UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 145. Günstigste Winkelgleichungen im Viereck

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Visual Library

Solche Versuchs- und Vergleichs-Rechnungen sind zu machen, wenn man die bequemsten Einheiten für solche kleine Ausgleichungen bestimmen will. Zufällig ist übrigens vorstehendes Beispiel nicht günstig als Musterbeispiel, weil das Restglied $[l\,l\,.\,2]$ sehr klein wird.

Während bei Rechnungen in *alter* Teilung für III. bis IV. Ordnung, d. h. mit Strahlenlängen etwa $1-5^{km}$, aus unseren Rechenerfahrungen sich $1''$ und 1^{dm} als beste Masseinheiten ergeben haben (Formulare S. 343 und S. 351) stellt sich bei Rechnungen in *neuer* Teilung die Sache jedenfalls etwas anders; wir würden hier 10^{cc} und 1^{dm} für angemessen halten, können aber hier nicht aus langer Erfahrung reden. Die Württembergischen neuen „Vorschriften, betreffend die Erhaltung und Fortführung des Katasters“, von 1895 enthalten Rechenformulare, welche in alter und neuer Teilung für 1^{dm}, bzw. $1''$ und 1^{cc} als Einheiten gelten (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1895“, S. 284).

Wer mit dem Rechenschieber einige Übung hat, kommt mit den Rechenproben von S. 343 und S. 351 oder S. 352 aus; sollte das nicht genügen, so könnte man die a und b nach S. 338 einmal logarithmisch rechnen und dann nach dem Verfahren von S. 343 kontrollieren; die Probe mit a^2+b^2 nach der Hilfstafel S. [18] des Anhangs kann man immer nebenbei anwenden, ohne dafür eine besondere Spalte in den Formularen anzulegen.

Wie schon in § 105. S. 397—398 bemerkt wurde, können solche Kleinigkeitsfragen nur den berufsmässigen „Trigonometer“ interessieren, welcher namentlich sein Augenmerk auf die Anordnung der verschiedenen Rechenproben richten muss, von denen z. B. die auf S. 398 mit Σ bezeichneten Proben nicht zweckmässig angeordnet sind. —

§ 145. Günstigste Winkelgleichungen im Viereck.

Die Theorie der günstigsten Seitengleichung im Viereck, welche in § 84.—85. behandelt worden ist, mit den Flächenmassen als Entscheidungsgrössen für die Günstigkeit (Fig. 6. S. 305), hat auch ein Analogon für die Auswahl der *Winkel*gleichungen im Viereck, womit wir uns auch noch beschäftigen wollen.

Schon in § 57. S. 165 haben wir gesehen, dass die 4 Dreiecksschlüsse, welche man zu einem Viereck mit zwei Diagonalen bilden kann, unter sich nicht unabhängig sind, und dass auch die Viereckssumme 360° als Bedingung eingeführt werden kann, etwa mit noch zwei Dreiecksschlüssen 180°, welche selbst wieder verschieden ausgewählt werden können. Bei solcher Willkür in mathematischen Fragen ist es nun sehr oft am besten, *keinen* der verschiedenen Wege, die sich gleichberechtigt zur Auswahl anbieten, zu betreten, sondern einen neuen, gegen die früheren Wege symmetrisch liegenden Weg einzuschlagen.

In diesem Sinne wollen wir *drei* Vierecksgleichungen aufsuchen, nämlich erstens Winkelgleichung für das gewöhnliche Gesamtviereck mit 360° und dann noch zwei Gleichungen für zwei sogenannte „verschränkte“ Vierecke mit der Winkelsumme 0°, d. h. für das Viereck Fig. 3. S. 169 wollen wir bilden:

Volles Viereck		$A\,B\,C\,D\,A$	(1)
Verschränktes	„	$A\,C\,B\,D\,A$	(2)
Verschränktes	„	$A\,B\,D\,C\,A$	(3)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Oder wenn man alles in Richtungsverbesserungen der 12 Richtungen von Fig. 3. S. 169 ausdrückt, hat man:

$$\text{I. } ABCDA \qquad -v_1+v_3-v_4+v_6-v_7+v_9-v_{10}+v_{12}+w'=0 \tag{4}$$

$$\text{II. } ACBDA \qquad -v_1+v_2+v_5-v_6+v_7-v_8-v_{11}+v_{12}+w''=0 \tag{5}$$

$$\text{III. } ABDCA \qquad -v_2+v_3-v_4+v_5+v_8-v_9+v_{10}-v_{11}+w'''=0 \tag{6}$$

Wir haben diese drei Gleichungen nach geometrischer Anschauung der Fig. 3. S. 169 angeschrieben, und da sie unabhängig sind, ist kein Zweifel, dass sie als die drei Winkelgleichungen, welche man haben muss, einer Ausgleichung zu Grunde gelegt werden können.

