



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1895**

§ 132. Triangulierungen des geodätischen Instituts

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83060](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83060)

Die beste Übersicht aller Ketten und Netze der Preussischen Landesaufnahme bekommt man aus der Kartenbeilage zu dem VII. Teil, „Preuss. Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, 1895 (vgl. S. 506). Man sieht daraus, dass die Landes-Triangulation ihrer Vollendung entgegengeht, wie auch der Chef der trigonometrischen Abteilung Oberstlieutenant von Schmidt in der „Zeitschr. f. Verm., 1894,“ S. 385 berichtet, „dass die Triangulation I. Ordnung voraussichtlich im Jahre 1897 abgeschlossen sein werde — worauf die Aufgabe komme, das geschaffene Werk dauernd zu erhalten und „soweit es Not thut, mit veränderten Mitteln und auf neuen Grundlagen fortzusetzen.“

### § 132. Triangulierungen des geodätischen Instituts.

Von 1864—1886 sind von dem königlich preussischen geodätischen Institute drei grössere Triangulierungs-Arbeiten ausgeführt worden, nämlich, nach der Zeit ihrer Veröffentlichung:

- 1) Das rheinische Dreiecksnetz I. Heft: die Bonner Basis, 1876,  
     II. „ die Richtungsbeobachtungen, 1878,  
     III. „ die Netz-Ausgleichung, 1882;
- 2) das hessische Dreiecksnetz, 1882;
- 3) das märkisch-thüringische Dreiecksnetz, 1889.

Berichte hierüber sind gegeben in der „Vierteljahrsschrift d. Astr. Gesellschaft 1877“, S. 146—166, Bonner Basis, ferner „Zeitschr. f. Verm., 1879“, S. 97—149, Schreiber, Richtungsbeobachtungen und Winkelbeobachtungen „Z. f. Verm., 1884“, S. 69—78, Rheinisches Dreiecksnetz und „Z. f. Verm., 1889“, S. 155—159, Hessisches Dreiecksnetz.

Diese Triangulierungen wurden ursprünglich nach dem Muster der „Küsten-Vermessung“ angelegt, und sind später im Anschluss an die übrige Weiter-Entwicklung der Ausgleichungs-Theorie fortgeführt worden.

Die Bonner Basis und das Basisnetz sind schon 1847 unter Baeyers Leitung gemessen worden, zur Verbindung der früheren preussischen und französischen Dreiecke. Aus manchen Gründen blieben diese Messungen 20 Jahre lang liegen und wurden von General Baeyer erst nach Gründung des geodätischen Instituts etwa um 1869 wieder aufgenommen und nach Süden zu dem Rheinischen Dreiecksnetz erweitert; wobei namentlich die *badische* Regierung durch liberales Entgegenkommen und Kostenteilnahme zu dem Gelingen des Unternehmens beigetragen hat.

Das Rheinische Dreiecksnetz war nach der Absicht seines Urhebers dazu bestimmt, als erstes Werk *über die Hindernisse der politischen Landesgrenzen in Deutschland hinweg*, eine neue Aera der Geodäsie in Deutschland einzuleiten. —

In idealem Sinne ist dieser Zweck erreicht worden, aber die Landes-Triangulierungen der 6 Staaten, über welche das Rheinische Dreiecksnetz sich ausbreitet, werden unabhängig von demselben weiter behandelt. —

Das Rheinische Dreiecksnetz ist ein Torso geblieben.

Die Bonner Basis von 1847, mit ihrem Basisnetze ist in nachstehender Fig. 1. dargestellt. Die Vergrößerung der kurzen Basis  $AB = 2134^m$  auf die Seite Michelsberg—Löwenburg = 34552 ist rund 16 fach.

