Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 146. Theorie des Maximalfehlers

Tabelle der Bedingungsgleichungen (13), (14), (15), (16).

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	w	
-1	$+1$	..	..	$+1$	-1	$+1$	-1	..	..	-1	$+1$	$+1''$	(17)
..	-1	$+1$	-1	$+1$	..	..	$+1$	-1	$+1$	-1	..	$+6''$	
-1	..	$+1$	-1	..	$+1$	-1	..	$+1$	-1	..	$+1$	$+1''$	
$+2,75$	$-5,81$	$+3,06$	$+2,40$	$-3,82$	$+1,42$	$+1,89$	$-5,56$	$+3,67$	$+2,08$	$-2,93$	$+0,90$	$-7,2$	

Die dazu gehörigen Normalgleichungen werden:

$$\left.\begin{array}{l} +\underline{8\,k_1}\ \ ..\ \ ..\ -0,0025\,(8\,k_4)+1,00=0 \\ ..\ +\underline{8\,k_2}\ \ ..\ -0,3150\,(8\,k_4)+1,00=0 \\ \qquad +\underline{8\,k_3}-0,2025\,(8\,k_4)+6,00=0 \\ \qquad\quad +\underline{16,8152}\,(8\,k_4)-7,20=0 \end{array}\right\} \quad (18)$$

$8\,k_1 = -0,99916 \qquad 8\,k_2 = -0,89294 \qquad 8\,k_3 = -5,93117 \qquad 8\,k_4 = +0,33988$

$k_1 = -0,125 \qquad k_2 = -0,112 \qquad k_3 = -0,741 \qquad k_4 = +0,04248$

Weiter wollen wir dieses Zahlenbeispiel nicht führen, die Weiterrechnung ist die gewöhnliche, sie giebt mit einer Tabelle in der Anordnung wie (17) (vgl. z. B. S. 181 unten, und S. 194, II) die folgenden 12 Richtungsverbesserungen v (in der Ordnung wie oben bei (17):

$$+0,35''+0,38''-0,74''\ |\ +0,97''-1,01''+0,05''\ |\ +0,09''-0,87''+0,77''\ |\ -0,53''+0,73''-0,20''$$

Wenn man diese v zu den 12 Richtungen hinzufügt, welche oben unter (10) gegeben waren, und die Summenproben u. s. w. bildet, so wird man alles stimmend finden.

Es kam uns hier nur darauf an, mit der Tabelle (17) und den Normalgleichungen (18) zu zeigen, dass die Bedingungsgleichungen (17) voller werden als bei der gewöhnlichen Behandlung (12) S. 182, dass aber dafür die Normalgleichungen (18) bequemer werden als (13) S. 182, indem bei der neuen Behandlung mehrere Glieder fortfallen; und die neue Behandlung hat den Vorzug der unbedingt grösseren Schärfe.

Den Vorteil der Rechenschärfe kann man allerdings bei einem solchen kleinen Beispiel von *einem* Viereck nicht zum Ausdruck bringen, wenn aber ein solches Viereck Bestandteil einer grösseren Netzausgleichung mit 30—40 Bedingungsgleichungen ist, dann ist es sehr wichtig, die Bedingungen von vorn herein so scharf als möglich einzuführen, um der lawinenartigen Fehlerhäufung der langen Elimination entgegen zu wirken. Die Tabelle (17) hat auch schon den formellen Vorteil, dass die Gruppierung ihrer Glieder leicht erkennbare Proben geben (z. B. $2,75+3,06=5,81$ u. s. w.), was bei der gewöhnlichen Behandlung S. 182 nicht der Fall ist.

§ 146. Theorie des Maximalfehlers.

Die Formeln von § 120. und § 121. (S. 462 unten und S. 467), welche dort empirisch-induktorisch gefunden wurden, sind auch einer allgemeineren Behandlung fähig.

