \vec{X} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{b) } \text{E: } \vec{X} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{F: } \vec{X} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} & \text{F: } \vec{X} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \text{E: } \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{F: } \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

7. In einem Aufgabenbuch zur Höheren Mathematik aus dem Jahr 1960:  
» Man ermittle die Ebene, in der die Geraden

$$g: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{und } h: \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \end{cases} \text{ liegen.} \llcorner$$

8. F:  $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ , G:  $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10$ . Bestimme eine Gleichung der

- Symmetrieebene A von F und G.
- Ebene B an, die entsteht, wenn man F an G spiegelt.
- Ebene C an, die entsteht, wenn man G an F spiegelt.
- Ebene D an, die entsteht, wenn man F an der  $x_1x_2$ -Ebene spiegelt.
- Ebene E an, die entsteht, wenn man G an der  $x_2$ -Achse spiegelt.

9. E:  $3x_1 + 2x_2 - x_3 + 18 = 0$

Bestimme Gleichungen der Spurgeraden von E, indem du E zum Schnitt mit den Koordinatenebenen bringst. Zeichnung im Koordinatensystem !

10. E:  $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$  Zeichnung im Koordinatensystem !

- Bestimme die Höhenlinien von E in den Höhen  $-1$ ,  $0$  und  $5$  über der  $x_1x_2$ -Ebene.
- Bestimme die Schnittgeraden von E und Ebene  $F_c: x_1 + 2x_2 + c = 0$  mit  $c = -1, 0$  und  $5$ .
- Zeige: Die Spurgeraden von  $F_c$  in der  $x_1x_2$ -Ebene stehen senkrecht auf den Höhenlinien der Ebene E.  
(Betrachte die Spurgeraden im ebenen  $x_1x_2$ -Koordinatensystem.)

Die Schnittgeraden von  $F_c$  und E heißen auch *Fall-Linien* der Ebene E.

Eine Kugel rollt auf einer Fall-Linie hinab in die  $x_1x_2$ -Ebene.

•11.  $A(2 \mid -1 \mid 2)$ ,  $B(0 \mid -2 \mid -1)$ ,  $C(6 \mid 1 \mid 1)$

$R(-3 \mid 1 \mid -3)$ ,  $S(-2 \mid 2 \mid -1)$ ,  $T(-4 \mid 2 \mid -2)$

Die Abhänge eines Bergs seien angenähert die Ebenen ABC und RST.

Wegen der langen Verwitterung ist der Grat  $g$  nicht mehr vorhanden.

Dank Analytischer Geometrie läßt sich sein Verlauf rekonstruieren:

Bestimme eine Gleichung von  $g$ .

Berechne die Gratpunkte in den Höhen 0 und 9 über der  $x_1x_2$ -Ebene.

Zeichnung im Koordinatensystem !

12. Deute das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

geometrisch (zwei Möglichkeiten!). Zeige, daß es nur die Lösung  $(0 \mid 0 \mid 0)$  hat.  
Was bedeutet das in den beiden Interpretationen ?

13. Deute das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 13 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$

geometrisch (zwei Möglichkeiten!).

Welche geometrische Bedeutung hat die Lösung ?

14. A:  $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$   
B:  $x_1 + x_2 - 3 = 0$   
C:  $2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$   
D:  $2x_1 - x_2 = 0$   
E:  $2x_1 - x_2 + x_3 - 6 = 0$

Bestimme eine Gleichung der Ebene  $F$ ,  
die durch die Schnittgerade von  $D$  und  $E$  geht  
und den Schnittpunkt von  $A$ ,  $B$  und  $C$  enthält.

15. A:  $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3 = 0$   
B:  $5x_1 - x_2 - 5 = 0$   
C:  $3x_2 - 2x_3 + 2 = 0$   
D:  $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

Zeige, daß sich die vier Ebenen in einem Punkt  
schneiden, und berechne diesen Punkt.

## 5. Ebenenscharen

Enthält eine Koordinatengleichung auch Parameter, dann beschreibt diese Gleichung eine Ebenenschar. Die Parameter heißen **Scharparameter**. Wir behandeln nur Scharen, bei denen die Parameter linear vorkommen, zum Beispiel

$$E_a: x_1 + (2-a)x_2 + (a-1)x_3 - 4 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

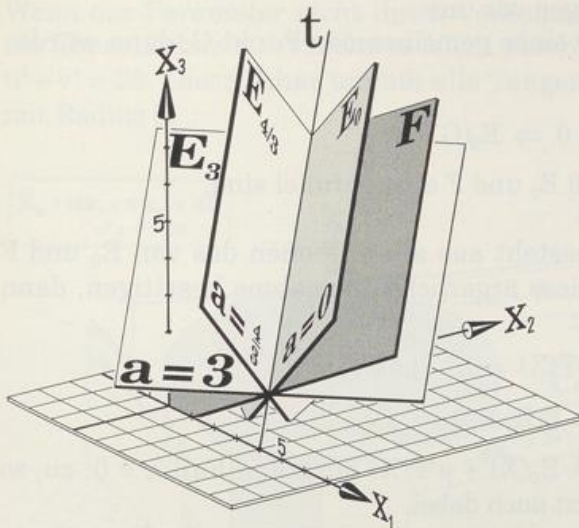
Um die Lage der Scharebenen besser zu überblicken, sortieren wir:

$$E_a: [x_1 + 2x_2 - x_3 - 4] + a[-x_2 + x_3] = 0$$

Eine Kurzschreibweise der Koordinatengleichung macht die Darstellung übersichtlicher. Die linke Seite einer Gleichung  $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$  bezeichnen wir mit  $E(X)$ . Eine Ebene  $E$  ist damit festgelegt durch  $E(X) = 0$ , die Schar  $E_a$  durch  $E_a(X) = 0$ . In der Gleichung der Schar  $E_a$  erkennen wir jetzt zwei Ebenen  $E_0$  und  $F$

$$E_0: x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0 \quad \text{und} \quad F: -x_2 + x_3 = 0.$$

Kurzschreibweise für  $E_a$ :  $E_0(X) + a \cdot F(X) = 0$ .



$$E_a: x_1 + (2-a)x_2 + (a-1)x_3 - 4 = 0$$

Für einen gemeinsamen Punkt  $S$  von  $E_0$  und  $F$  gilt:  $E_0(S) = 0$  und  $F(S) = 0$ . Damit ist auch  $E_a(S) = 0$ . Also liegt *jeder* Schnittpunkt von  $E_0$  und  $F$  auch in *jeder* Scharebene  $E_a$ . Zwei Ebenen mit *einem* gemeinsamen Punkt haben immer eine Gerade gemeinsam. Das heißt, alle Ebenen der Schar  $E_a$  gehen durch die Schnittgerade von  $E_0$  und  $F$ .

Die Menge der Ebenen, die sich alle in ein und derselben Gerade schneiden, heißt **Ebenenbüschel**. Die gemeinsame Schnittgerade heißt **Trägergerade**.

Um die Trägergerade  $t$  zu berechnen, bringt man  $E_0$  und  $F$  zum Schnitt. In unserm

Beispiel ergibt sich  $t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wie wir wissen, geht jede Scharebene mit der Gleichung  $E_0(X) + a \cdot F(X) = 0$  durch die Trägergerade  $t$ . Es gilt aber auch (fast) die Umkehrung:

Jede Ebene (außer  $F$ ) ist in der Schar vertreten, die die Trägergerade enthält.

Beweis:  $T \neq F$  sei eine beliebige Ebene durch  $t$  und  $P$  einer ihrer Punkte, der nicht auf  $t$  liegt.

Wir hätten gern:  $T(X) = E_0(X) + a_t F(X)$ .

Setzen wir  $P$  ein, dann ergibt sich

$$T(P) = 0 = E_0(P) + a_t F(P), \Rightarrow a_t = -\frac{E_0(P)}{F(P)}$$

Der Nenner ist ungleich null, weil  $P$  nicht auf  $F$  liegt.  $E_{a_t} = T$ , qed.

### Zusammenfassung

Schneiden sich  $E_0$  und  $F$  in  $t$ , so besteht die Schar  $E_a: E_0(X) + a \cdot F(X) = 0$  aus allen Ebenen (bis auf  $F$ ), die die Trägergerade  $t$  enthalten.

Sind  $E_0$  und  $F$  echt parallel, so besteht die Schar  $E_a: E_0(X) + a \cdot F(X) = 0$  aus allen Ebenen (bis auf  $F$ ), die parallel zu  $E_0$  sind.

Als Begründung für den zweiten Teil überlegen wir uns:

Hätten zwei Ebenen  $E_{a_1} \neq E_{a_2}$  der Schar einen gemeinsamen Punkt  $G$ , dann würde gelten

$$\left. \begin{array}{l} E_0(G) + a_1 F(G) = 0 \\ E_0(G) + a_2 F(G) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F(G) = 0 \Rightarrow E_0(G) = 0 \zeta$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, daß  $E_0$  und  $F$  echt parallel sind.

Die Schar  $E_a$  mit  $E_a(X) = E_0(X) + a \cdot F(X)$  besteht aus allen Ebenen des von  $E_0$  und  $F$  erzeugten Büschels, bis auf  $F$ . Will man diese ärgerliche Ausnahme beseitigen, dann muß man zwei Parameter in Kauf nehmen:

Setzt man  $a = \frac{\mu}{\lambda}$ , so ergibt sich  $E_0(X) + \frac{\mu}{\lambda} \cdot F(X) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$   
 beziehungsweise  $\lambda \cdot E_0(X) + \mu \cdot F(X) = 0$

Läßt man in der Schar  $E_{\lambda,\mu}$  mit  $E_{\lambda,\mu}(X) = \lambda \cdot E_0(X) + \mu \cdot F(X)$  auch den Fall  $\lambda = 0$  zu, so ergibt sich  $E_{0,\mu} = F$  für alle  $\mu \neq 0$ , und  $F$  ist jetzt auch dabei.

Außer dem Nachteil des zusätzlichen Parameters müssen wir uns jetzt auch noch damit abfinden, daß jede Ebene  $E_a$  durch unendlich viele Paare  $\lambda, \mu$  von Parametern beschrieben wird, von denen mindestens einer ungleich 0 sein muß. Es gilt nämlich

$a = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{k\mu}{k\lambda}$  mit  $k \neq 0$ . Das Ebenenbüschel des Beispiels hat die Gleichung

$$E_{\lambda,\mu}: \lambda x_1 + (2\lambda - \mu)x_2 + (\mu - \lambda)x_3 - 4\lambda = 0 \quad (\lambda | \mu) \neq (0 | 0)$$

Die Menge der Ebenen, die genau einen Punkt  $T$  gemeinsam haben, heißt **Ebenenbündel**; der gemeinsame Punkt  $T$  heißt **Trägerpunkt**.

Schneiden sich die Ebenen  $E, F$  und  $G$  im Punkt  $T$ , dann enthält jede Ebene der Schar  $E_{a,b}$  mit  $E_{a,b}(X) = E(X) + a \cdot F(X) + b \cdot G(X)$  diesen Punkt, sie gehört also zum Bündel. Es gilt nämlich  $E_{a,b}(T) = E(T) + a \cdot F(T) + b \cdot G(T) = 0 + a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$ .

Die Ebenen  $F$  und  $G$  des Bündels fehlen in der Schar. Mit einem zusätzlichen Parameter können wir auch sie aufnehmen. Setzt man  $a = \frac{\mu}{\lambda}$  und  $b = \frac{\nu}{\lambda}$ , so ergibt sich

$E_{\lambda,\mu,\nu}(X) = \lambda \cdot E(X) + \mu \cdot F(X) + \nu \cdot G(X)$ , wobei mindestens ein Parameter ungleich null sein muß. So gilt zum Beispiel  $E_{0,\mu,0} = F$  für  $\mu \neq 0$ .

1. Beispiel: Die drei Koordinatenebenen  $E_i: x_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) erzeugen das Bündel  $E_{\lambda,\mu,\nu}: \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = 0$  mit dem Trägerpunkt  $T(0|0|0)$ .

2. Beispiel:  $E_{\lambda,\mu,\nu}: (2\lambda + \mu + 2\nu)x_1 + (\mu - \lambda - \nu)x_2 + (2\lambda - \nu)x_3 - (3\mu + 12\lambda - 6\nu) = 0$   
 Um die erzeugenden Ebenen zu erkennen, sortieren wir nach  $\lambda, \mu$  und  $\nu$ :  
 $\lambda(2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12) + \mu(x_1 + x_2 - 3) + \nu(2x_1 - x_2 - x_3 + 6) = 0$

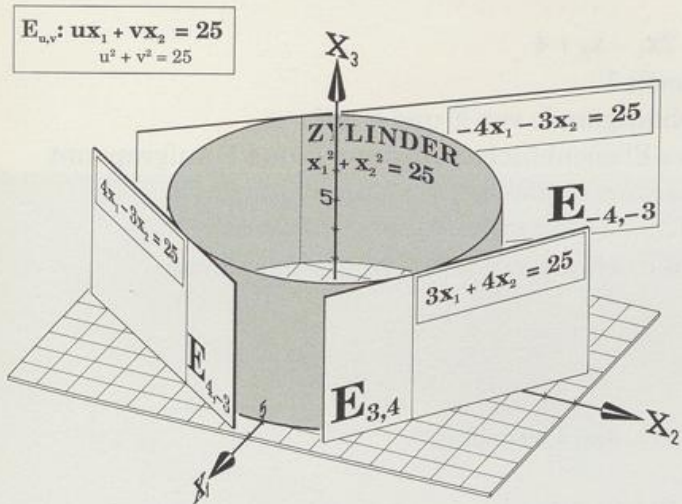
$E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12 = 0$

$F: x_1 + x_2 - 3 = 0$

$G: 2x_1 - x_2 - x_3 + 6 = 0$

$E, F$  und  $G$  erzeugen das Bündel; ihr Schnittpunkt  $T(1|2|6)$  ist der Trägerpunkt (siehe Bild 4 im Abschnitt 4). Dasselbe Bündel läßt sich auch einfacher darstellen, wenn man erzeugende Ebenen wählt, die parallel sind zu den Koordinatenebenen:  $E_{\rho,\sigma,\tau}: \rho(x_1 - 1) + \sigma(x_2 - 2) + \tau(x_3 - 6) = 0$   
 $E_{\rho,\sigma,\tau}: \rho x_1 + \sigma x_2 + \tau x_3 - (\rho + 2\sigma + 6\tau) = 0$

Wenn der Parameter nicht linear vorkommt, dann läßt sich – außer in Sonderfällen – die Ebenenschar nicht mehr so leicht überblicken, zum Beispiel  $E_{u,v}: ux_1 + vx_2 = 25$  mit  $u^2 + v^2 = 25$ . Diese Schar umfaßt alle Tangentialebenen eines Zylinders um die  $x_3$ -Achse mit Radius 5.



### Aufgaben

1. Bestimme eine Gleichung der Trägergerade  $t$  der Schar  $E_a$ . Gib eine Gleichung der Ebene des zugehörigen Büschels an, die nicht in der Schar ist.
  - a)  $E_a: ax_1 + (1+a)x_2 - 2x_3 = 6$
  - b)  $E_a: (1-a)x_1 + (1+a)x_2 = a$
  - c)  $E_a: x_1 + (2-3a)x_2 - (3-2a)x_3 = 0$
  
2. Die Schar  $E_a$  werde aufgespannt von den Ebenen  $E_0$  und  $F$ . Bestimme in der Schar  $E_a$  die Ebene, die den Punkt  $P(1 | -1 | 1)$  enthält.
 

|                               |                                  |
|-------------------------------|----------------------------------|
| a) $E_0: x_1 + x_2 + x_3 = 2$ | b) $E_0: 2x_1 + x_2 - x_3 = 0$   |
| $F: x_1 + x_2 = 2$            | $F: x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$        |
| c) $E_0: 2x_1 = 2$            | d) $E_0: 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$ |
| $F: x_2 = 1$                  | $F: x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2$       |
  
- 3. Stelle eine Gleichung des Ebenenbüschels  $E_{\lambda,\mu}$  auf
  - a) mit der Trägergerade  $t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
  - b) mit der Trägergerade  $t: \vec{X} = \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - c) das alle Ebenen enthält, die parallel sind zur Ebene  $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1992$
  - d) das alle Ebenen enthält, die parallel sind zur  $x_1$ -Achse und  $\perp$  Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  / zu

4. Von Ebenen, die in Parameterform vorliegen, findet man die Schnittgerade, wenn auch mühsam, durch Gleichsetzen (Seite 194). Jemand will dieses Verfahren auf die Koordinatengleichungen anwenden und setzt die beiden linken Seiten der Gleichungen gleich:

$$E: x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 0$$

$$F: 2x_1 - x_3 + 4 = 0$$

$$\text{Gleichsetzen: } x_1 - x_2 + 2x_3 - 4 = 2x_1 - x_3 + 4$$

- Was hat er wirklich bekommen ?
- Stelle eine Gleichung der Schnittgerade von E und F auf.
- Bestimme eine Gleichung des Ebenenbüschels, das von E und F aufgespannt wird. Für welchen Parameterwert ergibt sich die Ebene H:  $x_1 + x_2 - 3x_3 + 8 = 0$ . Welcher Zusammenhang besteht zu a) ?
- Zeige durch Rechnung, daß die Schnittgerade von b) in jeder Ebene des Büschels liegt.

5.  $E_a: x_1 + ax_2 + (2-a)x_3 = 2a + 4$

- Welche Scharebene geht durch den Ursprung, welche durch  $(1|1|1)$  ?
- Welche Scharebene ist parallel zur  $x_3$ -Achse ?
- Welche Scharebene hat ein gleichseitiges Spurdreieck ?
- Welche Scharebene steht senkrecht auf der  $x_1x_3$ -Ebene ?
- Welche Scharebene ist parallel zur Gerade  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ?

• 6.  $E_a: x_1 + (1-2a)x_2 + ax_3 = 1$

$$F_b: x_1 + bx_2 + (1-2b)x_3 = 1$$

- Begründe, daß keine Scharebene  $E_a$  durch den Ursprung geht.
- Bestimme die Trägergerade von  $E_a$ . Welche Ebene fehlt in der Schar?
- Die Schnittgeraden  $s_a$  von  $E_a$  und  $F_a$  bilden eine Schar mit dem Parameter a. Bestimme eine Gleichung von  $s_a$ . Was ist los bei  $a = \frac{1}{3}$  ?
- Für welche Werte von a und b ist die Schnittgerade von  $E_a$  und  $F_b$  parallel zur  $x_2$ -Achse ?
- Kann die  $x_1$ -Achse Schnittgerade von  $E_a$  und  $F_b$  sein ?

• 7. E:  $x_1 + x_2 = 0$

$$F: x_2 + x_3 = 0$$

$$G: 2x_1 - x_2 - x_3 = 4$$

- Stelle eine Gleichung des Ebenenbündels  $H_{\lambda,\mu,\nu}$  auf, das von E, F und G aufgespannt wird. Gib den Trägerpunkt T an.
- Stelle eine Gleichung des Ebenenbüschels  $K_{\sigma,\tau}$  auf, das im Bündel  $H_{\lambda,\mu,\nu}$  steckt und den Ursprung enthält.
- Bestimme eine Gleichung der Trägergerade t des Büschels  $H_{\lambda,0,\nu}$ .
- Bestimme eine möglichst einfache Darstellung  $L_{\alpha,\beta,\gamma}$  von  $H_{\lambda,\mu,\nu}$ .
- Welche Scharebene von  $H_{\lambda,\mu,\nu}$  ist parallel zur  $x_1x_2$ -Ebene ? Welche Scharebenen sind parallel zur  $x_1$ -Achse ?

## IX. Skalarprodukt



Die Geometrie, mit der wir uns bisher beschäftigt haben, heißt auch **affine Geometrie**. Die affine Geometrie handelt von den Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen. Man nennt sie auch Inzidenzgeometrie (*incidere* hineinfallen). Typische Begriffe der affinen Geometrie sind Schnittpunkt, Schnittgerade, Parallelität und Teilverhältnis. Affine Eigenschaften bleiben bei Parallelprojektionen erhalten; deshalb geben unsere zweidimensionalen Zeichnungen alle affinen Verhältnisse der dreidimensionalen Figuren richtig wieder. Längen und Winkel dagegen sind in diesen Zeichnungen meistens verzerrt.

Wir wenden uns jetzt dem Teil der Analytischen Geometrie zu, der sich mit der Berechnung von Längen und Winkeln befaßt. Er heißt **metrische Geometrie**. Für das Folgende setzen wir zur Vereinfachung ein kartesisches Koordinatensystem voraus. Seine Basisvektoren haben die Länge 1 und stehen paarweise aufeinander senkrecht. Das wichtigste Hilfsmittel der metrischen Geometrie ist das Skalarprodukt.

### 1. Länge eines Vektors

Die Länge eines Vektors  $\vec{a}$  bezeichnet man mit  $|\vec{a}|$  oder kurz mit  $a$ :  $|\vec{a}| = a$ .

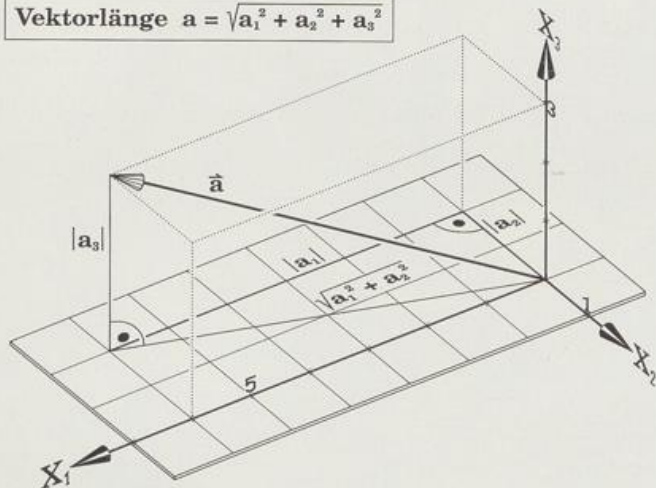
$|\vec{a}|$  heißt auch **Betrag** von  $\vec{a}$ . Die Länge von  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  ist die Länge der Raumdiagonale im Quader mit den Kantenlängen  $|a_1|$ ,  $|a_2|$  und  $|a_3|$ . Wir finden sie mit Pythagoras:

$$d^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$a^2 = d^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad (\text{Längenquadrat})$$

$$\text{Länge von } \vec{a}: |\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\text{Vektorlänge } a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



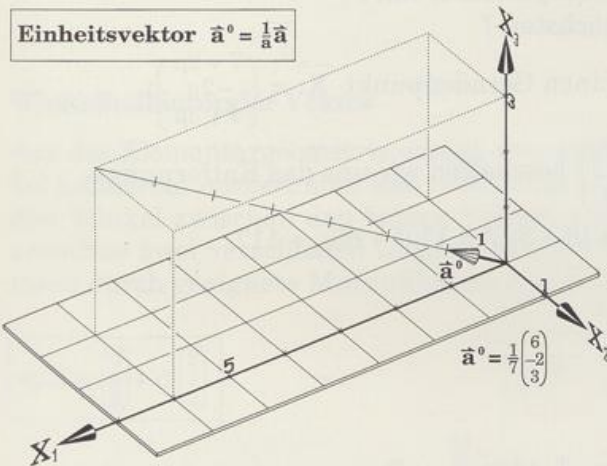
Zum Beispiel hat  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  die Länge  $a = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7$ .

Ein Vektor der Länge 1 heißt **Einheitsvektor**.

Zum Beispiel sind  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$  Einheitsvektoren.

Den Einheitsvektor in Richtung  $\vec{a}$  bezeichnet man mit  $\vec{a}^0$  (sprich "a oben null").

$\vec{a}^0$  ergibt sich aus  $\vec{a}$ , in dem man  $\vec{a}$  durch seine Länge  $a$  teilt:



**Einheitsvektor in Richtung  $\vec{a}$ :  $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{a}$**

Zum Beispiel ist in Richtung  $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  der Einheitsvektor  $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}^0 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

### Streckenabtragen

Mit den Einheitsvektoren können wir im Raum Strecken bekannter Länge in vorgegebene Richtungen abtragen. Als Beispiel berechnen wir den Endpunkt Z einer Wanderung im Raum. Wir starten bei  $S(1 | -2 | -2)$ , gehen 27 Einheiten in Richtung  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ , dann 15

Einheiten in Richtung  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$  und schließlich 18 Einheiten in Richtung  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ .

$\vec{Z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + 27 \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 15 \cdot \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} + 18 \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ . Wir landen bei  $Z(13 | -8 | -4)$ .

### Streckenlänge

Mit der Formel für die Vektorlänge berechnet man auch die Entfernung zweier Punkte oder die Länge einer Strecke

$$\overline{AB} = |\vec{AB}|$$

Zum Beispiel haben die Punkte  $A(-4 | 1 | 3)$  und  $B(0 | -2 | 3)$

die Entfernung  $\overline{AB} = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 9 + 0} = 5$ .

Dazu noch ein anspruchsvolleres Problem: **Abstand Punkt-Gerade**

Gegeben ist die Gerade  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und der Punkt  $P(0|-2|1)$ .

- a) Welche Geradenpunkte haben von P die Entfernung  $e = \sqrt{66}$ ?  
 b) Berechne den Abstand  $d$  von Punkt P und Gerade  $g$ , das heißt, die kleinste Entfernung  $e_{\min}$  eines Geradenpunkts X von P.  
 Welcher Geradenpunkt F liegt P am nächsten?

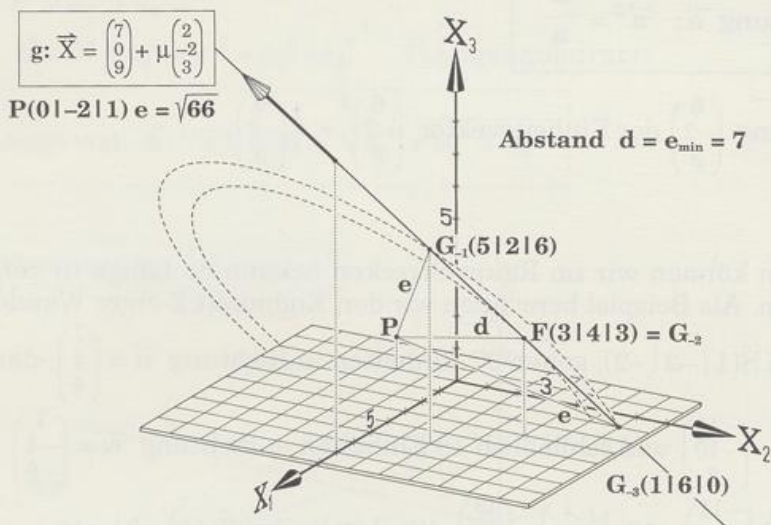
Für die Lösung brauchen wir den allgemeinen Geradenpunkt  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 7 + 2\mu \\ -2\mu \\ 9 + 3\mu \end{pmatrix}$ ;

aus dem Verbindungsvektor  $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 7 + 2\mu \\ -2\mu + 2 \\ 8 + 3\mu \end{pmatrix}$  beschaffen wir uns das Entfernungsquadrat  $e^2 = \overrightarrow{PX}^2 = (7 + 2\mu)^2 + (2 - 2\mu)^2 + (8 + 3\mu)^2 = 17\mu^2 + 68\mu + 117$ .

- a) Bedingung:  $17\mu^2 + 68\mu + 117 = (\sqrt{66})^2$   
 $17\mu^2 + 68\mu + 117 = 66$   
 $17\mu^2 + 68\mu + 51 = 0$   
 $\mu^2 + 4\mu + 3 = 0$

$$(\mu + 1)(\mu + 3) = 0, \text{ also } \mu = -1 \text{ oder } \mu = -3$$

$G_{-1}(5|2|6)$  und  $G_{-3}(1|6|0)$  haben von P die Entfernung  $\sqrt{66}$ .



- b) Bedingung:  $e^2 = f(\mu) = 17\mu^2 + 68\mu + 117$  muß minimal sein,  
 also muß  $f'(\mu) = 0$  sein:  $34\mu + 68 = 0$ , also  $\mu = -2$ .

$e^2 = f(-2) = 49$  ist das Minimum von  $f$  wegen  $f''(-2) = 34 > 0$ ,  $e_{\min} = 7$ .  
 $F = G_{-2}(3|4|3)$  liegt P am nächsten.

P und g haben den Abstand  $d = e_{\min} = 7$ ;  $[PF]$  ist die Abstandstrecke.

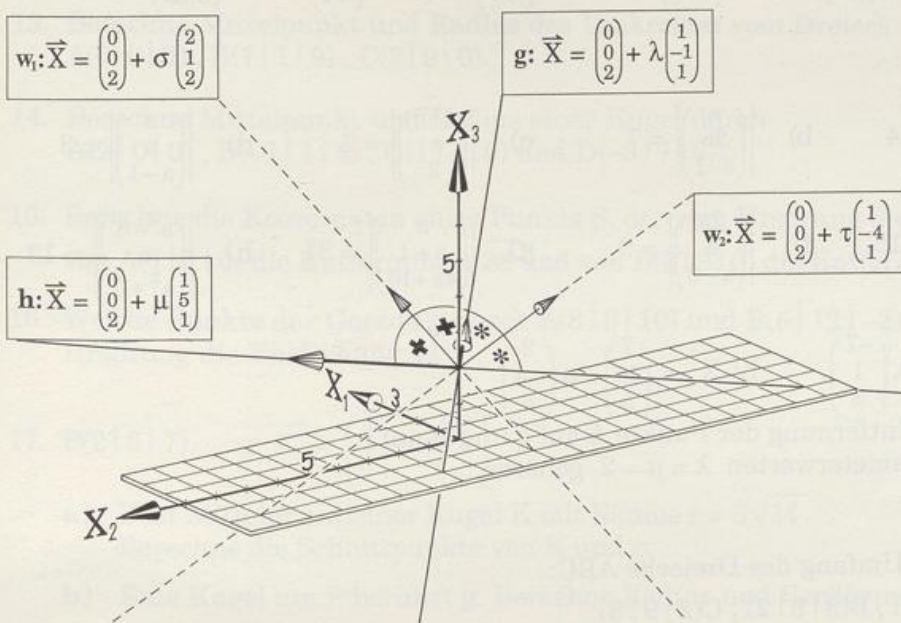
Wenn man a) gelöst hat und sich an einer Skizze vorstellt, wie  $g$ ,  $P$ ,  $G_{-1}$  und  $G_{-3}$  liegen, dann findet man  $F$  viel schneller als Mittelpunkt der Strecke  $[G_{-1}G_{-3}]$ .

Dasselbe Problem hätte man auch so einkleiden können:

- $g$  schneidet eine Kugel um  $P$  mit Radius  $\sqrt{66}$ . Berechne die Schnittpunkte.
- $g$  ist Tangente einer Kugel um  $P$ . Berechne Kugelradius und Berührungspunkt.

### Winkelhalbierender Vektor

Aus der Elementargeometrie wissen wir, daß die Diagonalen einer Raute die Innenwinkel halbieren. Addiert man also zwei gleich lange Vektoren, so ergibt sich ein Vektor, der den Winkel zwischen den beiden Vektoren halbiert. Man kann aber auch den Winkel zwischen zwei verschiedenen langen Vektoren halbieren; man muß dann vorher die Vektoren durch geeignete Multiplikation gleich lang machen.



Beispiel: Bestimme die beiden Winkelhalbierenden der Geraden

$$g: \vec{X} = \vec{S} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{X} = \vec{S} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Längen: } |\vec{u}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3}; \quad |\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 3\sqrt{3} = 3 \cdot |\vec{u}|$$

Die Richtungsvektoren der beiden Winkelhalbierenden sind

$$\vec{w}_1 = \vec{v} + 3\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w}_2 = \vec{v} - 3\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gleichungen der Winkelhalbierenden: } w_1: \vec{X} = \vec{S} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2: \vec{X} = \vec{S} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## Aufgaben

1. Berechne die Beträge von

a)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$     b)  $\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$     c)  $\begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ 16 \end{pmatrix}$     d)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$     e)  $\begin{pmatrix} -14 \\ -2 \\ -23 \end{pmatrix}$     f)  $\begin{pmatrix} 56 \\ -17 \\ 56 \end{pmatrix}$

2. Zeige, daß für rationales  $a$  der Vektor  $\begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a(a+1) \end{pmatrix}$  eine rationale Länge hat.

3. Berechne die Einheitsvektoren in Richtung

a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$     b)  $\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}$     c)  $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$     d)  $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$     e)  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$     f)  $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$   
 g)  $13 \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$     h)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2,3 \end{pmatrix}$     i)  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1/12 \end{pmatrix}$     j)  $9 \begin{pmatrix} 7/5 \\ 1/2 \\ 1/5 \end{pmatrix}$     k)  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7/4 \end{pmatrix}$     l)  $\begin{pmatrix} -3a \\ 2,4a \\ 3,2a \end{pmatrix}$

4. Berechne  $a$

a)  $\left| \begin{pmatrix} 3a \\ -6a \\ 2a \end{pmatrix} \right| = 14$     b)  $\left| \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a-1 \end{pmatrix} \right| = 7$     c)  $\left| \begin{pmatrix} 11/5 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 2$     d)  $\left| \begin{pmatrix} a \\ a \\ a-1 \end{pmatrix} \right| = 3$   
 e)  $\left| \begin{pmatrix} a+9 \\ a \\ a-3 \end{pmatrix} \right| = 15$     f)  $\left| \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ a-3 \end{pmatrix} \right| = 9$     g)  $\left| \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ 4a+10 \end{pmatrix} \right| = 31$     h)  $\left| \begin{pmatrix} a^2-5 \\ a \\ a^2+3 \end{pmatrix} \right| = 13$

5. g:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,    h:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Berechne die Entfernung der Punkte A auf g und B auf h, die zu den Parameterwerten  $\lambda = \mu = 2$  gehören.

6. Berechne den Umfang des Dreiecks ABC:

a)  $A(6|3|-4)$ ,  $B(8|6|2)$ ,  $C(2|9|8)$   
 b)  $A(1|-6|-6)$ ,  $B(2|2|-2)$ ,  $C(0|-2|2)$   
 c)  $A(9|9|0)$ ,  $B(-6|3|9)$ ,  $C(0|-6|-6)$ , Umkreisradius?

7. Zeige, daß die Punkte auf einer Kugel um den Ursprung liegen, und berechne den Kugelradius  $r$ .

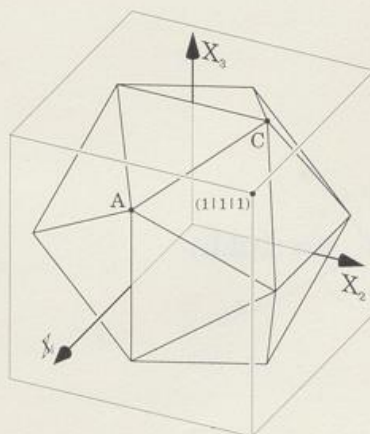
a)  $A(26|-7|2)$ ,  $B(25|10|-2)$ ,  $C(2|14|23)$ ,  $D(-7|-14|-22)$   
 b)  $A(12|4|39)$ ,  $B(33|4|24)$ ,  $C(32|9|24)$ ,  $D(31|24|12)$ ,  $E(23|24|24)$

8. Zeige, daß die Punkte auf einer Kugel um  $M(-20|-20|-4)$  liegen, und berechne den Kugelradius  $r$ .

$A(12|-12|-3)$ ,  $B(12|-13|0)$ ,  $C(8|-3|0)$ ,  $D(8|-4|3)$ ,  $E(5|0|4)$  und  $F(0|0|13)$ .

9. Zeige, daß die Punkte auf einer Kugel um  $M(30 | 20 | 10)$  liegen, und berechne den Kugelradius  $r$ .  
 $A(-18 | 11 | 6)$ ,  $B(-6 | -13 | 6)$ ,  $C(-6 | -12 | 1)$ ,  $D(-11 | -4 | -2)$ ,  
 $E(-6 | -11 | -2)$ ,  $F(-10 | -4 | -5)$  und  $G(-6 | -4 | -13)$ .
10. Durch  $A(4 | -5 | 3)$  und  $B(6 | -3 | 2)$  geht die Gerade  $g$ .  
 Bestimme die Punkte auf  $g$ ,  
 a) die von  $A$  die Entfernung 9 haben      b) die von  $B$  die Entfernung 9 haben.
11. Durch  $P(-2 | 5 | 1)$  und  $Q(-1 | 13 | -3)$  geht die Gerade  $h$ ,  $F(0 | f_2 | f_3)$  liegt auch auf  $h$  und ist Mittelpunkt einer Kugel mit Radius 18.  
 Berechne die Schnittpunkte von Gerade und Kugel.
12. Berechne alle Achsenpunkte, die von  $A(4 | 1 | 7)$  und  $B(-8 | -7 | 1)$  gleich weit entfernt sind.
13. Berechne Mittelpunkt und Radius des Umkreises vom Dreieck  
 $A(0 | 0 | 0)$ ,  $B(7 | 1 | 0)$ ,  $C(3 | 9 | 0)$ .
14. Berechne Mittelpunkt und Radius einer Kugel durch  
 $A(2 | 0 | 0)$ ,  $B(-1 | 1 | 4)$ ,  $C(1 | 1 | 0)$  und  $D(-3 | 7 | 6)$ .
15. Berechne die Koordinaten eines Punkts  $S$ , der vom Ursprung die Entfernung  $\sqrt{50}$ , von  $A(7 | 1 | 0)$  die Entfernung  $\sqrt{38}$  und von  $B(3 | 9 | 0)$  die Entfernung  $\sqrt{62}$  hat.
16. Welche Punkte der Gerade  $g$  durch  $A(8 | 3 | 10)$  und  $B(5 | 12 | -2)$  haben vom Ursprung die Entfernung 11?
- 17.  $P(2 | 8 | 7)$ ,  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$   
 a)  $P$  ist Mittelpunkt einer Kugel  $K$  mit Radius  $r = 3\sqrt{14}$ .  
 Berechne die Schnittpunkte von  $K$  und  $g$ .  
 b) Eine Kugel um  $P$  berührt  $g$ . Berechne Radius und Berührungspunkt.

- 18. Ein Würfel hat die Ecke  $(1 | 1 | 1)$ , seine Kanten haben die Länge 2 und sind parallel zu den Koordinatenachsen. Ihm ist ein regelmäßiges Ikosaeder so eingeschrieben, daß in der Mitte jeder Würfel­fläche eine Ikosaederkante parallel zu einer Würfelkante liegt. Berechne die Koordinaten der 6·2 Ecken des Ikosaeders.



19. Bestimme die Winkelhalbierenden  $w_1$  und  $w_2$  von e und f und zeichne diese vier Geraden in ein ebenes  $x_1x_2$ -Koordinatensystem.

a) e:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$       f:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) e:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$       f:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

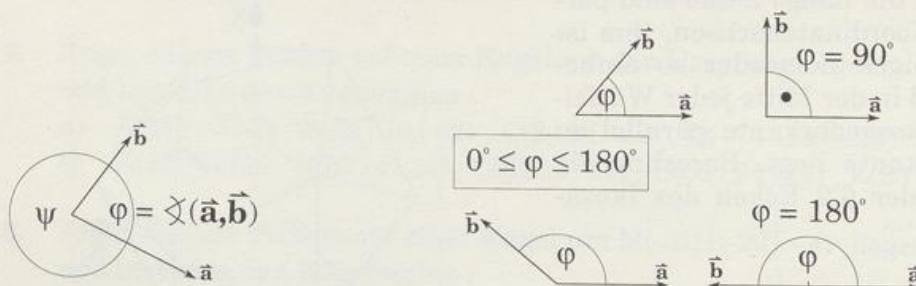
20. Bestimme die Winkelhalbierenden  $w_1$  und  $w_2$  von e und f.

e:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$       f:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$

- 21.  $A(6 | 3 | 6)$ ,  $B(-4 | -8 | 8)$  und der Ursprung sind die Ecken eines Dreiecks. Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden des Dreiecks OAB und den Inkreismittelpunkt I.
- 22. Durch  $U(16 | -16 | 8)$  und den Ursprung geht die Gerade u.
  - a)  $M(10 | ? | ?)$  auf u ist der Mittelpunkt einer Kugel mit Radius 9. Berechne die Schnittpunkte von Kugel und Gerade u.
  - b) Eine Kugel mit Radius 6 hat ihren Mittelpunkt auf u und schneidet u im Ursprung. Berechne den Kugelmittelpunkt und den zweiten Schnittpunkt.
  - c) Durch  $C(? | ? | -3)$  auf u geht die Gerade f mit Richtung  $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden von u und f.

## 2. Winkelberechnungen

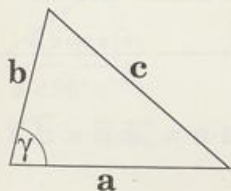
Zwei Vektoren legen zwei Winkel fest, von denen einer im allgemeinen überstumpf ist. Den andern bezeichnen wir als Winkel  $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$  zwischen den beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .



Weil wir Längen schon berechnen können, liegt es nahe, den Kosinussatz für die Winkelberechnung einzuspannen. In einem Vektordreieck sieht das so aus:

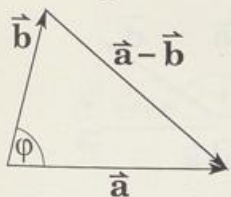
Mit  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  ergibt sich

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$



**Kosinussatz**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$



$$a = |\vec{a}| \quad b = |\vec{b}| \quad c = |\vec{a} - \vec{b}|$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

Nach dem Ausquadrieren fallen alle Quadrate  $a_i^2$  und  $b_i^2$  weg und übrig bleibt:

$$-2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = -2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

Den Term  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$  kürzt man ab mit  $\vec{a} \circ \vec{b}$ . Weil seine Eigenschaften an ein Produkt erinnern, nennt man ihn auch Skalarprodukt von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

**Definition:**

Die Zahl  $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

heißt **Skalarprodukt** der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

Damit gilt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

**Winkel zwischen zwei Vektoren**

Ist weder  $\vec{a}$  noch  $\vec{b}$  der Nullvektor, so findet man ihren Zwischenwinkel  $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{ab}$$

Die Kosinusfunktion ist für  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$  eineindeutig; deshalb liefert die Formel gerade den Winkel, den wir oben als Winkel zwischen zwei Vektoren eingeführt haben.