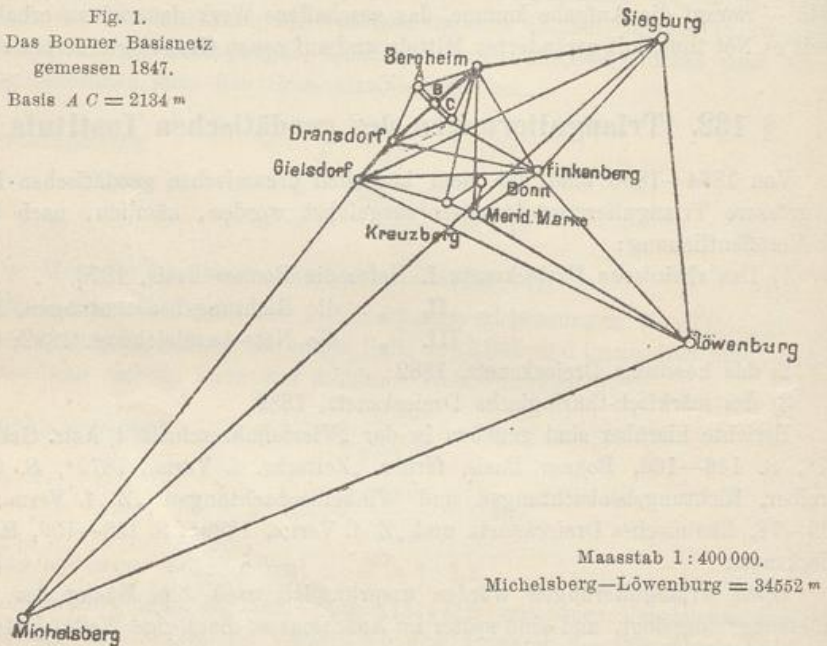
Die Bonner Basis wurde im Jahre 1892 zweifach nachgemessen, d. h. es wurde eine Länge von 2513<sup>m</sup> in der Nähe der früheren Basis gemessen und auf die alte Linie bezogen, erstens von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme mit

dem Besselschen Basis-Apparate, und zweitens von dem geodätischen Institute mit dem mikroskopischen Brunner-Apparate. Die erstere Messung (Landesaufnahme) ist mitgeteilt von Oberst Morsbach in der „Zeitschr. f. Verm., 1893“, S. 2:

Mittel aus 4 Messungen auf die Höhe von Normal-Null reduziert:

$$B_0 = 2512,92767^m$$

Fig. 1.  
Das Bonner Basisnetz  
gemessen 1847.  
Basis  $AC = 2134^m$



Die Messung des geodätischen Instituts ist mitgeteilt in den Verhandlungen der internationalen Erdmessung in Genf 1893, Seite 178, nämlich mit Vergleichung mit der Landesaufnahme, in der mittleren Basishöhe:

geodätisches Institut	$B = 2512,995^m$
Landesaufnahme	$B = 2512,984$
	Differenz $11^{mm}$

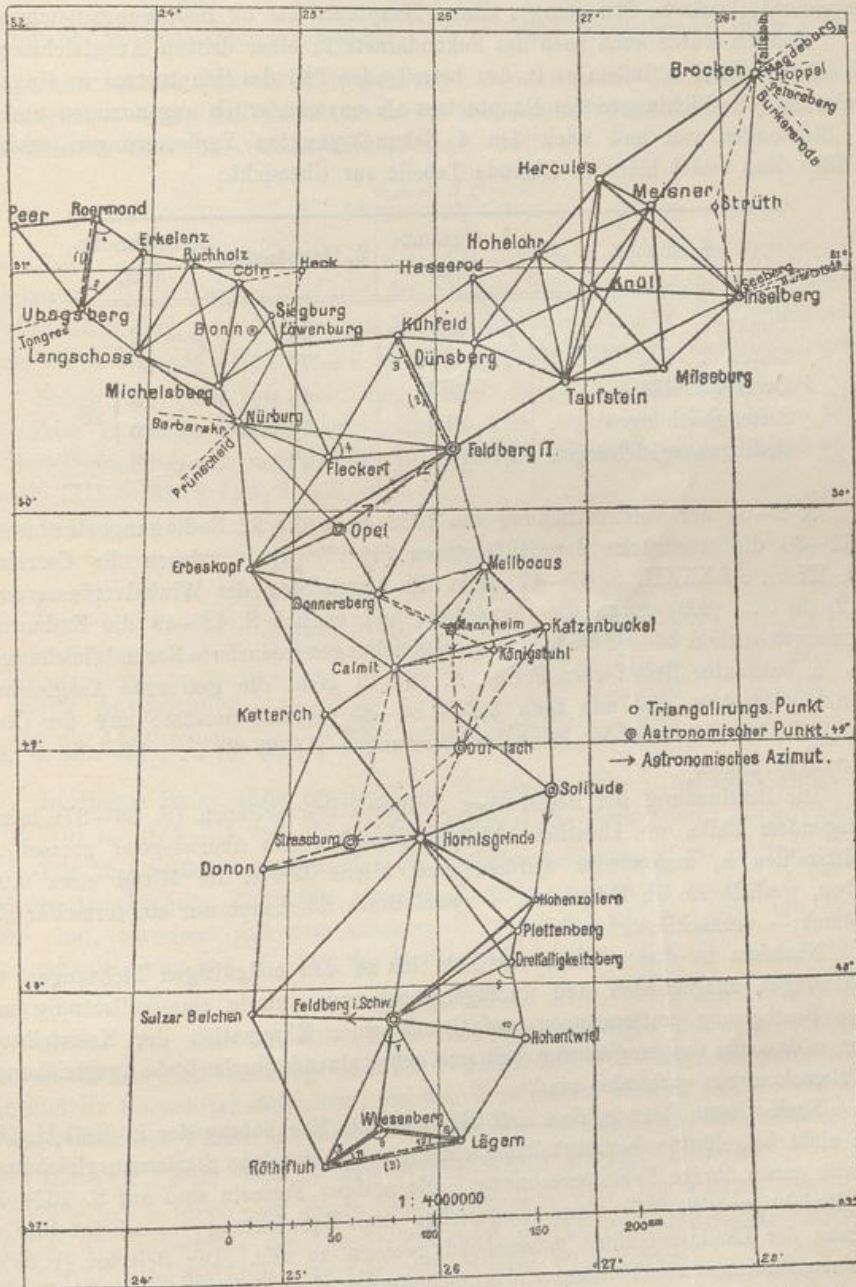
Zurückkehrend zu dem Rheinischen Dreiecksnetz des geodätischen Instituts 1878—1883 haben wir über das angewendete Messungsverfahren zuerst zu berichten, dass das schon von der Gradmessung in Ostpreussen und von der Küstenvermessung her geläufige Verfahren der Richtungsbeobachtungen ohne festen Verteilungsplan, aber mit der Neuerung einer *Nullpunktmarke* angewendet wurde. Es wurde nämlich ein künstlicher Zielpunkt in Entfernung weniger Kilometer auf jeder Station hergestellt, welcher in *jedem* Satze als Nullpunkt eingestellt wurde. Es wurde dadurch eine gewisse Unabhängigkeit von den Zufällen der Heliotropen-Lichter erzielt, aber das Verfahren im Ganzen hat sich schliesslich doch nicht völlig bewährt. —