Dazu kommt, dass in den Formeln (14) und (17) S. 462 eine Verwechslung von n und $n+1$ stattgefunden hat, was noch ein zweiter Grund ist, nochmals auf die Sache zurückzukommen:

Wir betrachten eine Fehlerfunktion $y=\varphi(\varepsilon)$, welche auf verschiedene Fälle $n=1,\,2\,....\,n$ angewendet, diese Form hat:

$$y_n = \varphi(\varepsilon)_n = \frac{1}{2}\frac{3.5.7\ldots(2n+1)(2n+3)}{2.4.6\ldots\quad 2n\quad(2n+2)}\frac{1}{M}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^{n+1} \tag{1}$$

Diese Funktion stellt geometrisch eine Kurve vor, ungefähr von der Form Fig. 3. S. 461 oder Fig. 4. S. 462, und zwar mit Berührung n^{ter} Ordnung; z. B. mit $n = 1$ geht vorstehende Gleichung über in (8) S. 460, und mit $n = 2$ geht (1) über in (11) S. 462, wie sich unmittelbar einsehen lässt, und deswegen ist auch zunächst für $n = 1$ und $n = 2$:

$$2\int_0^M \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1 \tag{2}$$

Allgemeiner betrachtet giebt die Funktion (1) auch schon durch ihre Form zu erkennen, dass für $\varepsilon = \pm M$ sowohl die Funktion selbst als auch ihre n ersten Ableitungen sämtlich = Null werden, und auch das Integral der Funktion (1) giebt die Gleichung (2) allgemein erfüllt, für jeden Wert n.

Um dieses zu zeigen, bilden wir durch teilweises Integrieren folgende Rekursionsformeln:

$$\int(1-x^2)^n\, dx = x(1-x^2)^n + 2n\int x^2(1-x^2)^{n-1}\, dx \tag{3}$$

$$\int x^2(1-x^2)^{n-1}\, dx = \frac{x^3}{3}(1-x^2)^{n-1} + \frac{2}{3}(n-1)\int x^4(1-x^2)^{n-2}\, dx \tag{4}$$

$$\int x^4(1-x^2)^{n-2}\, dx = \frac{x^5}{5}(1-x^2)^{n-2} + \frac{2}{5}(n-2)\int x^6(1-x^2)^{n-4}\, dx \tag{5}$$

. . . .

$$\int x^{2n}(1-x^2)^0\, dx = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{6}$$

Wenn man die Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ nimmt, so fallen alle Glieder $x(1-x^2)^n$ u. s. w. fort, und man bekommt:

$$\int_0^1(1-x^2)^n\, dx = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\ldots\quad 2}{1\ .\ 3\ .\ 5\ \ldots(2n-1)}\frac{1}{(2n+1)} \tag{7}$$

Wenn man im Zähler umgekehrt ordnet und zugleich die Gleichung auf $n+1$ anwendet, so bekommt man:

$$\int_0^1(1-x^2)^{n+1}\, dx = \frac{2.4.6\ldots\quad 2n\quad(2n+2)}{3.5.7\ldots(2n+1)(2n+3)} \tag{8}$$

Zur Anwendung auf die Form (1) wollen wir noch schreiben:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\varepsilon}{M} = x, \text{ also } d\varepsilon = M\, dx \\ \text{und für die Grenzen, } \varepsilon = M \text{ entspricht } x = 1\end{array}\right\} \tag{9}$$

Also nach (1):

$$2\int_0^M \varphi(\varepsilon)_n\, d\varepsilon = \frac{3.5.7\ldots(2n+1)(2n+3)}{2.4.6\ldots\quad 2n\quad(2n+2)}\int_0^1(1-x^2)^{n+1}\, dx$$

Wenn man dieses mit (8) vergleicht, so sieht man sofort:

$$2\int_0^M \varphi(\varepsilon)_n \, d\varepsilon = 1 \tag{10}$$

Die Funktion (1) erfüllt also allgemein alle die Bedingungen, von welchen wir in den besonderen Fällen von § 120. ausgegangen sind.