Beispiele:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = ?$

$$\begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -42 + 18 - 12 = -36; \quad a = \sqrt{121} = 11, \quad b = \sqrt{49} = 7;$$

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-36}{11 \cdot 7} = -\frac{36}{77}; \quad \Rightarrow \varphi = 117,9^\circ. \text{ Wir geben Winkel immer auf } 0,1^\circ \text{ gerundet an und schreiben aus Bequemlichkeit } = \text{ statt } \approx.$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \angle(\vec{u}, \vec{v}) = ?$$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 2 + 10 - 12 = 0; \quad \cos \varphi = \frac{0}{uv} = 0; \quad \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$

### Orthogonale und parallele Vektoren

Wegen  $\cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ$  gilt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\text{für } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

Mit dem Skalarprodukt kann man also mit einem Blick überprüfen, ob zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen. Zwei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  mit  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  nennt man auch **orthogonal**. Für parallele Vektoren gilt  $\varphi = 0^\circ$  oder  $\varphi = 180^\circ$ . Wegen  $\cos 0^\circ = 1$  und  $\cos 180^\circ = -1$  ist dann

$$\vec{a} \circ \vec{b} = ab \quad \begin{array}{c} \vec{a} \quad \vec{b} \\ \parallel \end{array} \quad \varphi = 0^\circ$$

oder

$$\vec{a} \circ \vec{b} = -ab \quad \begin{array}{c} \vec{a} \quad \vec{b} \\ \leftarrow \quad \rightarrow \end{array} \quad \varphi = 180^\circ$$

### Länge und Skalarprodukt

Wie bei Zahlen schreibt man beim Skalarprodukt auch  $\vec{a}^2$  statt  $\vec{a} \circ \vec{a}$ . Höhere Potenzen als die zweiten sind allerdings sinnlos, denn zum Beispiel bei  $(\vec{a} \circ \vec{a}) \circ \vec{a}$  müsste die Zahl  $\vec{a} \circ \vec{a}$  durch ein Skalarprodukt mit dem Vektor  $\vec{a}$  verknüpft werden.

$$\text{Wegen } \vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2 \text{ ergibt sich } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

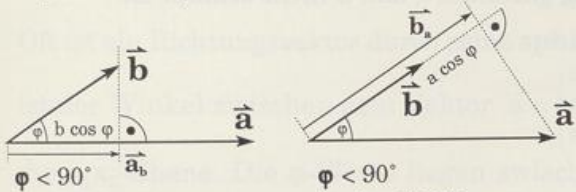
Diese Formel erinnert an die Formel für Zahlen  $|x| = \sqrt{x^2}$ .

### Geometrische Deutung des Skalarprodukts

Bezeichnet man mit  $\vec{a}_b$  die senkrechte Projektion von  $\vec{b}$  in Richtung  $\vec{a}$ , dann kann man der Zeichnung entnehmen:

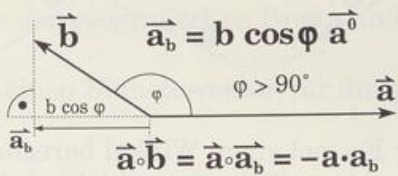
$$\vec{a}_b = b \cos \varphi \vec{a}^0$$

$$\vec{b}_a = a \cos \varphi \vec{b}^0$$

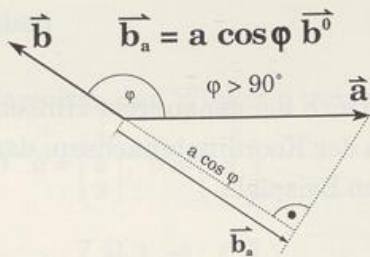


$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \vec{a}_b = a \cdot a_b$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{b}_a = b \cdot b_a$$



$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \vec{a}_b = -a \cdot a_b$$

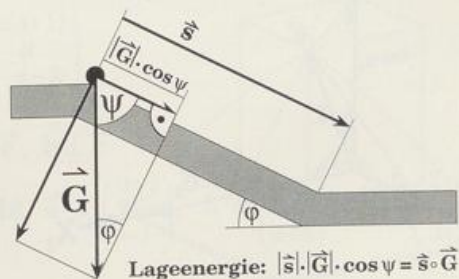
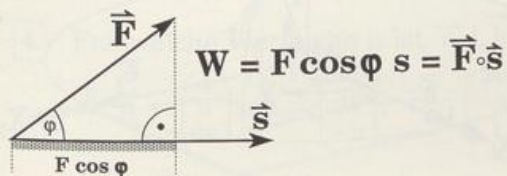


$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{b}_a = -b \cdot b_a$$

Für  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$  ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich dem Produkt der Länge eines Vektors und der Länge der senkrechten Projektion des andern auf ihn.

Für  $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$  muß man das Produkt der Längen mit  $-1$  multiplizieren.

Diese Interpretation verwenden die Physiker manchmal zur Formulierung von Gesetzen, Beispiel: die mechanische Arbeit  $W$  als das Skalarprodukt des Kraftvektors  $\vec{F}$  und des Streckenvektors  $\vec{s}$ . So gilt zum Beispiel für die frei werdende Lageenergie  $E$  einer Walze vom Gewicht  $G$ , die eine schiefe Ebene herabrollt:  $E = \vec{G} \circ \vec{s}$

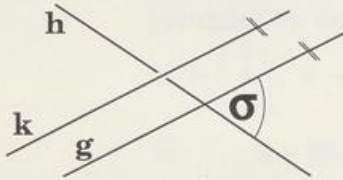


### Winkel zwischen zwei Geraden

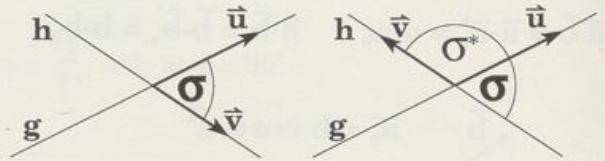
Als Schnittwinkel zweier Geraden definiert man den nichtstumpfen Winkel der Geradenkreuzung. Wegen  $\cos \sigma = -\cos(180^\circ - \sigma) = -\cos \sigma^* = |\cos \sigma^*|$  gilt

$$\cos \sigma = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{uv}$$

Schnittwinkel  $\sigma$  zweier Geraden mit den Richtungsvektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ . Der Betrag garantiert, daß  $\sigma$  nicht stumpf ist.



$$\sphericalangle(g, h) = \sphericalangle(k, h)$$



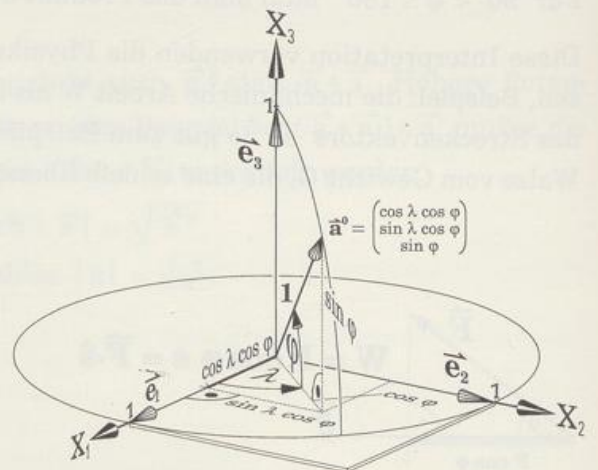
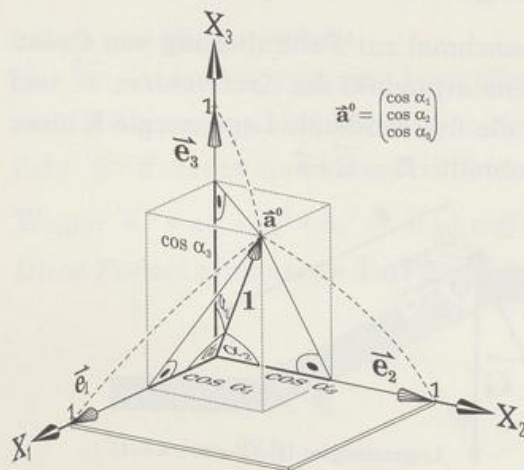
Auch bei windschiefen Geraden kann man mit dieser Formel einen Winkel berechnen. Es ist der Winkel, der sich ergibt, wenn man eine Gerade parallel so verschiebt, daß sie die andere trifft.

### Richtungswinkel und Einheitsvektor

Die Koordinaten eines Einheitsvektors  $\vec{a}^0$  entpuppen sich bei genauerem Hinsehen als Kosinuswerte der Winkel, die  $\vec{a}^0$  mit den Richtungen der Koordinatenachsen, das heißt mit den Basisvektoren, einschließt. Es gilt nämlich zum Beispiel

$$\cos \alpha_1 = \frac{\begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{a_{01}^2 + a_{02}^2 + a_{03}^2} \cdot 1} = a_{01} \quad (\text{die Wurzel hat den Wert } 1)$$

Daraus folgt  $\vec{a}^0 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 \end{pmatrix}$  mit  $(\cos \alpha_1)^2 + (\cos \alpha_2)^2 + (\cos \alpha_3)^2 = 1$ .



Wir nennen  $\alpha_i$  den  $i$ -ten Richtungswinkel des Vektors  $\vec{a}$  ;  
 $\alpha_i$  ist also der Winkel zwischen  $\vec{a}$  und dem  $i$ -ten Basisvektor.

$$\text{Zu } \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ist } \vec{a}^0 = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 8/9 \\ -1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 63,6^\circ \\ \cos 27,3^\circ \\ \cos 96,4^\circ \end{pmatrix}$$

Oft ist ein Richtungsvektor durch seine **sphärischen Koordinaten**  $\lambda$  und  $\varphi$  festgelegt.  $|\varphi|$  ist der Winkel zwischen dem Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und seiner senkrechten Projektion  $\vec{a}_\perp$  in die  $x_1x_2$ -Ebene. Die  $\varphi$ -Werte liegen zwischen  $-90^\circ$  und  $+90^\circ$ ,  $\varphi$  und  $a_3$  haben dasselbe Vorzeichen.  $\lambda$  ist der Winkel, um den man  $\vec{e}_1$  in Richtung  $\vec{e}_2$  drehen muß, bis er die Richtung von  $\vec{a}_\perp$  hat. Die  $\lambda$ -Werte liegen zwischen  $-180^\circ$  und  $+180^\circ$ .  $\varphi$  und  $\lambda$  entsprechen der geografischen Breite und Länge auf der Erde. Zu jedem Paar  $(\lambda | \varphi)$  gibt es genau einen Einheitsvektor, für ihn gilt  $\vec{a}^0 = \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \varphi \\ \sin \lambda \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ .

### Aufgaben

1. Berechne den Winkel  $\varphi$  zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$

c)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 55 \\ -88 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 63 \\ -70 \\ 56 \end{pmatrix}$

e)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 17 \\ 17 \\ -17 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 23 \\ -23 \\ 23 \end{pmatrix}$

f)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Welche Winkel schließen die Gerade  $g$  und die Koordinatenachsen ein ?

a)  $g: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$

b)  $g: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Zeige, daß die Ortsvektoren  $\vec{A}, \vec{B}$  und  $\vec{C}$  einen Würfel aufspannen.

a)  $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{A} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$

c)  $\vec{A} = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a(a+1) \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} a+1 \\ -a(a+1) \\ a \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} a(a+1) \\ a \\ -a-1 \end{pmatrix}$

4. Für welche Werte von  $u$  ist  $\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{c}, \vec{b} \perp \vec{c}$

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 2u \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -u \\ 14 \\ -u \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2u \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} u+1 \\ 2-u \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} u \\ u+2 \\ u+4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2-3u \\ u \\ 2+2u \end{pmatrix}$

5. Für welche Werte von  $u$  bildet jedes Vektorpaar einen Winkel von  $45^\circ$  ?

a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$     b)  $\begin{pmatrix} u \\ u \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$     c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2u \end{pmatrix}$     d)  $\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 2u \\ 8 \end{pmatrix}$

• 6.  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$K$  sei ein gerader Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel  $90^\circ$ ,  
seine Spitze liegt im Ursprung, seine Achse verläuft in Richtung  $\vec{a}$ .  
In welchen Punkten schneiden sich  $g$  und  $K$ ? (Vergleiche 5. a)

7. Für welche Werte von  $u$  bildet jedes Vektorpaar einen Winkel von  $60^\circ$  ?

a)  $\begin{pmatrix} u \\ u \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -u \end{pmatrix}$     b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$     c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ u \end{pmatrix}$     d)  $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$   
e)  $\begin{pmatrix} u \\ 4 \\ 3u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ u \\ 4 \end{pmatrix}$     f)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 2u+1 \end{pmatrix}$

8.  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Bestimme  $\vec{u}$  so, daß  $\vec{u}$  auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht steht.

9.  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ s \\ t \end{pmatrix}$

Bestimme  $r, s$  und  $t$  so, daß  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  paarweise orthogonal sind.

10. Berechne die Winkel des Dreiecks ABC

- a)  $A(6|3|-4)$ ,  $B(8|6|2)$ ,  $C(2|9|8)$   
b)  $A(1|-6|-6)$ ,  $B(2|2|-2)$ ,  $C(0|-2|2)$   
c)  $A(9|9|0)$ ,  $B(-6|3|9)$ ,  $C(0|-6|-6)$

11. Berechne den Winkel zwischen

- a) einer Raumdiagonale und einer Kante eines Würfels  
b) zwei Raumdiagonalen eines Würfels.

12.  $A(4|1|3)$ ,  $B(4|-2|6)$ ,  $C(1|1|6)$ ,  $D(5|2|7)$  Zeichnung im Koordinatensystem !

- a) Zeige, daß ABCD ein regelmäßiges Tetraeder ist.  
b) Berechne den Schwerpunkt S.  
c) Berechne  $\alpha = \sphericalangle(\vec{SA}, \vec{SB}) = \sphericalangle(\vec{SA}, \vec{SC})$

13.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Berechne den Winkel zwischen  $g$  und  $h$ .

14.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, A(5 | 1 | 0)$

Verbinde den Geradenpunkt für  $\lambda = 2$  mit A durch die Gerade h.  
Berechne den Winkel zwischen g und h und gib eine Gleichung von h an.

15.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zeige, daß g und h windschief sind, und berechne  $\sphericalangle(g, h)$ .

16.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

- Berechne den Schnittwinkel von g und h.
- Stelle Gleichungen der Winkelhalbierenden  $w_1$  und  $w_2$  von g und h auf und zeige, daß der Schnittwinkel der Winkelhalbierenden  $90^\circ$  ist.
- Berechne  $\sphericalangle(w_1, g)$ ,  $\sphericalangle(w_1, h)$ ,  $\sphericalangle(w_2, g)$  und  $\sphericalangle(w_2, h)$ .

17.  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Bestimme  $\vec{a}_b$ , die Projektion von  $\vec{b}$  in Richtung  $\vec{a}$ .
- Bestimme  $\vec{b}_a$ , die Projektion von  $\vec{a}$  in Richtung  $\vec{b}$ .
- Welche Besonderheit haben  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , wenn gilt  $\vec{b}_a = \vec{b}$ ?
- Zeige allgemein:  $\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{a^2} \cdot \vec{a}$

18. Deute geometrisch

- |   |   |
|---|---|
| a) $\vec{AB} \circ \vec{AC} = 0$                                  | b) $\vec{AB} \circ \vec{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$      |
| c) $\vec{AB} \circ \vec{AC} = -\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ | d) $ \vec{AB} \circ \vec{AC}  \neq \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ |

19. Welche Winkel bilden der Vektor  $\vec{a}$  und die Richtungen der Koordinatenachsen?

- |   |  |  |
|---|--|--|
| a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ | b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ | c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ |
|---|--|--|

20. Bestimme die fehlenden Richtungswinkel eines Einheitsvektors, von dem bekannt ist:

- |                          |                          |                        |                                     |
|--------------------------|--------------------------|------------------------|-------------------------------------|
| a) $\alpha_1 = 60^\circ$ | b) $\alpha_1 = 90^\circ$ | c) $\alpha_1 = ?$      | d) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ |
| $\alpha_2 = 120^\circ$   | $\alpha_2 = ?$           | $\alpha_2 = ?$         | wie groß ist $\alpha_1$ ?           |
| $\alpha_3 = ?$           | $\alpha_3 = 30^\circ$    | $\alpha_3 = 180^\circ$ |                                     |

- 21. Will man die Richtung eines Vektors mit den Richtungswinkeln festlegen, so sind diese nicht beliebig wählbar.
  - a) Für welchen Wert von  $\alpha_1$  liegen  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  schon fest ?
  - b) Welche Beziehung besteht zwischen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ , wenn durch sie  $\alpha_3$  eindeutig bestimmt ist ? Wie groß ist  $\alpha_3$  dann ?
  - c) Welche Beziehung müssen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  erfüllen, damit für  $\alpha_3$  mehr als ein Wert existiert ? Wie liegen dann die zugehörigen Einheitsvektoren ?

In Aufgabe 22. bis 26. bedeuten  $\lambda$  und  $\varphi$  sphärische Koordinaten.

- 22. Zeige, daß der Vektor  $\vec{a}^0 = \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \varphi \\ \sin \lambda \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  die Länge 1 hat.
- 23. Bestimme einen zu  $\lambda$  und  $\varphi$  gehörigen Richtungsvektor
  - a)  $\lambda = 90^\circ, \varphi = 60^\circ$                       b)  $\lambda = 120^\circ, \varphi = 45^\circ$
  - c)  $\lambda = -11,5^\circ, \varphi = 48,1^\circ$                 d)  $\varphi = -90^\circ$
- 24. Wie muß man  $\lambda$  und  $\varphi$  wählen, damit die drei Richtungswinkel  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  gleich groß sind ? ( $\lambda | \varphi$ ) ist die Blickrichtung (=Projektionsrichtung) fürs Normalbild in *Isometrie* (gleiches Maß auf allen Achsen).
- 25. Der Vektor  $\vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  erscheint in einem geeigneten Koordinatensystem als Punkt. In welcher Richtung ( $\lambda | \varphi$ ) schaut man aufs Koordinatensystem ?
- 26. Bei der *Dimetrie* (gleiches Maß auf  $x_2$ - und  $x_3$ -Achse) ist der Projektionsvektor  $\vec{p} = \begin{pmatrix} \sqrt{7} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . In welcher Richtung ( $\lambda | \varphi$ ) schaut man aufs Koordinatensystem ?

### 3. Eigenschaften des Skalarprodukts

Die Körperaxiome **E K A N I D** legen fest, wie man mit reellen Zahlen rechnet.

ADDITION

MULTIPLIKATION

**E**xistenz

für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  existiert

**a + b**

**a · b**

### **K**ommutativität für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{a + b = b + a}$$

$$\boxed{a \cdot b = b \cdot a}$$

### **A**ssoziativität für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

$$\boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$

### **N**eutrales Element

es gibt eine Zahl  $0 \in \mathbb{R}$ ,  
so daß für  $a \in \mathbb{R}$  gilt

$$\boxed{a + 0 = a}$$

es gibt eine Zahl  $1 \in \mathbb{R}$ ,  
so daß für  $a \in \mathbb{R}$  gilt

$$\boxed{a \cdot 1 = a}$$

### **I**nverses Element

zu jeder Zahl  $a \in \mathbb{R}$  gibt  
es eine inverse Zahl  $-a$ ,

$$\boxed{a + (-a) = 0}$$

zu jeder Zahl  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$   
gibt es eine inverse Zahl  $\frac{1}{a}$ ,

$$\boxed{a \cdot \frac{1}{a} = 1}$$

so daß gilt

### **D**istributivität für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c}$$

Die Gesetze **E K A N I** gelten für Addition und Multiplikation in gleicher Weise. Der Unterschied dieser beiden Verknüpfungen zeigt sich erst im Gesetz **D**. In **D** kommt die charakteristische Eigenschaft der Multiplikation im Vergleich zur Addition zum Ausdruck. Man wird also einer Verknüpfung den Namen Produkt nur dann zugestehen, wenn zumindest dieses Gesetz gilt.

Beim Skalarprodukt gilt

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \\ &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 = \\ &= a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 + a_3c_3 + b_3c_3 = \\ &= a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}. \end{aligned}$$

Also gilt das Distributivgesetz für das Skalarprodukt – was seine Bezeichnung nachträglich rechtfertigt. Wie schauts mit den andern Gesetzen aus? Man findet schnell,

daß nur das Kommutativgesetz gilt:  $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ . Beim Assoziativgesetz gilt wenigstens eine schwächere Form:  $(\mu \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = \mu(\vec{a} \circ \vec{b})$ ; in ihm kommen drei Multiplikationsarten vor

|                   |                              |                  |
|-------------------|------------------------------|------------------|
| Zahl mal Vektor   | $\mu \cdot \vec{a}$          | S-Multiplikation |
| Vektor mal Vektor | $\vec{a} \circ \vec{b}$      | Skalarprodukt    |
| Zahl mal Zahl     | $\mu(\vec{a} \circ \vec{b})$ | Zahlenprodukt.   |

Man kann also mit Vektoren fast genau so rechnen wie mit Zahlen; einige Ausdrücke haben keinen Sinn, so zum Beispiel Produkte aus mehr als zwei Vektoren wie  $\vec{a}^3$  und

Quotienten mit Vektoren im Nenner wie  $\frac{1}{\vec{a}}$  oder  $\frac{\vec{b}}{\vec{a}}$ . Es gelten aber zum Beispiel die bi-

nomischen Formeln:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \circ (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

Bei der Untersuchung abstrakter Vektorräume (zum Beispiel mehr als Dimension 3) stellt sich die Frage, wie man die Begriffe Länge und Winkel verallgemeinern kann. Ein Weg besteht darin, ein Skalarprodukt zu definieren, indem man bestimmte Eigenschaften fordert und sie im Axiomensystem eines verallgemeinerten Skalarprodukts zusammenstellt. Dabei orientiert man sich an den Gesetzen, die fürs Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^3$  gelten:

Sind  $\underline{a}, \underline{b}$  beliebige Elemente des abstrakten Vektorraums  $V$ , dann ist  $\ast$  mit  $\underline{a} \ast \underline{b} \in \mathbb{R}$  ein Skalarprodukt von  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$ , wenn die Axiome gelten:

- I** für alle  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V$  gilt  $(\underline{a} + \underline{b}) \ast \underline{c} = \underline{a} \ast \underline{c} + \underline{b} \ast \underline{c}$
- II** für alle  $\underline{a}, \underline{b} \in V$  gilt  $\underline{a} \ast \underline{b} = \underline{b} \ast \underline{a}$
- III** für alle  $\mu \in \mathbb{R}, \underline{a}, \underline{b} \in V$  gilt  $(\mu \cdot \underline{a}) \ast \underline{b} = \mu \cdot (\underline{a} \ast \underline{b})$
- IV** für alle  $\underline{a} \in V, \underline{a} \neq 0$  gilt  $\underline{a} \ast \underline{a} > 0$

Das IV. Axiom braucht man, um die Länge  $|\underline{a}|$  eines Vektors  $\underline{a}$  mit der Formel  $|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \ast \underline{a}}$  zu definieren.

Einen Überblick über die möglichen Skalarprodukte erhält man, wenn man im Vektorraum eine Basis  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots)$  und damit eine Koordinatendarstellung hat. Wir zeigen das für einen dreidimensionalen Vektorraum:

$$\underline{a} = \alpha_1 \underline{e}_1 + \alpha_2 \underline{e}_2 + \alpha_3 \underline{e}_3$$

$$\underline{b} = \beta_1 \underline{e}_1 + \beta_2 \underline{e}_2 + \beta_3 \underline{e}_3$$

$$\begin{aligned} \underline{a} \ast \underline{b} &= (\alpha_1 \underline{e}_1 + \alpha_2 \underline{e}_2 + \alpha_3 \underline{e}_3) \ast (\beta_1 \underline{e}_1 + \beta_2 \underline{e}_2 + \beta_3 \underline{e}_3) \\ &= \alpha_1 \beta_1 \underline{e}_1 \ast \underline{e}_1 + \alpha_2 \beta_2 \underline{e}_2 \ast \underline{e}_2 + \alpha_3 \beta_3 \underline{e}_3 \ast \underline{e}_3 + \\ &\quad + \alpha_1 \beta_2 \underline{e}_1 \ast \underline{e}_2 + \alpha_1 \beta_3 \underline{e}_1 \ast \underline{e}_3 + \alpha_2 \beta_1 \underline{e}_2 \ast \underline{e}_1 + \alpha_2 \beta_3 \underline{e}_2 \ast \underline{e}_3 + \alpha_3 \beta_1 \underline{e}_3 \ast \underline{e}_1 + \alpha_3 \beta_2 \underline{e}_3 \ast \underline{e}_2 \end{aligned}$$

Die Produkte der Basisvektoren heißen **Strukturkonstanten**. Kennt man sie, dann liegt das Skalarprodukt fest. Allerdings muß man sie so wählen, daß die Axiome erfüllt sind. Ein Vektorraum mit einem so definierten Skalarprodukt heißt **Euklidischer Vektor-**

**raum.** Das einfachste Beispiel ist das uns vertraute Skalarprodukt. Man nennt es auch **Standard-Skalarprodukt**. Seine Strukturkonstanten sind:

$$\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \circ \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \circ \vec{e}_3 = 1$$

$$\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \circ \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \circ \vec{e}_1 = 0$$

Das führt zu  $\vec{a} \circ \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$  für  $\vec{a} \neq \vec{0}$ .

Es gibt aber auch ungewöhnliche Skalarprodukte mit Strukturkonstanten wie  $\underline{e}_i \circ \underline{e}_i = 2$  und  $\underline{e}_i \circ \underline{e}_j = 1$  für  $i \neq j$ . Dann gilt

$$\underline{a} \circ \underline{a} = 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3) =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\alpha_1 + \alpha_3)^2 + (\alpha_2 + \alpha_3)^2 > 0 \quad \text{für } \underline{a} \neq \underline{0}.$$

Bei diesem Skalarprodukt gilt zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 +$$

$$+ 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

Der Vektor  $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  hat in diesem Skalarprodukt die »Länge«  $|\underline{a}|^*$  mit

$$|\underline{a}|^{*2} = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 +$$

$$+ 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 = 4$$

also ist  $|\underline{a}|^* = 2$ . (Beim Standard-Skalarprodukt hätte  $\underline{a}$  die Länge  $\sqrt{3}$ .)

Auch einen »Winkel« könnte man mit diesem Skalarprodukt bestimmen, wenn man den Winkel  $\varphi^*$  zwischen den Vektoren  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$  definierte mit

$$\cos \varphi^* = \frac{\underline{a} \circ \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}.$$

Als Beispiel nehmen wir  $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{a} \circ \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 2 +$$

$$+ 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

$$|\underline{a}|^* = 2, \text{ für } \underline{b} \text{ ergibt sich } |\underline{b}|^* = \sqrt{6}, \text{ also } \cos \varphi^* = \frac{2}{2\sqrt{6}}, \Rightarrow \varphi^* = 65,9^\circ.$$

(Beim Standard-Skalarprodukt würde sich ergeben  $\cos \varphi = 0$ ,  $\Rightarrow \varphi = 90^\circ$ .)

Die Definition  $\cos \varphi^* = \frac{\underline{a} \circ \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$  hat nur einen Sinn, wenn  $-1 \leq \frac{\underline{a} \circ \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} \leq 1$  garantiert ist. Tatsächlich gilt für jedes Skalarprodukt die Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ:

$$(\underline{a} \circ \underline{b})^2 \leq (\underline{a} \circ \underline{a})(\underline{b} \circ \underline{b})$$

Beweis: Für  $\underline{b} = \underline{0}$  stimmt die Beziehung.

Nun sei  $\underline{b} \neq \underline{0}$ . Wegen **IV** gilt für  $\mu \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (\underline{a} + \mu \underline{b}) * (\underline{a} + \mu \underline{b})$$

$$0 \leq \underline{a} * \underline{a} + 2\mu \underline{a} * \underline{b} + \mu^2 \underline{b} * \underline{b}; \text{ setzt man } \mu = -\frac{\underline{a} * \underline{b}}{\underline{b} * \underline{b}}, \text{ so ergibt sich}$$

$$0 \leq \underline{a} * \underline{a} - 2 \frac{(\underline{a} * \underline{b})^2}{\underline{b} * \underline{b}} + \frac{(\underline{a} * \underline{b})^2}{\underline{b} * \underline{b}}$$

$$0 \leq \underline{a} * \underline{a} - \frac{(\underline{a} * \underline{b})^2}{\underline{b} * \underline{b}} \quad \parallel \cdot \underline{b} * \underline{b}$$

$$0 \leq (\underline{a} * \underline{a})(\underline{b} * \underline{b}) - (\underline{a} * \underline{b})^2, \text{ q.e.d.}$$

Baron Augustin Louis CAUCHY (Paris 1789 bis 1857 Sceaux) hat diese Ungleichung formuliert und für endliche Folgen in seinem Cours d'analyse 1821 bewiesen.

Hermann Amandus Schwarz (Hermsdorf 1843 bis 1921 Berlin) hat sie 1885 im Zusammenhang mit der Untersuchung von Minimalflächen verallgemeinert.

### Aufgaben

1. Begründe: Die Axiome **AN I** gelten für kein Skalarprodukt außer in Vektorräumen der Dimension 1.

2. Welche der folgenden Terme beziehungsweise Gleichungen sind mathematisch sinnlos, welche Umformungen sind gültig?  
 $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  und  $\underline{c}$  seien Vektoren,  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  seien Zahlen, außerdem sei  $\underline{a} * \underline{b}$  ein Skalarprodukt,  $\alpha \cdot \underline{a}$  eine S-Multiplikation und  $\alpha \cdot \beta$  eine Zahlenmultiplikation.

a)  $(\underline{a} * \underline{b}) * \underline{b} = \underline{a} * \underline{b}^2$

b)  $(\underline{a} * \underline{b}) \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b}^2$

c)  $\underline{a} * \underline{b} = \gamma, \Rightarrow \underline{a} = \frac{\gamma}{\underline{b}}$

d)  $\alpha \cdot (\underline{a} * \underline{b}) = \beta, \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{\underline{a} * \underline{b}}$

e)  $(\underline{a} * \underline{b}) \cdot \underline{c} + \underline{a} \cdot (\underline{b} * \underline{c}) = \underline{a} \cdot (\underline{b} * \underline{c} + \underline{b} * \underline{c}) = 2\underline{a} \cdot (\underline{b} * \underline{c})$

f)  $\frac{\underline{a} * \underline{b}}{\underline{a}} = \underline{b}$

g)  $\frac{\underline{a}}{\underline{a} * \underline{b}} = \underline{b}$

h)  $\frac{\underline{a}}{\underline{a} * \underline{b}} = \gamma$

3. Beweise:  $\underline{0} * \underline{c} = 0$

4. Untersuche, ob mit folgender Definition ein Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^3$  festliegt:

a)  $\underline{a} * \underline{b} = a_1 b_1 - 3a_1 b_2 - 3a_2 b_1 - a_2 b_2$

b)  $\underline{a} * \underline{b} = 3a_1 b_1 - 4a_1 b_2 - 4a_2 b_1 + 8a_2 b_2 - a_1 b_3 - a_3 b_1 + 4a_3 b_3$

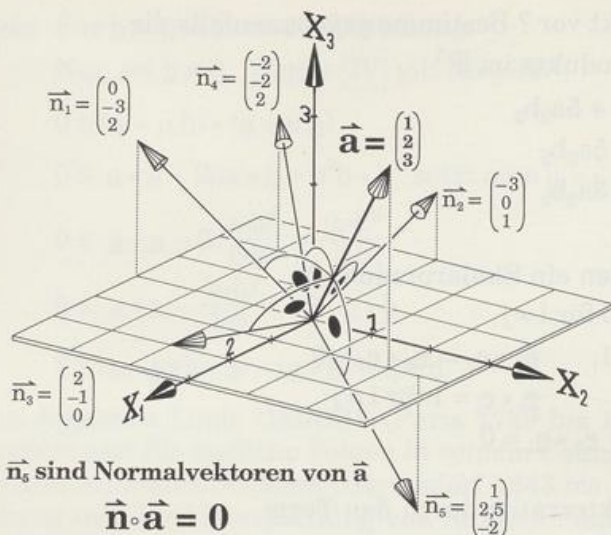
c)  $\underline{a} * \underline{b} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$

- 5. Liegt überhaupt ein Skalarprodukt vor? Bestimme gegebenenfalls die Strukturkonstanten des Skalarprodukts im  $\mathbb{R}^3$ :
  - a)  $\underline{a} * \underline{b} = 2a_1b_1 + \sqrt{5}(a_1b_2 + a_2b_1) + 5a_2b_2$
  - b)  $\underline{a} * \underline{b} = 2a_1b_1 - 3(a_1b_2 + a_2b_1) + 5a_2b_2$
  - c)  $\underline{a} * \underline{b} = 4a_1b_1 + 5(a_1b_2 - a_2b_1) + 3a_2b_2$
  
- 6. Bestimmen die Strukturkonstanten ein Skalarprodukt?
  - a)  $\underline{e}_i^2 = \alpha_i$  und  $\alpha_i > 0$ ,  $\underline{e}_i * \underline{e}_j = 0$  für  $i \neq j$
  - b)  $\underline{e}_1^2 = 1$ ,  $\underline{e}_1 * \underline{e}_2 = \alpha$  und  $|\alpha| < 1$ ,  $\underline{e}_2 * \underline{e}_3 = \underline{e}_3 * \underline{e}_1 = 0$
  - c)  $\underline{e}_1^2 = 1$ ,  $\underline{e}_2^2 = 2$ ,  $\underline{e}_3^2 = 3$ ,  $\underline{e}_i * \underline{e}_j = 1$  für  $i \neq j$
  - d)  $\underline{e}_1^2 = 1$ ,  $\underline{e}_1 * \underline{e}_2 = 2$ ,  $\underline{e}_2 * \underline{e}_3 = \underline{e}_3 * \underline{e}_1 = 0$
  
- 7. Ist in einem n-dimensionalen Vektorraum durch den Term  $-x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 + \dots + (-1)^n x_ny_n$  die Koordinatendarstellung eines Skalarprodukts gegeben?
  
- 8. In einem Vektorraum mit der Basis  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$  sei ein Skalarprodukt bestimmt durch die Strukturkonstanten  $\underline{e}_1^2 = 1, \underline{e}_2^2 = 2, \underline{e}_3^2 = 3, \underline{e}_1 * \underline{e}_2 = 1, \underline{e}_2 * \underline{e}_3 = \underline{e}_3 * \underline{e}_1 = 0$ 
  - a) Gib die Koordinatendarstellung eines Skalarprodukts an.
  - b) Zeige:  $\underline{a}^2 > 0$  für  $\underline{a} > \underline{0}$ .
  - c) Berechne damit das Skalarprodukt der Vektoren  $\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ .
  - d) Berechne die »Längen« von  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$ .
  - e) Berechne den »Winkel« von  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$ .
  
- 9. Berechne im  $\mathbb{R}^3$  einen Vektor  $\underline{n}$  der »Länge« 5, für den gilt  $\underline{a} * \underline{n} = \underline{b} * \underline{n} = 0$ ; verwende das Skalarprodukt von 6. c). ( $\underline{n}$  ist »Lotvektor« von  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$ .)
 
$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
  
- 10. Zeige die Gültigkeit der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung für das
  - a) Standard-Skalarprodukt
  - b) Skalarprodukt von 6. c).

#### 4. Anwendungen der Orthogonalität

##### Vektor, der auf $\vec{a}$ senkrecht steht: Normalvektor von $\vec{a}$

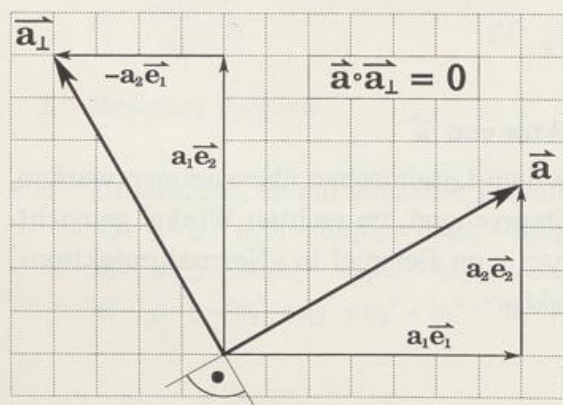
Vor gut 200 Jahren ist das Wort »normal« aus dem Lateinischen übernommen worden. Es leitet sich ab von *normalis* = der Norm entsprechend, im rechten Winkel gemacht. Die Bedeutung normal = senkrecht findet man zum Beispiel in »Normalprojektion«, »Normalbild«, »Normalkraft« und »Normalvektor«.



Die Aufgabe, Vektoren zu finden, die auf  $\vec{a} (\neq \vec{0})$  senkrecht stehen, ist nicht eindeutig lösbar. Normalvektoren  $\vec{n} (\neq \vec{0})$  von  $\vec{a}$  müssen die Gleichung  $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$  erfüllen:  $n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 = 0$ . Weil man zwei Koordinaten von  $\vec{n}$  frei wählen und dann die dritte daraus bestimmen kann, gibt es  $\infty^2$  Lösungen. Zum Beispiel ergibt sich für  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

die Gleichung  $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0$ ; mögliche Lösungen sind  $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2,5 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Besonders leicht findet man Normalvektoren zweidimensionaler Vektoren.

$\vec{a}_\perp = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$  ist ein Vektor, der senkrecht ist zu  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  und genau so lang ist. Die Koordinaten von  $\vec{a}$  und  $\vec{a}_\perp$  lassen die Bedingung aus der Analysis fürs Senkrechtstehen von Geraden erkennen: Geraden parallel zu  $\vec{a}$  haben die Steigung  $m = \frac{a_2}{a_1}$ , und die parallel zu  $\vec{a}_\perp$  haben die Steigung  $m = -\frac{a_1}{a_2}$ , aber nur, wenn keine Koordinate gleich 0 ist.



Vektor, der auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht steht: Normalvektor von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$

Sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  linear unabhängig, dann ist der Normalvektor  $\vec{n}$  bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt. Um  $\vec{n}$  zu finden, muß man das Gleichungssystem:

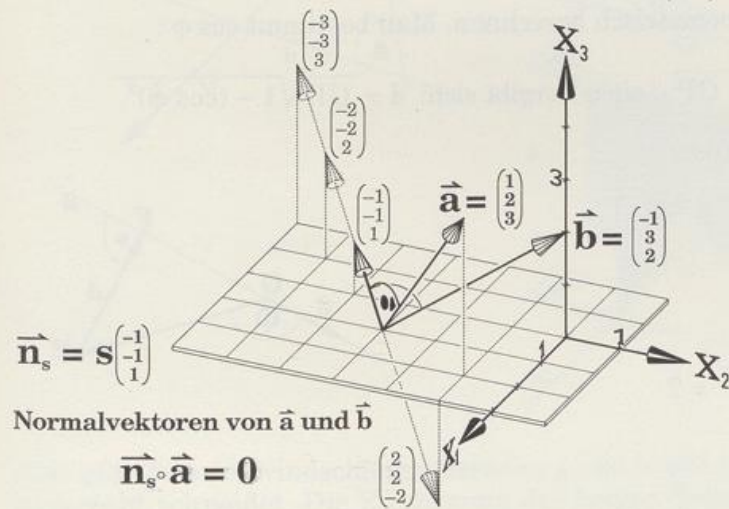
$$\vec{n} \circ \vec{a} = 0$$

$$\vec{n} \circ \vec{b} = 0 \text{ lösen. Dieses 2,3-System hat } \infty^1 \text{ Lösungen.}$$

Beispiel:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0$$

$$-n_1 + 3n_2 + 2n_3 = 0 \quad \text{Lösung } \vec{n}_s = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

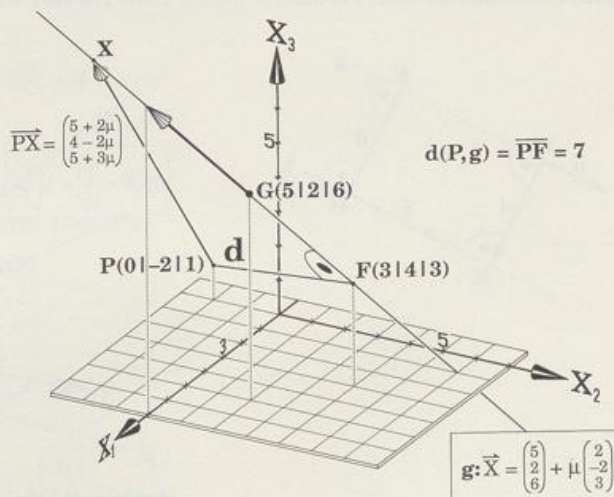
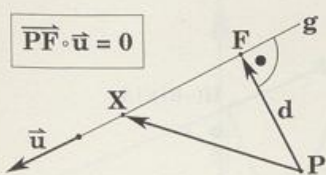


### Abstand von Punkt und Gerade; Lotfußpunkt

Der Abstand  $d$  ist die Länge des Lots von  $P$  auf  $g$ . Ist  $X$  allgemeiner Punkt der Gerade  $g$ :

$\vec{X} = \vec{G} + \mu \vec{u}$ , dann bestimmt man den Lotfußpunkt  $F$  aus der Gleichung  $\vec{P}\vec{X} \circ \vec{u} = 0$ .