Wenn man die drei Gleichungen (4) (5) (6) nach den Nummern $v_1\, v_2\, v_3 \ldots v_{12}$ ordnet, namentlich wenn man dazu eine Tabelle schreibt ähnlich wie in (12) S. 182 für b, c, d, so wird man alsbald sehen, dass die zugehörigen Normalgleichungen werden:

$$\left.\begin{array}{l} 8k_1 \quad .. \quad .. \quad +w'=0 \\ .. \quad 8k_2 \quad .. \quad +w''=0 \\ .. \quad .. \quad 8k_3+w'''=0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

Die nicht quadratischen Glieder in diesen Normalgleichungen werden gleich Null, und die Correlaten werden:

$$k_1=-\frac{w'}{8} \qquad k_2=-\frac{w''}{8} \qquad k_3=-\frac{w'''}{8} \tag{8}$$

auch kann man sofort die 12 Richtungsverbesserungen v angeben; indem man eine Tabelle von der Form. (15) S. 182 bildet:

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} 8v_1=-w'-w''' & 8v_4=-w'-w'' & 8v_7=-w'+w''' & 8v_{10}=-w'+w'' \\ 8v_2=-w''+w''' & 8v_5=+w''+w''' & 8v_8=+w''-w''' & 8v_{11}=-w''-w''' \\ 8v_3=+w'+w'' & 8v_6=+w'-w''' & 8v_9=+w'-w'' & 8v_{12}=+w'+w''' \\ \hline \text{Summe}=0 & \text{Summe}=0 & \text{Summe}=0 & \text{Summe}=0 \end{array}\right\} \tag{9}$$

Die Gleichungen (7), (8), (9) zeigen schon durch ihre Einfachheit und Symmetrie die Vorteile des neuen Verfahrens, indem z. B. bei den Normalgleichungen (7) das Geschäft des Eliminierens fortfällt, und in Hinsicht auf die Schärfe der Rechnung haben die Vierecksschlussglieder w', w'', w''' den Vorteil, dass sie im Allgemeinen grösser sind als die Dreiecksschlussglieder, und dass sie damit schärfere Rechnung geben.

Zur Gesamtausgleichung kommt noch die Seitengleichung hinzu, welche wir dann konsequenterweise auch möglichst scharf, d. h. nach der Form M in (29) S. 305 bilden werden; in den Normalgleichungen (7) treten dann noch 4 Glieder für k_4 hinzu, aber die in (7) durch .. angedeuteten Glieder bleiben gleich Null.

Zu einem Zahlenbeispiele wollen wir die Winkelwerte von § 57. S. 166—167 nehmen, dieselben aber in Form von Richtungen nach Fig. 3. S. 169 bringen.

Dabei ist ein Versehen auf S. 166—167 zu berichtigen, der Winkel (8) ist nämlich dort unten auf S. 166 das einemal (8) $= 66° 40' 24''$ und das anderemal (8) $= 66° 40' 27''$ angesetzt, was auch auf S. 167 sich fortsetzt. Halten wir (8) $= 66° 40' 24''$ fest, so wird auf S. 166 rechts unten $w = -2''$ und auf S. 167 in (18) wird *log sin* (8) $= 9.9629627$ und dann $w = -40$. Der Fehler konnte auf S. 166—167 unterlaufen, weil dort die Rechnung nicht weitergeführt ist, also auch keine Probe entstand, und für die Zwecke von S. 167—168 der Fehler weiter nichts schadet.

Zu dem Viereck Fig. 3. S. 169 wollen wir folgende 12 Richtungen als gemessen annehmen:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\left.\begin{array}{llll}
D & 10. = & 0^\circ\ \ 0'\ \ 0'' & \\
 & 11. = & 46\ \ \ 1\ \ 27 & \\
 & 12. = & 112\ \ 41\ \ 51 & (66^\circ\ 40'\ 24'') \\
A & 1. = & 0^\circ\ \ 0'\ \ 0'' & \\
 & 2. = & 37\ \ 26\ \ 41 & \\
 & 3. = & 72\ \ \ 2\ \ \ 6 & (34^\circ\ 35'\ 25'')
\end{array}
\quad
\begin{array}{llll}
C & 7. = & 0^\circ\ \ 0'\ \ 0'' & \\
 & 8. = & 48\ \ \ 9\ \ \ 2 & \\
 & 9. = & 78\ \ \ 0\ \ 28 & (29^\circ\ 51'\ 26'') \\
B & 4. = & 0^\circ\ \ 0'\ \ 0'' & \\
 & 5. = & 41\ \ 17\ \ 34 & \\
 & 6. = & 97\ \ 15\ \ 36 & (55^\circ\ 58'\ 2'')
\end{array}\right\} \quad (10)$$