Weiter müssen wir nun auch für diese Funktion das mittlere Fehlerquadrat und das mittlere Fehlerbiquadrat bestimmen, nämlich ganz analog dem früheren in § 116. S. 445 oder § 120. S. 459—462, wenn nun p die Anzahl aller ε ist:

$$m_n^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{p} = 2\int_0^M \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)_n \, d\varepsilon \tag{11}$$

$$r_n^4 = \frac{[\varepsilon^4]}{p} = 2\int_0^M \varepsilon^4 \varphi(\varepsilon)_n \, d\varepsilon \tag{12}$$

oder mit (1) und (9)

$$m_n^2 = \frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots\ 2n} \frac{(2n+3)}{(2n+2)} M_n^2 \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n+1} \, dx \tag{13}$$

$$r_n^4 = \frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots\ 2n} \frac{(2n+3)}{(2n+2)} M_n^4 \int_0^1 x^4 (1-x^2)^{n+1} \, dx \tag{14}$$

folglich auch:

$$r_{n-1}^4 = \frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots\ 2n} (M_{n-1})^4 \int_0^1 x^4 (1-x^2)^n \, dx \tag{15}$$

Durch teilweises Integrieren findet man:

$$\int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n+1} \, dx = \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 x^4 (1-x^2)^n \, dx$$

also mit Anwendung auf (13) und (15):

$$\frac{m_n^2}{M_n^2} = \frac{r_{n-1}^4}{M_{n-1}^4} \frac{2n+3}{2n+2} \frac{2(n+1)}{3}$$

oder

$$\left(\frac{m^2}{M^2}\right)_n = \left(\frac{r^4}{M^4}\right)_{n-1} \frac{2n+3}{3} \tag{16}$$

Aus den Rekursions-Integralen (4)—(6) bilden wir auch:

$$\int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n-1} \, dx = \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n+1)}$$

also auch

$$\int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n+1} \, dx = \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n+1)} \frac{2n}{(2n+3)} \frac{(2n+2)}{(2n+5)} \tag{17}$$

folglich wegen (13):

$$\left(\frac{m^2}{M^2}\right)_n = \frac{1}{2n+5} \tag{18}$$

Die zwei Gleichungen (16) und (18) enthalten nun schon das Wesentliche unserer Theorie, sie beziehen sich aber noch auf ungleiche Grade n und $n-1$ und deswegen müssen wir aus (18) zuerst bilden:

$$\left(\frac{m^2}{M^2}\right)_{n-1} = \frac{1}{2(n-1)+5} = \frac{1}{2n+3} \tag{19}$$

also nun aus (16), (18), (19):

$$\left(\frac{m^2}{M^2}\right)_n = \left(\frac{m^2}{M^2}\right)_{n-1} \frac{2n+3}{2n+5}$$

$$\left(\frac{\nu^4}{M^4}\right)_{n-1} = \frac{3}{2n+5}\left(\frac{m^2}{M^2}\right)_{n-1} = \frac{3}{2(n-1)+7}\left(\frac{m^2}{M^2}\right)_{n-1}$$

und nach demselben Gesetze:

$$\left(\frac{\nu^4}{M^4}\right)_n = \frac{3}{2n+7}\left(\frac{m^2}{M^2}\right)_n \tag{20}$$

und dann noch aus (18) und (20):

$$\left(\frac{\nu^4}{M^4}\right)_n = \frac{3}{(2n+5)(2n+7)} \tag{21}$$

Indem wir nun annehmen es handle sich stets um Werte M^2, m^2, ν^4, welche zu *derselben* Gradzahl n gehören, brauchen wir die Indices n u. s. w. nicht mehr zu schreiben und haben daher aus (18) und (21):

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{2n+5} \tag{22}$$

$$\frac{\nu^4}{M^4} = \frac{3}{(2n+5)(2n+7)} \tag{23}$$

$$\frac{\nu^4}{3m^4} = \frac{2n+5}{2n+7} \tag{24}$$

Aus (22) und (24) findet man auch:

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3m^4}{\nu^4} - 1\right) \text{ oder } = \frac{1}{2}\,\frac{3m^4 - \nu^4}{\nu^4} \tag{25}$$

Dieses sind dieselben Formeln, welche wir schon in (15) und (16) S. 462 und (12) S. 467 lediglich aus dem gesetzmässigen Verlaufe der Coefficienten in den Entwicklungen S. 459—462 hergeleitet hatten.