Der Abstand ist dann  $d = |\vec{PF}|$ .



Beispiel:  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, P(0|-2|1)$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 5+2\mu \\ 2-2\mu \\ 6+3\mu \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 5+2\mu \\ 4-2\mu \\ 5+3\mu \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PX} \circ \vec{u} = 0: \quad 2(5+2\mu) - 2(4-2\mu) + 3(5+3\mu) = 0$$

$$17\mu + 17 = 0 \Rightarrow \mu = -1 \text{ eingesetzt in } \overrightarrow{PX}:$$

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ Abstand } d(P,g) = |\overrightarrow{PF}| = 7$$

zu  $\mu = -1$  gehört der Lotfußpunkt  $F(3|4|3)$ .

$F$  ist derjenige Geradenpunkt, der  $P$  am nächsten liegt.

Der Abstand läßt sich auch trigonometrisch berechnen. Man bestimmt  $\cos \varphi$ :

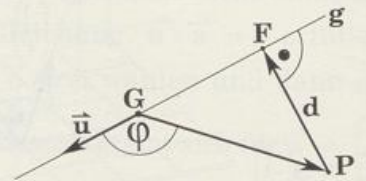
$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \circ \overrightarrow{GP}}{u \cdot \overline{GP}}, \text{ und aus } d = \overline{GP} \cdot |\sin \varphi| \text{ ergibt sich: } d = \overline{GP} \sqrt{1 - (\cos \varphi)^2}.$$

Im Beispiel von oben sieht das so aus:

$$\overrightarrow{GP} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \overline{GP} = \sqrt{66}, \quad u = \sqrt{17}$$

$$\cos \varphi = \frac{-17}{\sqrt{66} \sqrt{17}} = \frac{-\sqrt{17}}{\sqrt{66}};$$

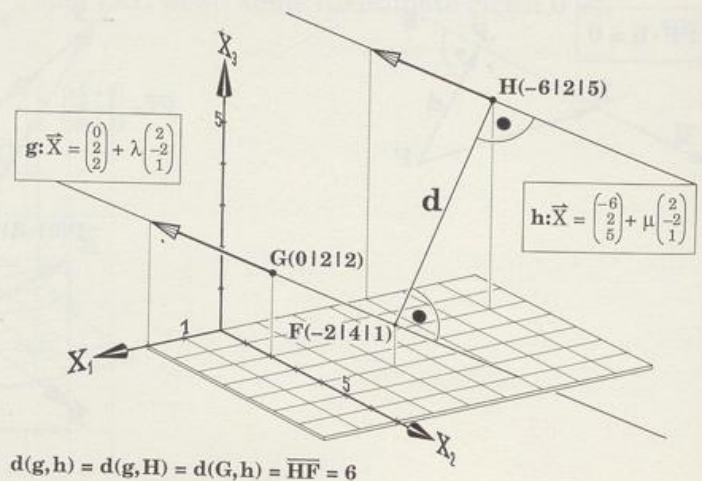
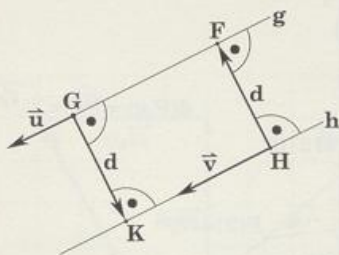
$$d = \sqrt{66} \sqrt{1 - \frac{17}{66}} = \sqrt{66 - 17} = 7$$



### Abstand zweier Parallelen

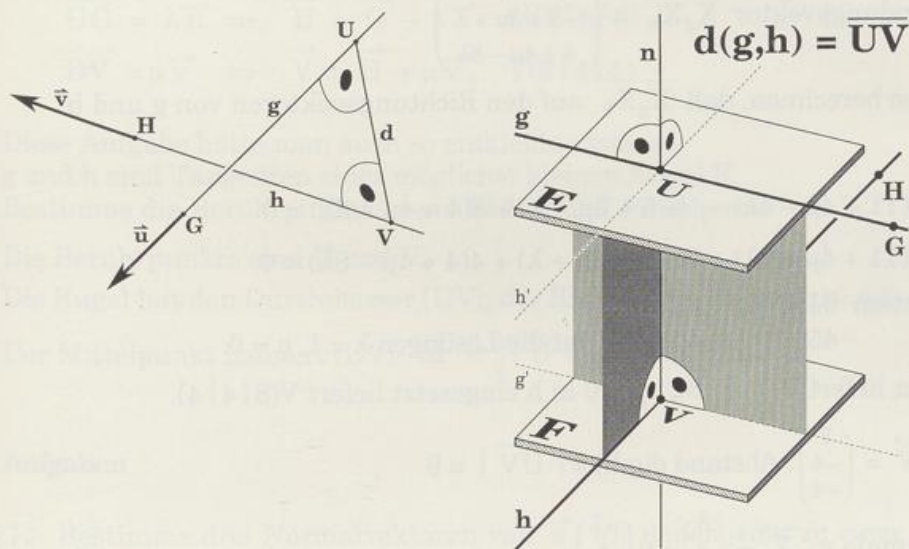
Man führt das Problem zurück auf die im letzten Abschnitt behandelte Aufgabe:

Man berechnet den Abstand eines Punkts der einen Gerade von der andern Gerade.



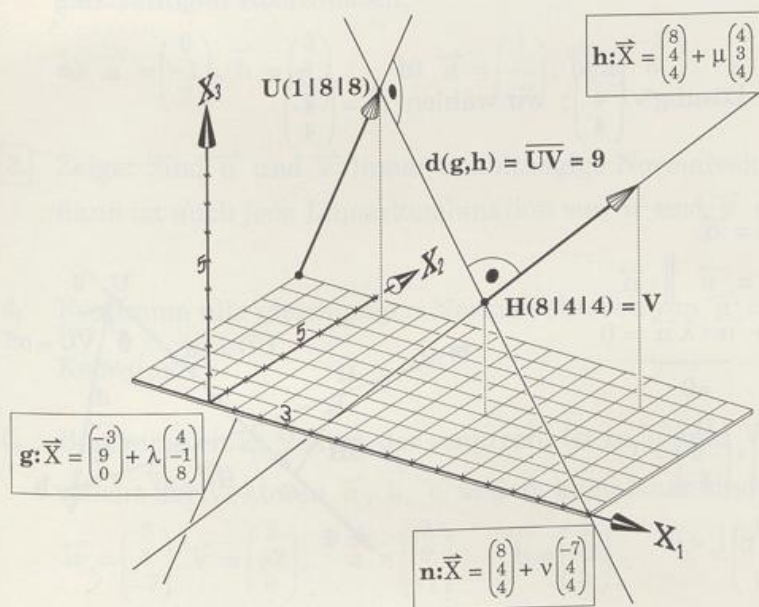
### Abstand zweier windschiefer Geraden

Der Abstand  $d(g,h)$  zweier windschiefer Geraden  $g$  und  $h$  ist die Länge der kürzesten Strecke, die einen Punkt von  $g$  mit einem Punkt von  $h$  verbindet. Legt man durch jede der beiden Geraden eine Ebene, die parallel ist zur anderen Gerade, dann haben diese Ebenen den Abstand  $d(g,h)$ . Die Normalprojektion  $g'$  von  $g$  in  $F$  schneidet  $h$  im Fußpunkt  $V$  des gemeinsamen Lots  $n$ . ( $g'$  und  $h$  sind nicht parallel, weil  $g$  und  $h$  windschief sind.)



Also gilt: Zu zwei windschiefen Geraden  $g$  und  $h$  gibt es genau eine Gerade  $n$ , die beide senkrecht schneidet. Die Entfernung der beiden Schnittpunkte ist der Abstand von  $g$  und  $h$ . Die Gerade  $n$  heißt Normale oder gemeinsames Lot von  $g$  und  $h$ .

Es gibt mehrere Verfahren, die Schnittpunkte  $U$  und  $V$ , den Abstand  $d$  und die Normale  $n$  zu bestimmen. Zunächst führen wir zwei vor.



Methode »Allgemeiner Punkt«

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_g = \begin{pmatrix} -3 + 4\lambda \\ 9 - \lambda \\ 8\lambda \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_h = \begin{pmatrix} 8 + 4\mu \\ 4 + 3\mu \\ 4 + 4\mu \end{pmatrix}$$

$$\text{Allgemeiner Verbindungsvektor } \overrightarrow{X_g X_h} = \begin{pmatrix} 11 + 4\mu - 4\lambda \\ -5 + 3\mu + \lambda \\ 4 + 4\mu - 8\lambda \end{pmatrix}$$

$\mu$  und  $\lambda$  muß man so berechnen, daß  $\overrightarrow{X_g X_h}$  auf den Richtungsvektoren von  $g$  und  $h$  senkrecht steht:

$$\overrightarrow{X_g X_h} \circ \vec{u} = 0: \quad 4(11 + 4\mu - 4\lambda) - (-5 + 3\mu + \lambda) + 8(4 + 4\mu - 8\lambda) = 0$$

$$\overrightarrow{X_g X_h} \circ \vec{v} = 0: \quad 4(11 + 4\mu - 4\lambda) + 3(-5 + 3\mu + \lambda) + 4(4 + 4\mu - 8\lambda) = 0$$

Das Gleichungssystem  $81 + 45\mu - 81\lambda = 0$

$$45 + 41\mu - 45\lambda = 0 \quad \text{hat die Lösungen } \lambda = 1, \mu = 0.$$

$\lambda = 1$  in  $g$  eingesetzt liefert  $U(1|8|8)$ ,  $\mu = 0$  in  $h$  eingesetzt liefert  $V(8|4|4)$ .

$$\text{Abstandvektor } \overrightarrow{UV} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \text{Abstand } d(g,h) = |\overrightarrow{UV}| = 9$$

$$\text{Gleichung der Normale } n: \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Methode »Vektorkette«

Zuerst bestimmt man den Richtungsvektor  $\vec{n}$  der Normale,  $\vec{n}$  steht senkrecht auf  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ :

$$\vec{n} \circ \vec{u} = 0: \quad 4n_1 - n_2 + 8n_3 = 0$$

$$\vec{n} \circ \vec{v} = 0: \quad 4n_1 + 3n_2 + 4n_3 = 0$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung  $\nu \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ; wir wählen  $\vec{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Geschlossene Vektorkette

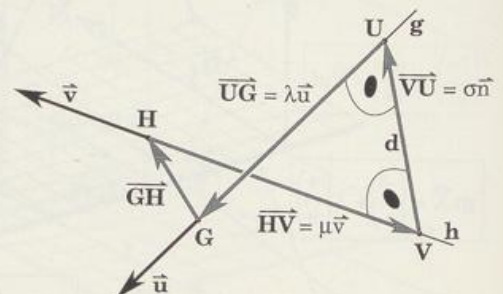
$$\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HV} + \overrightarrow{VU} + \overrightarrow{UG} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GH} + \mu \vec{v} + \sigma \vec{n} + \lambda \vec{u} = \vec{0} \quad \parallel \circ \vec{n}$$

$$\vec{n} \circ \overrightarrow{GH} + \underbrace{\vec{n} \circ \mu \vec{v}}_{=0} + \underbrace{\vec{n} \circ \sigma \vec{n}}_{=0} + \underbrace{\vec{n} \circ \lambda \vec{u}}_{=0} = 0$$

$$\sigma = - \frac{\vec{n} \circ \overrightarrow{GH}}{\vec{n}^2} = - \frac{1}{81} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Abstand } d(g,h) = |\overrightarrow{VU}| = |\sigma \vec{n}| = 9$$



Braucht man auch noch die Punkte U und V, dann setzt man  $\sigma$  und  $\vec{n}$  in die Vektor-  
kette ein und löst das Gleichungssystem für  $\mu$  und  $\lambda$ :

$$\begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4\mu - 4\lambda = -4$$

$$3\mu + \lambda = 1$$

$$4\mu - 8\lambda = -8 \quad \text{Lösungen } \lambda = 1, \mu = 0 \quad (\text{Zwei Gleichungen genügen!})$$

$$\vec{UG} = \lambda \vec{u} \Rightarrow \vec{U} = \vec{G} - \lambda \vec{u}, \quad U(1 | 8 | 8)$$

$$\vec{HV} = \mu \vec{v} \Rightarrow \vec{V} = \vec{H} + \mu \vec{v}, \quad V(8 | 4 | 4)$$

Diese Aufgabe hätte man auch so einkleiden können:  
g und h sind Tangenten einer möglichst kleinen Kugel K.  
Bestimme die Berührungspunkte sowie Radius und Mittelpunkt von K.

Die Berührungspunkte sind U und V.

Die Kugel hat den Durchmesser [UV]; der Radius ist  $r = \frac{1}{2}d(g,h) = 4,5$ .

Der Mittelpunkt halbiert [UV]:  $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{U} + \vec{V}), M(4,5 | 6 | 6)$ .

## Aufgaben

1. Bestimme drei Normalvektoren von  $\vec{a}$ , von denen jeder zu einer  
Koordinatenebene parallel ist:

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2. Bestimme einen Normalvektor von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  mit teilerfremden,  
ganzahligen Koordinaten:

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ \pi \end{pmatrix} \quad \text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 99 \end{pmatrix}$$

3. Zeige: Sind  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  linear unabhängige Normalvektoren von  $\vec{a}$ ,  
dann ist auch jede Linearkombination von  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  ein Normalvektor von  $\vec{a}$ .

4. Bestimme alle gleichlangen Normalvektoren von  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit ganzzahligen  
Koordinaten.

5. Bestimme einen Vektor, der senkrecht ist zu  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ , und untersuche,  
welche der Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  und  $\vec{d}$  komplanar sind zu  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P(4 | 8 | -8)$

- Berechne den Fußpunkt F des Lots von g durch P und den Abstand von P und g.
- Berechne den Abstand von g und Ursprung.

7. Gib die Gleichung einer Ursprungsgerade u an,

die  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  senkrecht schneidet.

8.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P(1 | -1 | 1) \quad \text{Zeichnung im Koordinatensystem !}$

- Berechne den Fußpunkt F des Lots von g durch P.
- Gib eine Gleichung der Normalen n von g durch P an.
- Berechne den Abstand von P und g.
- P' und P sind symmetrisch bezüglich g. Berechne P'.

9. Berechne den Abstand  $d(P, g)$  und die senkrechte Projektion F von P auf g:

a)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ 25 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad P(50 | 55 | 51)$

b)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 111 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 111 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P(1000 | 110 | 120)$

• 10.  $g: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P(1 | 2 | 3)$

- g an P gespiegelt ergibt g'. Gib eine Gleichung von g' an.
- P an g gespiegelt ergibt P'. Berechne P'.
- h an g gespiegelt ergibt h'. Gib eine Gleichung von h' an.

• 11.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ . Berechne  $d(g, h)$ .

• 12.  $A(29 | -5 | -4), B(-3 | -27 | 12), M(16 | 11 | -8), P(4 | 8 | 19), Q(1 | -19 | 31)$   
g ist die Gerade durch A und B.

- Bestimme den Punkt N auf g, der P am nächsten liegt.
- g ist Tangente einer Kugel um M.  
Berechne den Berührungspunkt T und den Kugelradius  $r_b$ .
- Berechne Radius  $r_c$  und Mittelpunkt  $M_c$  der kleinsten aller Kugeln, die durch M gehen und deren Mittelpunkte auf g liegen.
- Berechne Radius  $r_d$  und Mittelpunkt  $M_d$  der kleinsten aller Kugeln, die durch M gehen und g berühren. Berechne den Berührungspunkt T.

- e) Berechne Radius  $r_e$  und Mittelpunkt  $M_e$  der kleinsten aller Kugeln, die durch  $Q$  gehen und  $g$  als Zentrale haben.  
Berechne die Schnittpunkte von  $g$  und dieser Kugel;  
was für ein Dreieck bilden der Ursprung und die Schnittpunkte ?
- f) Bestimme eine Gleichung der Normale  $n$  von  $g$  durch  $Q$ .
- g)  $Q$  an  $g$  gespiegelt ergibt  $Q'$ . Berechne  $Q'$ .
- 13.  $g$  ist die Gerade durch  $A(8 \mid 13 \mid 3)$  und  $B(14 \mid 20 \mid -3)$ ,  
 $h$  ist die Gerade durch  $C(10 \mid 19 \mid 12)$  und  $D(-8 \mid -2 \mid 30)$ .
- a) Berechne den Abstand  $d(g,h)$  von  $g$  und  $h$ .
- b) Bestimme eine Gleichung der Mittelparallele  $m$  von  $g$  und  $h$ .
- c)  $g$  an  $h$  gespiegelt ergibt  $u$ , und  $h$  an  $g$  gespiegelt ergibt  $v$ .  
Bestimme Gleichungen von  $u$  und  $v$ .
- d) Wo liegen die Mittelpunkte der Kugeln, die  $g$  und  $h$  berühren ?
- e) Wo liegen die Mittelpunkte der kleinstmöglichen Kugeln,  
die  $g$  und  $h$  berühren ?
- 14.  $g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{Z}, \quad M(-5 \mid 5 \mid 5), V(6 \mid 18 \mid 6), W(-6 \mid 12 \mid 0)$
- a) Beschreibe die Schar  $g_a$ , welchen Abstand haben benachbarte Schargeraden ?  
Welche besondere Lage im KOSY hat die Mittelparallele von  $g_7$  und  $g_{-7}$  ?
- b) Welche Schargeraden haben vom Ursprung den Abstand 7 ?
- c) Welche Schargeraden berühren die Kugel um  $M$  mit Radius 9 ?
- d) Bezüglich welcher Schargerade sind  $V$  und  $W$  symmetrisch ?

•15. Untersuche, ob  $g$  und  $h$  windschief sind, berechne gegebenenfalls den Abstand  $d(g,h)$  und die Endpunkte der gemeinsamen Lotstrecke.

a)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

e)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

f)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

• 16.  $g: \vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g$  ist die Achse eines Zylinders  $Z$  mit Radius 11.  
Berechne die Schnittpunkte von  $Z$  und  $h$ .

• 17.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

- a) Die Kugel hat ihren Mittelpunkt auf  $h$  und berührt  $g$ .  
Bestimme ihren Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$  in Abhängigkeit von  $\mu$ .  
Für welchen Wert von  $\mu$  ist der Radius minimal?
- b) Bestimme Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$  der kleinsten Kugel,  
deren Mittelpunkt auf  $h$  liegt und die  $g$  als Tangente hat.
- c) Bestimme Mittelpunkt und Radius der kleinsten Kugel,  
die  $h$  und  $g$  als Tangenten hat.

### 5. Beweise

Mit dem Skalarprodukt ist es auch möglich, geometrische Sätze durch Rechnung zu beweisen. Drei Beispiele sollen das zeigen.

1. Beispiel: Hat ein Tetraeder zwei Paare orthogonaler Gegenkanten, dann sind auch die beiden restlichen Kanten orthogonal.

Vor.:  $\vec{a} \circ (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \quad (1)$

$\vec{b} \circ (\vec{a} - \vec{c}) = 0 \quad (2)$

Beh.:  $\vec{c} \circ (\vec{b} - \vec{a}) = 0$

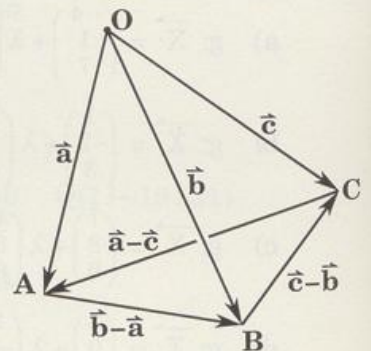
Bew.:  $\vec{a} \circ \vec{c} - \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \quad (1)$

$\vec{b} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{c} = 0 \quad (2)$

(1) + (2):  $\vec{a} \circ \vec{c} - \vec{b} \circ \vec{c} = 0$

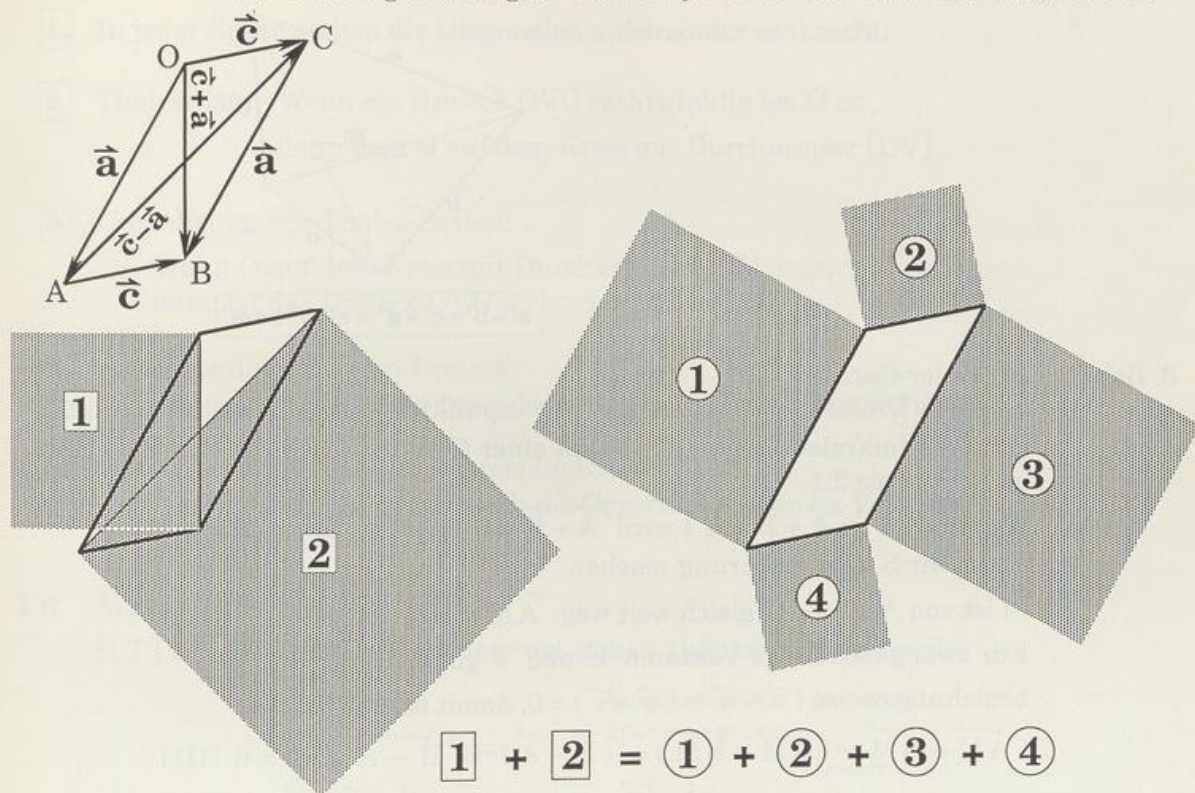
$(\vec{a} - \vec{b}) \circ \vec{c} = 0 \quad \text{q.e.d.}$

$$\left. \begin{array}{l} OA \perp BC \\ OB \perp CA \end{array} \right\} \Rightarrow OC \perp AB$$



Genauso elegant lassen sich viele bekannte Sätze aus der Planimetrie mit dem Skalarprodukt beweisen.

2. Beispiel: Ein Parallelogramm-Satz und seine Verallgemeinerung:  
 In einem Parallelogramm sind die beiden Quadrate über den Diagonalen  
 zusammen genau so groß wie die Quadrate über den Seiten zusammen.



$$\boxed{1} + \boxed{2} = \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4}$$

Vor.:  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} = \vec{a}$

Beh.:  $\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CO}^2$

Bew.:  $\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = (\vec{a} + \vec{c})^2 + (\vec{c} - \vec{a})^2 = 2\vec{a}^2 + 2\vec{c}^2$   
 $\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CO}^2 = \vec{a}^2 + \vec{c}^2 + \vec{a}^2 + \vec{c}^2 \quad \text{q.e.d.}$

Jetzt verallgemeinern wir den Satz auf beliebige Vierecke:

Summe der Seitenquadrate:

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 =$$

$$2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 + 2\vec{c}^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c})$$

Summe der Diagonalquadrate:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c})$$

Diese beiden Summen sind im allgemeinen nicht gleich groß,  
 sie unterscheiden sich um den Term  $\vec{a}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{c})^2$ .

Dieser Korrektur-Summand hat eine geometrische Bedeutung:

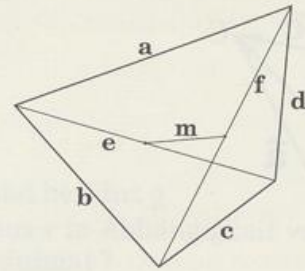
Sind M und N die Mitten der Diagonalen, dann gilt

$$\overrightarrow{NM} = \vec{M} - \vec{N} = \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}).$$

Damit haben wir einen Satz gefunden und bewiesen:

Die vier Quadrate über den Seiten eines Vierecks sind zusammen so groß wie

die Summe der beiden Diagonalquadrate und des vierfachen Quadrats über der Verbindung der Diagonalmitten.



$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2$$

### 3. Beispiel: Die Euler-Gerade:

In jedem Dreieck ABC liegen der Schwerpunkt S, der Höhenschnittpunkt H und der Umkreis-Mittelpunkt M auf einer Geraden. S teilt die Strecke [HM] im Verhältnis 2:1.

Wegen  $\vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$  wird  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$  (I),  
wenn wir S zum Ursprung machen.

M ist von A, B und C gleich weit weg:  $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$  (II)

Für zwei gleich lange Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  gilt  $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$

beziehungsweise  $(\vec{u} - \vec{v}) \circ (\vec{u} + \vec{v}) = 0$ ; damit folgt aus (II):

$$(\vec{AM} - \vec{BM}) \circ (\vec{AM} + \vec{BM}) = (\vec{B} - \vec{A}) \circ (2\vec{M} - \vec{A} - \vec{B}) = 0 \quad \text{(III)}$$

$$\text{und } (\vec{C} - \vec{B}) \circ (2\vec{M} - \vec{B} - \vec{C}) = 0 \quad \text{(IV)}$$

$$\text{und } (\vec{A} - \vec{C}) \circ (2\vec{M} - \vec{C} - \vec{A}) = 0 \quad \text{(V)}$$

Wir setzen  $\vec{G} := -2\vec{M}$ ; aus (I) folgt:  $-\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$ . Damit wird

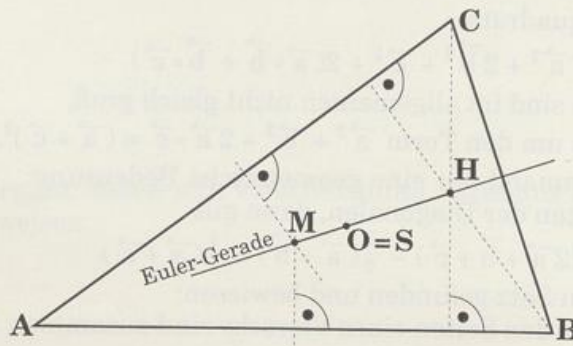
$$\text{aus (III): } (\vec{B} - \vec{A}) \circ (\vec{C} - \vec{G}) = \overline{AB} \circ \overline{GC} = 0$$

$$\text{aus (IV): } (\vec{C} - \vec{B}) \circ (\vec{A} - \vec{G}) = \overline{BC} \circ \overline{GA} = 0$$

$$\text{aus (V): } (\vec{A} - \vec{C}) \circ (\vec{B} - \vec{G}) = \overline{CA} \circ \overline{GB} = 0$$

Demnach liegt G auf allen Höhen, ist also identisch mit H:  $G = H$ .

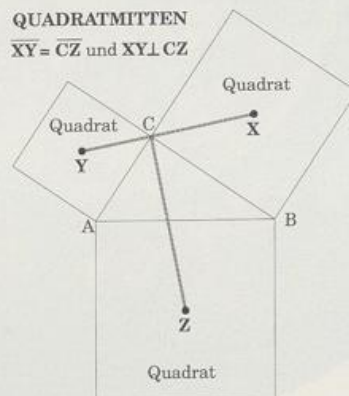
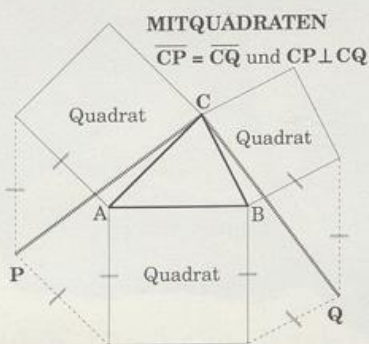
Aus  $\vec{H} = -2\vec{M}$  folgen beide Behauptungen.



## Aufgaben

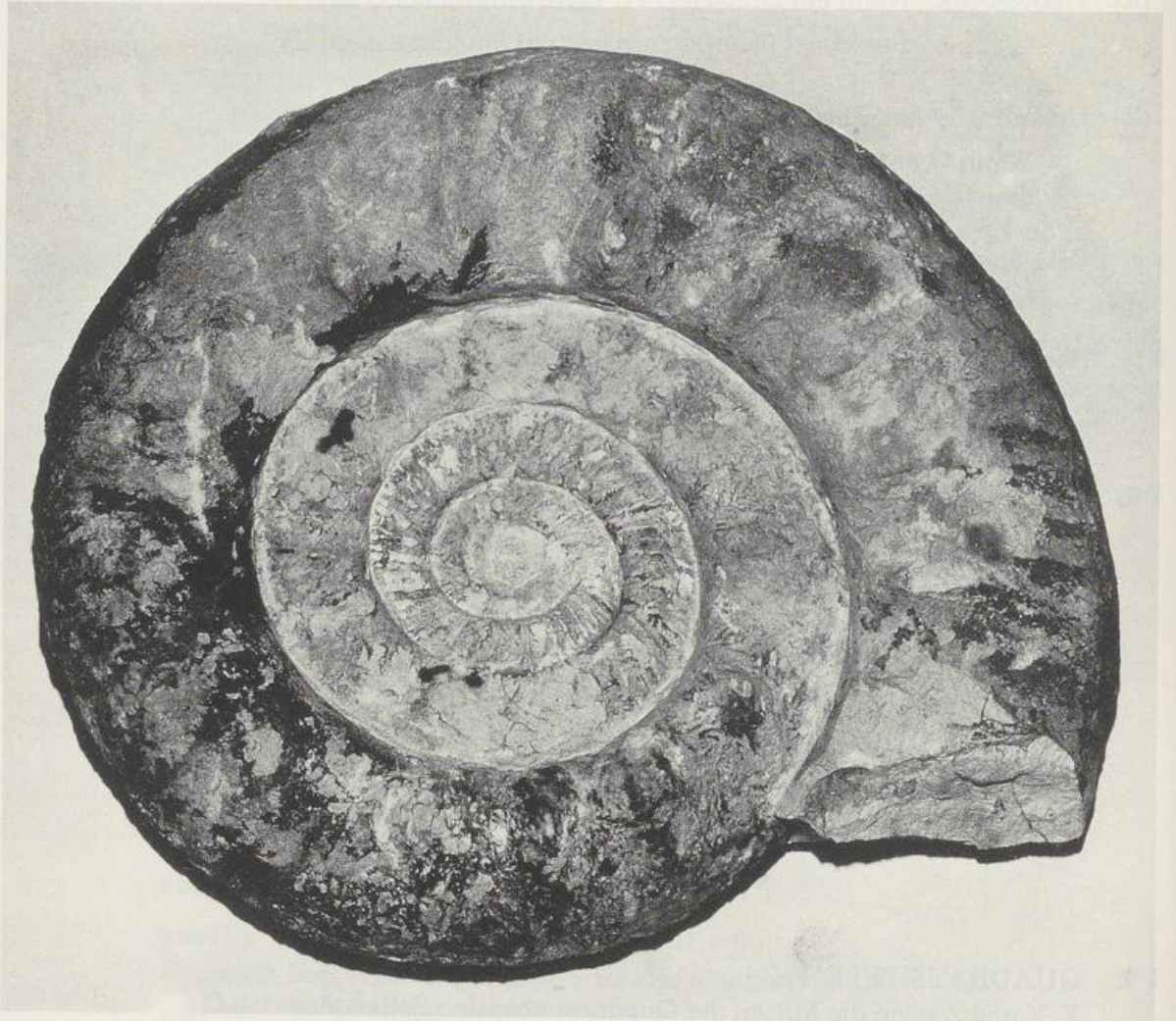
Beweise folgende Sätze mit dem Skalarprodukt

1. In jeder Raute stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.
2. Thales-Satz: Wenn ein Dreieck  $OVU$  rechtwinklig bei  $O$  ist, dann liegt  $O$  auf dem Kreis mit Durchmesser  $[UV]$ .
3. Umkehrung des Thales-Satzes:  
Wenn  $O$  auf dem Kreis mit Durchmesser  $[UV]$  liegt, dann ist das Dreieck  $OVU$  rechtwinklig bei  $O$ .
- 4. Satz über die Höhen im Dreieck:  
Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
- 5. Satz über die Winkelhalbierende im Dreieck:  
Jede Winkelhalbierende teilt die Gegenseite innen im Verhältnis der anliegenden Seiten.
- 6. MITQUADRATEN  
[CP] und [CQ] sind gleich lang und stehen aufeinander senkrecht.



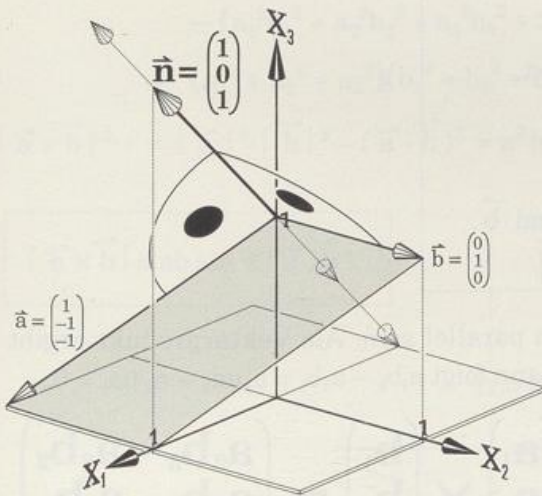
- 7. QUADRATMITTEN  
 $X, Y$  und  $Z$  seien die Mitten der Quadrate über den Seiten eines bei  $C$  rechtwinkligen Dreiecks  $ABC$ .  
[XY] und [CZ] sind gleich lang und stehen aufeinander senkrecht.
- 8. Der geometrische Ort der Punkte, deren Entfernungsverhältnis zu zwei festen Punkten  $O$  und  $P$  gleich  $\tau$  ( $\neq 1$ ) ist, ist ein Kreis. (Apollonios-Kreis)
9. In jedem Spat sind die Quadrate über den vier Raumdiagonalen zusammen genauso groß wie die Summe der Quadrate über den zwölf Kanten.
- 10. Die Höhen eines Tetraeders treffen sich genau dann in einem Punkt, wenn je zwei Gegenkanten senkrecht stehen.  
(Eine Höhe ist das Lot von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seitenfläche.)

## \*X. Vektorprodukt



## 1. Normalvektor und Parallelogrammfläche

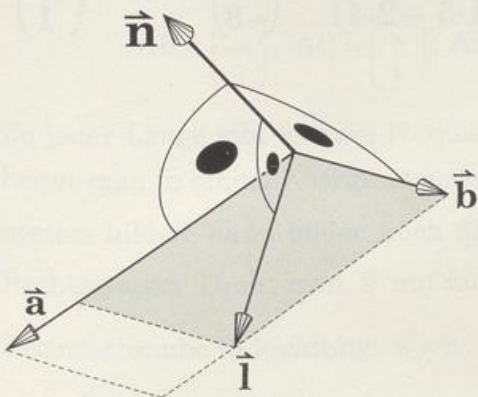
Zwei nichtparallele Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  spannen ein Parallelogramm auf.  $\vec{n}$  sei ein Vektor, der auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , also auch auf der Ebene senkrecht steht, in der das Parallelogramm liegt. Dieser Normalvektor  $\vec{n}$  liegt bis auf einen Zahlenfaktor eindeutig fest. Solche Normalvektoren sind in der Geometrie und in vielen Anwendungen der Physik, der Elektrotechnik und des Maschinenbaus sehr gefragt. Man hat deshalb eine Formel entwickelt, die zu gegebenem  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  schnell einen Normalvektor  $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$  liefert. Um sie herzuleiten, könnte man das 2,3-System  $\vec{n} \circ \vec{a} = 0$ ,  $\vec{n} \circ \vec{b} = 0$  lösen.



Schneller gehts mit einem kleinen Trick:  $\vec{n}$  steht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht, also auch auf jeder Linearkombination  $\vec{l}$  von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .  $\vec{l}$ ,  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind komplanar, also gilt

$\det(\vec{l}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$ , also  $\begin{vmatrix} l_1 & a_1 & b_1 \\ l_2 & a_2 & b_2 \\ l_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ , entwickelt nach der ersten Spalte

$$l_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + l_2 (-1) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + l_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$



Diese Zeile deuten wir als Skalarprodukt orthogonaler Vektoren

$$\vec{1} \circ \begin{pmatrix} |a_2 & b_2| \\ |a_3 & b_3| \\ -|a_1 & b_1| \\ |a_1 & b_1| \\ |a_2 & b_2| \end{pmatrix} = 0 \text{ und nehmen den zweiten Vektor als Normalvektor } \vec{n} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Wie wir gleich sehen werden, hat  $\vec{n}$  Eigenschaften, die an ein Produkt erinnern, in dem  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  die Faktoren sind. Deshalb die

**Definition**

Zu zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  heißt das Produkt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

**Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt** von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .  
(sprich a kreuz b)

Nach dieser Definition dürfen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  auch parallel sein. Als Vektorprodukt ergibt sich dann der Nullvektor. Ist nämlich  $b_i = \mu a_i$ , dann folgt  $a_i b_k - a_k b_i = a_i \mu a_k - a_k \mu a_i = 0$ .

Die Koordinaten von  $\vec{a} \times \vec{b}$  sehen etwas kompliziert aus, lassen sich aber über eine Eselsbrücke leicht berechnen. Man schreibt die ersten beiden Zeilen des Produkts noch einmal unter das Produkt.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$a_1 \quad b_1$   
 $a_2 \quad b_2$

+  
-

Die i-te Koordinate ergibt sich, wenn man bei den (Vektor-) Faktoren die i-te Zeile streicht und die Determinante aus den beiden folgenden Zeilen berechnet.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kontrolle:  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

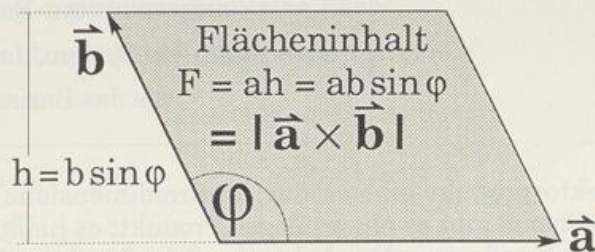
## Geometrische Eigenschaften

Jedes Vielfache des Normalvektors  $\vec{a} \times \vec{b}$  ist auch ein Normalvektor von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ . Die Länge  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  hat eine bemerkenswerte geometrische Bedeutung; das erkennt man nur mit trickreicher Algebra:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 \\ &\quad - 2(a_2b_3a_3b_2 + a_3b_1a_1b_3 + a_1b_2a_2b_1) \\ &\quad + a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2) \quad (\text{Trick!}) \\ &= a_1^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &\quad - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_2b_3a_3b_2 + 2a_3b_1a_1b_3 + 2a_1b_2a_2b_1) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2b^2 - (ab \cos \varphi)^2 = a^2b^2(1 - (\cos \varphi)^2) = a^2b^2(\sin \varphi)^2$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \varphi(\vec{a}, \vec{b})$$



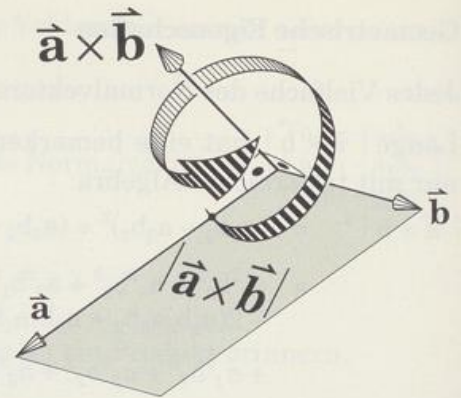
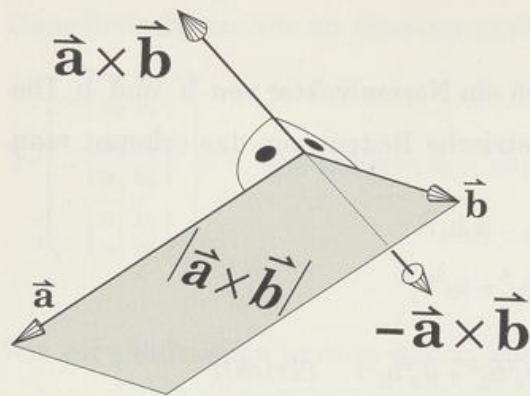
Die Länge von  $\vec{a} \times \vec{b}$  ist gleich dem Flächeninhalt des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms. Das ist eine anschauliche Erklärung dafür, daß das Kreuzprodukt paralleler Vektoren den Nullvektor ergibt; das zugehörige, zu einer Strecke entartete Parallelogramm hat den Flächeninhalt 0.

Auch der Flächeninhalt eines Dreiecks läßt sich jetzt einfach übers Kreuzprodukt der Vektoren berechnen, die es aufspannen:  $F_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

Beispiel:  $A(1|0|1)$ ,  $B(2|-3|1)$ ,  $C(0|0|5)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}; F_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \frac{13}{2}$$

Zu jeder Länge gibt es zwei Normalvektoren von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :  $k \vec{a} \times \vec{b}$  und  $-k \vec{a} \times \vec{b}$ . Arbeitet man in einem Koordinatensystem, dessen Basisvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  ein Rechtssystem bilden, dann bilden auch die nichtparallelen Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{a} \times \vec{b}$  ein Rechtssystem: Dreht man  $\vec{a}$  auf kürzestem Weg in die Richtung  $\vec{b}$ , so bohrt sich eine Rechtsschraube in Richtung  $\vec{a} \times \vec{b}$ . Insbesondere gilt:  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$ .



### Zusammenfassung

Für nichtparallele Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist:

$\vec{a} \times \vec{b}$  senkrecht zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ ,

$|\vec{a} \times \vec{b}|$  der Flächeninhalt des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$   
aufgespannten Parallelogramms,

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{a} \times \vec{b}$  ein System, das so orientiert ist

wie das Basissystem  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

Das Vektorprodukt gibt es nur im dreidimensionalen Raum. Im zweidimensionalen Raum (Ebene) gibt es ein analoges Produkt; es heißt nach einem der Väter der Vektorrechnung **Graßmann-Produkt** oder Schiefprodukt. Man definiert:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := \det(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Auch für  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  (sprich a schief b) gilt

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = ab \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \text{Flächeninhalt des Parallelogramms, das von } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ aufgespannt ist.}$$

Begründung:  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

### Produkteigenschaften von $\vec{a} \times \vec{b}$

Die Bezeichnung Produkt beruht vor allem auf der Gültigkeit des **Distributivgesetzes**. Wie eine mühsame Koordinatenrechnung zeigt, gilt

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Von den andern Produkteigenschaften bleibt kaum was übrig.

Beim Vertauschen der Faktoren ändert sich das Vorzeichen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \text{Anti-Kommutativgesetz}$$

Das **Assoziativgesetz** gilt überhaupt nicht, wie man schon an einem Zahlenbeispiel sieht:

$$\left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Zahlenfaktoren lassen sich allerdings beliebig ausklammern:

$$(\mu \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\mu \vec{b}) = \mu (\vec{a} \times \vec{b})$$

Ein neutrales Element kann es nicht geben, weil der Produktvektor senkrecht auf den beiden Faktoren steht und deswegen nicht mit einem der beiden identisch sein kann. Weil es kein neutrales Element gibt, ist auch die Division nicht sinnvoll.

Das letzte Beispiel hat gezeigt, daß das Assoziativgesetz nicht gilt. GRABMANN hat eine Beziehung gefunden, die das Produkt  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  mit dem Skalarprodukt und der S-Multiplikation ausdrückt. Diese Beziehung heißt auch **Grassmann-Identität**

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \circ \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \circ \vec{b}) \vec{c} \quad (*)$$

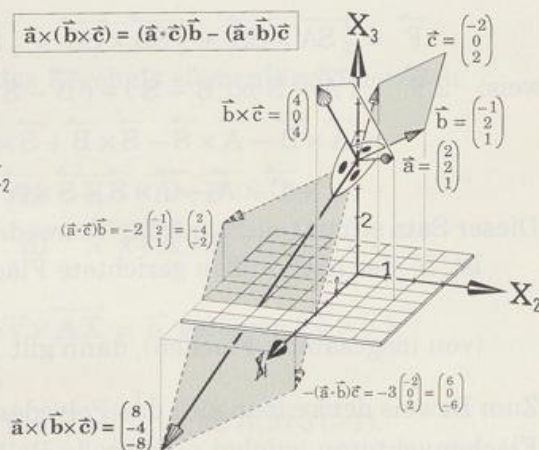
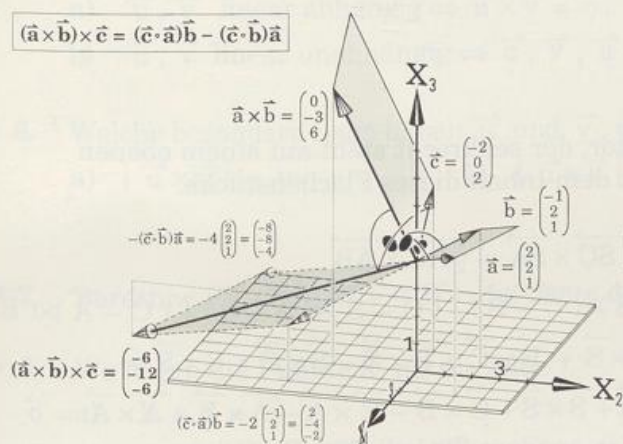
Nach Umstellung und Umbenennung ergibt sich der Reihe nach

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{a} \circ \vec{b}) \vec{c} - (\vec{a} \circ \vec{c}) \vec{b} \quad (\text{Anti-Kommutativgesetz})$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{c} \circ \vec{a}) \vec{b} - (\vec{c} \circ \vec{b}) \vec{a} \quad (\bullet)$$



Der Vergleich von (\*) und (•) zeigt, daß das Assoziativgesetz nicht gilt.

Zum Beweis von (\*) überlegt man sich, daß der Vektor  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  senkrecht auf dem Lot von  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  steht, also eine Linearkombination von  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  sein muß:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c} \quad \parallel \circ \vec{a}$$

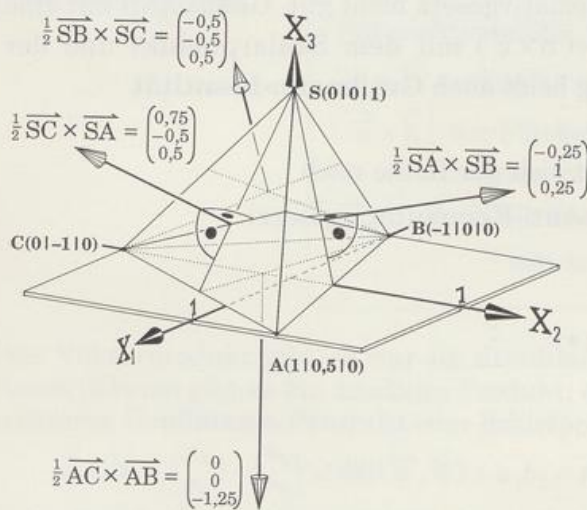
$$0 = \lambda \vec{a} \circ \vec{b} + \mu \vec{a} \circ \vec{c}.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist  $\lambda = \vec{a} \circ \vec{c}$ ,  $\mu = -\vec{a} \circ \vec{b}$ . Damit gilt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = k[(\vec{a} \circ \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \circ \vec{b}) \vec{c}]. \quad \text{Die Koordinatenrechnung zeigt: } k = 1.$$

Als Anwendung beweisen wir einen Satz aus der Raumgeometrie:

*In jedem Tetraeder ist die Summe der nach außen gerichteten Flächenvektoren gleich dem Nullvektor.*



Mit *Flächenvektor* meint man einen Vektor, der senkrecht steht auf einem ebenen Flächenstück und dessen Länge gleich ist dem Inhalt dieses Flächenstücks.

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \vec{SA} \times \vec{SB} + \frac{1}{2} \vec{SB} \times \vec{SC} + \frac{1}{2} \vec{SC} \times \vec{SA} + \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{AB}$$

Beweis:  $2\vec{F} = (\vec{A} - \vec{S}) \times (\vec{B} - \vec{S}) + (\vec{B} - \vec{S}) \times (\vec{C} - \vec{S}) + (\vec{C} - \vec{S}) \times (\vec{A} - \vec{S}) + (\vec{C} - \vec{A}) \times (\vec{B} - \vec{A})$

$$= \vec{A} \times \vec{B} - \vec{A} \times \vec{S} - \vec{S} \times \vec{B} + \vec{S} \times \vec{S} + \vec{B} \times \vec{C} - \vec{B} \times \vec{S} - \vec{S} \times \vec{C} + \vec{S} \times \vec{S} +$$

$$+ \vec{C} \times \vec{A} - \vec{C} \times \vec{S} - \vec{S} \times \vec{A} + \vec{S} \times \vec{S} + \vec{C} \times \vec{B} - \vec{C} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$$

Dieser Satz stimmt nicht nur für Tetraeder, sondern für beliebige Polyeder:

Ist  $\vec{n}_i$  der nach außen gerichtete Flächenvektor der  $i$ -ten Fläche

(von insgesamt  $k$  Flächen), dann gilt  $\sum_{i=1}^k \vec{n}_i = \vec{0}$ .

Zum Beweis denke man sich das Polyeder in lauter Tetraeder zerlegt.

Flächenvektoren spielen eine große Rolle in der grafischen Datenverarbeitung. Zum Beispiel ist eine Seitenfläche eines konvexen Vielflachs genau dann unsichtbar, wenn ihr Flächenvektor mit dem Blickvektor  $\vec{OA}_{uge}$  einen stumpfen Winkel einschließt.

## Aufgaben

1. Berechne

a)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -16 \end{pmatrix}$

e)  $\begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 20 \end{pmatrix}$

f)  $\begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a+2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a+3 \\ a+4 \\ a+5 \end{pmatrix}$

2. Berechne mit dem Vektorprodukt einen Normalvektor der Ebene:

a)  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 17 \\ -21 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{X} = \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

3.  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Berechne  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$  und  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ .

b) Stelle  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$  als Linearkombination von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  dar.

4. Bestätige für  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -20 \\ 5 \end{pmatrix}$  die Beziehung  $(\vec{a} \circ \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a^2 b^2$ .

• 5. Zeige:

a)  $\vec{u}, \vec{v}$  linear abhängig  $\Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ .

b)  $\vec{u}, \vec{v}$  linear unabhängig  $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$  linear unabhängig.

• 6. Welche besondere Lage haben  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ , wenn gilt:

a)  $|\vec{u} \times \vec{v}| = uv$       b)  $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u} \circ \vec{v}|$

• 7. Berechne  $(\vec{v} + \vec{w}) \times (\vec{v} - \vec{w})$  und deute das Ergebnis elementargeometrisch.

• 8. Wo liegen die Punkte X, für die gilt:

a)  $\vec{X} \times \vec{A} = \vec{0}$

b)  $\vec{X} \circ (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$

c)  $2|\vec{X} \times \vec{A}| = |\vec{X}| = |\vec{A}| = 1$

d)  $\vec{X} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}$

9. Zeige: Die Punkte X, die der Gleichung  $\vec{v} \times \vec{AX} = \vec{0}$  genügen ( $\vec{v} \neq \vec{0}$ ), bilden eine Gerade g.

Stelle eine Parametergleichung von g auf für  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $A(2|3|-1)$ .

10. Berechne die Fläche des Parallelogramms ABCD

- a)  $A(0|0|0)$ ,  $B(1|0|-3)$ ,  $C(-4|6|-1)$   
b)  $A(1|0|-1)$ ,  $B(1|-3|3)$ ,  $C(5|3|2)$

11. Berechne die Fläche des Dreiecks ABC

- a)  $A(-2|2|-3)$ ,  $B(0|0|0)$ ,  $C(3|-2|0)$   
b)  $A(3|2|1)$ ,  $B(5|-2|1)$ ,  $C(7|-2|-5)$

12. g:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} -25 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$  Bestimme den Abstand von Punkt  $P(1|1|1)$  und Gerade g, indem du den Flächeninhalt eines geeigneten Dreiecks GHP (G und H liegen auf g) und die zugehörige Höhe h berechnest.

13. Zeige: Der Abstand d eines Punkts P und einer Gerade AB errechnet sich

$$\text{mit der Formel } d = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}|}{AB}.$$

Berechne mit dieser Formel den Abstand von Ursprung und g:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ 32 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

14. Zeige: Der Abstand d der Parallelen g:  $\vec{X} = \vec{G} + \lambda \vec{u}$  und

$$h: \vec{X} = \vec{H} + \mu \vec{u} \text{ errechnet sich mit der Formel } d = \frac{1}{|\vec{u}|} |\overrightarrow{GH} \times \vec{u}|.$$

Berechne mit dieser Formel den Abstand von

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

• 15. Bestimme die Lösung von  $\vec{X} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ , falls  $x_1 = 1$ .

16.  $A(5|2|6)$ ,  $B(7|0|9)$ ,  $C(0|-2|1)$ . Bestimme die Länge der Höhe  $h_c$  im Dreieck ABC.

• 17.  $A(6|3|6)$ ,  $B(4|8|-8)$ , g:  $\vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bestimme C auf g so, daß das Dreieck ABC den Flächeninhalt 54 hat.

• 18. Zeige:  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \Leftrightarrow \vec{u}$  und  $\vec{w}$  sind kollinear, wenn kein Nullvektor darunter ist.

19.  $A(0|0|0)$ ,  $B(6|9|-6)$ ,  $C(6|3|6)$ ,  $D(-4|-8|8)$

- a) Zeige: Das Viereck ABCD ist eben.  
b) Zeige: Das Viereck ABCD ist nicht überschlagen, das heißt, keine Seite kreuzt eine andre.  
c) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

• 20. Begründe:

- a) Ist  $P_1P_2P_3P_4P_5$  ein ebenes konvexes Fünfeck, dann sind die Kreuzprodukte  $\overrightarrow{P_jP_{j+1}} \times \overrightarrow{P_{j+1}P_{j+2}}$  aufeinander folgender Seitenvektoren gleichsinnig parallel. Stimmt dieser Satz auch für konkave Fünfecke?
- b) I liege im Innern eines ebenen konvexen Fünfecks  $P_1P_2P_3P_4P_5$   
 $\Leftrightarrow$  für alle Ecken  $P_j$  mit  $P_1 = P_6$  gilt:  
 $\overrightarrow{P_jP_{j+1}} \times \overrightarrow{P_jI}$  ist bis auf einen positiven Faktor gleich  $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3}$ .  
 Wie merkt man, daß ein Punkt auf dem Fünfeck liegt?

• 21.  $A(4|3|0)$ ,  $B(6|0|1)$ ,  $C(-4|0|6)$ ,  $D(-8|6|4)$ ,  $E(0|6|0)$

- a) Zeige: ABCDE ist ein ebenes konvexes Fünfeck.  
 b)  $P(-8|3|6)$ ,  $Q(-2|3|3)$ ,  $R(-6|3|5)$ ,  $S(0|0|4)$ ,  $T(0|3|2)$ ,  $U(-6|3|4)$ .  
 Welche Punkte liegen innerhalb oder außerhalb des Fünfecks ABCDE?  
 Welche liegen drauf?

• 22.  $A(1|-2|0)$ ,  $B(-3|-6|6)$ ,  $C(3|10|12)$ ,  $D(5|6|0)$

- a) Zeige: ABCD ist ein ebenes konvexes Viereck.  
 b)  $P(0|2|9)$ ,  $Q(-4|-18|-9)$ ,  $R(0|0|0)$ ,  $S(2|2|3)$   
 Welche Punkte liegen innerhalb oder außerhalb des Vierecks ABCD?  
 Welche liegen drauf?

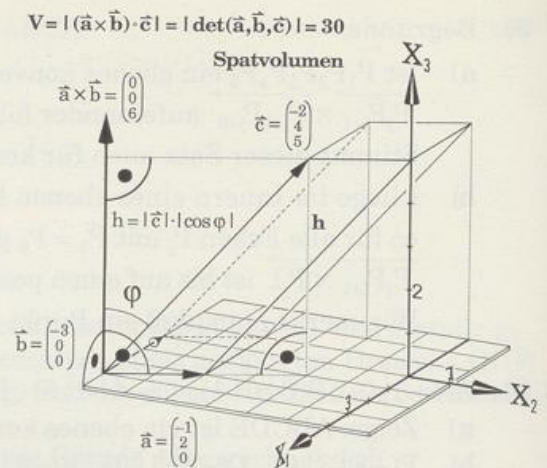
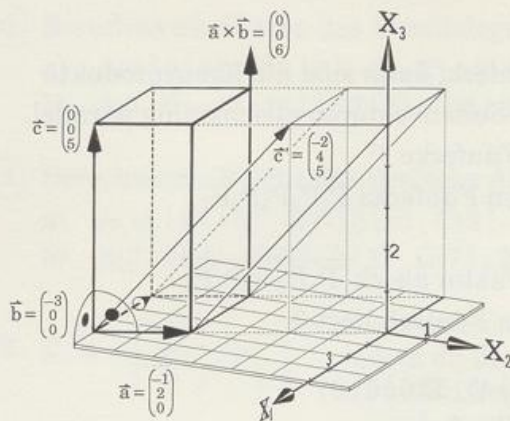
## 2. Spatprodukt und Spatvolumen

Das Volumen eines geraden Prismas berechnet man mit der Formel Grundfläche mal Höhe. Schert man ein Prisma parallel zur Grundfläche, dann bleiben Grundfläche  $G$  und Höhe  $h$  – und nach CAVALIERI – auch das Volumen  $V = G \cdot h$  gleich.

Drei nicht komplanare Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  spannen ein Spat auf.  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  spannen eine Seitenfläche vom Inhalt  $G = |\vec{a} \times \vec{b}|$  auf;  $\vec{a} \times \vec{b}$  ist senkrecht zu dieser Seitenfläche, also parallel zur Höhe  $h$ . Diese ist die Länge der senkrechten Projektion von  $\vec{c}$  auf

$$\vec{a} \times \vec{b}: h = |\vec{c}| \cdot |\cos \varphi| = |\vec{c}| \cdot \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

$$V_{\text{Spat}} = G \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$



Das gemischte Produkt  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  heißt auch **Spatprodukt** von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$ ; man schreibt es einfach  $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ . Der Ausdruck  $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$  ist eine Zahl, deren Betrag das Volumen des von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aufgespannten Spats angibt.  $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$  ist positiv, wenn  $\cos \varphi$  positiv ist, das heißt, wenn  $\vec{c}$  und  $\vec{a} \times \vec{b}$  einen spitzen Winkel einschließen. Das bedeutet, daß  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  ein Rechtssystem bilden.

Die Schreibweise  $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$  enthält keine Klammern, läßt also nicht erkennen, wo »  $\cdot$  « und wo »  $\times$  « steht. Tatsächlich kommts nicht drauf an, solange man die Reihenfolge der Vektoren nicht ändert. Es gilt nämlich:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \quad (\text{andere Grundfläche}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Berechnet man das Spatprodukt aus den Koordinaten von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$ , dann macht man eine überraschende Entdeckung:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(Entwicklung nach der 3. Spalte)

Damit gilt:  $V_{\text{Spat}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| =: |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$

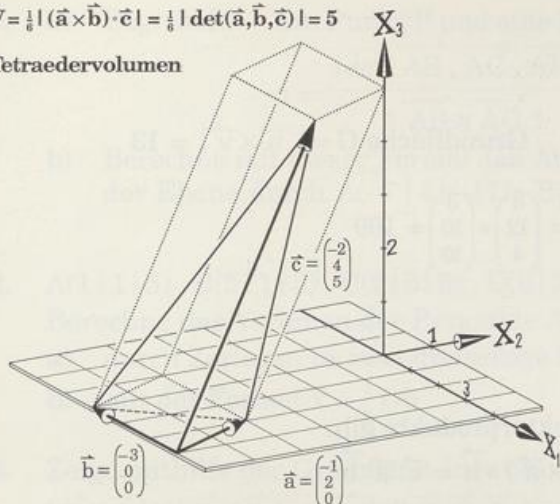
Diese Volumenformel macht die Komplanaritätsbedingung anschaulich verständlich:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ komplanar} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0.$$

Das Spat hat die Höhe 0 und entartet zu einem Vieleck.

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = 5$$

Tetraedervolumen



Drei nicht komplanare Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  spannen auch ein Tetraeder (= dreiseitige Pyramide) auf.

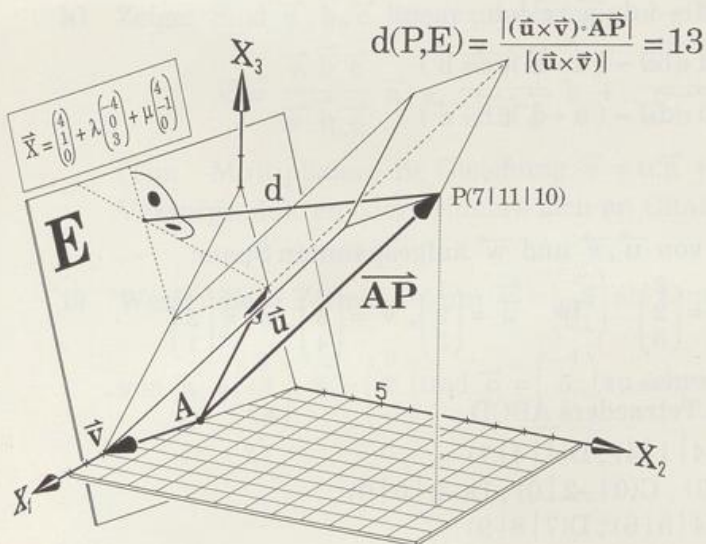
$$V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{3} G_{\text{Tetraeder}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} G_{\text{Spat}} \cdot h = \frac{1}{6} V_{\text{Spat}}$$

$$V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

Als Anwendung des Spatprodukts berechnen wir den Abstand eines Punkts und einer Ebene in Parameterform:

$$P(7|11|10), E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

$\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{AP}$  spannen ein Spat auf. Der Abstand  $d(P,E)$  ist gleich der Spathöhe, die auf  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  senkrecht steht:



$$d(P,E) = \frac{V}{G} = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \overrightarrow{AP}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \text{Grundfläche } G = |\vec{u} \times \vec{v}| = 13$$

$$\text{Volumen } V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \overrightarrow{AP}| = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 169$$

$$d(P,E) = \frac{V}{G} = \frac{169}{13} = 13.$$

### Eigenschaften des Spatprodukts

Wegen der Eigenschaften des Skalar- und Vektorprodukts gilt:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{c} \circ (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \circ \vec{b} = \vec{c} \vec{a} \vec{b}$$

$$\text{also } \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{c} \vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{c} \vec{a},$$

das heißt, zyklische Vertauschung ändert den Wert nicht. Andererseits gilt:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \circ \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c}$$

$$\text{also } \vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c},$$

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a}$$

und  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b}$ , das heißt, Vertauschung zweier Vektoren ändert das Vorzeichen.

Die Vertauschungseigenschaft des Spatprodukts führt zu einer weiteren Beziehung von Vektor- und Skalarprodukt, der *Lagrange-Identität*:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \circ \vec{c})(\vec{b} \circ \vec{d}) - (\vec{a} \circ \vec{d})(\vec{b} \circ \vec{c})$$

Zum Beweis setzen wir  $\vec{c} \times \vec{d} = \vec{z}$ . Damit ist:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \circ (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{z} = \vec{a} \vec{b} \vec{z} = \vec{z} \vec{a} \vec{b} = (\vec{z} \times \vec{a}) \circ \vec{b} = \\ &= [(\vec{c} \times \vec{d}) \times \vec{a}] \circ \vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(Graßmann)} \quad &= [(\vec{c} \circ \vec{a}) \vec{d} - (\vec{d} \circ \vec{a}) \vec{c}] \circ \vec{b} \\ &= (\vec{c} \circ \vec{a})(\vec{d} \circ \vec{b}) - (\vec{d} \circ \vec{a})(\vec{c} \circ \vec{b}) \\ &= (\vec{a} \circ \vec{c})(\vec{b} \circ \vec{d}) - (\vec{a} \circ \vec{d})(\vec{b} \circ \vec{c}) \end{aligned}$$

### Aufgaben

1. Berechne das Volumen  $V$  des von  $\vec{u}, \vec{v}$  und  $\vec{w}$  aufgespannten Spats:

$$\text{a) } \vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Berechne das Volumen  $V$  des Tetraeders ABCD

- a) A(1 | 1 | 1), B(1 | 4 | 4), C(4 | 1 | 4), D(4 | 4 | 1)  
 b) A(-1 | -1 | -1), B(0 | 0 | -2), C(0 | -2 | 0), D(-2 | 0 | 0)  
 c) A(0 | 0 | 0), B(1 | 2 | 3), C(4 | 5 | 6), D(7 | 8 | 9)

3. a) Begründe: Ein Punkt P und eine Ebene ABC haben den Abstand

$$d = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$

- b) Berechne mit dieser Formel den Abstand von P(-41 | 33 | 25) und der Ebene durch A(-7 | 4 | -17), B(-7 | 1 | -13) und C(-3 | 7 | -14).

4. A(1 | 1 | 5), B(5 | 1 | 5), C(2 | 5 | 5), D(0 | 3 | 5), Spitze S(4 | 1 | -1)

Berechne das Volumen der Pyramide ABCDS

- a) durch Zerlegen in zwei dreiseitige Pyramiden.

- b) mit der Formel  $V = \frac{1}{3} Gh$

- 5. Zeige mithilfe der Graßmann-Identität:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}) \times (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) &= \overrightarrow{u} \det(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v} \det(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{u}) \\ &= \overrightarrow{q} \det(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) - \overrightarrow{p} \det(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{aligned}$$

- 6. **Jacobi-Identität** Zeige mithilfe der Graßmann-Identität

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} + (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \vec{0}$$

- 7. a) Zeige: Die windschiefen Geraden  $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{G} + \lambda \overrightarrow{u}$  und  $h: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{H} + \mu \overrightarrow{v}$

$$\text{haben den Abstand } d = \frac{|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{GH}|}{|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|}$$

- b) Bestimme mit dieser Formel den Abstand von

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

8. Zerlegung eines Vektors  $\overrightarrow{v}$  in seine Komponenten in Richtung  $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ :

- a) Zeige: Sind  $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$  linear unabhängig, so gilt

$$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}}{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}} \overrightarrow{a} + \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{c}}{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}} \overrightarrow{b} + \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}} \overrightarrow{c}$$

(Tip: Multipliziere die Gleichung  $\overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c}$  mit geeigneten Vektorprodukten oder erinnere dich an CRAMER!)

- b) Wende diese Formel an, um  $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$  als Linearkombination

$$\text{von } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zu schreiben.}$$

- 9. Rechtfertige die Gleichheitszeichen

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times \vec{b}) \circ (\vec{c} \times \vec{d}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{d} \cdot \vec{a} \\
 &= [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] \cdot \vec{a} = [(\vec{b} \cdot \vec{d}) \vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{d}] \cdot \vec{a} \\
 &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})
 \end{aligned}$$

### • 10. Quaternionen

William HAMILTON hat 1844 die komplexen Zahlen durch die Definition der *Quaternionen* erweitert. Eine Quaternion  $q$  ist ein Term der Form

$$\begin{aligned}
 a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad \text{mit } a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\
 \text{und } ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j
 \end{aligned}$$

Hamilton betrachtete eine Quaternion  $q$  als Summe einer Zahl  $a_0$  (Skalarteil) und

eines dreidimensionalen Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ , also  $q = a_0 + \vec{a}$ .

Zeige: Multipliziert man zwei Quaternionen  $q_1 = a_0 + \vec{a}$  und  $q_2 = b_0 + \vec{b}$ , dann entstehen alle uns bekannten Produkte:

$$a_0 b_0 \quad \text{Zahlenprodukt}$$

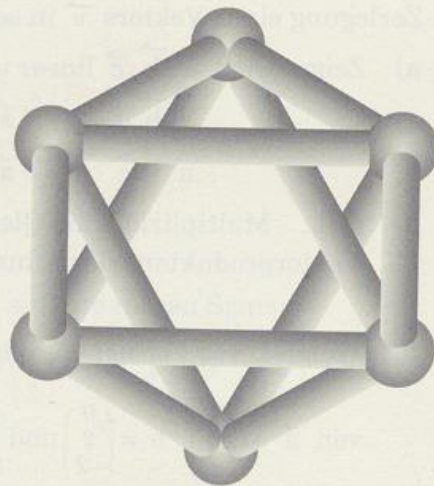
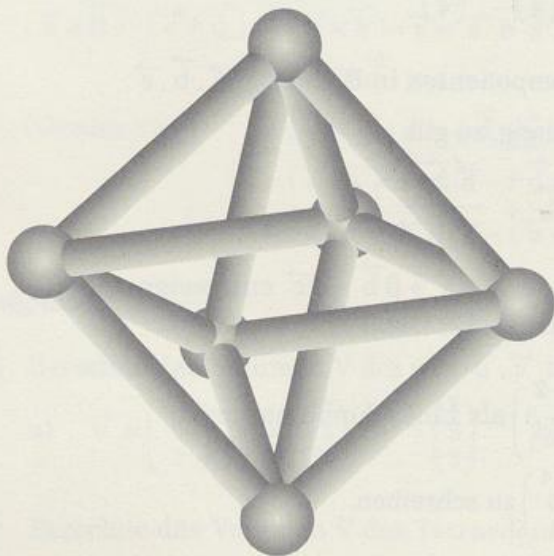
$$a_0 \vec{b}, b_0 \vec{a} \quad \text{S-Multiplikation}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{Skalarprodukt}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \quad \text{Vektorprodukt} \quad \text{und es gilt:}$$

$$(a_0 + \vec{a}) * (b_0 + \vec{b}) = a_0 b_0 + a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b},$$

» \* « bedeutet (distributive) Multiplikation zweier Quaternionen.



## XI. Normalformen



## 1. Normalform der Ebene

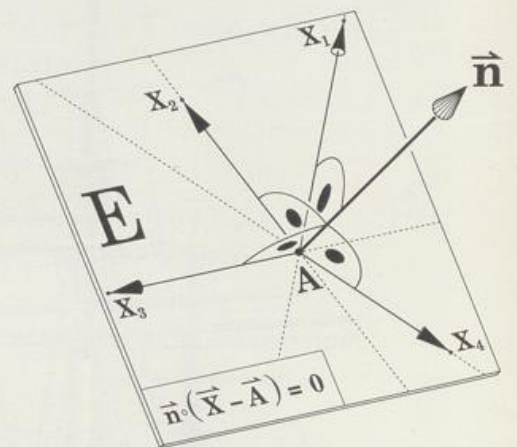
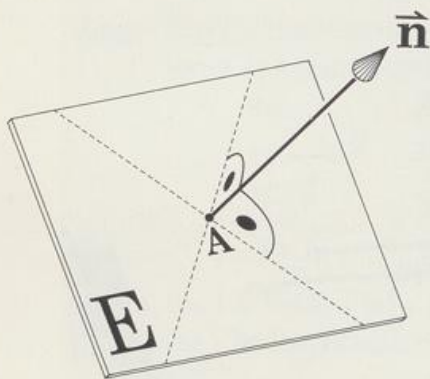
Bisher haben wir die Lage einer Ebene im Raum durch Elemente wie Punkte, Geraden und Vektoren festgelegt – also durch Bestimmungsstücke, die in der Ebene liegen. Es gibt aber auch noch eine andere einfache Möglichkeit: Man gibt einen Punkt  $A$  (Aufpunkt) der Ebene an und fixiert die Richtung der Ebene mit einem Normalvektor  $\vec{n}$ , mit einem Vektor also, der senkrecht auf der Ebene steht. Alle Vektoren  $\vec{AX}$ , die einen Ebenenpunkt  $X$  mit dem Aufpunkt  $A$  verbinden, stehen senkrecht auf  $\vec{n}$ . Die Ebenenpunkte  $X$  werden beschrieben durch:

$$\vec{n} \circ \vec{AX} = 0$$

$$\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$

$$\vec{n} \circ \vec{X} - \vec{n} \circ \vec{A} = 0$$

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$$



Die letzte Gleichung kennen wir schon als Koordinatengleichung der Ebene. Ihre Koeffizienten  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  sind also die Koordinaten eines Normalvektors.

### Definition

Ist  $A$  Aufpunkt und  $\vec{n}$  Normalvektor einer Ebene  $E$ , dann heißt

$$\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$

**vektorielle Normalform der Ebenengleichung**

beziehungsweise

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0 \quad \text{mit} \quad n_0 = -\vec{n} \circ \vec{A}$$

**skalare Normalform der Ebenengleichung.**

Die skalare Normalform der Ebenengleichung ist identisch mit der Koordinatengleichung der Ebene.

Beispiel: Gesucht ist eine Gleichung der Ebene E, die durch A(2 | -3 | 4) geht und

$$\text{senkrecht steht auf der Gerade } g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Als Normalvektor nehmen wir den Richtungsvektor der Gerade und stellen sofort die vektorielle Normalform der Ebenengleichung auf:

$$E: \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = 0. \text{ Ausmultiplizieren liefert die}$$

$$\text{skalare Normalform } E: 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 21 = 0$$

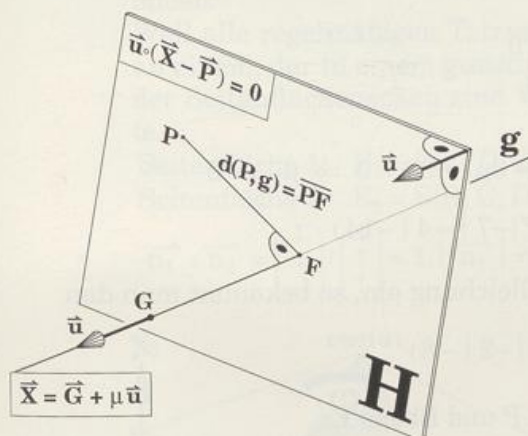
Der Normalvektor zeigt einen neuen Weg, die Parameterform der Ebenengleichung in die Koordinatenform umzurechnen: Man sucht einen Vektor  $\vec{n}$ , der auf den beiden Richtungsvektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  der Ebene senkrecht steht.  $\vec{n}$  ist Lösung des 2,3-Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ \vec{u} &= 0 \\ \vec{n} \circ \vec{v} &= 0 \end{aligned}$$

oder ein Vielfaches von  $\vec{u} \times \vec{v}$ . Dann gehts weiter wie im vorigen Beispiel. Vier Beispiele zeigen die Nützlichkeit der Normalform beim Lösen geometrischer Grundaufgaben.

### Abstand $d(P, g)$ von Punkt P und Gerade g

Lösungsidee: Man legt eine Hilfsebene H durch P senkrecht zu g. H schneidet g im Lotfußpunkt F. F heißt auch **senkrechte Projektion** des Punkts P auf (oder in) die Gerade g. Der gesuchte Abstand ist  $d(P, g) = \overline{PF}$ .



Beispiel:  $P(0 | -2 | 1)$ ,  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$H: 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7 = 0$$

$$g \text{ in } H \text{ eingesetzt: } 2(5 + 2\mu) - 2(2 - 2\mu) + 3(6 + 3\mu) - 7 = 0 \Rightarrow \mu = -1$$

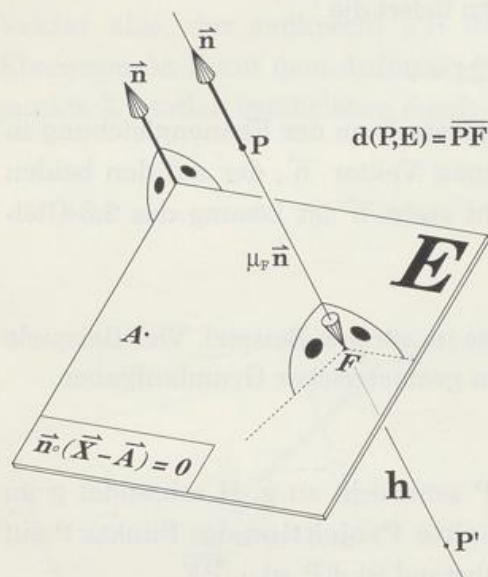
$$\text{Lotfußpunkt: } \vec{F} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, F(3 | 4 | 3)$$

$$\text{Abstand: } \overline{PF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, d(P, g) = |\overline{PF}| = 7$$

## Spiegelung eines Punkts P an einer Ebene E

Lösungsidee: Man legt durch P eine Normale der Ebene E. Diese Lotgerade schneidet E im Lotfußpunkt F (Parameter  $\mu_F$ ). F heißt auch **senkrechte Projektion** des Punkts P in (oder auf) die Ebene E.

Für den Spiegelpunkt P' gilt  $\vec{P}' = \vec{P} + 2\mu_F \vec{n}$



Beispiel:  $P(1 \mid 0 \mid -2)$ ,  $E: 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 32 = 0$

$$\text{Lotgerade } h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \text{ in } E \text{ eingesetzt: } 2(1 + 2\mu) + \mu + 3(-2 + 3\mu) + 32 = 0 \Rightarrow \mu_F = -2$$

$$\text{Spiegelpunkt } \vec{P}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P'(-7 \mid -4 \mid -14)$$

Setzt man  $\mu_F = -2$  in die Lotgeraden-Gleichung ein, so bekommt man den

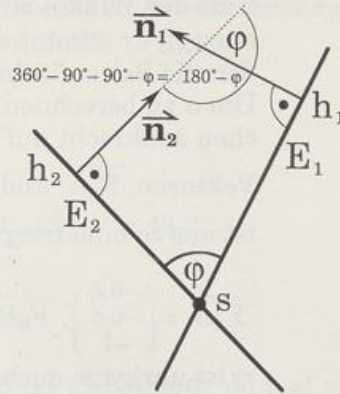
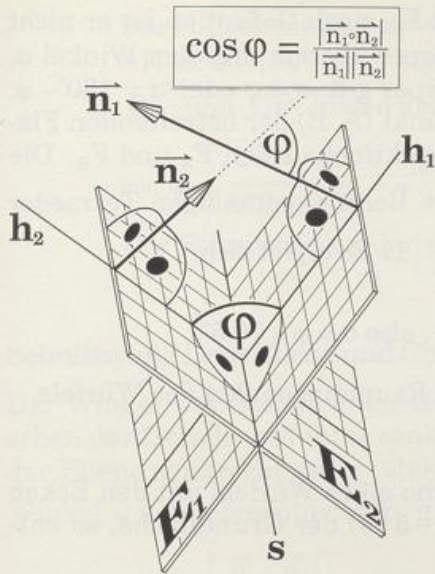
$$\text{Lotfußpunkt } \vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad F(-3 \mid -2 \mid -8)$$

$\overline{PF}$  ist der Abstand  $d(P, E)$  von Punkt P und Ebene E:

$$\overline{PF} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad d(P, E) = |\overline{PF}| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

## Schnittwinkel von Ebenen

Schneiden sich die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  in der Gerade  $s$ , dann versteht man unter dem Schnittwinkel  $\varphi$  den nichtstumpfen Winkel zweier Lotgeraden  $h_1$  und  $h_2$  dieser Schnittgerade  $s$ , wobei  $h_1$  in  $E_1$  und  $h_2$  in  $E_2$  liegt. Parallele Ebenen haben den »Schnittwinkel«  $0^\circ$ . Weil die zugehörigen Normalenvektoren  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  auf  $h_1$  und  $h_2$  senkrecht stehen, bilden auch sie den Schnittwinkel  $\varphi$  oder  $180^\circ - \varphi$ .



Blick auf die Ebenen in Richtung der Schnittgerade s

Sind  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  Normalvektoren der Ebenen  $E_1$  und  $E_2$   
 und  $\sphericalangle(E_1, E_2) = \varphi$ , dann gilt  $\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$

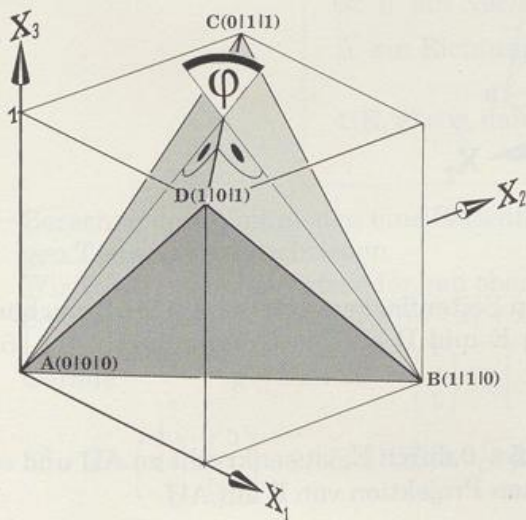
Beispiel: Berechne den Winkel, den zwei Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders bilden.

Weil alle regelmäßigen Tetraeder ähnlich sind, überlegen wir uns die Lösung an einem, der in einem günstig liegenden Würfel verpackt ist: die Koordinaten der Seitenflächenecken sind Würfecken, das Tetraeder steht auf einer Kante.

Seitenfläche 1:  $E_1 = E(A, D, C): x_1 + x_2 - x_3 = 0$

Seitenfläche 2:  $E_2 = E(B, C, D): x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, |\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = \sqrt{3}; \cos \varphi = \frac{1}{3}, \varphi = 70,5^\circ.$



$\varphi$  ist der Winkel zwischen den Ebenen  $E_1$  und  $E_2$ , nach Definition ist er nicht stumpf; er stimmt deshalb nicht bei jedem Körper überein mit dem Winkel  $\sigma$ , den die Seitenflächen bilden. Für konvexe Körper gilt:  $\sigma = \varphi$  oder  $\sigma = 180^\circ - \varphi$ . Um  $\sigma$  zu berechnen, projiziert man je einen Punkt (A, B) der betreffenden Flächen senkrecht auf die Schnittgerade. Die Projektionen seien  $F_A$  und  $F_B$ . Die Vektoren  $\overrightarrow{F_A A}$  und  $\overrightarrow{F_B B}$  bilden den Winkel  $\sigma$ . Beim regelmäßigen Tetraeder ist aus Symmetriegründen  $F_A = F_B = M_{CD}(\frac{1}{2} | \frac{1}{2} | 1)$ . So ergibt sich

$$\overrightarrow{F_A A} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{F_B B} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \cos \sigma = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}, \text{ also } \sigma = \varphi = 70,5^\circ.$$

$\varphi$  ist übrigens auch der Winkel zwischen zwei Raumdiagonalen des Würfels.

Jetzt noch ein anspruchsvolleres Beispiel:

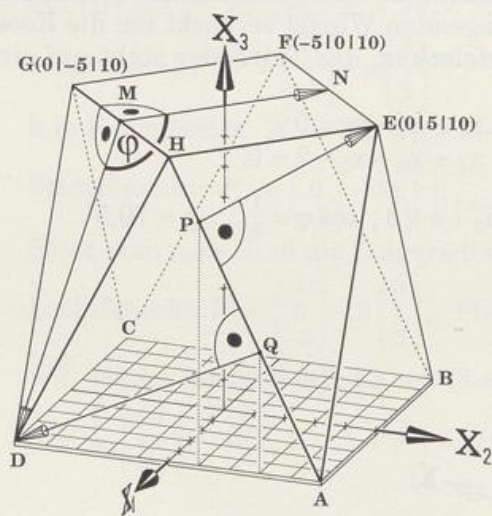
Verbindet man die Kantenmitten der Deckfläche eines Würfels mit den Ecken  $A(5 | 5 | 0)$ ,  $B(-5 | 5 | 0)$ ,  $C(-5 | -5 | 0)$  und  $D(5 | -5 | 0)$  der Grundfläche, so entsteht ein Würfelstumpf ABCDEFGH.

Für den Winkel  $\varphi$  zwischen der Deckfläche EFGH und der Seitenfläche HGD gilt

$$\text{gilt } \cos \varphi = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MD}}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{MD}|}.$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ wegen } M(\frac{5}{2} | -\frac{5}{2} | 10) \text{ ist } \overrightarrow{MD} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2,5 \\ -10 \end{pmatrix},$$

$$\text{also } \cos \varphi = \frac{-25}{5\sqrt{2} \cdot 7,5\sqrt{2}} = -\frac{1}{3}; \quad \varphi = 109,5^\circ$$



Für den Winkel  $\psi$  zwischen den Seitenflächen AHD und AEH brauchen wir die senkrechten Projektionen von E und D auf die Gerade durch  $A(5 | 5 | 0)$  und  $H(5 | 0 | 10)$ :

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die Hilfsebene  $H_E: x_2 - 2x_3 + 15 = 0$  durch E, ist senkrecht zu AH und schneidet AH in  $P(5 | 1 | 8)$ , der senkrechten Projektion von E auf AH.

Die Hilfsebene  $H_D: x_2 - 2x_3 + 5 = 0$  durch D, ist senkrecht zu AH und schneidet AH in  $Q(5 | 3 | 4)$ , der senkrechten Projektion von D auf AH.

$\overrightarrow{PE}$  und  $\overrightarrow{QD}$  bilden den gesuchten Winkel:

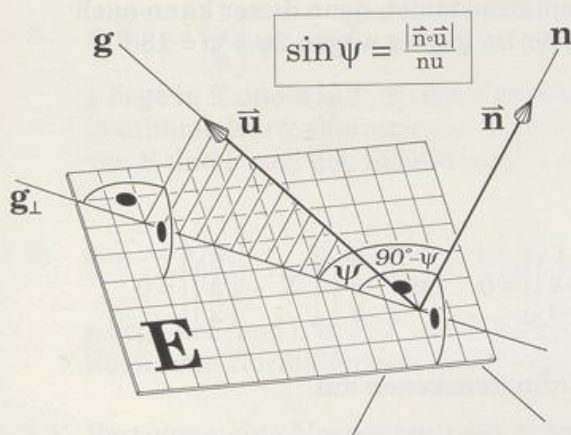
$$\cos \psi = \frac{\overrightarrow{PE} \circ \overrightarrow{QD}}{PE \cdot QD} = -\frac{2}{3}, \quad \psi = 131,8^\circ.$$

Der Schnittwinkel der zugehörigen Ebenen ist  $180^\circ - 131,8^\circ = 48,2^\circ$ .

### Schnittwinkel von Ebene und Gerade

Der Winkel  $\psi$  zwischen einer Gerade  $g$  und einer Ebene  $E$  ist gleich dem Winkel zwischen der Gerade und ihrer senkrechten Projektion  $g_\perp$  in die Ebene. Weil die Normale  $n$  der Ebene senkrecht auf  $g_\perp$  steht, sind der Winkel zwischen  $n$  und  $g$  und der gesuchte Winkel  $\psi$  komplementär:  $\sphericalangle(n, g) = 90^\circ - \psi$

$$\cos(90^\circ - \psi) = \frac{|\vec{n} \circ \vec{u}|}{|\vec{n}| |\vec{u}|}$$



Ist  $\vec{n}$  ein Normalvektor der Ebene  $E$  und  $\vec{u}$  ein Richtungsvektor der Gerade  $g$  und  $\sphericalangle(E, g) = \psi$ , dann gilt  $\sin \psi = \frac{|\vec{n} \circ \vec{u}|}{|\vec{n}| |\vec{u}|}$

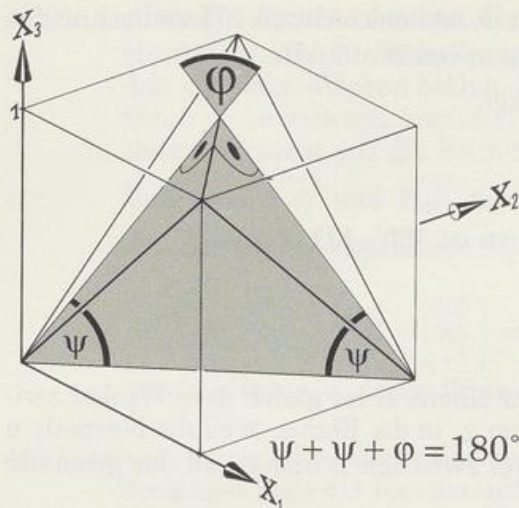
Beispiel: Berechne den Winkel, den eine Seitenfläche und eine Kante eines regelmäßigen Tetraeders einschließen.

Wir verwenden das Tetraeder von oben.

Seitenfläche:  $E = E(A, D, C): x_1 + x_2 - x_3 = 0$

Gerade:  $g = DB: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} \circ \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2, \quad |\vec{n}| |\vec{u}| = \sqrt{3} \cdot 2; \quad \sin \psi = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \psi = 54,7^\circ.$$



Auch bei solchen Aufgaben muß man unterscheiden zwischen dem nicht-stumpfen Schnittwinkel von Gerade und Ebene und dem Winkel, den eine Kante eines Polyeders mit einer Seitenfläche bildet, denn dieser kann auch stumpf sein. Im regelmäßigen Tetraeder ist  $\psi$  spitz wegen  $2\psi + \varphi = 180^\circ$ .

### Aufgaben

1. Gib eine skalare Normalform an von

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{X} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{X} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \text{c) } \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{X} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

2. Stelle vektorielle Normalformen der Koordinatenebenen auf.

3. Gib eine skalare Normalform der Ebene E an, von der man weiß:

a) E enthält A(1 | 0 | -3) und hat die Normalrichtung  $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) E enthält A(1 | 1 | -2), B(-2 | 1 | 0) und C(0 | 1 | 2)

c) E enthält A(1 | -1 | -4) und die Gerade  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

d) E enthält A(1 | -1 | -4) und steht senkrecht auf  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

e) E enthält  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

f) E enthält  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

4. E:  $3x_1 + x_3 - 6 = 0$  enthält  $P(1 | 7 | 3)$ , aber nicht  $Q(2 | 2 | 1)$ .  
 a)  $n$  sei das Lot von E in P. Gib eine Gleichung von  $n$  an.  
 b)  $m$  sei das Lot von E durch Q. Gib eine Gleichung von  $m$  an.
5. Stelle eine Normalform der Ebene F auf, die auf E:  $3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$  senkrecht steht und  $g$  enthält  
 a)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$       b)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
6. Bestimme eine Gleichung der Gerade  $g$ , die  $A(1 | 2 | 3)$  enthält und parallel ist zu E:  $2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 4 = 0$  und F:  $x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0$ .
7.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Bestimme eine Normalform der Ebene,  
 a) die durch den Ursprung geht und parallel ist zu  $g$  und  $h$   
 b) die  $g$  enthält und senkrecht steht auf der Ebene von a).
- 8.  $g: \vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ ,  $h: \vec{X} = \mu \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$   
 $g$  liege in E und  $h$  in F. E und F bilden denselben Winkel wie  $g$  und  $h$ .  
 Bestimme Normalformen von E und F, eine Gleichung der Schnittgerade  $s$  von E und F und den Schnittwinkel von E und F.
- 9.  $g: \vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   
 $g$  liege in E und  $h$  in F. E und F haben denselben Abstand wie  $g$  und  $h$ .  
 Bestimme Normalformen von E und F.
10. Bestimme eine Normalform der Symmetrieebene von  $A(3 | -1 | 4)$  und  $B(7 | -5 | -2)$ .
- 11. Bestimme eine Normalform der Symmetrieebene von  
 $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .
- 12. Bestimme eine Normalform der Symmetrieebene von  
 E:  $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3 = 0$  und F:  $2x_1 - x_2 + 4x_3 - 8 = 0$ ,  
 die durch den Ursprung geht.
13.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -25 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $P(1 | 1 | 1)$   
 Bestimme den Abstand von Punkt P und Gerade  $g$ .

14. Welche Punkte der Gerade  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  haben
- vom Ursprung die Entfernung  $2\sqrt{11}$ ?
  - von der  $x_1x_2$ -Ebene den Abstand 3?
  - von der  $x_1$ -Achse den Abstand 2,5?
  - von der Gerade  $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  den Abstand  $2\sqrt{3}$ ?
- 15. In welchen Punkten schneidet die Gerade  $s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  den Zylinder um die Achse  $a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit dem Radius 6?
16.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $P(14 | 6 | 3)$
- $g$  ist Tangente einer Kugel um  $P$ .  
Berechne Berührungspunkt  $A$  und Kugelradius  $r_a$ .
  - Auf  $g$  liegt der Mittelpunkt  $B$  der kleinsten Kugel durch  $P$ . Berechne  $B$  und den Kugelradius  $r_b$  und die Schnittpunkte  $S$  von Kugel und Gerade.
  - Berechne Radius  $r_c$  und Mittelpunkt  $C$  der kleinsten Kugel, die durch  $P$  geht und  $g$  berührt.
17. Spiegle den Punkt  $P$  an der Ebene  $E$ :
- $P(14 | 2 | 1)$ ,  $E: 3x_1 - x_2 = 0$
  - $P(11 | 11 | 3)$ ,  $E: \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$
- 18.  $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 30 = 0$ ,  $P(0 | 2 | 1)$
- $E$  ist Tangentialebene einer Kugel  $k_a$  um  $P$ .  
Berechne Berührungspunkt  $A$  und Kugelradius  $r_a$ .
  - In  $E$  liegt der Mittelpunkt  $B$  der kleinsten Kugel durch  $P$ .  
Berechne  $B$  und den Kugelradius  $r_b$ .
  - Berechne Radius  $r_c$  und Mittelpunkt  $C$  der kleinsten Kugel, die durch  $P$  geht und  $E$  berührt.
  - $E$  ist Symmetrieebene der Kugeln  $k_a$  (von **a**)) und  $k'$ .  
Berechne den Mittelpunkt  $M'$  von  $k'$ .
  - Wo liegen die Mittelpunkte aller Kugeln, die  $k_a$  und  $k'$  berühren?
  - Die Kugeln  $k_a$  und  $k'$  lassen sich durch eine Halbdrehung ineinander überführen. Beschreibe in Worten die möglichen Drehachsen.
  - $E$  und die Kugel um  $P$  mit Radius 13 schneiden sich.  
Berechne Mittelpunkt  $M$  und Radius  $\rho$  des Schnittkreises.

- 19. E:  $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 81 = 0$ , k ist die Kugel um den Ursprung mit Radius 41
  - a) Berechne Mittelpunkt A und Radius  $\rho$  des Kreises, in dem sich E und k schneiden.
  - b) Verkleinert man den Schnittkreisradius von a) um 16, so ergibt sich ein Kreis, in dem sich E und Kugeln mit Radius 30 schneiden. Berechne die Mittelpunkte M dieser Kugeln.
  - c) Bestimme Gleichungen der Tangentialebenen von k, die zu E parallel sind.

• 20. g:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ , P(9 | -8 | 11)

- a) Berechne Mittelpunkt M und Radius r der kleinsten Kugel, die durch P geht und ihren Mittelpunkt auf g hat.
- b) P sei die Ecke eines Quadrats, von dem eine Diagonale in g liege. Berechne die restlichen Quadratecken und eine Gleichung ihrer Ebene.
- c) Wo (Punktmenge, Gleichung!) liegen die Mittelpunkte der Kugeln, die das Quadrat in b) berühren?

• 21. Spiegle die Ebene E:  $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7 = 0$

- a) am Ursprung
- b) an der  $x_3$ -Achse
- c) an der  $x_1x_2$ -Ebene

• 22. Spiegle die Ebene E:  $3x_1 + 2x_3 - 1 = 0$

- a) am Punkt P(1 | 2 | 3)
- b) an der Gerade g:  $\vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- c) an der Ebene F:  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

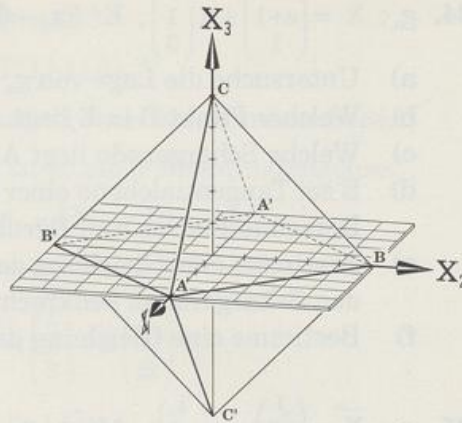
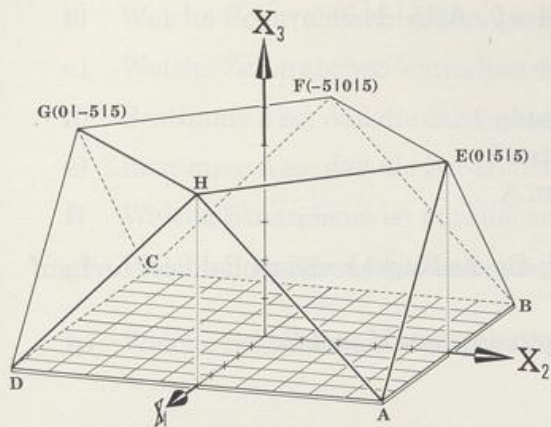
23. Berechne die Schnittwinkel  $\varphi$  von E und F:

- a) E:  $x_1 + 10x_2 + 9x_3 - 4 = 0$ , F:  $11x_1 + 19x_2 + 8x_3 - 4 = 0$
- b) E:  $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4 = 0$ , F:  $8x_1 + x_2 + 5x_3 - 4 = 0$
- c) E:  $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0$ , F:  $-x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 9 = 0$
- d) E:  $x_1 + 4x_2 + 9x_3 - 1 = 0$ , F:  $3x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 1 = 0$

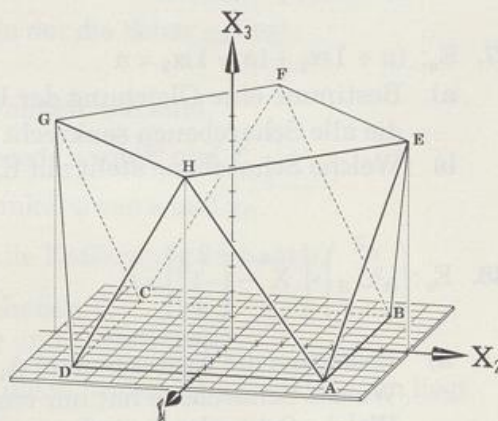
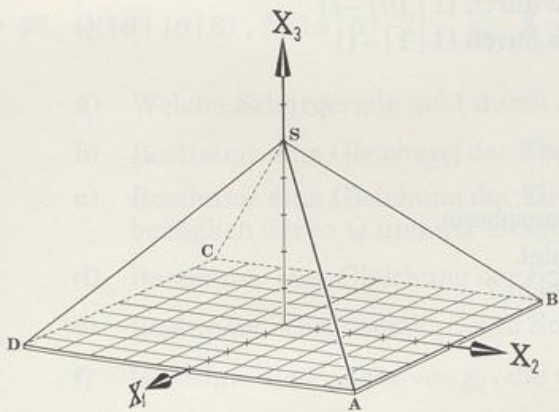
24. Berechne die Schnittwinkel  $\varphi$  von E und g:

- a) E:  $5x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 6 = 0$ , g:  $\vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$
- b) E:  $x_1 + x_2 - 3x_3 + 13 = 0$ , g:  $\vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$
- c) E:  $-x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 0$ , g:  $\vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$
- d) E:  $x_1 + x_2 + 4x_3 + 111 = 0$ , g:  $\vec{X} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

25. Berechne die Schnittwinkel von E:  $12x_1 - 12x_2 + 17x_3 = 0$  und den  
 a) Koordinatenachsen                      a) Koordinatenebenen
26. H:  $2x_1 - x_2 + x_3 - 4 = 0$ ,  $A(-1 | 2 | 2)$ ,  $B(3 | -3 | 1)$   
 a) Bestimme eine Normalform der Ebene E, die auf H senkrecht steht und durch A und B geht.  
 b) Bestimme eine Normalform der Ebene G, die AB in A senkrecht schneidet.  
 c) Bestimme den Schnittwinkel  $\varphi$  von G und H.  
 d) Bestimme eine Gleichung der Gerade g, die durch B geht und parallel zu G und H ist.  
 e) Bestimme den Schnittwinkel  $\psi$  von g und F:  $x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$ .
27.  $A(3 | 1 | 3)$ ,  $B(6 | 4 | 5)$ ,  $C(7,5 | 1 | 6)$  und die Spitze  $S(4 | 1 | 8)$  bilden ein Tetraeder.  
 a) Berechne das Volumen.  
 b) Berechne den Fußpunkt F der Höhe durch S und die Länge dieser Höhe.  
 c) Berechne den Winkel  $\alpha$  zwischen der Grundfläche und der Kante [AS].  
 d) Berechne den Winkel  $\beta$  zwischen der Grundfläche und der Fläche [ACS].
28.  $A(2 | -3 | 2)$ ,  $B(-1 | 3 | 6)$ ,  $C(5 | -5 | 0)$   
 a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.  
 b)  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  sind die senkrechten Projektionen von A, B und C in die  $x_1x_2$ -Ebene. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks  $A'B'C'$ .  
 c) Berechne den Winkel  $\varphi$  zwischen  $E_{ABC}$  und der  $x_1x_2$ -Ebene.
29. E:  $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5 = 0$ ,  $A(1 | 2 | 4)$ ,  $B(-2 | 2 | -9)$ ,  $C(-2 | 7 | 9)$   
 $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  sind die senkrechten Projektionen von A, B und C in E.  
 a) Bestimme die Bildpunkte  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$ .  
 b) Bestimme die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und  $A'B'C'$ .  
 c) Bestimme den Winkel  $\varphi$  zwischen F und  $E_{ABC}$  und bestätige die Beziehung  $F_{A'B'C'} = F_{ABC} \cdot \cos \varphi$ .
- 30. Die sechs Punkte auf den Koordinatenachsen, die vom Ursprung die Entfernung k haben, bilden ein regelmäßiges Oktaeder. Berechne alle Winkel zwischen den Kanten, zwischen den Flächen und zwischen den Kanten und Flächen.
- 31. Bei dem Quaderstumpf ABCDEFGH sind Grundfläche ABCD und Deckfläche EFGH quadratisch. Berechne den Winkel zwischen  
 a) den Seitenflächen HGF und HGD  
 b) den Flächen AHD und AFE  
 c) der Kante HD und der Deckfläche.



- 32. ABCDS ist eine vierseitige gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Berechne den Winkel zwischen
- Grund- und Seitenfläche
  - zwei Seitenflächen mit gemeinsamer Kante
  - zwei Seitenflächen ohne gemeinsame Kante.
- 33. Der Körper ABCDEFGH entsteht so: man verdreht zwei kongruente Quadrate  $45^\circ$  gegeneinander und verschiebt eines so weit nach oben, bis die Seitenkanten so lang sind wie die Quadratseiten.
- Bestätige die Koordinaten von  $H(5\sqrt{2} | 0 | 5\sqrt{2\sqrt{2}})$ .
  - Berechne den Winkel zwischen Grundfläche und einer Seitenfläche mit gemeinsamer Kante.
  - Berechne den Winkel zwischen zwei Dreieckflächen mit gemeinsamer Kante.



- 34.  $g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2a \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $E: 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 4 = 0$ ,  $A(15 | 1 | 3)$
- Untersuche die Lage von  $g_a$  und  $E$ .
  - Welcher Punkt  $B$  in  $E$  liegt  $A$  am nächsten?
  - Welche Schargerade liegt  $A$  am nächsten?
  - $E$  sei Tangentialebene einer Kugel  $k$  um  $A$ .  
Berechne Radius und Berührungspunkt.
  - Bestimme eine Gleichung der Ebene  $H$ , die die Kugel  $k$  von **d**) halbiert und auf den Schargeraden senkrecht steht.
  - Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade  $s$  von  $H$  und  $E$ .
35.  $g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ ,  $M(-1 | 0 | -1)$
- Beschreibe in Worten die Geradenschar und bestimme eine Gleichung der Ebene  $E$ , in der die Schargeraden liegen.
  - Welche Schargerade geht durch  $M$ ?
  - Welche Schargeraden berühren eine Kugel um  $M$  mit Radius 2?  
Welche Schargeraden sind Sekanten der Kugel?
  - Welche Schargeraden halbieren die Winkel der beiden Kugeltangenten  $g_0$  und  $g_4$ ?
  - Welche Schargerade hat vom Ursprung den kleinsten, welche den größten Abstand?
- 36. Bestimme von  $E_a: x_1 + ax_2 + (a+1)x_3 - 6 = 0$  die Büschelebenen,
- die mit der  $x_1$ -Achse  $45^\circ$  einschließen
  - die mit der  $x_1x_2$ -Ebene  $60^\circ$  einschließen
  - die mit der  $x_2x_3$ -Ebene  $30^\circ$  einschließen
  - die  $30^\circ$  mit der Ursprungsgerade durch  $(-6 | 7 | 1)$  einschließen
  - die senkrecht sind zur Gerade durch  $(2 | 4 | 2)$  und  $(4 | 0 | 0)$
  - die parallel sind zur Ursprungsgerade durch  $(1 | 10 | -7)$
  - die parallel sind zur Ursprungsgerade durch  $(1 | 1 | -1)$
  - die senkrecht auf  $E_0$  stehen
  - die mit  $E_1$   $45^\circ$  bilden.
- 37.  $E_a: (a+1)x_1 + (a-1)x_2 = a$
- Bestimme eine Gleichung der Ursprungsebene, die alle Scharebenen senkrecht schneidet.
  - Welche Scharebene steht auf  $E_t$  senkrecht?
- 38.  $E_a: \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 - a \\ a - 4 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$
- Bestimme die Achsenpunkte  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  von  $E_a$ .  
Welche Scharebene hat nur einen Achsenpunkt, wie liegt sie?  
Welche Scharebenen haben nur zwei Achsenpunkte, wie liegen sie?

- b) Welche Scharebenen gehen durch den Ursprung ?
- c) Welche Scharebenen enthalten den Punkt  $P(1 | 1 | 6)$  ?
- d) Bestimme  $a$  so, daß die Scharebene parallel ist zu einer Koordinatenebene.
- e) Bestimme  $a$  so, daß die Scharebene parallel ist zu einer Koordinatenachse.
- f) Welche Scharebene ist parallel zu  $F: x_1 + 3x_2 - 18x_3 + 10 = 0$  ?
- g) Welche Scharebene ist senkrecht zu  $G: 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$  ?
- h) Welche Scharebenen sind parallel zu  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$  ?
- i) Welche Scharebenen sind senkrecht zu  $S: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  ?
- j) Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade  $s$  von  $E_2$  und  $E_4$ .

• 39.  $E: 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 42, \quad g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2-2a \\ a \end{pmatrix}$

- a) In welchem Punkt schneiden sich die Ebene  $E$  und die Schar  $g_a$  ?
- b) Bestimme eine Gleichung der Ebene  $F$ , in der die Schar  $g_a$  liegt.
- c) Bestimme den Schnittwinkel  $\varphi$  und eine Gleichung der Schnittgerade  $s$  von  $E$  und  $F$ .
- d) Bestimme Gleichungen der senkrechten Projektionen von  $g_{-2}$  und  $g_2$  in  $E$ .
- e) Welche Schargerade ist identisch mit ihrem Spiegelbild bezüglich  $E$  ?
- f)  $E$  ist Symmetrieebene der Schargeraden  $g_a$  und  $g_{a'}$ .  
Drücke  $a'$  mit  $a$  aus.

• 40.  $Q(16 | 16 | 8), M(14 | 5 | -2) \quad g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- a) Welche Schargerade geht durch  $Q$  ?
- b) Bestimme eine Gleichung der Ebene  $E$ , in der die Schar  $g_a$  liegt.
- c) Bestimme eine Gleichung der Ebene  $F$ , bezüglich deren  $Q$  und der Ursprung symmetrisch sind.
- d) Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade  $s$  von  $E$  und  $F$ .
- e) Bestimme Schnittpunkt  $S$  und Schnittwinkel  $\varphi$  von  $s$  und  $g_0$ .
- f) Berechne die Punkte von  $g_0$ , die von  $M$  die Entfernung 15 haben.
- g) Bestimme Gleichungen der Tangentialebenen  $T$ , die eine Kugel um  $M$  mit Radius 15 in  $Q$  und  $O$  berühren.
- h) Bestimme eine Gleichung der Gerade  $t$ , die in beiden Tangentialebenen liegt.
- i) Berechne den Abstand  $d$  von  $t$  und  $g_0$ .

## 2. Hesse-Form der Ebenengleichung

Ist P ein Punkt der Ebene E:  $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 6 = 0$ , dann erfüllen seine Koordinaten die Gleichung und es gilt  $E(P) = 2p_1 - 2p_2 + p_3 + 6 = 0$ .

Liegt ein Punkt Q nicht in der Ebene E, dann ergibt sich für  $E(Q)$  eine positive oder negative Zahl.

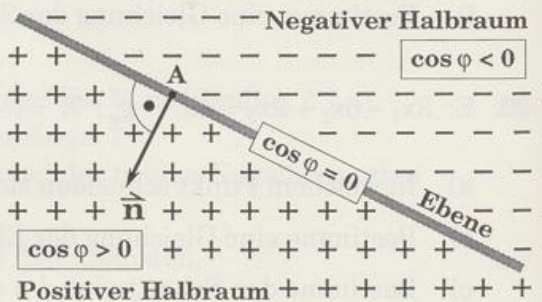
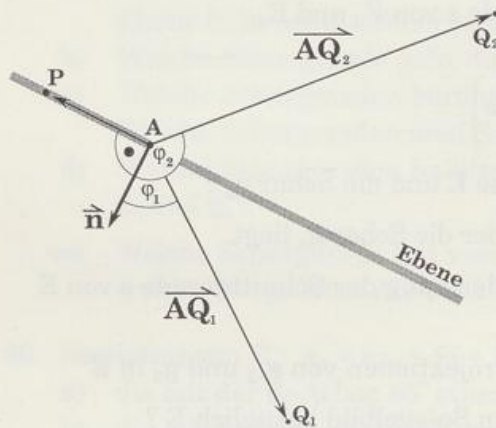
Beispiel:  $P(2 | 2 | -6), \quad E(P) = 4 - 4 - 6 + 6 = 0$   
 $Q_1(3 | -2 | 2), \quad E(Q_1) = 6 + 4 + 2 + 6 = 18$   
 $Q_2(-8 | 6 | -5), \quad E(Q_2) = -16 - 12 - 5 - 6 = -27$

Um die Bedeutung des Vorzeichens zu verstehen, betrachten wir die vektorielle Normalform der Ebenengleichung:

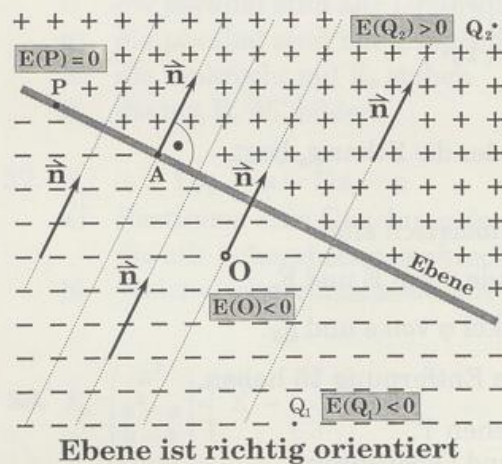
$$E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$

$$\vec{n} \circ \vec{AX} = 0$$

$$E(X) = n \cdot \overline{AX} \cdot \cos \varphi, \text{ wobei } \varphi = \sphericalangle(\vec{n}, \overline{AX}) \text{ ist.}$$



$\cos \varphi$  legt das Vorzeichen von  $E(X)$  fest. Die Ebene E teilt den Raum in zwei Halbräume: Liegt Q in dem Halbraum, in den der Normalvektor zeigt, dann ist  $\varphi$  spitz,  $\cos \varphi$  also positiv. Diesen Halbraum nennen wir positiven Halbraum.

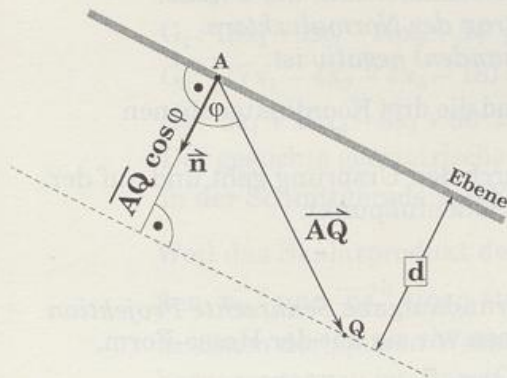


Unterscheidet man zwischen positivem und negativem Halbraum, dann nennt man die Ebene **orientiert**.

Enthält die Ebene  $E$  den Ursprung nicht, dann orientiert man sie gewöhnlich so, daß der Ursprung im negativen Halbraum liegt, das heißt  $E(O) < 0$ . In der Ebenengleichung  $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$  ist  $E(O) = n_0$ . Ist also  $n_0$  negativ, so ist die Ebene schon *richtig* orientiert. Ist  $n_0$  positiv, so orientiert man die Ebene um, indem man ihre Gleichung mit  $-1$  multipliziert.

Bei einer richtig orientierten Ebene weist der Normalvektor von der Ebene aus in den Halbraum, in dem der Ursprung nicht liegt – oder anders ausgedrückt – zeigt der Normalvektor vom Ursprung zur Ebene. Geht die Ebene durch den Ursprung, so sind beide Orientierungen richtig, das heißt gleichberechtigt.

Die Ebene  $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 6 = 0$  ist noch nicht richtig orientiert. Durch Multiplikation mit  $-1$  orientieren wir sie um:  $E: -2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6 = 0$ . Jetzt gilt  $E(O) = -6 < 0$ ,  $E(Q_1) = -18$  und  $E(Q_2) = 27$ .  $Q_1$  und  $Q_2$  liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene,  $Q_1$  und der Ursprung liegen auf derselben Seite.



Wir kennen jetzt die Bedeutung des Vorzeichens von  $E(Q)$  – was aber bedeutet der Betrag  $|E(Q)|$ ?

$|E(Q)| = |\vec{n} \circ \vec{AQ}| = n \cdot \overline{AQ} \cdot |\cos \varphi|$ . Aus der Zeichnung lesen wir ab:

$\overline{AQ} \cdot |\cos \varphi| = d$ , das ist der Abstand von Punkt und Ebene.  $|E(Q)| = n \cdot d$  ist also das Produkt des Abstands Punkt-Ebene und der Länge des Normalvektors.

Der Mathematiker Ludwig Otto HESSE (Königsberg 1811 bis 1874 München) hat vorgeschlagen, als Normalvektor in der richtig orientierten Ebenengleichung einen Einheitsvektor  $\vec{n}^0$  zu verwenden. Setzt man in seine Ebenengleichung einen Punkt ein, so ergibt sich sofort der Abstand von Punkt und Ebene (bis aufs Vorzeichen). HESSE zu Ehren nennt man diese Form der Ebenengleichung **Hesse-Form**  $E_H$ ; den zugehörigen Vektor  $\vec{n}^0$  nennen wir kurz **Hesse-Vektor**.

Beispiel:  $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 6 = 0$ ,  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $n = 3$

Umorientierung  $E: -2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6 = 0$

Normierung  $E_H: -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - 2 = 0$ ,  $\vec{n}^0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

|                  |                   |                                   |
|------------------|-------------------|-----------------------------------|
| Punkte einsetzen | $E_H(O) = -2$ ,   | $E$ und $O$ haben den Abstand 2   |
|                  | $E_H(Q_1) = -6$ , | $E$ und $Q_1$ haben den Abstand 6 |
|                  | $E_H(Q_2) = 9$ ,  | $E$ und $Q_2$ haben den Abstand 9 |

### Zusammenfassung

Von  $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$  ist

$$E_H: \frac{-\operatorname{sgn}(n_0)}{n} (n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0) = 0$$

mit  $n_0 \neq 0$  und  $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$

die **Hesse-Form** der Ebene  $E$ .

Ist  $n_0 = 0$ , dann sind  $\pm \frac{1}{n} (n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0) = 0$   
die beiden Hesse-Formen der Ebene  $E$ .

Abstand Punkt-Ebene:  $d(Q,E) = |E_H(Q)|$

Erzeugung der Hesse-Form aus der allgemeinen Normalform in der Praxis:

*Dividiere die Ebenengleichung durch den Betrag des Normalvektors.*

*Richte die Vorzeichen so ein, daß  $n_0$  (falls vorhanden) negativ ist.*

1. Beispiel: Die Ebene  $E: 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 49 = 0$  und die drei Koordinatenebenen begrenzen ein Tetraeder.

Gesucht ist die Länge der Höhe, die durch den Ursprung geht und auf der Gegenfläche senkrecht steht, und der Höhenfußpunkt.

In dieser Aufgabe versteckt sich die Grundaufgabe *Senkrechte Projektion eines Punkts in eine Ebene*. Diesmal lösen wir sie mit der Hesse-Form.

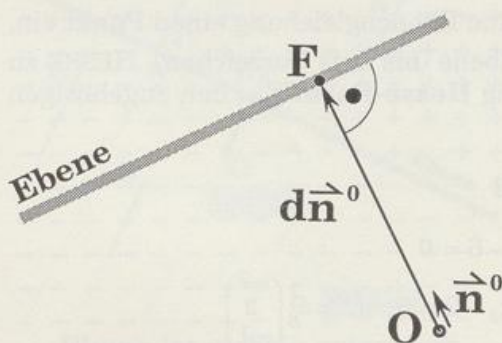
$$E_H: -\frac{1}{7} (2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 49) = 0, \quad E_H(O) = -7,$$

Ebene und Ursprung haben den Abstand  $d = 7$ , und das ist die gesuchte Länge der Höhe.

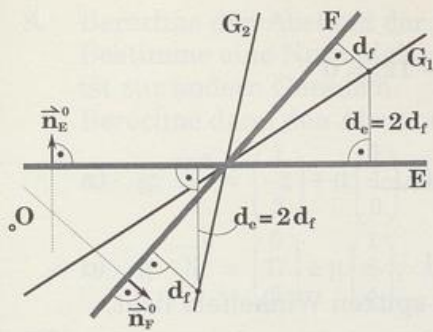
Um  $O$  in  $E$  zu projizieren, tragen wir den Hesse-Vektor  $\vec{n}^0 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

7mal von  $O$  aus ab und treffen auf den gesuchten Fußpunkt  $F$ :

$$\vec{F} = \vec{O} + 7\vec{n}^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad F(-2 | -6 | -3)$$



2. Beispiel: Gesucht ist der geometrische Ort  $G$  der Punkte, die von der Ebene  $E: 7x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 18 = 0$  den doppelten Abstand haben wie von der Ebene  $F: 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 12 = 0$ .



$$E_H: \frac{1}{9}(7x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 18) = 0, F_H: \frac{1}{3}(-2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12) = 0$$

Für die gesuchten Punkte X gilt:  $|E_H(X)| = 2 \cdot |F_H(X)|$ ,  
das heißt:  $G_1: E_H(X) = 2 \cdot F_H(X)$  oder  $G_2: E_H(X) = -2 \cdot F_H(X)$

$$G_1: \frac{1}{9}(7x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 18) = \frac{2}{3}(-2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12) \quad || \cdot 9$$

$$G_1: 19x_1 + 2x_2 - 16x_3 + 54 = 0$$

$$G_2: \frac{1}{9}(7x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 18) = -\frac{2}{3}(-2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12) \quad || \cdot 9$$

$$G_2: 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 90 = 0$$

Der gesuchte geometrische Ort besteht aus zwei Ebenen  $G_1$  und  $G_2$ , die sich in der Schnittgerade von E und F treffen.

Weil das Skalarprodukt der Hessevektoren  $\vec{n}_E^0$  und  $\vec{n}_F^0$  negativ ist, schließen  $\vec{n}_E^0$  und  $\vec{n}_F^0$  einen stumpfen Winkel ein, das heißt, der Ursprung liegt in einem der spitzen Winkelfelder von E und F. Weil  $G_1$  aus  $E_H(X) = 2 \cdot F_H(X)$  hervorgegangen ist, liegen die Punkte von  $G_1$  in den Winkelfeldern, in denen sich die beiden positiven beziehungsweise negativen Halbräume überlappen.  $G_1$  und O liegen also im selben Winkelfeld.

### Winkelhalbierende Ebenen

Wichtiger Sonderfall der Aufgabe aus dem letzten Beispiel:

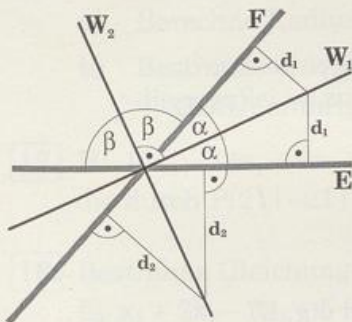
Gesucht ist der geometrische Ort der Punkte, die von zwei sich schneidenden Ebenen E und F denselben Abstand haben.

Er besteht aus den beiden winkelhalbierenden Ebenen  $W_1$  und  $W_2$ .

Für die gesuchten Punkte X gilt:  $|E_H(X)| = |F_H(X)|$ , das heißt,

$W_1: E_H(X) = F_H(X)$  oder  $W_2: E_H(X) = -F_H(X)$ , anders geschrieben

$W_1: E_H(X) - F_H(X) = 0$  oder  $W_2: E_H(X) + F_H(X) = 0$ .



Für die Ebenen E und F des letzten Beispiels mit

$$E_H: \frac{1}{9}(7x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 18) = 0, \quad F_H: \frac{1}{3}(-2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12) = 0$$

ergibt sich  $W_1: 13x_1 - x_2 - 10x_3 + 18 = 0$

$$W_2: x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 54 = 0$$

Wie sich gehört, stehen  $W_1$  und  $W_2$  aufeinander senkrecht:

$$\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Um zu entscheiden, welche winkelhalbierende Ebene im spitzen Winkelfeld liegt, berechnen wir den Winkel  $\alpha$  zwischen E und  $W_1$ :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_E \circ \vec{n}_1|}{|\vec{n}_E| |\vec{n}_1|} = \frac{135}{9\sqrt{270}} = \frac{5}{\sqrt{30}}, \quad \alpha = 24,1^\circ$$

und den Winkel  $\beta$  zwischen F und  $W_2$ :  $\beta = 90^\circ - \alpha = 65,9^\circ$ .

Also halbiert  $W_1$  das spitze und  $W_2$  das stumpfe Winkelfeld von E und F.

### Aufgaben

1. Gib die Hesse-Form an
  - a)  $7x_1 - 2x_2 + 26x_3 + 54 = 0$
  - b)  $6x_1 + 8x_3 = -50$
  - c)  $15x_1 + 6x_2 - 10x_3 = 0$
  - d)  $3x_3 = 3$
  - e)  $\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1$
  - f)  $x_1 = 0$
  
2. Gib die Hesse-Form der Ebene E an, die durch  $A(1|1|5)$ ,  $B(9|1|1)$  und  $C(11|4|-1)$  geht.
  
3. Welchen Abstand haben der Ursprung,  $A(12|2|-2)$ ,  $B(1|0|-2)$  und  $C(-9|1|2)$  von der Ebene E:  $x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 9$ ?
  
4. Welchen Abstand haben der Ursprung,  $A(1|-2|2)$  und  $B(1|1|-1)$  von der Ebene E:
 
$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$
  
5. E:  $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3 = 0$     Zeichne den Ursprung, die Ebenen E bis H  
 F:  $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0$     (als Strecken) mit den richtigen Abständen, die Normal-  
 G:  $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9 = 0$     und Hesse-Vektoren von E bis H mit den richtigen  
 H:  $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 12 = 0$     Längen, Maßstab:  $1 \triangleq 0,5\text{cm}$ .
  
6.  $A(1|0|-2)$ ,  $B(-1|4|-2)$ ,  $C(0|6|0)$ ,  $D(??|?)$ ,  $S(3|3|-3)$   
 Die Pyramide ABCDS hat als Grundfläche das Parallelogramm ABCD.
  - a) Berechne die Länge der Höhe h.
  - b) Berechne das Volumen der Pyramide.
  
7. E:  $11x_1 - 10x_2 + 2x_3 + 75 = 0$ , g:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$   
 Zeige, daß E und g parallel sind, und berechne den Abstand  $d(g, E)$ .

8. Berechne den Abstand der windschiefen Geraden so:  
Bestimme eine Normalgleichung der Ebene E, die die Gerade g enthält und parallel ist zur anderen Gerade h.

Berechne dann den Abstand, den irgendein Punkt von h und die Ebene E haben.

a)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

9. Stelle Gleichungen der Ebenen auf,  
die von E:  $6x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 55 = 0$  den Abstand 33 haben.
10. Bestimme den geometrischen Ort der Punkte,  
die von der Ebene E:  $7x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 7$  den Abstand 1 haben.
11. Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die in der Ebene E:  $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 12$   
liegen und von der Ebene F:  $x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$  den Abstand 3 haben.
12. E:  $15x_1 + 12x_2 - 16x_3 = 15$ , F:  $-9x_1 + 12x_2 - 20x_3 = 35$   
Welche Punkte der  $x_3$ -Achse haben von E und F denselben Abstand?
- 13. E:  $6x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 11$ ,  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 39 \\ 61 \\ -23 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \\ -8 \end{pmatrix}$

Eine Kugel K mit Radius 22 bewegt sich so, daß ihr Mittelpunkt auf g wandert.

- a) In welchen Punkten berührt die Kugel die Ebene?  
Wo ist dann jeweils der Kugelmittelpunkt?
- b) Wo ist der Mittelpunkt des größten Schnittkreises von K und E?

14.  $g_\perp$  sei die senkrechte Projektion von g:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$

in die Ebene E:  $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4 = 0$ .

Bestimme den Schnittpunkt von g und  $g_\perp$  und eine Gleichung von  $g_\perp$ .

15. Die Punkte  $P(13 | -6 | 6)$  und  $P'$  seien symmetrisch bezüglich  
der Ebene E:  $7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 7 = 0$ . Berechne  $P'$ .
16. T:  $3x_1 - 4x_2 - 12x_3 = 0$  sei Tangentialebene einer Kugel K um  $M(7 | -1 | -12)$ .
- a) Berechne Radius und Berührungspunkt von K.
- b) Bestimme eine Gleichung der anderen Tangentialebene T' von K,  
die parallel ist zu T.

17. H:  $10x_1 - 11x_2 + 2x_3 = 1$  halbiere die kleinste aller Kugeln,  
die durch  $P(21 | -21 | 5)$  gehen. Berechne ihren Radius und Mittelpunkt.

18. Bestimme Gleichungen der winkelhalbierenden Ebenen von  
E:  $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5 = 0$  und F:  $5x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 4 = 0$ .

19. E:  $2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3 = 0$ , F:  $6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 21 = 0$
- Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, die von E und F denselben Abstand haben.
  - Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, deren Abstand von E halb so groß ist wie der von F.
20. E:  $4x_1 - x_2 + 8x_3 + 18 = 0$ , F:  $4x_1 - x_2 + 8x_3 - 36 = 0$
- Gib eine Gleichung der Ebene S an, die von E und F denselben Abstand hat.
  - Gib Gleichungen der Ebenen G und H an, deren Abstand von F doppelt so groß ist wie der von E.
  - Zeichne den Ursprung und die Ebenen E, F, S, G und H (als Strecken) mit den richtigen Abständen im Maßstab:  $1 \hat{=} 1\text{cm}$ .
- 21. E:  $3x_1 - 4x_3 = 0$ , F:  $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$   
Eine Kugel vom Radius 4 rollt in der von E und F gebildeten Rinne hinunter. (Die Schwerkraft wirkt entgegen der  $x_3$ -Richtung). Bestimme eine Gleichung der Gerade, auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.
- 22. E:  $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 5$ , F:  $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$ , G:  $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4 = 0$   
Eine Kugel vom Radius 3 liegt in dem von E, F und G gebildeten Pyramiden-Trichter (der Trichter enthält die positive  $x_3$ -Achse). Wo liegt ihr Mittelpunkt M?
- 23. E:  $\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$   
Eine Kugel vom Radius 4 rollt auf der Ebene E hinunter. (Die Schwerkraft wirkt entgegen der  $x_3$ -Richtung). Bestimme eine Gleichung der Gerade, auf der der Kugelmittelpunkt läuft, wenn er in  $S(0|0|m)$  startet.

### 3. Normalformen von Geraden

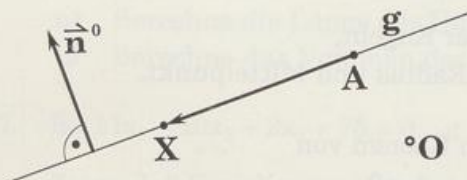
Für Geraden und Ebenen im Raum gibt es Parametergleichungen – eine Normalform aber ist nur bei Ebenen möglich, weil Geraden keine eindeutigen Normalrichtungen haben. Deshalb gibt es auch keine Hesse-Form von Geraden im Raum. In der Geometrie der Ebene ist das anders. Hier kann man der Gerade eine Normalrichtung genau so zuordnen wie einer Ebene im Raum. Mit zweidimensionalen Vektoren geschrieben sieht das so aus:

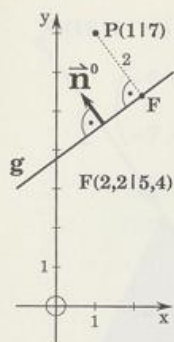
$$g: \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \circ \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\vec{n} \circ \overrightarrow{AX} = 0$$

$$n_x x + n_y y + n_0 = 0$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$  ist ein Normalvektor und  $A(a_x | a_y)$  ein Punkt der Gerade g.





Wie im Raum findet man die Hesse-Form durch Normieren und Orientieren:

$$g_H: \frac{-\text{sgn}(n_0)}{n} (n_x x + n_y y + n_0) = 0$$

Wieder gilt für den Abstand Punkt-Gerade:  $|g_H(X)| = d(P, g)$

Beispiel: Welchen Abstand haben  $P(1 | 7)$  und  $g: 3x - 4y + 15 = 0$ ?

$$g_H: -\frac{1}{5}(3x - 4y + 15) = 0, \quad g_H(P) = -\frac{1}{5}(-10) = 2$$

$P$  und  $g$  haben den Abstand 2,  $g$  liegt zwischen  $P$  und  $O$ .

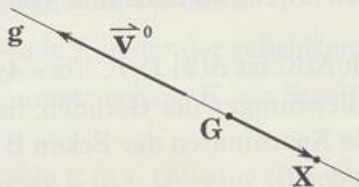
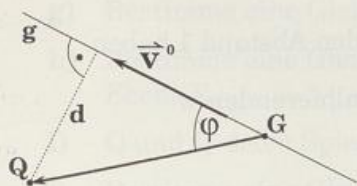
Subtrahiert man von  $\vec{P}$  das 2fache des Hesse-Vektors, dann trifft man auf die senkrechte Projektion  $F$  von  $P$  auf  $g$ :

$$\vec{F} = \vec{P} - 2 \left[ -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 11/5 \\ 27/5 \end{pmatrix}, \quad F(2,2 | 5,4)$$

## \*\* Plücker-Form

Der Mathematiker Julius PLÜCKER (Elberfeld 1801 bis 1868 Bonn) hat eine Form der Gleichung einer Gerade  $g$  im Raum angegeben, bei der man ähnlich wie bei der Hesse-Form der Ebene durch Einsetzen eines Punkts  $Q$  gleich den Abstand  $d(Q, g)$  bekommt. Ist  $\vec{v}^0$  ein Einheitsvektor in Geradenrichtung, so erfüllen die Punkte  $X$  der Gerade die (parameterlose!) Gleichung:

$$g_P: \vec{v}^0 \times \overrightarrow{GX} = \vec{0} \quad \text{Plücker-Form der Geradengleichung}$$



Für den Abstand  $d(Q, g)$  Punkt-Gerade gilt dann:  $\sin \varphi = \frac{d(Q, g)}{GQ}$ ,

$$\text{also } d(Q, g) = \overline{GQ} \sin \varphi = |\vec{v}^0| \cdot |\overrightarrow{GQ}| \cdot \sin \varphi = |\vec{v}^0 \times \overrightarrow{GQ}| =: |g_P(Q)|$$

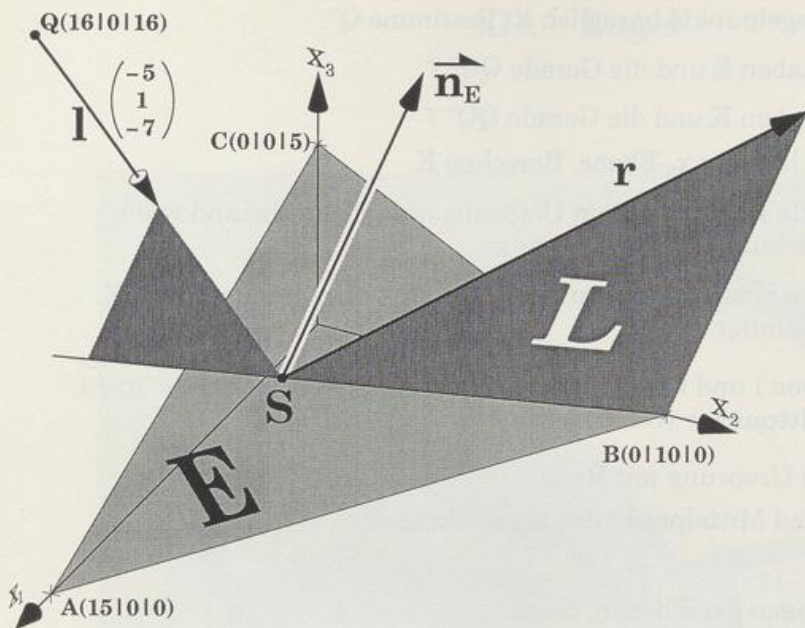
Beispiel: Welchen Abstand haben  $Q(0|-2|1)$  und  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ?

$$\vec{v}^0 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad g_P: \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 6 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$d(Q, G) = \left| \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{17}} \left| \begin{pmatrix} 22 \\ -5 \\ -18 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{17}} \sqrt{833} = \sqrt{49} = 7$$

### Aufgaben

1. Gib die Hesse-Form der Geraden a bis f an
  - a) a:  $-3x + 4y + 15 = 0$
  - b) b:  $x + y = 1$
  - c) c:  $-2y = 0$
  - d) d:  $x + 0,75y = 0,25$
  - e) e:  $y = mx + t$
  - f) f:  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$
2.  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $A(0,5|-3,5)$ 
  - a) Berechne den Abstand von A und g.
  - b) Berechne die Gleichung der Lotgerade von g durch A.
  - c) Berechne den Lotfußpunkt F von b) und die Länge des Lots  $\overline{AF}$ .
3.
  - a) Berechne den Abstand von Ursprung und Gerade  $g: 3x + 4y = 12$ .
  - b) Berechne den Abstand von b:  $3x + 4y = 24$ , c:  $3x + 4y + 24 = 0$  und d:  $6x + 8y = 24$ .
4. Bestimme eine Gleichung der Gerade h durch  $H(3|-4)$  parallel zur Gerade  $g: 3x = 5(y + 1)$ .
5. Bestimme eine Gleichung der Gerade, die durch  $G(-12|5)$  geht und vom Ursprung den Abstand 13 hat.
6. Bestimme Gleichungen der Geraden p und q, die von der Gerade  $g: 3x + 4y + 12 = 0$  den Abstand 0,5 haben.
7. Gib die Punkte auf  $h: y = x + 2$  an, die von  $g: -3x + 4y = 3$  den Abstand 1 haben.
8. Gib die Punkte an, die von  $g: x + 7y = 0$  und der Winkelhalbierenden w des 1. Quadranten jeweils den Abstand  $\sqrt{50}$  haben.
9. In einem Dreieck ABC ist  $A(2|1)$ ,  $h_c: 5x - 4y = 7$  und  $h_b: 3x + 4y = 11$ .
  - a) Bestimme Gleichungen der Geraden, in denen die Seiten liegen.
  - b) Berechne die Koordinaten der Ecken B und C.
10.  $g: x + y = 2$ ,  $h: 7x + y + 7 = 0$ 
  - a) Bestimme Gleichungen der Winkelhalbierenden von g und h.
  - a) Bestimme Gleichungen der Geraden, deren Punkte jeweils von h einen dreimal so großen Abstand haben wie von g.

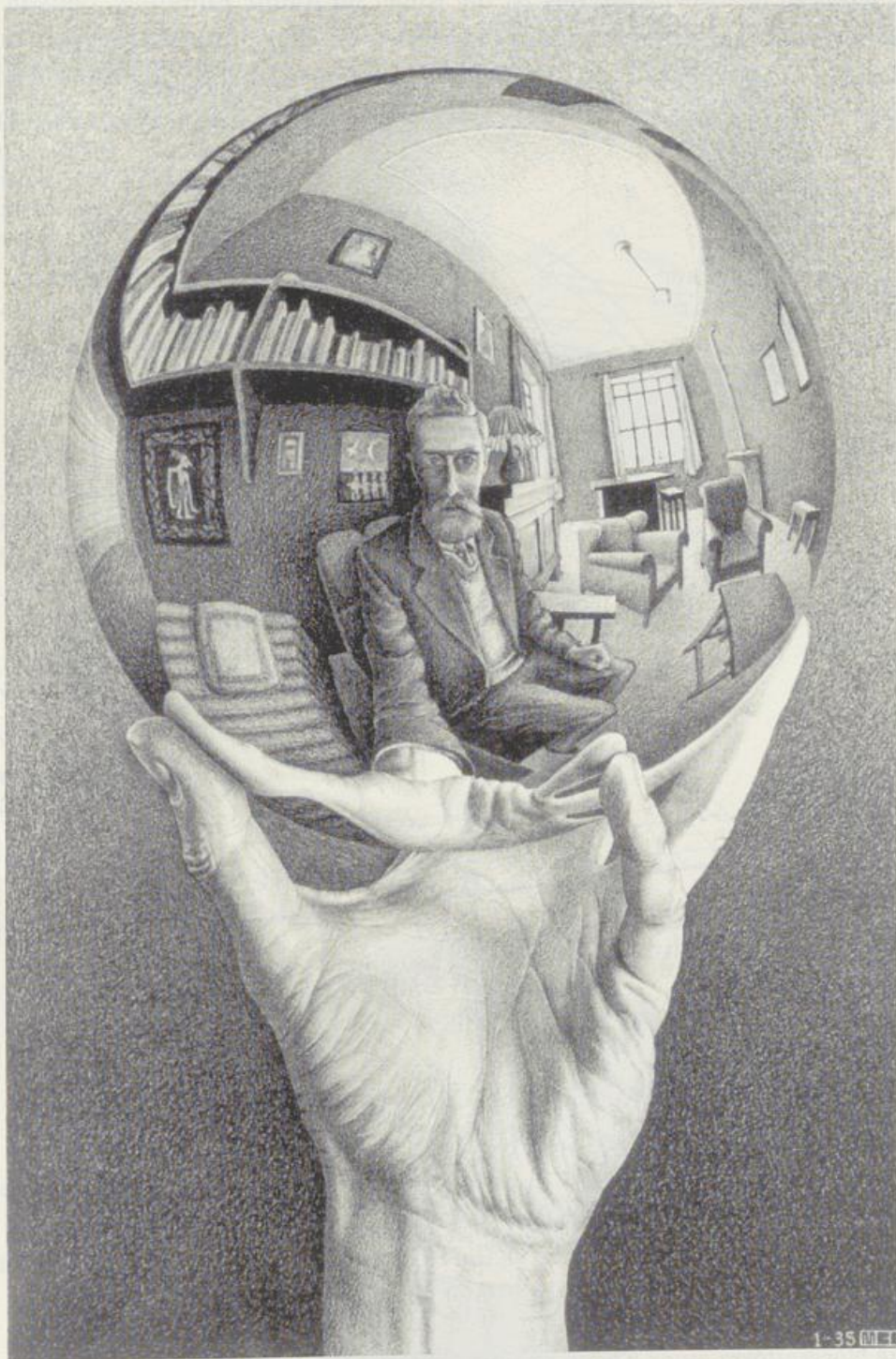


11. Im ersten Oktanten liegt eine ebene, dreieckige, spiegelnde Glasscheibe ABC. Von Q aus trifft ein Laserstrahl l auf die Glasscherbe (siehe Bild).

- Bestimme eine Gleichung der Ebene E, in der die Spiegelfläche liegt.
- Bestimme Gleichungen der Spurgeraden von E.
- Berechne den Winkel  $\varphi$  zwischen Laserstrahl l und E. Berechne den Einfallswinkel  $\alpha$ .
- In welchem Punkt S trifft der Strahl aufs Glas ?
- Bestimme eine Gleichung des Einfallslots e.
- L sei die Ebene, in der der ein- und ausfallende Strahl liegen. Bestimme eine Gleichung von L.
- Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade von E und L.
- Bestimme eine Gleichung der senkrechten Projektion  $l_{\perp}$  von Strahl l in die Ebene E.
- Q und Q' seien Spiegelpunkte bezüglich E. Bestimme Q'.
- Bestimme eine Gleichung der Gerade r, in der der reflektierte Strahl liegt.
- Bestimme eine Gleichung der Symmetrieebene K von Strahl l und reflektiertem Strahl r.
- Die Symmetrieebene von k) schneide E in s. Gib eine Gleichung von s an.
- Welchen Winkel schließen  $l_{\perp}$  und s ein ?
- Bestimme eine Gleichung der Schnittgerade n von L und K.
- Welchen Winkel schließen n und  $l_{\perp}$ , n und s ein ?

- p)  $Q$  und  $Q''$  seien Spiegelpunkte bezüglich  $K$ . Bestimme  $Q''$ .
- q) Welchen Abstand haben  $E$  und die Gerade  $QQ''$  ?
- r) Welchen Abstand haben  $K$  und die Gerade  $QQ''$  ?
- s)  $U$  liege in  $E$ ,  $K$  und in der  $x_1x_2$ -Ebene. Berechne  $K$ .
- t) Die Ebene  $H$  enthalte  $l$  und habe vom Ursprung denselben Abstand wie  $l$ . Bestimme eine Gleichung von  $H$ .
- u) Die Gerade  $g$  liege in  $E$  und habe vom Ursprung denselben Abstand wie  $E$ . Bestimme eine Gleichung von  $g$ .
- v) Der Schnittpunkt von  $l$  und  $r$  sei Mittelpunkt einer Kugel mit Radius  $10\sqrt{3}$ . Berechne die Schnittpunkte von Kugel und Geradenkreuzung.
- w) Eine Kugel um den Ursprung mit Radius  $\frac{50}{7}$  schneide  $E$ . Berechne Radius und Mittelpunkt des Schnittkreises.
12. a) Bestimme Gleichungen der Ebenen, die zu  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  parallel sind und vom Punkt  $Q(0|0|7)$  den Abstand 3 haben.
- b)  $g_c$  sind Ursprungsgeraden durch  $(1|-1|c)$ . Welche Gerade schneidet die Ebene  $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 16 = 0$  nicht? Welcher Zusammenhang besteht dann zwischen der Richtung von  $g_c$  und den Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  ?
- c) Die Ebene  $F$  enthalte die  $x_3$ -Achse und die Geradenschar  $g_c$  von b). Bestimme eine Gleichung von  $F$ .
- d)  $E$  und die Koordinatenebenen begrenzen eine Pyramide  $P$ .  
 $\alpha$ ) Berechne das Volumen von  $P$ .  
 $\beta$ ) Berechne die Oberfläche von  $P$ .  
 $\gamma$ ) Zeige, daß  $F$  Symmetrieebene von  $P$  ist.  
 $\delta$ ) Prüfe, ob  $S(3|-3|3)$  und  $T(3|-3|5)$  in der Pyramide liegen.  
 $\epsilon$ ) Es gibt eine Kugel in  $P$ , die alle vier Seitenflächen berührt. Berechne Radius und Mittelpunkt dieser Kugel.
- e) Welche Schargeraden von  $g_c$  berühren eine Kugel um  $M(2|-2|2)$  mit Radius 2 ? Berechne die Berührungspunkte.

## XII. Kugel



*M. C. Escher: Hand with reflecting sphere*

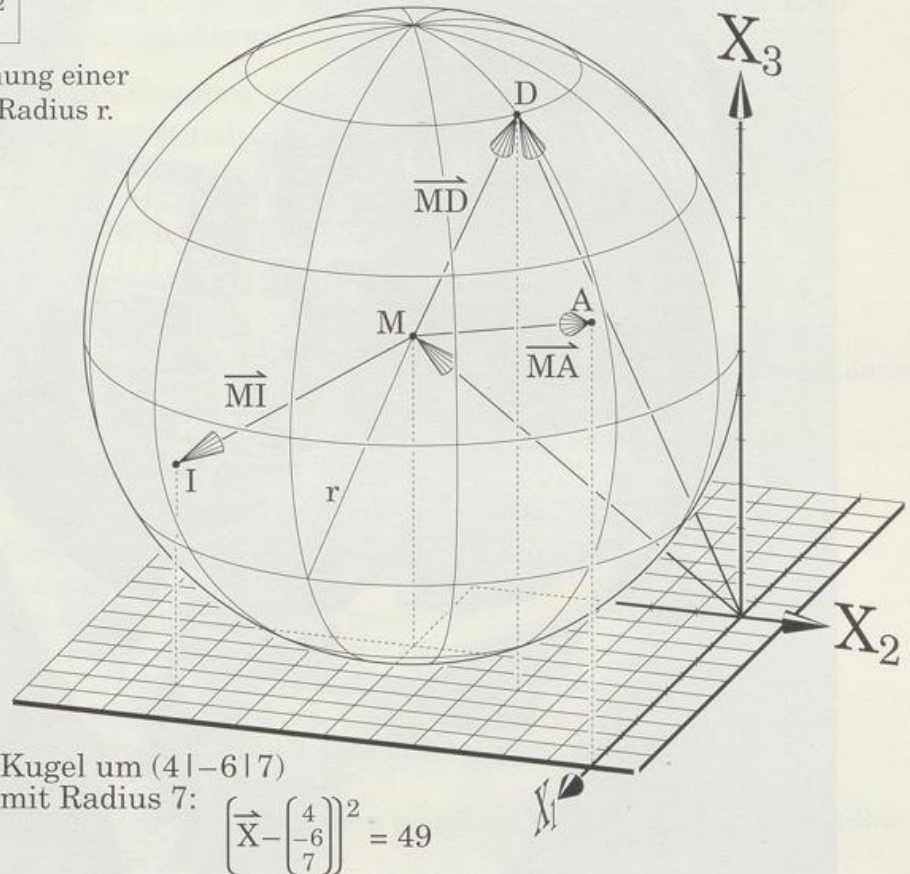
## XII. Kugel

### 1. Kugel und Kreis

Was der Kreis in der Ebene ist, das ist die Kugel im Raum: Punkte  $X$ , die von einem Punkt  $M$  in derselben Entfernung  $r$  liegen, erfüllen die Gleichung  $|\overrightarrow{MX}| = r$ , mit Vektoren ausgedrückt  $|\overrightarrow{MX}| = r$  oder  $|\vec{X} - \vec{M}| = r$ . Zum bequemeren Arbeiten zieht man eine Gleichung ohne Beträge vor: man quadriert beide Seiten  $|\vec{X} - \vec{M}|^2 = r^2$ , und schreibt nach der Regel  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

$$(\vec{X} - \vec{M})^2 = r^2$$

Das ist die Gleichung einer Kugel um  $M$  mit Radius  $r$ .



Für Punkte  $X$  innerhalb der Kugel gilt  $(\vec{X} - \vec{M})^2 < r^2$ ,

für Punkte  $X$  außerhalb der Kugel gilt  $(\vec{X} - \vec{M})^2 > r^2$ .

Zum Beispiel liegt im Bild oben der Punkt  $I(8|-10|5)$  innerhalb,  $A(10|0|10)$  außerhalb und  $D(6|-3|13)$  auf der Kugel um  $(4|-6|7)$  mit Radius 7.

Diese Art der Kugelgleichung ist eine skalare Gleichung, das heißt, sie beschreibt einen Zusammenhang zwischen den 3 Koordinaten eines jeden Kugelpunkts:

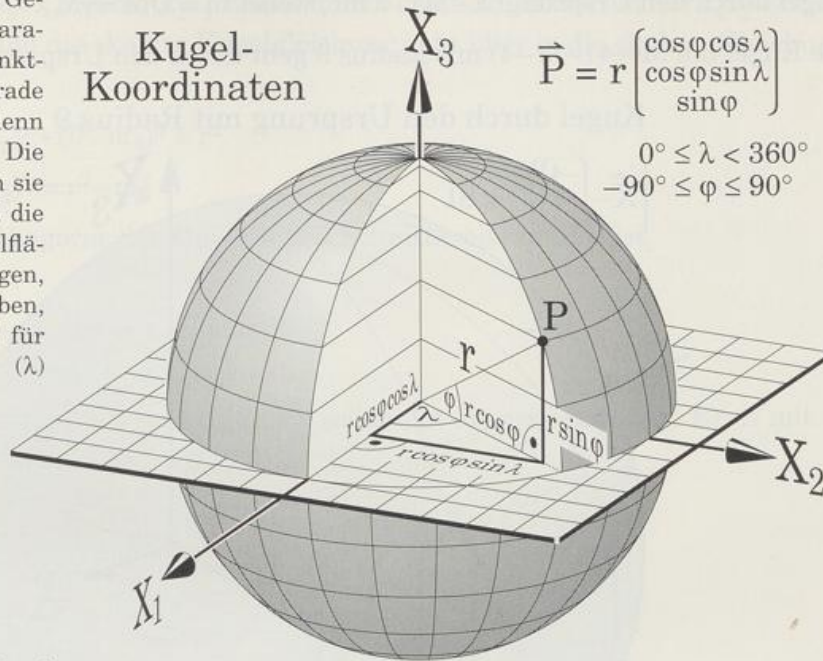
$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2.$$

(Auch die Normalform einer Ebene ist eine skalare Gleichung.)

Man kann die Punkte von Geraden und Ebenen mit Parametern ansteuern (Punkt-richtungsformen). Die Gerade kommt mit einem aus, denn sie ist eindimensional. Die Ebene braucht zwei, denn sie ist zweidimensional. Und die Kugel? Um in der Kugelfläche an jeden Ort zu gelangen, genügen auch 2 Angaben, zum Beispiel die Winkel für die geografische Länge ( $\lambda$ ) und Breite ( $\varphi$ ):

$$\vec{X} = \vec{M} + r \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

### Kugel-Koordinaten



$$\vec{P} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$0^\circ \leq \lambda < 360^\circ \\ -90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$$

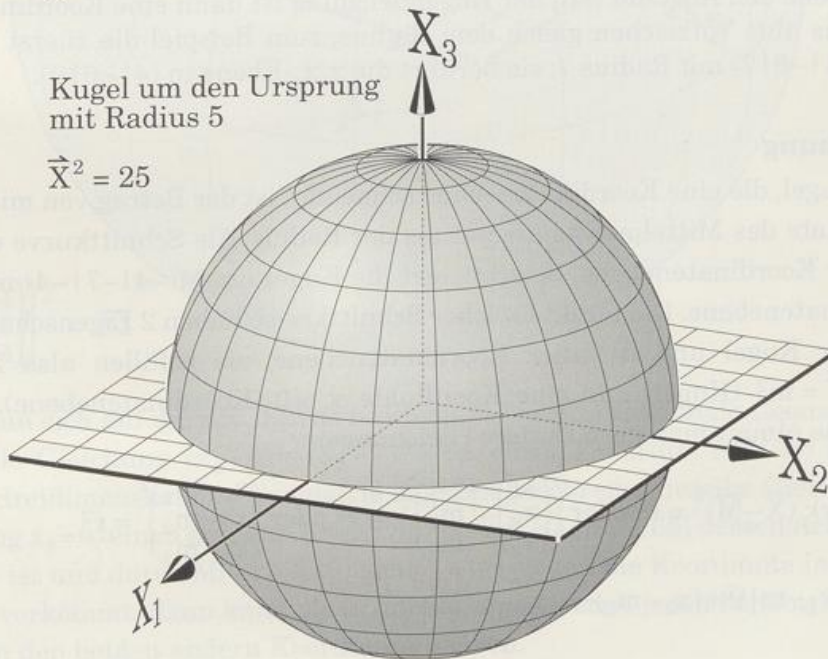
Die vorhin gezeigte Kugel um  $M(4|-6|7)$  mit Radius 7 lässt sich also skalar beschreiben

$$\text{mit } \left( \vec{X} - \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \right)^2 = 49 \text{ und vektoriell mit } \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

### Besondere Kugeln

Kugel um den Ursprung  
mit Radius 5

$$\vec{X}^2 = 25$$

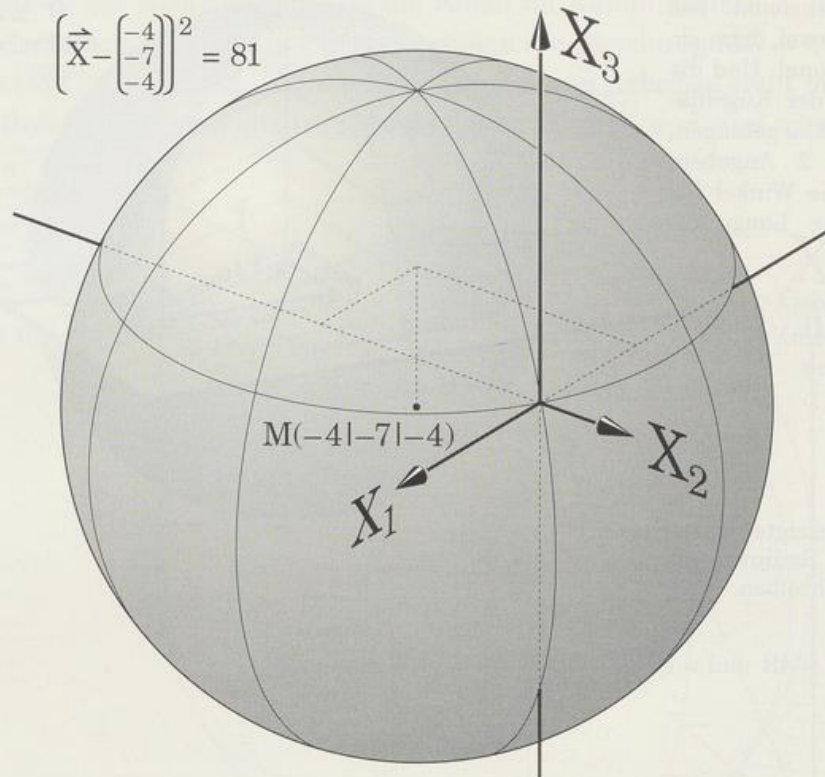


Kugel durch den Ursprung  $(\vec{X} - \vec{M})^2 = m^2$ , wobei  $m = \overline{OM} = |\vec{M}|$

Die Kugel um  $M(-4|-7|-4)$  mit Radius 9 geht durch den Ursprung, denn  $|\vec{M}| = 9$ .

Kugel durch den Ursprung mit Radius 9

$$\left(\vec{X} - \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}\right)^2 = 81$$



Bei einer Kugel, die eine Koordinatenebene berührt, hat der Mittelpunkt von dieser Koordinatenebene den Abstand  $r$ . In der Kugelgleichung ist dann eine Koordinate des Mittelpunkts bis aufs Vorzeichen gleich dem Radius, zum Beispiel die zuerst vorgestellte Kugel um  $(4|-6|7)$  mit Radius 7; sie berührt die  $x_1x_2$ -Ebene in  $(4|-6|0)$ .

### Kreisgleichung

Bei einer Kugel, die eine Koordinatenebene schneidet, ist der Betrag von mindestens einer Koordinate des Mittelpunkts kleiner als der Radius. Als Schnittkurve entsteht ein Kreis in der Koordinatenebene. So schneidet die Kugel um  $M(-4|-7|-4)$  mit Radius 9 jede Koordinatenebene. Die Punkte solcher Schnittkreise haben 2 Eigenschaften: Sie liegen auf der Kugel und in einer Koordinatenebene; sie erfüllen also 2 Gleichungen:  $(\vec{X} - \vec{M})^2 = m^2$  (Kugel) und eine Koordinate  $x_i = 0$  (Koordinatenebene). Für solche Schnittkreise nimmt man gern skalare Gleichungen.

$$\text{Kugel } K(M,r): (\vec{X} - \vec{M})^2 = r^2 \text{ oder } \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}\right)^2 = r^2 \text{ oder } \begin{pmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \\ x_3 - m_3 \end{pmatrix}^2 = r^2$$

das ergibt  $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$ .

Die Kugelpunkte  $(x_1 | x_2 | x_3)$  in der  $x_1x_2$ -Ebene bilden den Schnittkreis in der  $x_1x_2$ -Ebene; für sie gilt  $(x_1 | x_2 | 0)$ , und die skalare Kugelgleichung geht über in die skalare Gleichung für den Schnittkreis

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (0 - m_3)^2 = r^2$$

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2 - m_3^2$$

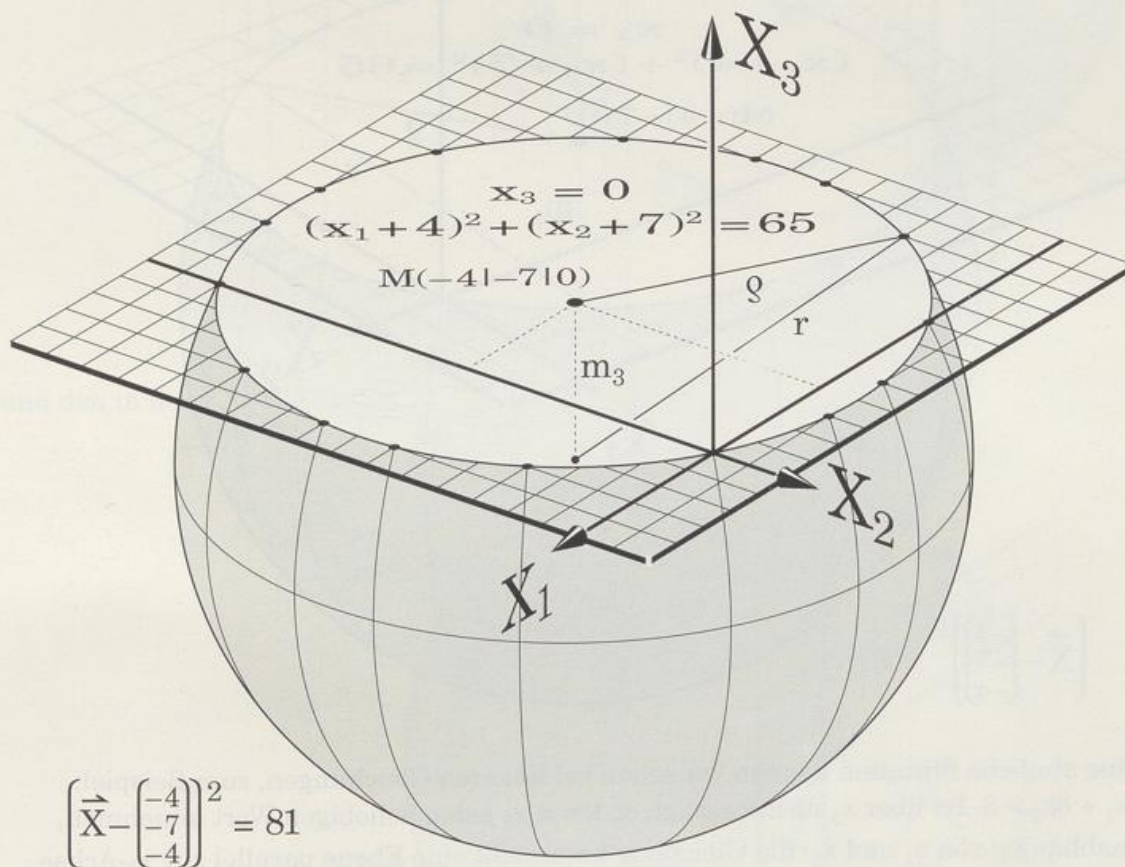
wobei  $r^2 - m_3^2$  nach Pythagoras das Quadrat des Schnittkreisradius  $\rho$  ist, also  $r^2 - m_3^2 = \rho^2$ .

Gleichung eines Kreises in der  $x_1x_2$ -Ebene:

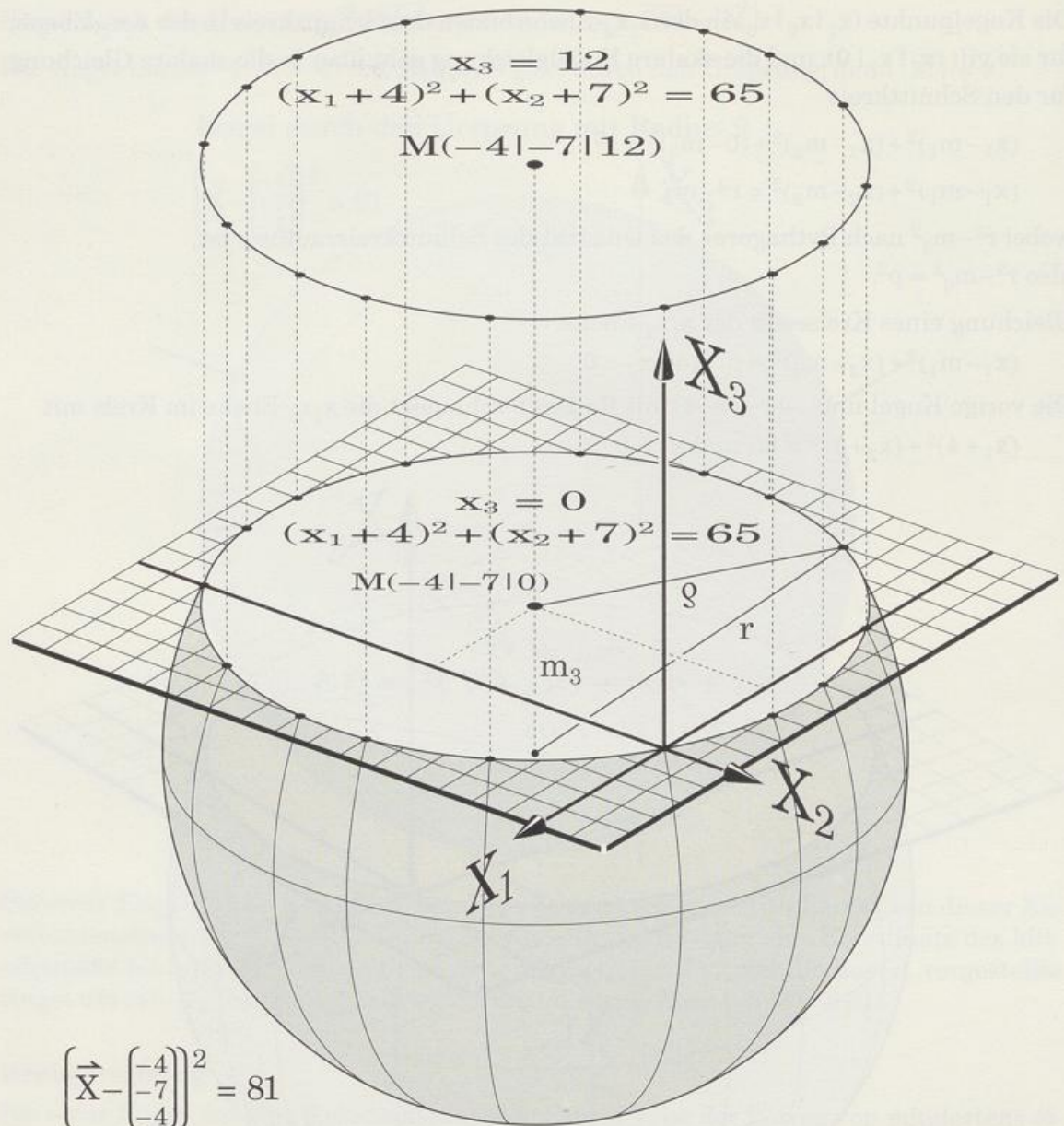
$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = \rho^2 \text{ und } x_3 = 0$$

Die vorige Kugel um  $(-4 | -7 | -4)$  mit Radius 9 schneidet die  $x_1x_2$ -Ebene im Kreis mit

$$(x_1 + 4)^2 + (x_2 + 7)^2 = 65 \text{ und } x_3 = 0$$

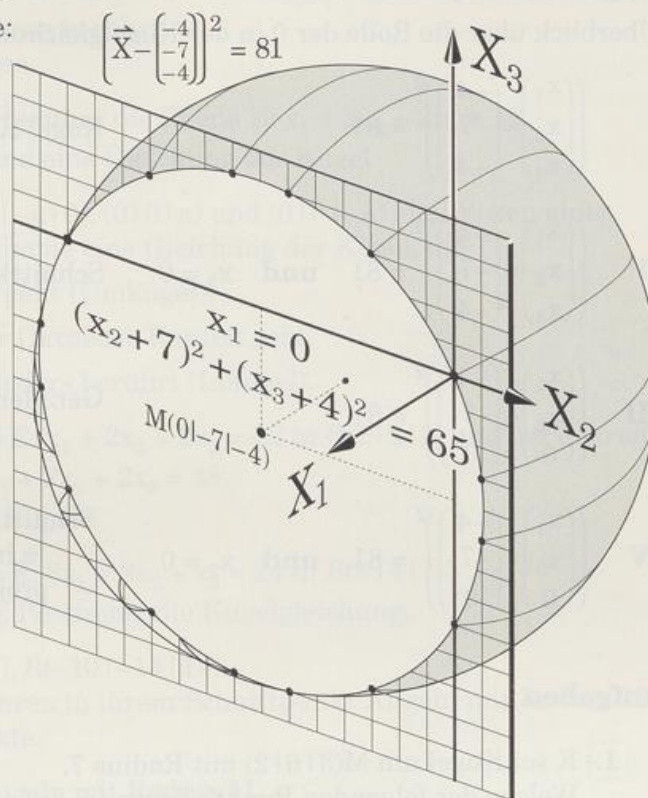


Nur wenn man sich auf die  $x_1x_2$ -Ebene beschränkt (zweidimensionale Geometrie), dann beschreibt die Gleichung  $(x_1 + 4)^2 + (x_2 + 7)^2 = 65$  einen Kreis um  $(-4 | -7)$  mit Radius  $\sqrt{65}$ . In der dreidimensionalen Geometrie dagegen beschreibt dieselbe Gleichung (ohne die Bedingung  $x_3 = 0$ ) einen geraden Kreiszyylinder mit Radius  $\sqrt{65}$ , dessen Achse parallel zur  $x_3$ -Achse ist und durch  $M(-4 | -7 | 0)$  geht. Denn wenn eine Koordinate in einer Gleichung nicht vorkommt, dann kann sie in der Raumgeometrie jeden beliebigen Wert unabhängig von den beiden andern Koordinaten haben.

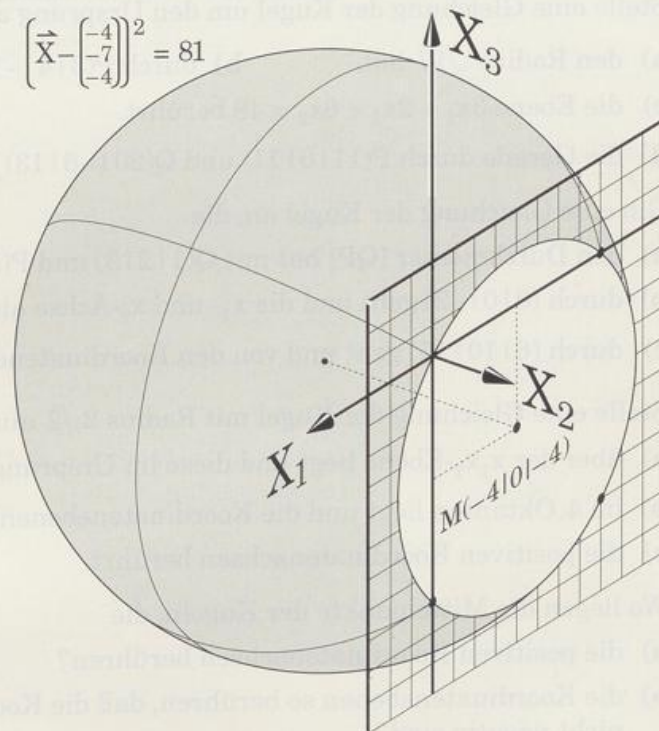


Eine ähnliche Situation kennen wir schon bei linearen Gleichungen, zum Beispiel:  $2x_1 + 3x_2 = 6$ . Ist über  $x_3$  nichts gesagt, so kann  $x_3$  jeden beliebigen Wert annehmen, unabhängig von  $x_1$  und  $x_2$ : die Gleichung beschreibt eine Ebene parallel zur  $x_3$ -Achse. Ist aber auch noch  $x_3 = 0$ , so beschreibt die Gleichung eine Gerade in der  $x_1x_2$ -Ebene.

Der Vollständigkeit halber zeigen wir  
 noch die beiden andern Schnittkreise:  
 den in der  $x_2x_3$ -Ebene:



und den in der  $x_1x_3$ -Ebene:



## Kugel-Kreis-Zylinder

Überblick über die Rolle der 0 in der Kugelgleichung

I 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} = 81$$
 Kugel K um  $(-4|-7|-4)$  mit Radius 9

II 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} = 81 \quad \text{und} \quad x_3 = 0$$
 Schnittkreis von K und der  $x_1x_2$ -Ebene

III 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = 81$$
 Gerader Kreiszylinder Z mit Radius 9 parallel zur  $x_3$ -Achse

IV 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = 81 \quad \text{und} \quad x_3 = 0$$
 Schnittkreis von Z und der  $x_1x_2$ -Ebene  
= in die  $x_1x_2$ -Ebene senkrecht projizierter Umriß der Kugel K

## Aufgaben

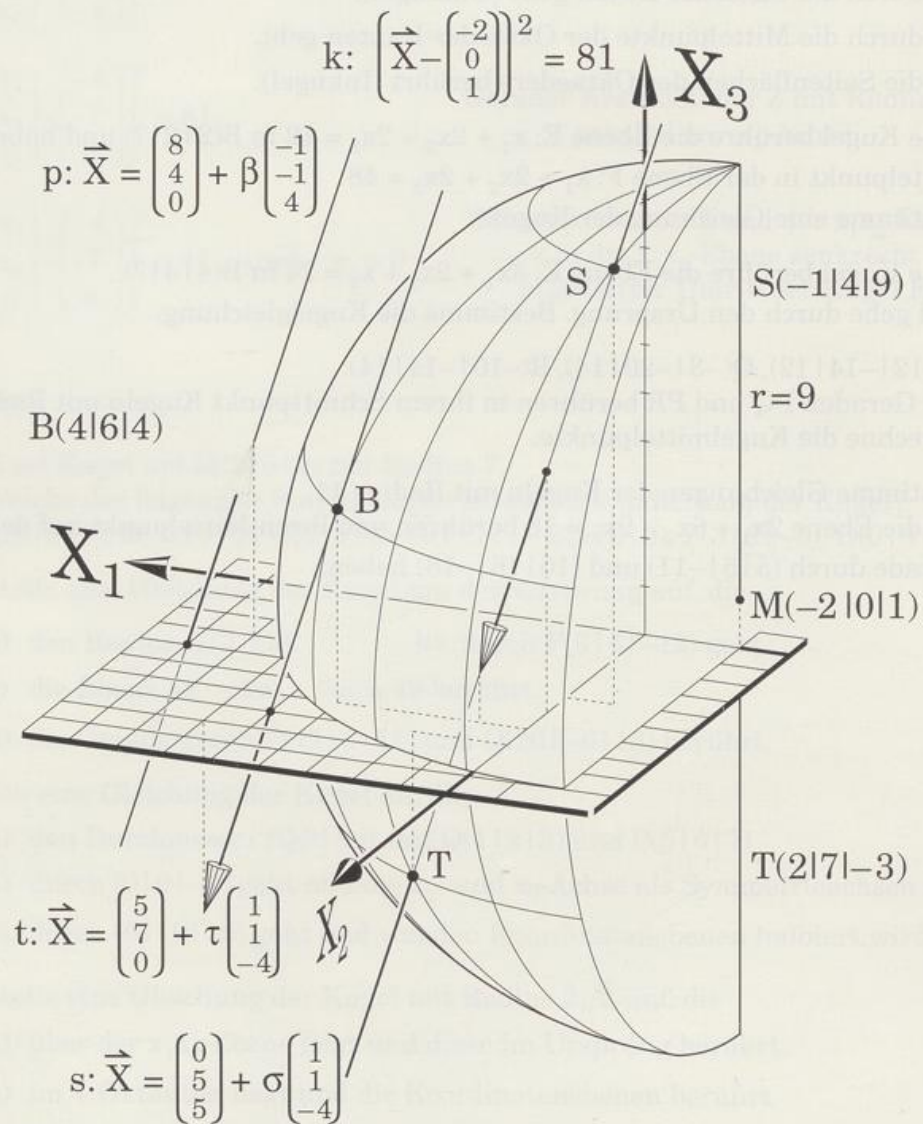
1. K sei Kugel um  $M(3|6|2)$  mit Radius 7.  
Welche der folgenden Punkte liegen in, auf oder außerhalb der Kugel?  
 $A(5|9|8)$ ,  $B(-1|0|0)$ ,  $C(0|0|0)$ ,  $D(1|1|1)$ ,  $E(3|6|2)$ ,  $F(3|6|-5)$ ,  $G(0|0|4)$
2. Stelle eine Gleichung der Kugel um den Ursprung auf, die
  - a) den Radius  $\sqrt{17}$  hat.
  - b) durch  $P(3|4|-12)$  geht.
  - c) die Ebene  $3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 49$  berührt.
  - d) die Gerade durch  $P(11|0|11)$  und  $Q(20|-6|13)$  berührt.
3. Gib eine Gleichung der Kugel an, die
  - a) den Durchmesser  $[QP]$  hat mit  $Q(1|2|3)$  und  $P(5|6|7)$
  - b) durch  $(0|0|-2)$  geht und die  $x_1$ - und  $x_2$ -Achse als Symmetrieachsen hat.
  - c) durch  $(6|10|15)$  geht und von den Koordinatenebenen halbiert wird.
4. Stelle eine Gleichung der Kugel mit Radius  $2\sqrt{2}$  auf, die
  - a) über der  $x_1x_2$ -Ebene liegt und diese im Ursprung berührt.
  - b) im 4. Oktanten liegt und die Koordinatenebenen berührt.
  - c) die positiven Koordinatenachsen berührt.
5. Wo liegen die Mittelpunkte der Kugeln, die
  - a) die positiven Koordinatenachsen berühren?
  - b) die Koordinatenebenen so berühren, daß die Koordinaten der Berührungspunkte nicht negativ sind?

- 6. Kugeln mit Radius 9 schneiden die  $x_1x_2$ -Ebene in einem Kreis mit Radius  $4\sqrt{2}$ , der 2 negative Koordinatenachsen berührt.  
Bestimme die Kugelgleichungen.
- 7. Eine Kugel um den Ursprung berühre die Ebene  $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 12$ .  
Bestimme den Berührungspunkt und eine Gleichung der Kugel.
- 8.  $(a|0|0)$ ,  $(-a|0|0)$ ,  $(0|a|0)$ ,  $(0|-a|0)$ ,  $(0|0|a)$  und  $(0|0|-a)$  sind Ecken eines regelmäßigen Oktaeders. Bestimme eine Gleichung der Kugel, die
  - a) durch die Oktaeder-Ecken geht (Umkugel).
  - b) durch die Mittelpunkte der Oktaeder-Kanten geht.
  - c) die Seitenflächen des Oktaeders berührt (Inkugel).
- 9. Eine Kugel berühre die Ebene  $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 12$  in  $B(2|2|?)$  und habe ihren Mittelpunkt in der Ebene  $F: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 48$ .  
Bestimme eine Gleichung der Kugel.
- 10. Eine Kugel berühre die Ebene  $E: 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 24$  in  $B(4|4|?)$  und gehe durch den Ursprung. Bestimme die Kugelgleichung.
- 11.  $P(-12|-14|12)$ ,  $Q(-3|-20|14)$ ,  $R(-10|-14|14)$ .  
Die Geraden  $PQ$  und  $PR$  berühren in ihrem Schnittpunkt Kugeln mit Radius 22.  
Berechne die Kugelmittelpunkte.
- 12. Bestimme Gleichungen der Kugeln mit Radius 11, die die Ebene  $2x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 18$  berühren und ihren Mittelpunkt auf der Gerade durch  $(5|5|-11)$  und  $(10|16|-16)$  haben.

## 2. Kugel und Gerade

Bei Kugel und Gerade unterscheiden wir im Raum dieselben 3 Fälle wie bei Kreis und Gerade in der Ebene: Kugel und Gerade haben

- genau einen gemeinsamen Punkt: Berührung; die Gerade ist **Tangente**
- 2 gemeinsame Punkte: Schnitt; die Gerade ist **Sekante**
- keinen gemeinsamen Punkt; die Gerade ist **Passante**.



Das Bild zeigt eine Kugel um  $M(-2|0|1)$  mit Radius 9 sowie die Tangente  $t$ , die Sekante  $s$  und die Passante  $p$ .

## Lagebestimmung

Geht es nur darum zu wissen, welcher der 3 Fälle vorliegt, so erinnert man sich an die Grundaufgabe: Abstand Punkt-Gerade. Man berechnet den Abstand  $d(M, g)$  von Kugelmittelpunkt  $M$  und Gerade  $g$  und vergleicht ihn mit dem Kugelradius  $r$ :

- $d(M, g) = r \Rightarrow g$  ist Tangente
- $d(M, g) < r \Rightarrow g$  ist Sekante
- $d(M, g) > r \Rightarrow g$  ist Passante

Solche Aufgaben haben wir früher schon gelöst.

Wenn aber noch nach den gemeinsamen Punkten gefragt ist, dann verfährt man wie immer bei Schnittberechnungen: man setzt  $\vec{X}$  aus der Geradengleichung in die Kugelgleichung ein und löst die quadratische Gleichung auf nach dem Parameter der Geradengleichung. Aus der Diskriminante  $D$  dieser Gleichung folgen die 3 Fälle:

- $D = 0 \Rightarrow g$  ist Tangente
- $D > 0 \Rightarrow g$  ist Sekante
- $D < 0 \Rightarrow g$  ist Passante

Die gemeinsamen Punkte ergeben sich, wenn man die Lösungen für den Parameter in die Geradengleichung einsetzt.

Beispiel: Kugel  $k: \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^2 = 81$ , Gerade  $s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\text{eingesetzt } \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^2 = 81 \text{ P, vereinfacht } \begin{pmatrix} 2+\mu \\ 5+\mu \\ 4-4\mu \end{pmatrix}^2 = 81.$$

Skalar multipliziert  $(2+\mu)^2 + (5+\mu)^2 + (4-4\mu)^2 = 81$

und vereinfacht  $45 - 18\mu + 18\mu^2 = 81$  oder  $\mu^2 - \mu - 2 = 0$

Diskriminante  $D = 9 > 0 \Rightarrow s$  ist Sekante.

Schneller gehts mit der faktorisierten Form  $(\mu + 1)(\mu - 2) = 0$ ,

der Schnittpunkt für  $\mu = -1$  ist  $S(-1|4|9)$  und

der Schnittpunkt für  $\mu = 2$  ist  $T(2|7|-3)$ , siehe voriges Bild.

Eine entsprechende Rechnung für die Geraden  $t$  und  $p$

aus dem vorigen Bild ergibt:

$p$  ist Passante,  $t$  berührt die Kugel in  $B(4|6|4)$ .

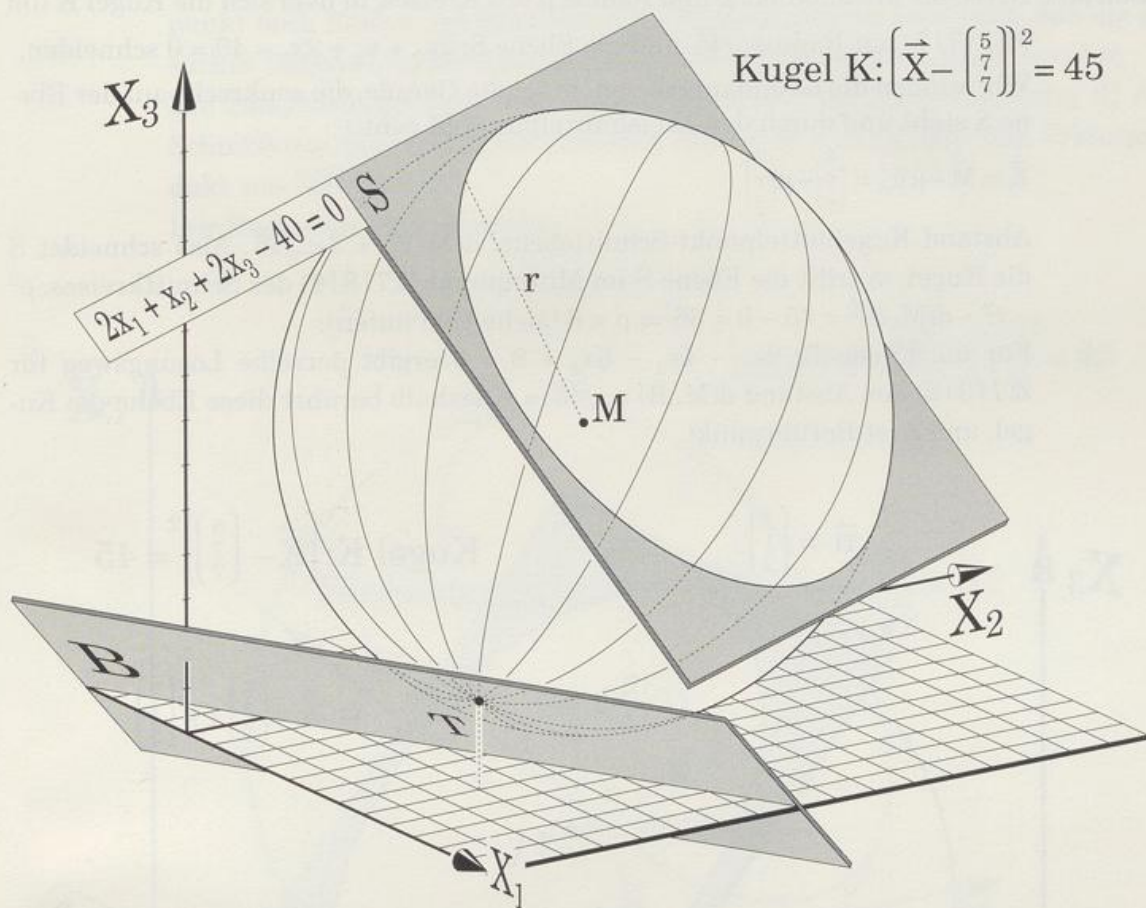
## Aufgaben

1. Gegeben ist die Kugel um den Ursprung mit Radius  $3\sqrt{3}$  und die Gerade AB. Untersuche Kugel und Gerade auf gemeinsame Punkte.
- a) A(2|2|4)      B(6|6|0)  
 b) A(2|3|4)      B(5|5|-1)  
 c) A(4|4|3)      B(-2|6|-1)
2. Bestimme die Symmetrie-Ebenen von Kugel und Gerade in Aufgabe 1.
3. Gegeben ist die Kugel um  $(-7|-8|-9)$  mit Radius  $\sqrt{33}$  und die Gerade AB. Untersuche Kugel und Gerade auf gemeinsame Punkte.
- a) A(-5|-5|-4)      B(5|5|-14)  
 b) A(-6|-12|-13)      B(-5|-3|-7)  
 c) A(-3|-7|-5)      B(-7|1|-3)
4. A(12|0|-7), B(-10|4|13), P(2|4|5), Q(0|0|1), M(1|2|3)  
 Zeige: AB und PQ sind Symmetrieachsen einer Kugel um M.  
 Berechne die Punkte, in denen AB und PQ die Kugel um M mit Radius 15 schneiden.
5. Gegeben ist die Kugel um M(1|4|-3) mit Radius 3 und eine Geradenschar durch  $(0|4|-1)$  und  $(0|1|a)$ .
- a) Zeige: Keine Schargerade ist Kugeltangente, jede Schargerade ist Kugelsekante.  
 b) Aus welcher Schargerade ( $a=?$ ) schneidet die Kugel eine Sehne von extremer Länge?
6. K:  $\vec{X}^2 - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \vec{X} = 2g_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$
- a) Bestimme Radius und Mittelpunkt der Kugel K.  
 b) Für welche Werte von a berühren Schargeraden  $g_a$  die Kugel K? Berechne die Berührungspunkte.  
 c) Ist in der Schar eine Gerade, die Symmetrieachse der Kugel ist? Falls ja, welche?
7.  $K_a: \left( \vec{X} - \begin{pmatrix} 3a \\ 4 \\ a \end{pmatrix} \right)^2 = 9a^2 g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- a) Für welche a-Werte schneiden die Kugeln  $K_a$  die  $x_1x_3$ -Ebene in einem Kreis?  
 b) Für welche a-Werte ist g Tangente von  $K_a$ ? Berechne die Berührungspunkte.

### 3. Kugel und Ebene

Ähnlich wie bei der Lage von Kugel und Gerade unterscheiden wir die 3 Fälle:

- genau ein gemeinsamer Punkt: Berührung; die Ebene ist **Tangentialebene**
- unendlich viele gemeinsame Punkte: Schnittkreis; die Ebene ist **Schnittebene**
- kein gemeinsamer Punkt; die Ebene ist **Passantebene**.



#### Lagebestimmung

Die Frage, welcher Fall vorliegt, klärt man durch Lösen der Grundaufgabe: Abstand Punkt-Ebene. Man berechnet den Abstand  $d(M, E)$  von Kugelmittelpunkt M und Ebene E und vergleicht ihn mit dem Kugelradius r:

- $d(M, E) = r \Rightarrow E$  ist Tangentialebene
- $d(M, E) < r \Rightarrow E$  ist Schnittebene
- $d(M, E) > r \Rightarrow E$  ist Passantebene

Solche Aufgaben haben wir früher schon gelöst. Bleiben noch die gemeinsamen Punkte. Den Berührungspunkt findet man auch mit dieser Grundaufgabe. Die Gleichung des Schnittkreises können wir mit unsern Mitteln nicht aufstellen. Allgemein läuft das Ganze so ab:

- $d(M, E) = \overline{MZ}$  berechnen, Z ist die senkrechte Projektion von M in E

- $d(M, E) > r$ , die Ebene  $E$  ist Passantebene,  
 $Z$  ist der Ebenenpunkt, der der Kugel am nächsten liegt
- $d(M, E) = r$ , die Ebene  $E$  ist Tangentialebene,  $Z$  ist der Berührungspunkt – fertig!
- $d(M, E) < r$ , die Ebene  $E$  ist Schnittebene,  $Z$  ist der Schnittkreis-Mittelpunkt,  
 Pythagoras liefert den Schnittkreis-Radius  $\rho$ :  $\rho^2 = r^2 - d(M, E)^2$

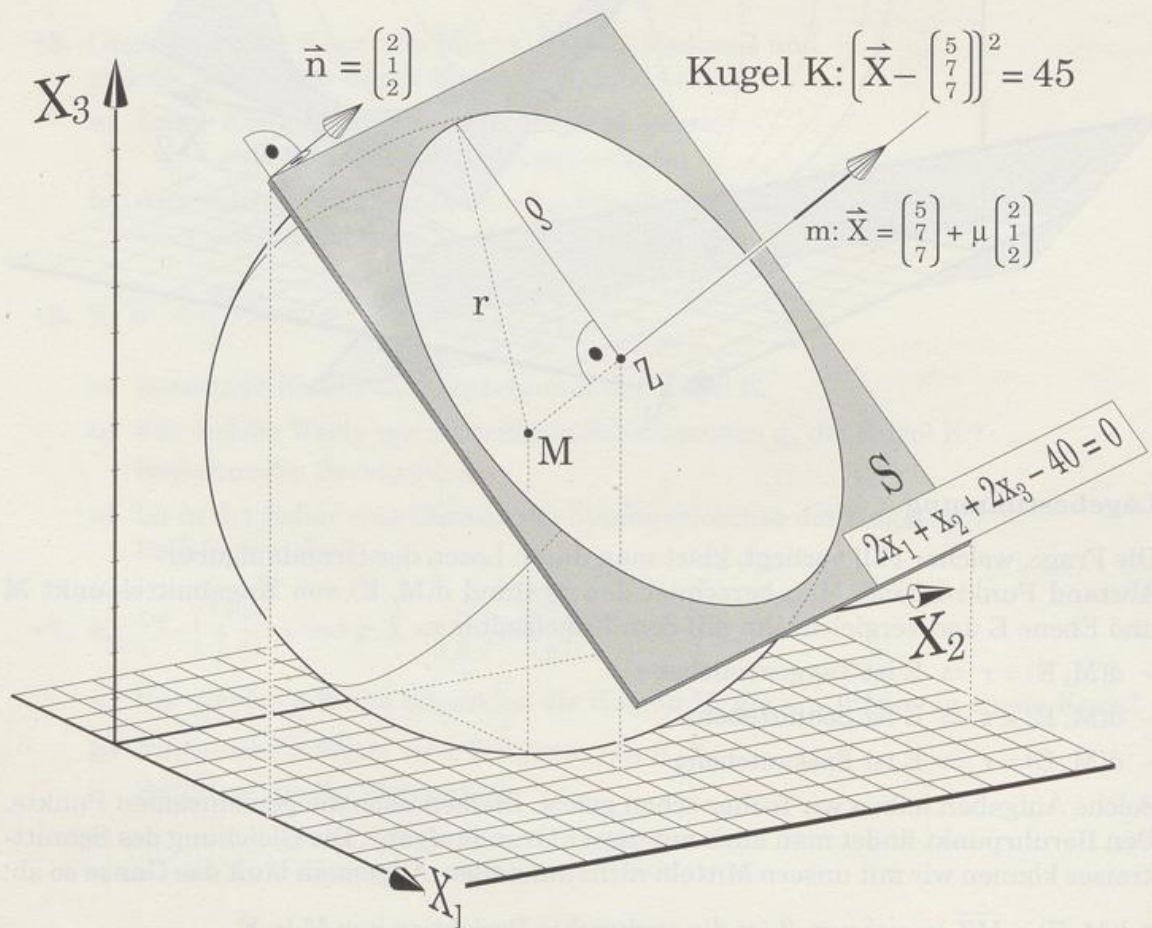
Beispiel: Berechne Mittelpunkt  $Z$  und Radius  $\rho$  des Kreises, in dem sich die Kugel  $K$  um  $M(5|7|7)$  mit Radius  $\sqrt{45}$  und die Ebene  $S: 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 40 = 0$  schneiden.

Wir wenden die Grundaufgabe an.  $m$  sei die Gerade, die senkrecht auf der Ebene  $S$  steht und durch den Kugelmittelpunkt  $M$  geht:

$$\vec{X} = \vec{M} + \mu \vec{n}_S = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Abstand Kugelmittelpunkt-Schnittebene:  $d(M, Z) = 3 < \sqrt{45}$ . Also schneidet  $S$  die Kugel.  $m$  trifft die Ebene  $S$  im Mittelpunkt  $Z(7|8|9)$  des Schnittkreises.  $\rho^2 = r^2 - d(M, S)^2 = 45 - 9 = 36 \Rightarrow \rho = 6$  (siehe Bild unten).

Für die Ebene  $B: 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 8 = 0$  ergibt derselbe Lösungsweg für  $Z(7|3|2)$  den Abstand  $d(M, B) = \sqrt{45} = r$ , deshalb berührt diese Ebene die Kugel, und  $Z$  ist Berührungspunkt.



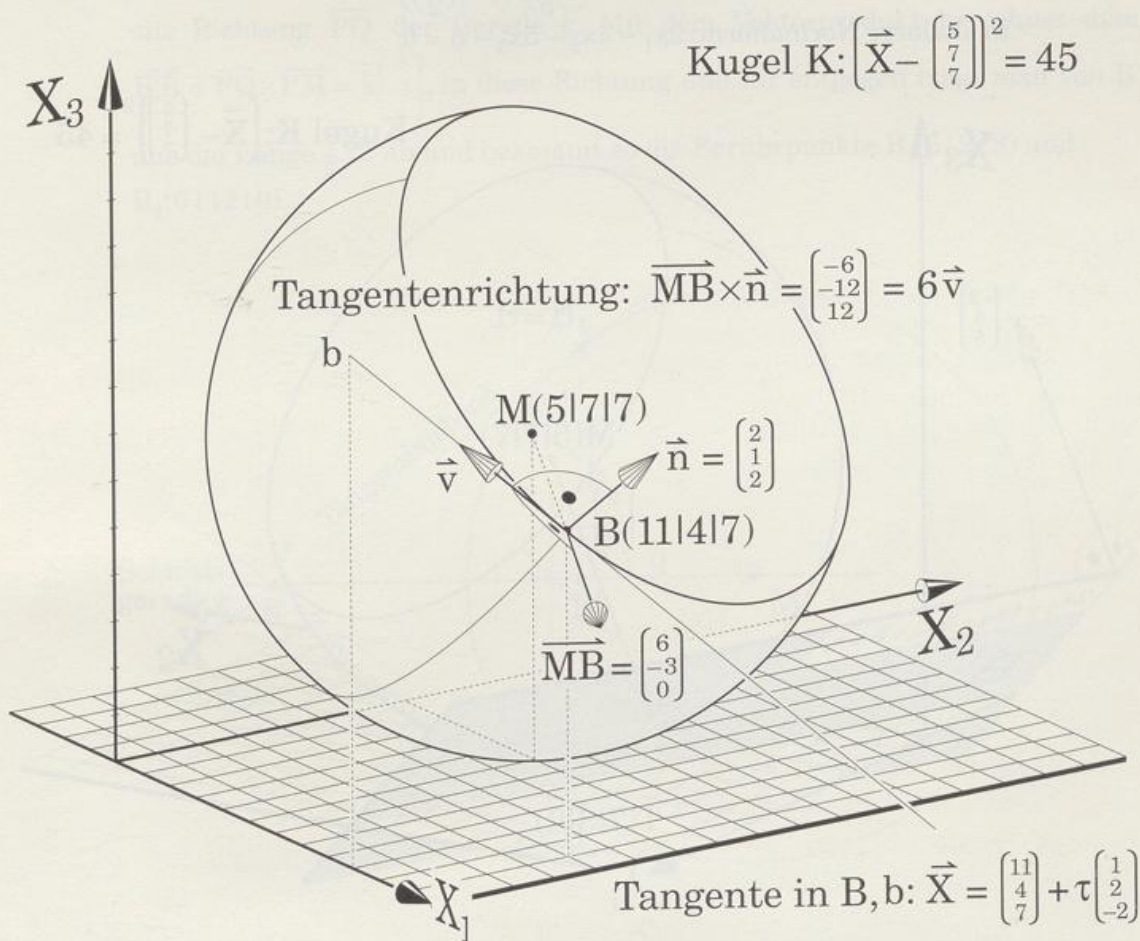
Zum Schnittkreis noch eine Aufgabe. Auch hier braucht man die Kugelgleichung nicht, dafür aber ...

\*Beispiel: Zeige: Der Punkt B(11|7|7) liegt auf dem Schnittkreis der Kugel um M(5|7|7) mit Radius  $\sqrt{45}$  und der Ebene S:  $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 40 = 0$ . Bestimme eine Gleichung der Schnittkreis-Tangente b in B.

Obwohl die Aufgabe viel vom Schnittkreis handelt, braucht man weder Mittelpunkt noch Radius des Schnittkreises. Wichtig aber ist zu wissen, daß die gesuchte Tangente in der Schnittkreis-Ebene S liegt **und** die Kugel berührt.

Die Tangentenrichtung  $\vec{v}$  ist deshalb senkrecht zur Normalrichtung  $\vec{n}_s$  der Schnittkreis-Ebene **und** zur Richtung  $\overrightarrow{MB}$ .  $\vec{v}$  ist also parallel zum Vektorprodukt von  $\overrightarrow{MB}$  und  $\vec{n}_s$ .

Der Rest steht im Bild unten.



### Gleichung der Tangentialebene

Gegeben ist eine Kugel um  $M$  mit Radius  $r$  und ein Punkt  $T$  auf ihr.  
Gesucht ist die Gleichung der Ebene  $B$ , die die Kugel in  $T$  berührt.

Die Tangentialebene  $B$  geht durch  $T$ :  $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{T}) = 0$

und hat die Normalrichtung  $\vec{n} = \overrightarrow{MT} = \vec{T} - \vec{M}$ .

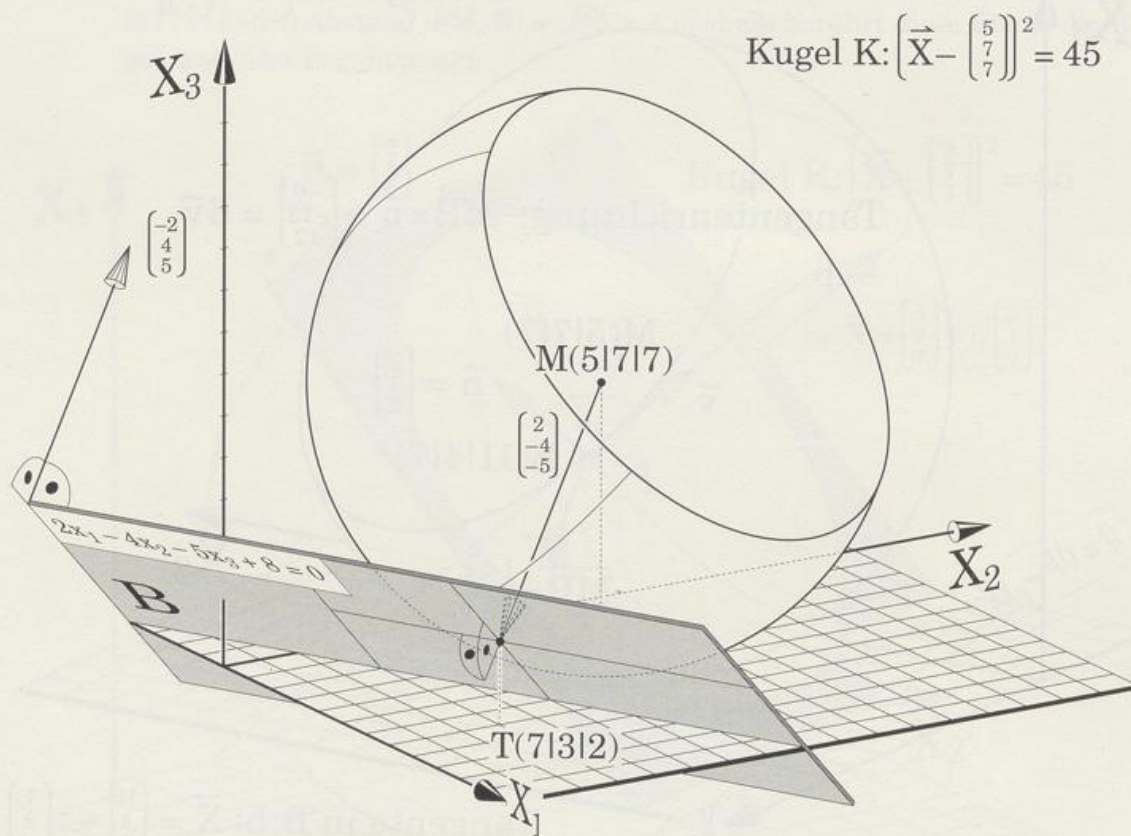
**Gleichung der Tangentialebene  $B$ :**  $(\vec{T} - \vec{M}) \circ (\vec{X} - \vec{T}) = 0$

Beispiel: Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene,  
die die Kugel um  $M(5|7|7)$  in  $T(7|3|2)$  berührt.

$$\overrightarrow{MT} = \vec{T} - \vec{M} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$\text{Gleichung der Tangentialebene: } \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \left( \vec{X} - \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

$$\text{in skalarer Normalform: } 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 8 = 0.$$

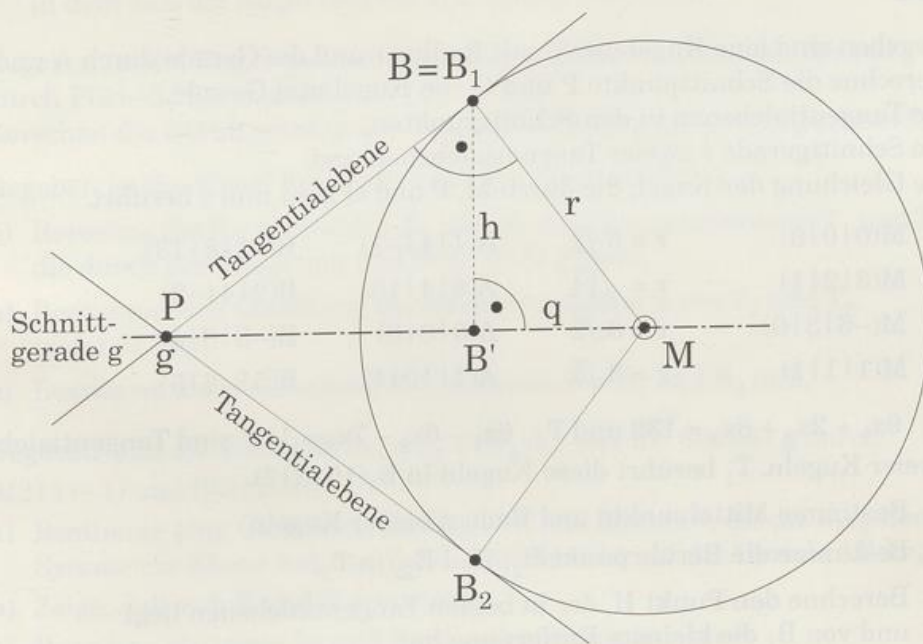


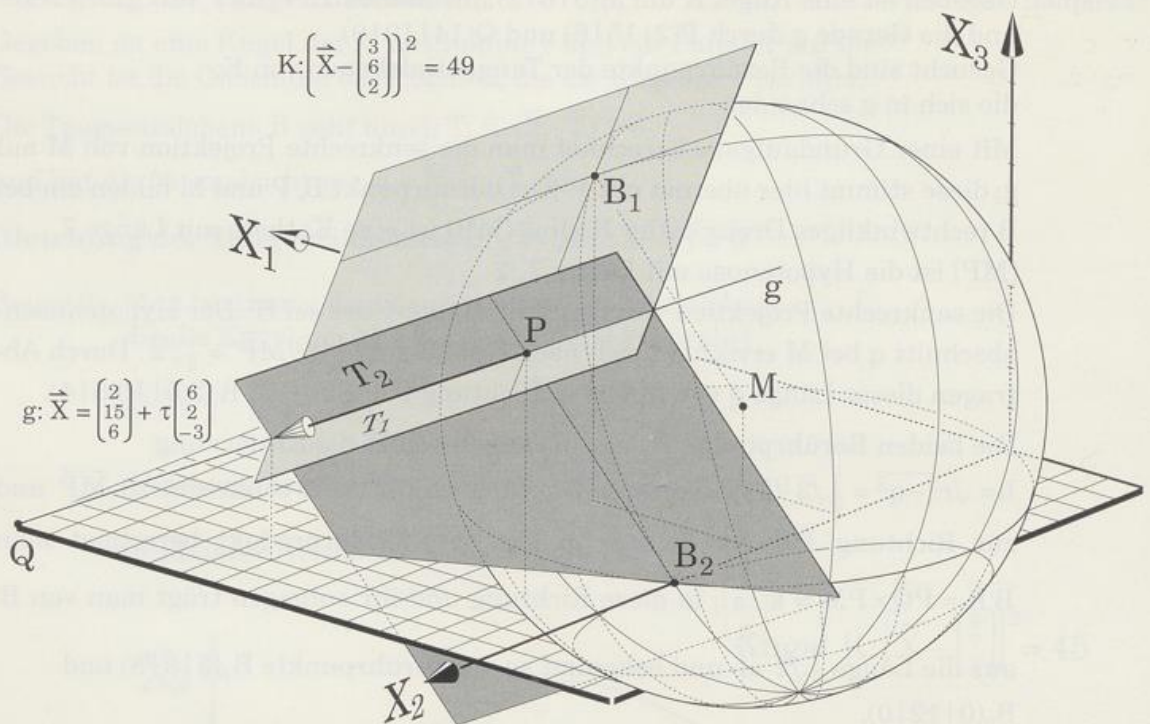
\*Beispiel: Gegeben ist eine Kugel  $K$  um  $M(3|6|2)$  mit Radius 7 und die Gerade  $g$  durch  $P(2|15|6)$  und  $Q(14|19|0)$ . Gesucht sind die Berührungspunkte der Tangentialebenen von  $K$ , die sich in  $g$  schneiden.

Mit einer Grundaufgabe berechnet man die senkrechte Projektion von  $M$  auf  $g$ ; diese stimmt hier überein mit  $P$ . Ein Berührungspunkt  $B$ ,  $P$  und  $M$  bilden ein bei  $B$  rechtwinkliges Dreieck: Der Radius  $[MB]$  ist eine Kathete mit Länge 7,  $[MP]$  ist die Hypotenuse mit Länge  $7\sqrt{2}$ .

Die senkrechte Projektion von  $B$  auf die Hypotenuse sei  $B'$ . Der Hypotenusenabschnitt  $q$  bei  $M$  errechnet sich nach Euklid zu  $q = r^2/\overline{MP} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$ . Durch Abtragen dieser Länge  $q$  von  $M$  aus in Richtung  $P$  ergibt sich  $B'(2,5|10,5|4)$ .

Die beiden Berührungspunkte  $B_1$  und  $B_2$  haben von  $B'$  die Entfernung  $h = \sqrt{r^2 - q^2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$  (Pythagoras!). Die Richtung  $\overrightarrow{B'B}$  ist senkrecht zu  $\overline{MP}$  und zur Richtung  $\overrightarrow{PQ}$  der Gerade  $g$ . Mit dem Vektorprodukt berechnet man  $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PM} = k \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ ; in diese Richtung und ihr entgegen trägt man von  $B'$  aus die Länge  $\frac{7}{2}\sqrt{2}$  ab und bekommt so die Berührungspunkte  $B_1(5|9|8)$  und  $B_2(0|12|0)$ .





### Aufgaben

1. Gegeben sind eine Kugel um M mit Radius r und die Gerade durch A und B. Berechne die Schnittpunkte P und Q von Kugel und Gerade, die Tangentialebenen in den Schnittpunkten, die Schnittgerade s zweier Tangentialebenen und die Gleichung der Kugel, die durch M, P und Q geht und s berührt.
 

|                |                 |             |              |
|----------------|-----------------|-------------|--------------|
| a) $M(0 0 0)$  | $r = 6\sqrt{2}$ | $A(1 4 -1)$ | $B(-1 8 13)$ |
| b) $M(3 2 1)$  | $r = \sqrt{14}$ | $A(6 4 10)$ | $B(2 4 -2)$  |
| c) $M(-6 3 0)$ | $r = 3\sqrt{2}$ | $A(0 0 0)$  | $B(-8 8 4)$  |
| d) $M(1 1 1)$  | $r = 3\sqrt{3}$ | $A(1 10 1)$ | $B(5 -6 5)$  |
- 2.  $T_1: 9x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 138$  und  $T_2: 6x_1 - 6x_2 - 7x_3 = 114$  sind Tangentialebenen zweier Kugeln.  $T_1$  berührt diese Kugeln in  $B_1(10|3|?)$ .
  - a) Bestimme Mittelpunkte und Radien beider Kugeln.
  - b) Bestimme die Berührungspunkt  $B_{21}$  und  $B_{22}$  in  $T_2$ .
  - c) Berechne den Punkt H, der in beiden Tangentialebenen liegt und von  $B_1$  die kleinste Entfernung hat.
3. Die Ebene  $T_1$  durch  $A(4|41|-6)$ ,  $B(0|16|6)$  und  $C(0|0|14)$  berührt eine Kugel K um  $M(1|2|3)$ .
  - a) Berechne den Kugelradius und den Berührungspunkt.
  - b) Stelle eine Gleichung der Ebene E auf, die auch durch A und B geht und die Kugel halbiert.

- c) Stelle eine Gleichung der Ebene  $T_2$  auf, die auch durch A und B geht und die Kugel berührt.
4. Gegeben ist die Ebenenschar  $E_a: x_1 + x_2 + x_3 - a = 0$ , sowie die Punkte  $P(-2|2|0)$  und  $Q(-6|6|2)$ .  $[PQ]$  ist Durchmesser der Kugel K.
- Bestimme eine Gleichung von K.
  - Wo liegen die Mittelpunkte aller Kugeln, die  $[PQ]$  als Sehne haben?
  - Für welche a-Werte schneiden sich K und  $E_a$  in einem Kreis?
  - Für welchen a-Wert hat der Kugelmittelpunkt von  $E_a$  den Abstand  $\sqrt{3}$ ?
  - Berechne Mittelpunkt  $M_4$  und Radius  $r_4$  des Kreises, in dem sich K und die Ebene  $E_4$  schneiden.
- 5. Bestimme die Mittelpunkte der Kugeln mit Radius 26, die die Ebene  $T: 3x_1 + 4x_2 - 12x_3 + 24 = 0$  berühren und von den Ebenen  $E: 9x_1 - 12x_2 - 2x_3 = 0$  und  $F: 15x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 51 = 0$  halbiert werden.
- 6. Gegeben ist die Kugel um  $M(2|-2|1)$  mit Radius 3.
- $(a|-a|a)$  und  $(2|-2|-8)$  bestimmen eine Geradenschar. Welche Schargeraden ( $a=?$ ) berühren die Kugel?
  - Bestimme Radius und Mittelpunkt des Kreises, in dem sich die Kugel und die  $x_1x_2$ -Ebene schneiden.
- 7. Gegeben ist die Kugel um den Ursprung mit Radius 9 und die Gerade  $g$  durch  $P(3|-3|12)$  und  $Q(11|1|11)$ . Berechne die Berührungspunkte der Tangentialebenen, die sich in  $g$  schneiden.
- 8. Gegeben ist die Kugel K um  $M(-14|-21|7)$  mit Radius 7.
- Berechne die Berührungspunkte  $B_1$  und  $B_2$  der Tangentialebenen  $T_1$  und  $T_2$  von K, die durch den Ursprung und  $P(3|-2|0)$  gehen.
  - Bestimme eine Gleichung der Symmetrieebene S von  $T_1$  und  $T_2$ , in der M liegt.
  - Bestimme die senkrechten Projektionen von  $B_1$  und  $B_2$  in S.
- 9. Gegeben sind die Ebene  $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$  und die Gerade  $g$  durch  $A(2|1|-1)$  und  $B(3|2|-3)$ .
- Bestimme eine Gleichung der Kugel K mit Radius 5, die die  $x_1x_3$ -Ebene als Symmetrie-Ebene hat und deren Mittelpunkt auf der Gerade AB liegt.
  - Zeige, daß sich E und K schneiden.
  - Berechne Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises k.
  - Zeige, daß  $S(1|4|-2)$  gemeinsamer Punkt von E und K ist.
  - Bestimme eine Gleichung der Ebene T, die K in S berührt.
  - Die Kugeln K und K' liegen symmetrisch zur Ebene T. Bestimme eine Gleichung von K'.
  - Bestimme eine Gleichung der Tangente t in E, die den Schnittkreis k in S berührt.

## 4. Kugel und Kugel

Hier geht es darum, die Lage zweier Kugeln zu beschreiben. Auch wenn sich alles im Raum abspielt, so sind die Überlegungen dazu so einfach (oder schwer) wie die zur Lagebeschreibung von Kreisen in der Ebene. Dazu eine kurze Erinnerung an weit Zurückliegendes.

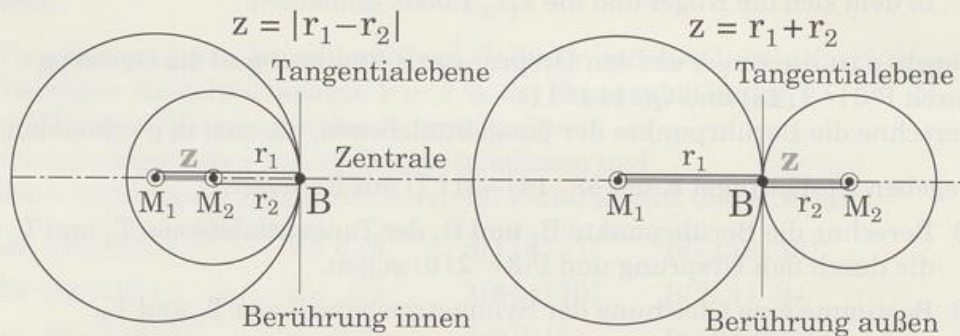
Es gibt wieder die 3 charakteristischen Fälle: Berühren, Schneiden, Meiden. Und für jeden Fall 2 Ausprägungen. Wie bei Kreisen auch müssen von jeder Kugel Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$  bekannt sein.

Die Gerade durch die Kugelmittelpunkte heißt Zentrale – sie ist auch die Symmetrieachse eines Kugelpaars. Am besten verdeutlicht man sich die Fälle an 2 Kreisen; sie sind der Umriß von Kugeln, die entstehen, wenn diese Kreise um die Zentrale rotieren. Dazu braucht man 3 Stücke:

- die Entfernung der Kugelmittelpunkte  $z = \overline{M_1 M_2}$
- die Summe der Kugelradien  $r_1 + r_2$
- den Unterschied der Kugelradien  $|r_1 - r_2|$

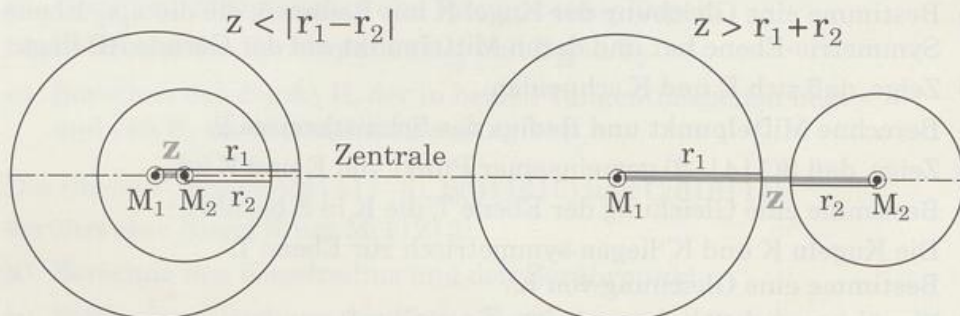
1 gemeinsamer Punkt: Berührung

$$z = |r_1 - r_2| \quad \text{oder} \quad z = r_1 + r_2$$



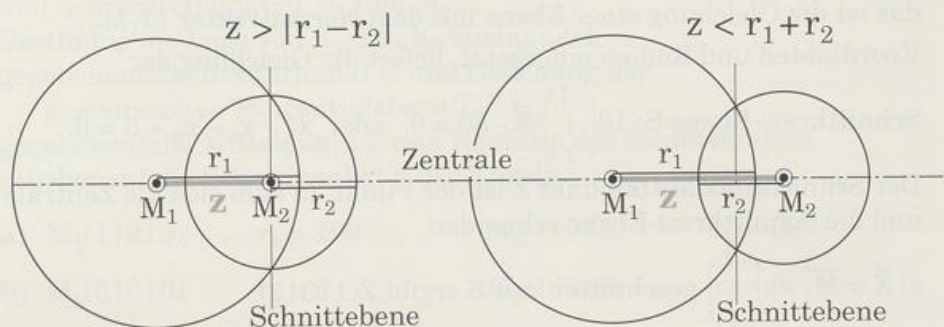
kein gemeinsamer Punkt

$$z < |r_1 - r_2| \quad \text{oder} \quad z > r_1 + r_2$$



### 1 gemeinsamer Schnittkreis

$$z > |r_1 - r_2| \quad \text{und} \quad z < r_1 + r_2$$



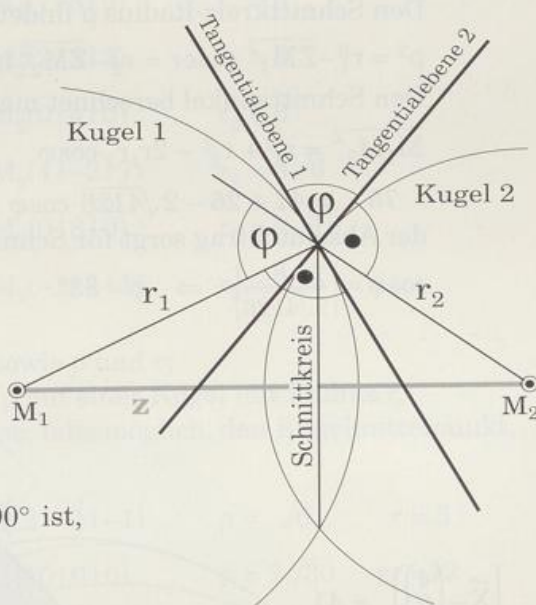
Als Schnittwinkel zweier Kugeln bezeichnet man den Winkel, den die beiden Tangentialebenen in einem Punkt des Schnittkreises bilden. Man berechnet ihn, indem man den Kosinussatz anwendet im Dreieck mit den Seiten  $r_1$ ,  $r_2$  und  $z$ . In diesem Dreieck ist der Außenwinkel  $\varphi$  gleich dem Schnittwinkel der Tangentialebenen, weil entsprechende Winkelschenkel aufeinander senkrecht stehen.

Kosinussatz:  $z^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(180^\circ - \varphi)$   
wegen  $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$  gilt

$$\cos \varphi = \frac{z^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$$

Damit der Schnittwinkel nicht größer als  $90^\circ$  ist,

$$\text{setzt man Betragstriche: } \cos \varphi = \left| \frac{z^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} \right|$$



Beispiel: Man untersuche die Lage der Kugeln um  $M_1(4|0|0)$  mit Radius  $\sqrt{41}$  und um  $M_2(-1|5|5)$  mit Radius  $\sqrt{26}$ .

$$\text{Verbindungsvektor } \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{M_1M_2} = z = 5\sqrt{3} = 8,66\dots$$

$$\text{Summe der Radien } r_1 + r_2 = \sqrt{41} + \sqrt{26} = 11,50\dots$$

$$\text{Unterschied der Radien } r_1 - r_2 = \sqrt{41} - \sqrt{26} = 1,30\dots$$

wegen  $1,3 < 8,66 < 11,5$  schneiden sich die Kugeln in einem Kreis.

Ein Punkt des Schnittkreises liegt auf beiden Kugeln, seine Koordinaten erfüllen also beide Kugelgleichungen

$$K_1: (\vec{X} - \vec{M}_1)^2 = r_1^2, \text{ multipliziert } \vec{X}^2 - 2\vec{X} \circ \vec{M}_1 + \vec{M}_1^2 = r_1^2$$

$$K_2: (\vec{X} - \vec{M}_2)^2 = r_2^2, \text{ multipliziert } \vec{X}^2 - 2\vec{X} \circ \vec{M}_2 + \vec{M}_2^2 = r_2^2$$

man subtrahiert die multiplizierten Gleichungen voneinander

$2\vec{X} \circ (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) + \vec{M}_1^2 - \vec{M}_2^2 = r_1^2 - r_2^2$  und bekommt

$$2\vec{M}_1\vec{M}_2 \circ \vec{X} + (\vec{M}_1^2 - \vec{M}_2^2 - r_1^2 + r_2^2) = 0,$$

das ist die Gleichung einer Ebene mit dem Normalvektor  $\overline{M_1M_2}$ ,  
Koordinaten und Radien eingesetzt, liefert die Gleichung der

Schnittkreis-Ebene S:  $10 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{X} - 50 = 0$  oder  $x_1 - x_2 - x_3 + 5 = 0$ .

Der Schnittkreis-Mittelpunkt Z ist der Punkt, in dem sich die Zentrale z und die Schnittkreis-Ebene schneiden

z:  $\vec{X} = \vec{M}_1 + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  geschnitten mit S ergibt Z(1|3|3).

Den Schnittkreis-Radius  $\rho$  findet man mit Pythagoras

$$\rho^2 = r_1^2 - \overline{ZM_1}^2 \text{ (oder } = r_2^2 - \overline{ZM_2}^2), \rho^2 = 41 - 27 = 14, \rho = \sqrt{14}$$

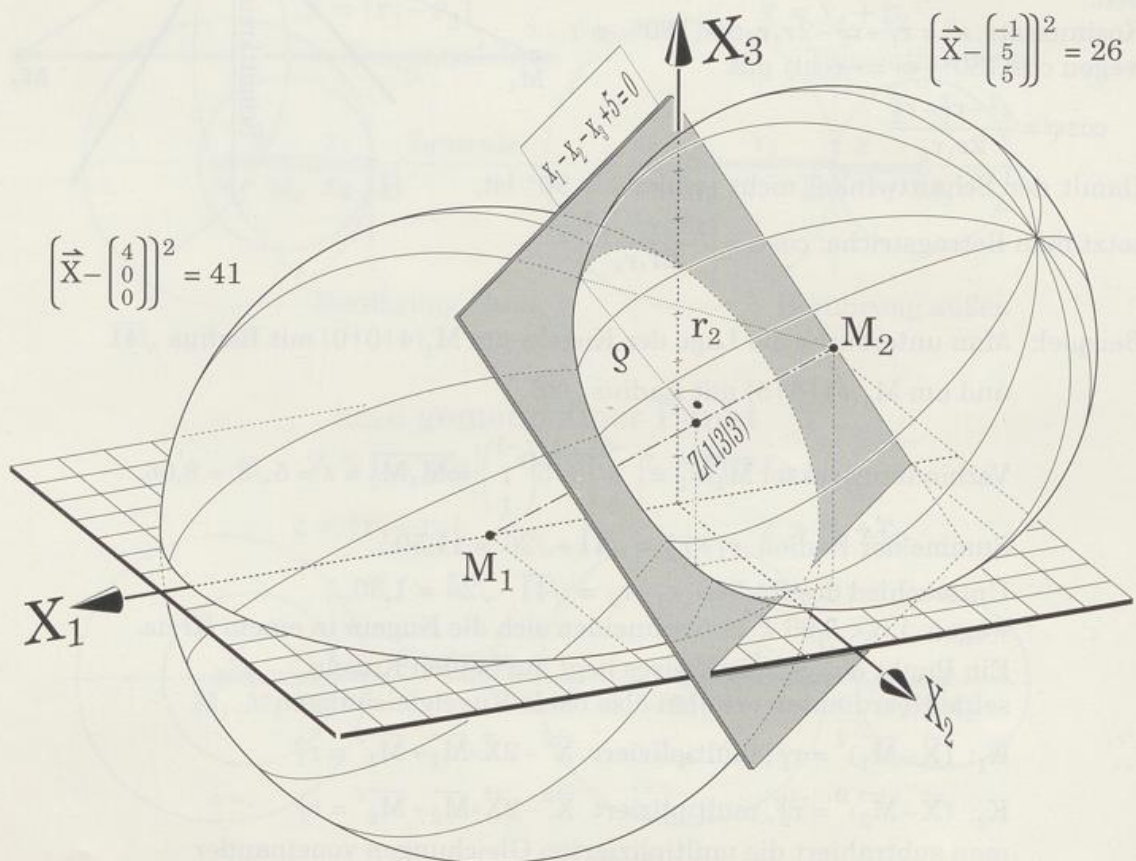
Den Schnittwinkel berechnet man mit dem Kosinussatz

$$\overline{M_1M_2}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cdot \cos\varphi$$

$$75 = 41 + 26 - 2\sqrt{41 \cdot 26} \cos\varphi$$

der Absolutbetrag sorgt für Schnittwinkel nicht größer als  $90^\circ$

$$\cos\varphi = \left| \frac{-8}{2\sqrt{41 \cdot 26}} \right| \Rightarrow \varphi \approx 83^\circ.$$



## Aufgaben

1. Gegeben sind 2 Kugeln  $K_1$  und  $K_2$  mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$  und den Mittelpunkten  $M_1$  und  $M_2$ .

Bestimme die Lage von  $K_1$  und  $K_2$  zueinander, gegebenenfalls Berührungspunkt  $B$  und Gleichung der gemeinsamen Tangentialebene  $T$ , gegebenenfalls Mittelpunkt  $Z$  und Radius  $\rho$  des Schnittkreises, gegebenenfalls Schnittwinkel  $\sigma$  der Kugeln.

- |    |               |                   |               |                    |
|----|---------------|-------------------|---------------|--------------------|
| a) | $M_1(1 2 3)$  | $r_1 = 100$       | $M_2(1 2 3)$  | $r_2 = 99$         |
| b) | $M_1(0 0 0)$  | $r_1 = 9$         | $M_2(1 4 8)$  | $r_2 = 9$          |
| c) | $M_1(1 1 1)$  | $r_1 = 7$         | $M_2(7 8 9)$  | $r_2 = 5$          |
| d) | $M_1(0 6 6)$  | $r_1 = 9$         | $M_2(2 2 2)$  | $r_2 = 3$          |
| e) | $M_1(1 0 1)$  | $r_1 = 3\sqrt{2}$ | $M_2(0 4 0)$  | $r_2 = 6$          |
| f) | $M_1(0 2 -1)$ | $r_1 = \sqrt{6}$  | $M_2(4 -2 7)$ | $r_2 = 3\sqrt{6}$  |
| g) | $M_1(0 -4 0)$ | $r_1 = 2\sqrt{5}$ | $M_2(0 8 0)$  | $r_2 = 2\sqrt{15}$ |
| h) | $M_1(1 1 0)$  | $r_1 = 2\sqrt{5}$ | $M_2(-1 1 1)$ | $r_2 = \sqrt{15}$  |

2. Gegeben sind die Punkte  $Z$ ,  $P$  und  $Q$ , sowie  $\rho$  und  $r$ :

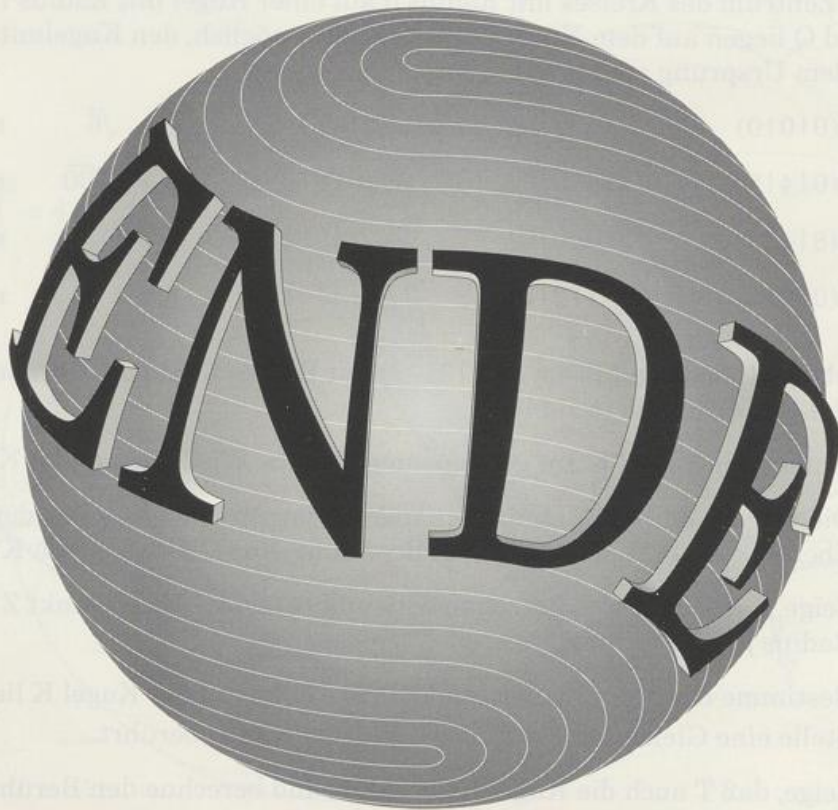
$Z$  ist Zentrum des Kreises mit Radius  $\rho$  auf einer Kugel mit Radius  $r$ ,  $P$  und  $Q$  liegen auf dem Kreis. Berechne, falls möglich, den Kugelmittelpunkt, der dem Ursprung am nächsten liegt.

- |    |              |             |               |                     |                  |
|----|--------------|-------------|---------------|---------------------|------------------|
| a) | $Z(0 0 0)$   | $P(1 1 -2)$ | $Q(2 -1 -1)$  | $\rho = \sqrt{6}$   | $r = 3$          |
| b) | $Z(0 4 2)$   | $P(2 8 -8)$ | $Q(10 0 0)$   | $\rho = 2\sqrt{30}$ | $r = 12$         |
| c) | $Z(8 -4 -1)$ | $P(0 0 0)$  | $Q(12 -12 0)$ | $\rho = 9$          | $r = 3\sqrt{11}$ |
| d) | $Z(0 0 2)$   | $P(1 2 0)$  | $Q(2 1 0)$    | $\rho = 3$          | $r = 9\sqrt{2}$  |

- 3. Gegeben ist die Kugel  $K$  um  $M(2|3|-1)$  mit Radius 6 und die Gerade  $g$  durch  $(3|-3|-5)$  und  $(6|-1|-3)$ .

- Untersuche  $g$  und  $K$  auf gemeinsame Punkte. Wie liegen  $g$  und  $K$ ?
- Die Kugeln  $K^*$  und  $K$  sind zueinander symmetrisch bezüglich der Ebene  $E: 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 10 = 0$ . Bestimme eine Gleichung von  $K^*$ .
- Zeige, daß sich  $K$  und  $K^*$  schneiden, und berechne Mittelpunkt  $Z$  und Radius  $\rho$  ihres Schnittkreises.
- Bestimme  $d_3 > 0$  so, daß der Punkt  $D(0|-1|d_3)$  auf der Kugel  $K$  liegt. Stelle eine Gleichung der Ebene  $T$  auf, die  $K$  in  $D$  berührt.
- Zeige, daß  $T$  auch die Kugel  $K^*$  berührt, und berechne den Berührungspunkt  $D^*$ .

- 4. Gegeben ist die Kugel  $K_1$  um  $M_1(2|-1|-4)$  mit Radius 2 und die Kugel  $K_2$  um  $M_2(8|-1|4)$  mit Radius 4.
- Untersuche die gegenseitige Lage von  $K_1$  und  $K_2$ .
  - Zeige, daß die Ebene  $T: 3x_1 + 4x_3 = 0$  Tangentialebene der Kugel  $K_1$  ist, und berechne den Berührungspunkt  $B$ .
  - $T$  ist Symmetrie-Ebene von  $K_3$  und  $K_1$ . Bestimme eine Gleichung von  $K_3$ . Welche besondere Lage hat  $K_3$  bezüglich  $K_1$  und  $K_2$ ?
  - Bestimme eine Gleichung der Kugel  $K_4$  mit kleinstmöglichem Radius, die innen von  $K_1$  und  $K_2$  berührt wird.
- 5. Gegeben ist eine Schar von Kugeln  $K_a$  um  $M_a(3a|4a|12a)$ , die durch den Ursprung gehen.  $a$  soll positiv sein.
- Zeige: Die Kugelmittelpunkte liegen auf einer Gerade. Warum haben die Scharkugeln eine gemeinsame Tangentialebene? Gib eine Gleichung dieser Tangentialebene an.
  - $K_a$  und die  $x_1x_2$ -Ebene schneiden sich in einem Kreis. Bestimme den Schnittkreis-Radius  $\rho$  in Abhängigkeit von  $a$ .
  - Berechne  $a$  so, daß sich  $K_a$  und die Kugel  $K$  um  $M(1|1|3)$  mit Radius 3 innen berühren. Gib eine Gleichung der gemeinsamen Tangentialebene an.





## Register

|                              |                    |                                 |              |
|------------------------------|--------------------|---------------------------------|--------------|
| Abschnittform einer Ebene    | 181                | Ebenengleichung, Hesse-Form     | 266          |
| Abstand Punkt-Ebene          | 268, 289           | Ebenengleichungen               | 170          |
| Abstand Punkt-Gerade         | 206, 225, 253, 287 | Ebenen­schar                    | 198          |
| Abstand von Parallelen       | 226                | Ebene durch den Ursprung        | 178, 184     |
| Abstand windschiefer Geraden | 227                | echt parallel                   | 154          |
| abstrakter Vektorraum        | 124                | Eckenschwerpunkt                | 95           |
| Achsenpunkte einer Ebene     | 181                | Einheitsvektor                  | 205, 214     |
| Addition von Vektoren        | 64                 | einschaliges Hyperboloid        | 161          |
| affine Geometrie             | 204                | Einsetzverfahren                | 16           |
| Algebraische Geometrie       | 8                  | EKANI                           | 219          |
| allgemeiner Geradenpunkt     | 140                | Entwicklung v. Determinanten    | 43           |
| allgemeine Lösung            | 25                 | Euklidischer Vektorraum         | 220          |
| Analytische Geometrie        | 8                  | Fall-Linien                     | 197          |
| Anti-Kommutativgesetz        | 240                | Flächenschwerpunkt              | 95, 98       |
| Aubel-Theorem                | 72                 | Flächenvektor                   | 242          |
| Aufpunkt                     | 137, 170           |                                 |              |
| Aufriß                       | 148                | Gauß-Algorithmus                | 28           |
| aufspannen                   | 71                 | Gegenvektor                     | 66           |
| äußere Teilung               | 89                 | Geometrie, affine               | 204          |
|                              |                    | Geometrie, Algebraische         | 8            |
| Basis                        | 79                 | Geometrie, Analytische          | 8            |
| Basisvektoren                | 79                 | Geometrie, metrische            | 204          |
| Basis des Vektorraums        | 126                | Geometrie, synthetische         | 8            |
| Betrag eines Vektors         | 204                | Geradenbüschel                  | 158          |
|                              |                    | Geradengleichung                | 137          |
| Cauchy-Schwarz-Ungleichung   | 223                | Geradenpunkt, allgemeiner       | 140          |
| CEVA, Satz                   | 94, 166            | Geradenschar                    | 157          |
| Cramer-Regel                 | 36                 | Gerade durch den Ursprung       | 146          |
|                              |                    | Gleichung einer Ebene           | 170, 266     |
| Dedekind                     | 128                | Gleichung einer Gerade          | 137, 272     |
| Delisches Problem            | 11                 | Gleichung einer Kugel           | 278          |
| Determinante, dreireihige    | 36                 | Gleichung einer Tangentialebene | 292          |
| Determinante, Entwicklung    | 43                 | Gleichungssystem, homogenes     | 13, 18       |
| Determinante, zweireihige    | 35                 | Gleichungssystem, inhomogenes   | 13           |
| Determinantenmethode         | 174                | Gleichungssystem, lineares      | 13           |
| Determinantenverfahren       | 35, 156            | Graßmann                        | 62, 124, 128 |
| Diagonalform                 | 30                 | Graßmann-Identität              | 241          |
| Differentialgeometrie        | 8                  | Graßmann-Produkt                | 240          |
| Dimension des Vektorraums    | 126                | Grundriß                        | 148          |
| Dimetrie                     | 47, 218            | Gruppe, kommutative             | 128          |
| Doppelverhältnis             | 92                 |                                 |              |
| Dreibein                     | 103                | Halbebene                       | 52           |
| Dreieckform                  | 28                 | Halbraum                        | 52           |
| dreireihige Determinante     | 36                 | Hamilton                        | 62, 124, 250 |
| Ebenenbündel                 | 200                | harmonische Punkte              | 93           |
| Ebenenbüschel                | 199                | harmonische Teilung             | 93           |

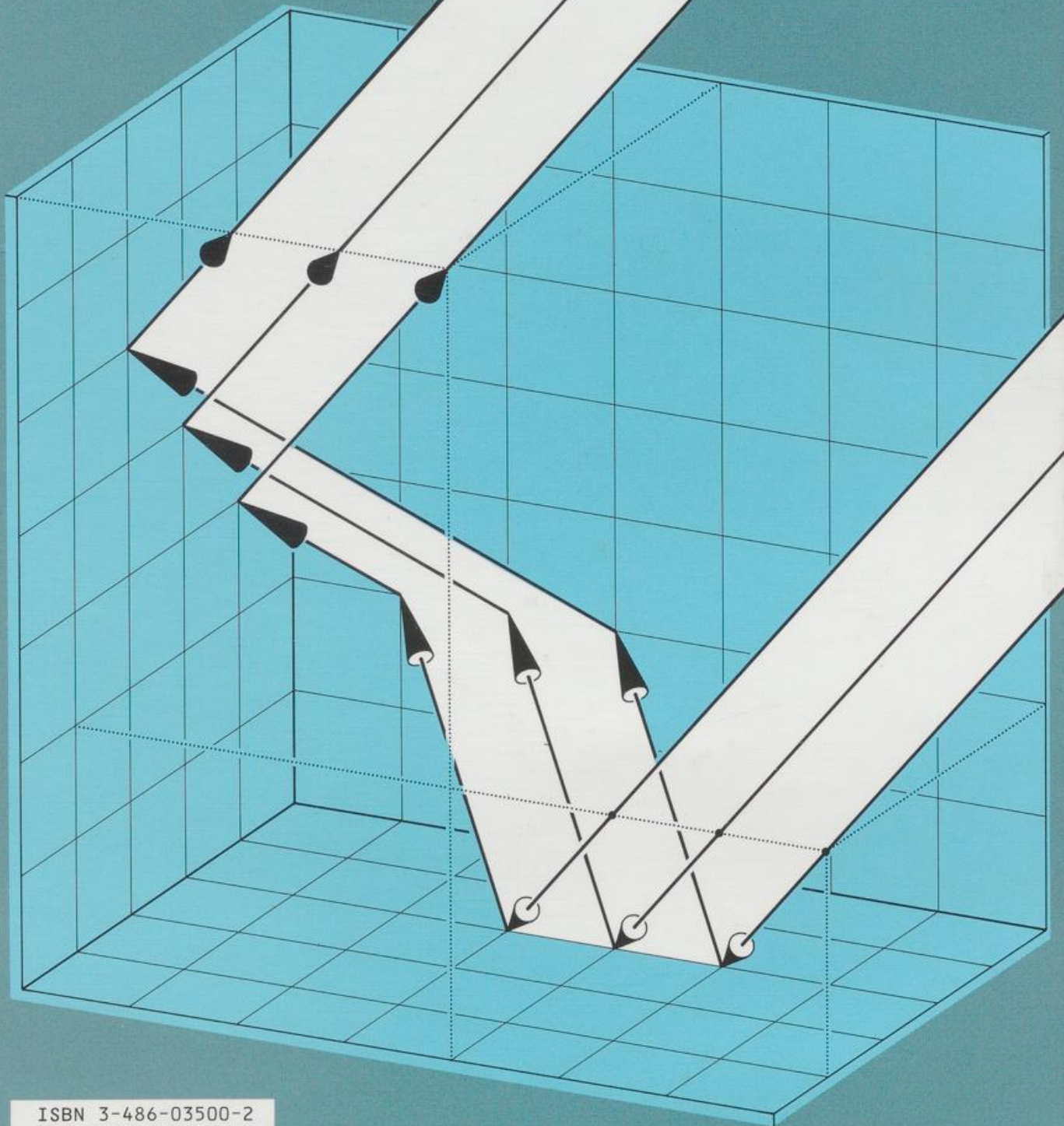
|                              |               |                            |                    |
|------------------------------|---------------|----------------------------|--------------------|
| Hauptdiagonale               | 43            | Lösung, allgemeine         | 25                 |
| Hesse-Form                   | 266           | Lösung, spezielle          | 25                 |
| homogenes Gleichungssystem   | 13, 18        | Lösungen, $\infty 1$       | 17                 |
| hyperbolisches Paraboloid    | 158           | Lösungen, $\infty 2$       | 18                 |
| Hyperboloid, einschaliges    | 161           | Lösungen, $\infty 3$       | 32, 37             |
| Ikosaeder                    | 209           | Lotfußpunkt                | 225, 253           |
| Ingenieur-Axonometrie        | 47            | m,n-System                 | 13                 |
| inhomogenes Gleichungssystem | 13            | MENELAOS, Satz             | 94                 |
| innere Teilung               | 89            | metrische Geometrie        | 204                |
| inverses Element             | 66, 124       | Mittelpunkt einer Strecke  | 83                 |
| Isometrie                    | 47, 218       |                            |                    |
|                              |               | n-Tupel                    | 13                 |
| Jacobi-Identität             | 249           | neutrales Element          | 66, 124            |
| Jägerzaunregel               | 41            | Normalbild                 | 47, 218            |
|                              |               | Normalform einer Ebene     | 252                |
| Kantenschwerpunkt            | 95            | Normalform einer Gerade    | 272                |
| kollineare Vektoren          | 67, 81, 101   | Normalvektor               | 223, 252           |
| kommutative Gruppe           | 128           | Nullsumme                  | 108                |
| komplanare Vektoren          | 102, 107      | Nullvektor                 | 66, 124            |
| Komplanaritäts-Kriterium     | 105, 107      |                            |                    |
| Komponenten eines Vektors    | 80            | Oktant                     | 49, 147            |
| Koordinaten, sphärische      | 215           | Orientierung               | 54, 266            |
| Koordinatenebene             | 49            | Ortsvektor                 | 82                 |
| Koordinatengleichung         | 173, 188, 192 |                            |                    |
| Koordinatensysteme           | 46            | PAPPOS                     | 166                |
| Koordinaten eines Vektors    | 80            | Paraboloid, hyperbolisches | 158                |
| Körper                       | 128           | Parallelschar              | 157                |
| Kosinussatz                  | 211, 297      | parallelgleiche Pfeile     | 63                 |
| Kreisgleichung               | 280           | Parallelogrammfläche       | 239                |
| Kreiskegel                   | 160           | Parallelprojektion         | 91, 190            |
| Kreiszylinder                | 160, 281      | Parameter                  | 17, 137, 170       |
| Kreuzprodukt                 | 238           | Parametergleichung         | 137, 170, 193, 279 |
| Kugel durch den Ursprung     | 280           | Passante der Kugel         | 286                |
| Kugelgleichung               | 278           | Passantebene               | 289                |
| Kugelkoordinaten             | 215, 218, 279 | Pfeile, parallelgleiche    | 63                 |
| Kugelpassante                | 286           | Plücker-Form               | 273                |
| Kugelsekante                 | 286           | Projektion, senkrechte     | 53, 253            |
| Kugeltangente                | 286           | Projektionsgerade          | 92                 |
|                              |               | Projektionsrichtung        | 218                |
| Lagrange-Identität           | 248           | Projektionsvektor          | 218                |
| Länge eines Vektors          | 204           | Punkte, harmonische        | 93                 |
| Leibniz-Form                 | 41            | Punktschar                 | 141                |
| Lichtreflexion               | 149, 150      |                            |                    |
| lineares Gleichungssystem    | 13            | Quaternionen               | 250                |
| Linearkombination            | 101           |                            |                    |
| linear abhängige Vektoren    | 109, 125      | Raumschwerpunkt            | 95, 99             |
| linear unabhängige Vektoren  | 109, 125      | Rechtsschraube             | 54, 55, 239        |
| Linkssystem                  | 54, 55        | Rechtssystem               | 54, 55             |

|                            |                   |                             |               |
|----------------------------|-------------------|-----------------------------|---------------|
| Reflexion des Lichts       | 149, 150          | System, unterbestimmtes     | 21, 24        |
| Regelfläche                | 160               | Tangentialebene             | 289, 292, 296 |
| Regelschraubfläche         | 161               | Teilung, äußere             | 89            |
| Repräsentant               | 63                | Teilung, harmonische        | 93            |
| Richtungsvektor            | 137, 170          | Teilung, innere             | 89            |
| Richtungswinkel            | 214               | Teilverhältnis              | 89, 114       |
| S-Multiplikation           | 67, 124           | Tetraedervolumen            | 247           |
| Sarrus-Regel               | 41                | Trägergerade                | 199           |
| Satz von CEVA              | 94, 166           | Trägerpunkt                 | 158, 200      |
| Satz von MENELAOS          | 94                | Trimetrie                   | 48            |
| Scharparameter             | 157, 198          | Tripelspiegel               | 150           |
| Schnitt Ebene–Ebene        | 192, 193          | überbestimmtes System       | 21, 24        |
| Schnitt Ebene–Gerade       | 186, 253, 254     | unterbestimmtes System      | 21, 24        |
| Schnitt Gerade–Gerade      | 155               | Unterdeterminante           | 46            |
| Schnitt Kugel–Ebene        | 289               | Untervektorraum             | 128           |
| Schnitt Kugel–Gerade       | 286               | Ursprungsebene              | 178, 184      |
| Schnitt Kugel–Kugel        | 296               | Ursprungsgerade             | 146           |
| Schnittebene               | 289, 296          | Vandermonde-Determinante    | 44            |
| Schnittkreis               | 290               | Vektor, Betrag              | 204           |
| Schnittwinkel Ebene–Gerade | 257               | Vektor, Länge               | 204           |
| Schnittwinkel Ebene–Ebene  | 254               | Vektoraddition              | 64            |
| Schnittwinkel Kugel–Kugel  | 297               | Vektoren                    | 62            |
| Schrägbild                 | 48                | Vektoren, kollineare        | 67            |
| Schwerlinien               | 95                | Vektoren, komplanare        | 102, 107      |
| Schwerpunkt                | 95, 116           | Vektoren, linear abhängige  | 109, 125      |
| Seitenriß                  | 148               | Vektoren, linear unabhä. g. | 109, 125      |
| Sekante der Kugel          | 286               | Vektorkette                 | 65            |
| senkrechte Projektion      | 53, 148, 268      | Vektorkomponenten           | 80            |
| Skalarprodukt              | 211               | Vektorkoordinaten           | 80            |
| Spaltendarstellung         | 80                | Vektorprodukt               | 238           |
| Spat                       | 70                | Vektorraum, abstrakter      | 124           |
| Spatprodukt                | 245               | Vektorraum, Basis           | 126           |
| Spatvolumen                | 245               | Vektorraum, Dimension       | 126           |
| spezielle Lösung           | 25                | Vektorraum, Euklidischer    | 220           |
| sphärische Koordinaten     | 215, 218, 279     | Verbindungsvektor           | 82            |
| Spiegelung                 | 53, 149, 150, 254 | Verlauf durch die Oktanten  | 147           |
| Spurdreieck einer Ebene    | 182               | Warnungsbeispiel            | 33            |
| Spurgerade einer Ebene     | 181               | Winkel zwischen 2 Geraden   | 214           |
| Spurpunkte einer Gerade    | 146               | Winkel zwischen 2 Vektoren  | 211           |
| Streckenabtragen           | 205               | winkelhabierende Ebene      | 269           |
| Streckenlänge              | 205               | winkelhalbierender Vektor   | 207           |
| Streckenmittelpunkt        | 83                | Zentralprojektion           | 92, 190       |
| Strukturkonstanten         | 220               | zweireihige Determinante    | 35            |
| Stufenform                 | 28                |                             |               |
| Subtraktion von Vektoren   | 67                |                             |               |
| Synthetische Geometrie     | 8                 |                             |               |
| System, überbestimmtes     | 21, 24            |                             |               |



|                                  |   |   |
|----------------------------------|---|---|
| Einleitung                       | 1 | 1 |
| 1. Die Bedeutung der Arbeit      | 1 | 1 |
| 2. Die Aufgaben der Arbeit       | 1 | 1 |
| 3. Die Verantwortung der Arbeit  | 1 | 1 |
| 4. Die Motivation der Arbeit     | 1 | 1 |
| 5. Die Organisation der Arbeit   | 1 | 1 |
| 6. Die Führung der Arbeit        | 1 | 1 |
| 7. Die Zusammenarbeit der Arbeit | 1 | 1 |
| 8. Die Arbeitsbedingungen        | 1 | 1 |
| 9. Die Arbeitszeiten             | 1 | 1 |
| 10. Die Arbeitslohn              | 1 | 1 |
| 11. Die Arbeitsplätze            | 1 | 1 |
| 12. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 13. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 14. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 15. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 16. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 17. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 18. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 19. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 20. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 21. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 22. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 23. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 24. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 25. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 26. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 27. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 28. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 29. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 30. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 31. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 32. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 33. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 34. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 35. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 36. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 37. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 38. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 39. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 40. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 41. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 42. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 43. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 44. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 45. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 46. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 47. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 48. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 49. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 50. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 51. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 52. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 53. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 54. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 55. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 56. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 57. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 58. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 59. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 60. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 61. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 62. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 63. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 64. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 65. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 66. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 67. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 68. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 69. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 70. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 71. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 72. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 73. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 74. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 75. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 76. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 77. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 78. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 79. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 80. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 81. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 82. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 83. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 84. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 85. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 86. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 87. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 88. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 89. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 90. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 91. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 92. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 93. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 94. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 95. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 96. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 97. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 98. Die Arbeitsmittel            | 1 | 1 |
| 99. Die Arbeitsverfahren         | 1 | 1 |
| 100. Die Arbeitsmittel           | 1 | 1 |





ISBN 3-486-03500-2



9 783486 035001

Bestell-Nr. 03500-2

Oldenbourg

Anschauliche analytische Geometrie