Wenn man hieraus die 4 Dreiecke zusammenstellt, so bekommt man:

$$\left.\begin{array}{lcr}
A = (1,3) & = & 72^\circ\ \ 2'\ \ 6'' \\
B = (4,5) & = & 41\ \ 17\ \ 34 \\
D = (11,12) & = & 66\ \ 40\ \ 24 \\ \hline
 & & 180\ \ \ 0\ \ 04 \\
 & & w_1 = +4'' \\
B = (5,6) & = & 55^\circ\ 58'\ \ 2'' \\
C = (7,9) & = & 78\ \ \ 0\ \ 28 \\
D = (10,11) & = & 46\ \ \ 1\ \ 27 \\ \hline
 & & 179\ \ 59\ \ 57 \\
 & & w_2 = -3''
\end{array}
\quad
\begin{array}{lcr}
A = (2,3) & = & 34^\circ\ 35'\ 25'' \\
B = (4,6) & = & 97\ \ 15\ \ 36 \\
C = (7,8) & = & 48\ \ \ 9\ \ \ 2 \\ \hline
 & & 180\ \ \ 0\ \ 03 \\
 & & w_3 = +3'' \\
A = (1,2) & = & 37^\circ\ 26'\ 41'' \\
D = (10,12) & = & 112\ \ 41\ \ 51 \\
C = (8,9) & = & 29\ \ 51\ \ 26 \\ \hline
 & & 179\ \ 59\ \ 58 \\
 & & w_4 = -2''
\end{array}\right\} \quad (11$$

Dieses sind dieselben 4 Dreiecksschlüsse für Richtungen, welche auf S. 166 für Winkel gegeben sind, (nachdem auf S. 166 rechts unten der bemerkte Fehler 27″ in 24″ bei (8) verbessert ist).

Zu den vorstehenden 4 Dreiecksschlüssen gehören folgende 4 Bedingungsgleichungen für Richtungen:

$$\left.\begin{array}{l|l}
w_1 & -v_1\ \ ..\ \ +v_3-v_4+v_5\ \ ..\ \ ..\ \ ..\ \ ..\ \ ..\ -v_{11}+v_{12}+4''=0 \\
w_2 & \ ..\ \ ..\ \ ..\ \ ..\ -v_5+v_6-v_7\ \ ..\ +v_9-v_{10}+v_{11}\ \ ..\ -3''=0 \\
w_3 & \ ..\ -v_2+v_3-v_4\ \ ..\ +v_6-v_7+v_8\ \ ..\ \ ..\ \ ..\ \ ..\ +3''=0 \\
w_4 & -v_1+v_2\ \ ..\ \ ..\ \ ..\ \ ..\ \ ..\ -v_8+v_9-v_{10}\ \ ..\ +v_{12}-2''=0
\end{array}\right\} (12)$$

Hieraus kann man bilden:

$$\begin{array}{l|ll}
+w_1+w_2 \text{ oder } +w_3+w_4 & -v_1+v_3-v_4+v_6-v_7+v_9-v_{10}+v_{12}+1''=0 & (13) \\
+w_1-w_3 \quad \text{,,} \quad -w_2+w_4 & -v_1+v_2+v_5-v_6+v_7-v_8-v_{11}+v_{12}+1''=0 & (14) \\
+w_1-w_4 \quad \text{,,} \quad -w_2+w_3 & -v_2+v_3-v_4+v_5+v_8-v_9+v_{10}-v_{11}+6''=0 & (15)
\end{array}$$

Diese 3 Gleichungen stimmen wieder überein mit den ursprünglichen (4) (5) (6), womit gezeigt ist, dass jene kurz aus geometrischer Anschauung angeschriebenen (4) (5) (6) auch als einfache algebraische Folgen der vier gewöhnlichen Dreiecksschlüsse (12) hervorgehen.

Nun wollen wir auch die günstigste Seitengleichung bilden, in der Form M in (29) S. 305, ganz ähnlich wie wir auch schon auf S. 306 eine solche 8gliedrige Seitengleichung gebildet haben. Diese Gleichung für die in der Gruppe (10) gegebenen Winkel, gehörig zu dem Viereck S. 169, giebt nach logarithmischer Ausrechnung in Einheiten der 6. Logarithmenstelle:

$$\left.\begin{array}{l}
+3{,}06\,(v_3-v_2)+1{,}42\,(v_6-v_5)+3{,}67\,(v_9-v_8)+0{,}90\,(v_{12}-v_{11}) \\
+2{,}75\,(v_1-v_2)+2{,}40\,(v_4-v_5)+1{,}89\,(v_7-v_8)+2{,}03\,(v_{10}-v_{11})-7{,}2=0
\end{array}\right\} \quad (16)$$

Wenn man diese Gleichung nach $v_1\ v_2 \ldots$ ordnet, so erhält man in der nachstehenden Tabelle die 4te Linie, während die 3 ersten Linien den Gleichungen (13), (14), (15) entsprechen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Tabelle der Bedingungsgleichungen (13), (14), (15), (16).