Man kann auch die Gradzahl n, oder $2n$ aus (22) und (24) bestimmen:

$$2n = \frac{M^2}{m^2} - 5 \tag{26}$$

$$2n = \frac{-15m^4 + 7\nu^4}{3m^4 - \nu^4} \tag{27}$$

Wenn $3m^4 = \nu^4$ ist, so wird $n = \infty$ und auch $M = \infty$, was daran erinnert, dass nach (15) S. 447 das Verhältnis $\nu^4 : m^4 = 3$ der asymptotischen Funktion von § 111. entspricht, nämlich nach (13) S. 430:

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{28}$$

oder nach der Exponentialreihe S. 434:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{h^2 \varepsilon^2}{1} + \frac{h^4 \varepsilon^4}{2} - \frac{h^6 \varepsilon^6}{6} + \ldots\right) \tag{29}$$

Wir wollen noch zeigen, wie schon auf S. 462 unten bis 463 angedeutet ist, dass unsere Funktion (1) S. 566 für $n = \infty$ in diese Reihe (29) übergeht. Wenn man M aus (22) in m ausdrückt, so giebt (1):

$$y_n = \frac{1}{2} \frac{3.5.7 \ldots (2n+1)}{2.4.6 \ldots \quad 2n} \frac{(2n+3)}{(2n+2)} \frac{1}{m\sqrt{2n+5}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{(2n+5)m^2}\right)^{n+1} \tag{30}$$

Dazu wegen (17) S. 432, $h^2 = \frac{1}{2m^2}$ giebt:

$$y_n = \frac{3.5.7 \ldots (2n+1)}{2.4.6 \ldots \quad 2n} \frac{(2n+3)}{(2n+2)} \frac{h}{\sqrt{4n+10}} \left(1 - \frac{2h^2}{2n+5} \varepsilon^2\right)^{n+1} \tag{31}$$

Die Exponentialfunktion von (31) giebt:

$$1 - \frac{n+1}{2n+5} 2h^2 \varepsilon^2 + \frac{(n+1)n}{1.2} \frac{4}{(2n+5)^2} h^4 \varepsilon^4 - \ldots$$

für $n = \infty$ geht dieses in die Klammer von (29) über, und dass auch der Faktor, vor der Klammer in (30) mit $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ in (29) übereinstimmend wird, haben wir auch schon auf S. 463 oben durch Citat des Wallis schen Ausdrucks für π gezeigt.

§ 147. Ausrechnung des Maximalfehlers.

Wie man aus einer Reihe wahrer Beobachtungsfehler ε den zugehörigen theoretischen Maximalfehler berechnen kann, haben wir bereits in § 121. an einem kleinen Beispiele (13)—(14) S. 467 gezeigt, und wir wollen noch den innern Sinn einer solchen Rechnung dahin zusammenfassen, dass wir von den unendlich vielen Fehlerfunktionen, welche in der Form (1) § 146. S. 566 enthalten sind, diejenige auswählen, welche einer Fehlerreihe ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 \ldots$ sich am besten anschmiegt, nach Massgabe der zwei Mittelwerte m^2 und r^4; und den zugehörigen Wert M betrachten wir als den theoretischen Maximalfehler jener Fehlergruppe ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 \ldots$, der aber nicht notwendig mit demjenigen Wert ε_m zusammenfallen muss, welcher unter allen ε der grösste ist, ebenso wenig, als der theoretische wahrscheinliche Fehler, den man aus (9) §. 113. S. 440 berechnet, mit dem durch Abzählen (nach S. 440 unten) erhaltenen Wert zusammenfallen muss.

Alles dieses bezieht sich aber auf *wahre* Fehler ε, welche im Allgemeinen nicht bekannt und durch die scheinbaren Fehler v der Ausgleichungen zu ersetzen sind, was wir hier nur wenigstens für *eine* Unbekannte, d. h. für das arithmetische Mittel, durchführen wollen. Es wird sich um eine Formel für das mittlere Fehlerbiquadrat r^4 handeln, welche der längst bekannten Formel für das mittlere Fehlerquadrat m^2 nach (10) S. 21 mit dem Nenner $n-1$ entspricht.

Dabei wollen wir wieder wie früher S. 21 mit n die Anzahl der Beobachtungen bezeichnen, was keine Verwechslung geben wird mit dem Zeichen n, welches im vorigen § 146. die *Grad*zahl der Kurvenberührung bedeutet hat.