Nach diesem betrachten wir das Netz selbst in der Darstellung von Fig. 2, S. 515, welche jedoch in ihrem nordöstlichen Teile auch noch das „hessische Dreiecksnetz“ des geodätischen Instituts von 1882 mitenthält.

Fig. 2.

Das Rheinische und das Hessische Dreiecksnetz.

(Maasstab 1:4000000).



Indem die Seite Kühfeld-Feldberg i. T. als nordöstliche Grenze des Rheinischen Netzes genommen wird, bleiben 36 trigonometrische Punkte mit 93 vorwärts und

rückwärts beobachteten Richtungen, welche als Gesamtnetz mit 82 Bedingungsgleichungen ausgeglichen wurden.

Nebenher geht aber eine zweite Ausgleichung mit Trennung des Ganzen in ein „Hauptnetz“ von 32 Punkten und ein Sekundärnetz von 4 Punkten (Mannheim, Königsstuhl, Durlach, Strassburg); dieses Hauptnetz hat 62 Bedingungsgleichungen.

Endlich wurde auch noch das Sekundärnetz in einer dritten Ausgleichung für sich allein behandelt, indem es in den betreffenden Teil des Hauptnetzes so eingefügt wurde, dass die Richtungen des Hauptnetzes als unveränderlich angenommen und nur die Richtungen von und nach den 4 Sekundärpunkten Verbesserungen erhielten (S. 63). Man bildet hiernach folgende Tabelle zur Übersicht:

Elemente.	1. Gesamtnetz.	2. Hauptnetz.	3. Sekundärnetz.
Punkte . . . . .	$p = 36$	$p = 32$	$p = 12$
Seiten . . . . .	$l = 93$	$l = 77$	$l = 30$
Dreiecksschlüsse . . .	58	46	19
Seitengleichungen . .	24	16	9
Bedingungsgleichungen	$r = 82$	$r = 62$	$r = 28$

S. 2—30 der Veröffentlichung von 1882 giebt die 82 Bedingungsgleichungen, S. 31—36 die Ausdrücke der Hilfsgrößen [1] [2] [3] . . . durch die Correlaten I, II, III . . . LXXXII, S. 37—47 giebt die Darstellung der Winkelverbesserungen (1) (2) (3) . . . (209) durch die Correlaten, und endlich S. 48—49 die Endnormalgleichungen sowie S. 56—62 die Eliminationsgleichungen (reduzierte Normalgleichungen), alles in bekannter Besselscher Form. S. 63—79 giebt die getrennte Ausgleichung des Sekundärnetzes, und nun kann auf S. 80—85 die Zusammenstellung der Correlaten I, II, III etc. und der Winkelverbesserungen (1) (2) (3) . . . für alle 3 Ausgleichungen folgen.

Die Bestimmung der Besselschen Nullpunktskorrekturen (S. 86—87) hat in vorliegendem Falle, wo künstliche *Nullpunktmarken* mit überwiegend grossen Abschnittszahlen  $h_0$  angewendet wurden, ganz kleine Werte, im Mittel etwa  $0,01''$ , ergeben, weshalb sie im Folgenden — zumal ihnen überhaupt nur ein formeller Sinn zukommt — vernachlässigt wurden.

Nachdem in dieser Weise das Netz bis zu den endgültigen Richtungen und Entfernungen ausgeglichen und durchgerechnet war, wurde eine vollständig neue *zweite* Bearbeitung unternommen auf Grund einer Elimination der Kreisteilungsfehler, so dass nun von der ganzen Arbeit *zwei* neben einander herlaufende Ausgleichungen und Berechnungen vorhanden sind.

Nach diesem folgt in dem Heft III, 1882 die Nachholung der in Heft II, 1878 noch nicht beigefügten Genauigkeitsberechnungen der einzelnen Stationsausgleichungen und die ganze übrige Fehlerberechnung. Die nötigen Formeln sind auf S. 134—135 (mit Berichtigung S. 207) zusammengestellt, ohne Entwicklung; es scheint hier der Vorgang der Landesaufnahme massgebend gewesen zu sein. Die Beiträge  $[v v]$  der einzelnen Stationen zur Fehlerquadratsumme werden aber nicht, wie bei der Landesaufnahme, durch Beifügung des Gliedes  $[V_0 V_0]$  zu jeder Stationselimination gewonnen, sondern durch Bildung aller einzelnen Differenzen  $dA, dB, dC$  . . . zwischen den

Beobachtungen und dem aus der Stationsausgleichung hervorgegangenen wahrscheinlichsten Wert jeder Richtung (vgl. hiezu das Frühere S. 239 im Kleingedruckten und S. 318). Nachdem die Stationseliminationen bereits abgeschlossen sind, ist dieses Verfahren sehr praktisch und auch theoretisch ohne Weiteres klar, wenn man nur sich von der Notwendigkeit des Abzuges  $\frac{[\sum dA]^2}{o}$  noch Rechenschaft giebt. Dieser

Abzug rührt daher, dass die  $dA, dB, dC \dots$  noch nicht die wahrscheinlichsten Verbesserungen sind, das wahrscheinlichste Verbesserungssystem jeder Station verlangt vielmehr noch eine Gesamtverschiebung

$$z = -\frac{dA + dB + dC}{4}$$

woraus dann  $v_0 = z$   $v_1 = dA + z$   $v_2 = dB + z$   $v_3 = dC + z$  als definitive Verbesserungen mit der Summe Null und der richtigen Quadratsumme  $[vv]$  hervorgehen. Nachdem dann auch noch der Beitrag  $N$  der Netzausgleichung zu der Fehlerquadratsumme auf S. 144–145 ermittelt ist, kann die Fehlerberechnung selbst vor sich gehen.

Indem die Gewichtseinheit dem Mittel der Richtungsbeobachtungen eines Zielpunktes in beiden Fernrohrlagen zugeteilt wird, ergab sich der mittlere Fehler für diese Gewichtseinheit nach S. 146–147 von Heft III, 1882, unter Anwendung der Formeln (21) — (23) § 124. S. 477 so:

	Stations- Ausgleichung	Netz- Ausgleichung	Gesamt- Ausgleichung	Quotient	
				$\frac{\mu_2}{\mu_1}$	$\frac{\mu_2}{\mu}$
Erste Ausgleichung	$\mu_1 = 1,17''$	$\mu_2 = 2,16''$	$\mu = 1,20''$	1,8	1,8
Zweite Ausgleichung	$\mu_1 = 0,78$	$\mu_2 = 2,18$	$\mu = 0,83$	2,8	2,6

In diesem Sinne giebt das hessische Dreiecksnetz (d. h. der nordöstliche Teil auf S. 515)  $\mu_2 : \mu_1 = 2,4$  und das märkisch-thüringische Dreiecksnetz  $\mu_2 : \mu_1 = 1,9$ .

Für 12 einzelne Winkel wurden die Funktionsgewichte und die mittleren Fehler nach der Ausgleichung durch die strengen Formeln, welche in unserem § 53. enthalten sind, berechnet mit dem mittleren Ergebnis  $\pm 0,29''$  für einen Winkel der ersten Ausgleichung und  $\pm 0,20''$  der zweiten Ausgleichung

$$\text{also im Mittel: } m' = \pm 0,25'' \quad (1)$$

Dieses sind aber nur theoretische Rechenwerte, wegen des oben erwähnten Missverhältnisses 1,8, beziehungsweise 2,6 zwischen dem Gewichtseinheitsfehler  $\mu_2$  im Netz und im Ganzen  $\mu$ , muss man, um der Wirklichkeit sich zu nähern, die theoretischen mittleren Fehler mit diesen Verhältnissen multiplizieren, und erhält dann:

$$\text{Mittlerer Fehler eines im Netz ausgeglichenen Winkels} = \pm 0,52'' \quad (2)$$

Wir haben hiezu noch einige Nebenrechnungen nach den Formeln (13) — (15) § 124. S. 475 angestellt: der Durchschnittswert der 58 Dreiecksschlusswidersprüche ist  $= 1,016''$ , also der hieraus zu folgernde mittlere Winkelfehler:

$$= 1,2533 \frac{1,016}{\sqrt{3}} = 0,74'' \quad (3)$$

Ferner geben die 209 Winkelverbesserungen (1) (2) . . . (209) der Auflösung 1. S. 83—85, Heft III, 1882 den Durchschnittswert 0,261'' also bei 82 Bedingungs-  
gleichungen den mittleren Winkelfehler:

$$= 1,2533 \sqrt{\frac{209}{82}} 0,261'' = \pm 0,52'' \quad (4)$$

Im Mittel aus diesen zwei Werten (3) und (4) hat man also für den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels den Wert  $\pm 0,63''$  und wegen der 82 Bedingungs-  
gleichungen kann man entsprechend den mittleren Fehler eines im Netz ausgeglichenen Winkels setzen:

$$= \sqrt{\frac{209 - 82}{209}} 0,63'' = \pm 0,49'' \quad (5)$$

was mit (2) nahezu übereinstimmt und eine Bestätigung dafür ist, dass man die theoretischen mittleren Fehler unter (1) zuvor mit den betreffenden Quotienten 1,8 beziehungsweise 2,6 multiplizieren muss, um sie den in Wirklichkeit zu befürchtenden Fehlern zu nähern. (Einiges weitere hiezu haben wir noch in der „Z. f. V. 1884“, S. 74—78 gegeben).

Die mittleren Winkelfehler nach der internationalen Formel sind von Helmert gegeben auf S. XII. 5 des „Rapport sur les triangulations“ für 1892 von Ferrero, nämlich:

$$\text{Bonner Basisnetz} \quad m = \sqrt{\frac{46,9505}{27 \cdot 3}} = \pm 0,761''$$

$$\text{Rheinisches Dreiecksnetz} \quad m = \sqrt{\frac{117,9386}{73 \cdot 3}} = \pm 0,734''$$

$$\text{Hessisches Dreiecksnetz} \quad m = \sqrt{\frac{72,5128}{34 \cdot 3}} = \pm 0,843''$$

$$\text{Anschluss Breslau u. s. w.} \quad m = \sqrt{\frac{8,7037}{3 \cdot 3}} = \pm 0,983$$

$$\text{Gesamtmittel} \quad m = \sqrt{\frac{246,1056}{137 \cdot 3}} = \pm 0,774''$$

### § 133. Bayern.

Bayern hat das Verdienst, am Anfang dieses Jahrhunderts die erste zusammenhängende Triangulierung und Landesvermessung mit rechtwinkligen Coordinaten durchgeführt und dadurch ein erstes geodätisches Zentrum in Deutschland geschaffen zu haben, an welches sich die andern Südstaaten rasch anschlossen.

Ausser dem Astronomen und Geodäten *Soldner* (1776—1833) sind es die Mechaniker und Optiker *Reichenbach*, *Utzschneider*, *Fraunhofer*, welche durch ihre lange unübertroffenen geodätischen Instrumente zu diesem Ergebnisse beigetragen haben.

Man vergl. hiezu

„Johann Georg Soldner und sein System der bayerischen Landesvermessung, Vortrag vom 27. Juli 1835 von Bauernfeind, München 1835, „Zeitschr. f. Verm. 1836,“ S. 45.

Die trigonometrischen Messungen begannen am Anfang dieses Jahrhunderts, die letzte Berechnung erfolgte aber erst 1866—1870.