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	w	
−1	+1	..	..	+1	−1	+1	−1	..	..	−1	+1	+1″	(17)
..	−1	+1	−1	+1	..	..	+1	−1	+1	−1	..	+6″	
−1	..	+1	−1	..	+1	−1	..	+1	−1	..	+1	+1″	
+2,75	−5,81	+3,06	+2,40	−3,82	+1,42	+1,89	−5,56	+3,67	+2,08	−2,93	+0,90	−7,2	

Die dazu gehörigen Normalgleichungen werden:

$$\left.\begin{array}{r} +\underline{8\,k_1}\ \ldots\ \ldots\ -0{,}0025\,(8\,k_4)+1{,}00=0 \\ \ldots\ +\underline{8\,k_2}\ \ldots\ -0{,}3150\,(8\,k_4)+1{,}00=0 \\ +\underline{8\,k_3}-0{,}2025\,(8\,k_4)+6{,}00=0 \\ +\underline{16{,}8152}\,(8\,k_4)-7{,}20=0 \end{array}\right\} \qquad (18)$$

$$8\,k_1=-0{,}99916 \qquad 8\,k_2=-0{,}89294 \qquad 8\,k_3=-5{,}93117 \qquad 8\,k_4=+0{,}33988$$
$$k_1=-0{,}125 \qquad k_2=-0{,}112 \qquad k_3=-0{,}741 \qquad k_4=+0{,}04248$$

Weiter wollen wir dieses Zahlenbeispiel nicht führen, die Weiterrechnung ist die gewöhnliche, sie giebt mit einer Tabelle in der Anordnung wie (17) (vgl. z. B. S. 181 unten, und S. 194, II) die folgenden 12 Richtungsverbesserungen v (in der Ordnung wie oben bei (17):

$$+0{,}35''+0{,}38''-0{,}74'' \mid +0{,}97''-1{,}01''+0{,}05'' \mid +0{,}09''-0{,}87''+0{,}77'' \mid -0{,}53''+0{,}73''-0{,}20''$$

Wenn man diese v zu den 12 Richtungen hinzufügt, welche oben unter (10) gegeben waren, und die Summenproben u. s. w. bildet, so wird man alles stimmend finden.

Es kam uns hier nur darauf an, mit der Tabelle (17) und den Normalgleichungen (18) zu zeigen, dass die Bedingungsgleichungen (17) voller werden als bei der gewöhnlichen Behandlung (12) S. 182, dass aber dafür die Normalgleichungen (18) bequemer werden als (13) S. 182, indem bei der neuen Behandlung mehrere Glieder fortfallen; und die neue Behandlung hat den Vorzug der unbedingt grösseren Schärfe.

Den Vorteil der Rechenschärfe kann man allerdings bei einem solchen kleinen Beispiel von *einem* Viereck nicht zum Ausdruck bringen, wenn aber ein solches Viereck Bestandteil einer grösseren Netzausgleichung mit 30—40 Bedingungsgleichungen ist, dann ist es sehr wichtig, die Bedingungen von vorn herein so scharf als möglich einzuführen, um der lawinenartigen Fehlerhäufung der langen Elimination entgegen zu wirken. Die Tabelle (17) hat auch schon den formellen Vorteil, dass die Gruppierung ihrer Glieder leicht erkennbare Proben geben (z. B. $2{,}75+3{,}06=5{,}81$ u. s. w.), was bei der gewöhnlichen Behandlung S. 182 nicht der Fall ist.

§ 146. Theorie des Maximalfehlers.

Die Formeln von § 120. und § 121. (S. 462 unten und S. 467), welche dort empirisch-induktorisch gefunden wurden, sind auch einer allgemeineren Behandlung fähig.

Dazu kommt, dass in den Formeln (14) und (17) S. 462 eine Verwechslung von n und $n+1$ stattgefunden hat, was noch ein zweiter Grund ist, nochmals auf die Sache zurückzukommen:

Wir betrachten eine Fehlerfunktion $y=\varphi(\varepsilon)$, welche auf verschiedene Fälle $n=1, 2 \ldots . n$ angewendet, diese Form hat: