Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 123. Die internationale Näherungsformel für den mittleren Winkelfehler lich aus dem Wege oder es bot Zahlen, welche an Objektivität augenscheinlich zu wünschen übrig liessen. Die vorzügliche Badische Triangulierung war in der geodätischen Litteratur ganz unbekannt. Ein Mann machte in jener Zeit eine rühmliche Ausnahme in solchem Schweigen, *Gerling*, den wir schon auf S. 5 mit Anerkennung nennen mussten, hat über seine Kurhessischen Messungen Auskunft durch mittlere Fehler gegeben, ebenso auch Schleiermacher in Darmstadt.

Im Jahre 1872 haben wir alles, was sich damals an geodätischen Genauigkeitsangaben finden liess, gesammelt und in den „astr. Nachrichten, 80. Band", 1873, Nr. 1898, S. 17—22 veröffentlicht; es war dieses die erste derartige Arbeit, welche auch die heutige internationale Fehlerformel für eine Anzahl von Dreiecksschlussfehlern benützt hat. Seit jener Zeit hat die internationale Erdmessung angefangen, geodätisches Genauigkeitsmaterial zu sammeln und geordnet zu veröffentlichen, und zwar für Triangulierung in den Berichten des italienischen Generals *Ferrero*, wodurch die private Thätigkeit in solcher Hinsicht zum grossen Teil überflüssig geworden ist.

Hiebei wollen wir auch aus den Verhandlungen der Konferenz 1893 in Genf, S. 70 citieren: Der allgemeine Bericht über Triangulierungen würde merklich an Wert gewinnen, wenn sämtliche Staaten der Erdmessung eine historische Übersicht ihrer geodätischen Arbeiten, sowie Angaben über die angewandten Instrumente geben wollten.

Auch in dieser Hinsicht hat schon 2 Jahrzehnte früher der deutsche Geometer-Verein das Mögliche gethan, und indem wir in den nachfolgenden Paragraphen einen Überblick über die Geschichte der Triangulierungen in charakteristischen Beispielen, insbesondere für Deutschland geben, können wir die zahlreichen Vorarbeiten dazu, welche vom deutschen Geometerverein ausgegangen sind, benützen.

§ 123. Die internationale Näherungsformel für den mittleren Winkelfehler.

Auf der Konferenz der permanenten Kommission der internationalen Erdmessung in Nizza 1887, wurde eine Formel zur Berechnung des mittleren Winkelfehlers von Triangulierungen vereinbart, worüber die veröffentlichten „Verhandlungen" über diese Konferenz, Berlin 1888, S. 54—55 bzw. S. 56—58 Folgendes geben:

Nach dem Vorschlag des Herrn General *Ferrero*, unter Mitwirknng von *Helmert* und *Foerster* sollen die Berichte über die Triangulierungen in Zukunft für jedes System von Dreiecken einen Zahlenwert m enthalten, zu berechnen nach der Formel:

$$m^2 = \frac{\Sigma\, w^2}{3\,.\,n} \quad \text{oder} \quad m = \sqrt{\frac{\Sigma\, w^2}{3\,.\,n}} \tag{1}$$

In dieser Formel bezeichnet man mit w den Widerspruch zwischen 180° + sphär. Excess und der Winkelsumme jedes Dreiecks, und mit n die Zahl der Dreiecke des Netzes.

Dieser Wert m soll als *Näherungswert* für die erlangte Genauigkeit betrachtet werden.

Unter Lassung voller Freiheit für weitergehende Untersuchungen dieser Art kann man dieser Formel eine bereits gute Annäherung an die Wahrheit zuschreiben, und es spricht zu Gunsten dieser Formel auch der Umstand, dass man mit deren

Hilfe ohne erhebliche Rechenarbeit rasch ein Vergleichsmass für die Genauigkeit der Triangulierungen gewinnt.

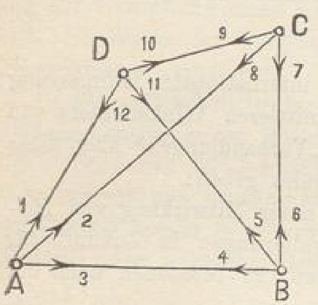
Für ein einzelnes Dreieck ist der Wert $m^2 = \frac{w^2}{3}$ genau das aus dem Widerspruche w hervorgehende arithmetische Mittel der mittleren Fehlerquadrate der drei Winkel.

Bildet man für n Dreiecke den Wert m^2 nach der Formel (1), so ist m^2 das arithmetische Mittel der mittleren Fehlerquadrate aller Dreieckswinkel, wobei dieselben zunächst als unabhängig von einander gedacht sind.

Die Formel ist aber auch noch richtig, wenn die Dreiecke wie in einem Netze von einander abhängen; nur gehen dann bei der Mittelbildung die mittleren Fehler verschiedener Richtungen mit etwas verschiedenem Gewichte in das Ergebnis ein, infolge dessen die Sicherheit seiner Berechnung nicht die erreichbar grösste ist. Dieser Mangel wird aber unerheblich, sobald die Anzahl n eine bedeutende ist, wie in allen grösseren Dreiecksnetzen. Es ist erwünscht, zur Berechnung *alle* überhaupt in einem Netze vorhandenen Dreiecke heranzuziehen (und nicht z. B. in einem Vierecke nur 3 Dreiecke), damit jede die Sicherheit beeinflussende Auswahl vermieden wird.

Wenn eine Triangulierung sich nicht in lauter Dreiecke zerlegen lässt, d. h. wenn auch Vierecke, Fünfecke u. s. w. auftreten, so sind diese letzteren natürlich entsprechend zu behandeln, d. h. aus einem Viereck würde man $m = w : \sqrt{4}$ berechnen. Um glatte Tabellen zu erhalten, verfährt man dann am einfachsten so, dass man das w^2 eines Vierecks zunächst ausrechnet, aber nur mit $\frac{3}{4}$ seines Wertes zu den Dreiecken in Rechnung stellt, ebenso $\frac{3}{5}$ bei einem Fünfeck u. s. w.

Fig. 1.



Zu den vorerwähnten Bemerkungen über verschiedene Richtungsgewichte in einem Vierecke haben wir die nachfolgende Betrachtung angestellt:

In Fig. 1. ist ein Viereck mit Richtungsmessung in allen 6 Linien hin und her, also mit 12 Sichten in 4 Sätzen angenommen.

Wir betrachten die drei Dreiecke

$$ADC \qquad ADB \qquad ABC$$

und bilden diesen entsprechend folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} -v_1+v_2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; -v_8+v_9-v_{10} \;.\; +v_{12}+w_1=0 \\ -v_1 \;.\; +v_3-v_4+v_5 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; -v_{11}+v_{12}+w_2=0 \\ -v_2+v_3-v_4 \;.\; +v_6-v_7+v_8 \;.\;.\;.\;.\;.\; +w_3=0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Hiezu gehören die drei Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} +6k_1+2k_2-2k_3+w_1=0 \\ +2k_1+6k_2+2k_3+w_2=0 \\ -2k_1+2k_2+6k_3+w_3=0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Die Auflösung giebt:

$$k_1 = \frac{-2w_1+w_2-w_3}{8}\,,\quad k_2 = \frac{w_1-2w_2+w_3}{8}\,,\quad k_3 = \frac{-w_1+w_2-2w_3}{8}$$

Nun ist $[v\,v] = -[w\,k]$ und die Ausrechnung hiernach giebt:

$$-8\,[w\,k] = 2\,w_1^2 + 2\,w_2^2 + 2\,w_3^2 - 2\,w_1\,w_2 + 2\,w_1\,w_3 - 2\,w_2\,w_3 \qquad (4)$$

Das kann man aber übersichtlicher gestalten durch Einführung eines *vierten* Summen-Widerspruches w_4, welcher dem vierten Dreieck $B\,C\,D$ als Ergänzung zu (1) entspricht, nämlich:

$$w_4 = w_1 - w_2 + w_3 \qquad (5)$$

Durch diese Einführung kann man die Summe (4) algebraisch auf folgende Form bringen:

$$-8\,[w\,k] = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2$$

und den mittleren Richtungsfehler μ erhält man, da 3 unabhängige Bedingungsgleichungen benützt wurden:

$$\mu^2 = \frac{[v^2]}{3} = \frac{-[w\,k]}{3} = \frac{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2}{3\,.\,8}$$

Der mittlere Winkelfehler m, welcher zum Richtungsfehler μ in der Beziehung steht, $m = \mu\sqrt{2}$, wird also erhalten:

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= 2\,\mu^2 = \frac{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2}{12} \\ \text{oder} \qquad m &= \sqrt{\frac{[w^2]}{12}} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Wo nun $[w^2]$ die Summe aller *vier* w^2 ist.

Wenn die 4 Dreiecke, welche zu dem Viereck (Fig. 1.) gehören, nun mit *anderen* Dreiecken zusammen genommen werden sollen, so darf man den Wert m^2 aus (6) nur als aus *drei* Dreiecken berechnet einführen. Wenn also z. B. folgende 6 Werte w vorliegen:

$$w_0\;,\; w_1\;,\; w_2\;,\; w_3\;,\; w_4\;,\; w_5 \qquad (7)$$

wobei w_0 und w_5 selbständig aus je *einem* Dreieck, dagegen w_1, w_2, w_3, w_4 zusammen aus einem Viereck mit 2 Diagonalen erhalten sind, so hat man zu rechnen:

$$m^2 = \frac{w_0^2 + \frac{3}{4}\,(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2) + w_5^2}{3\,(1 + 3 + 1)} \qquad (8)$$

Wenn man diese Unterscheidung nicht macht, sondern kurz so rechnet:

$$m^2 = \frac{w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 + w_5^2}{3\,.\,6} \qquad (9)$$

so werden die 12 Richtungen des Vierecks mit zu starken Gewichten eingeführt.

Als einfaches Zahlenbeispiel hiezu wollen wir das Hannover sche Stadt-Triangulierungsnetz von S. 189 nehmen. Dasselbe giebt nach S. 190—191 folgende 7 Dreiecksschlüsse:

$w_1 = -1{,}02''$	$w^2 = 1{,}04$		$w_4 = -0{,}76''$	$w^2 = 0{,}58$
$w_2 = +2{,}22$	$w^2 = 4{,}93$		$w_5 = +2{,}30$	$w^2 = 5{,}29$
$w_3 = -2{,}36$	$w^2 = 5{,}57$		$w_6 = +4{,}30$	$w^2 = 18{,}49$
	$11{,}54$		$w_7 = -2{,}76$	$w^2 = 7{,}62$
	$31{,}98$			$31{,}98$
	$[w^2] = 43{,}52$			$\frac{3}{4}\,[w^2] = 23{,}99$

Wenn man kurzer Hand nach der Formel (1) oder (9) rechnet, so hat man:

$$m = \sqrt{\frac{43{,}52}{3 \cdot 7}} = \pm 1{,}44'' \tag{10}$$

dagegen nach der etwas strengeren Formel (8):

$$m = \sqrt{\frac{11{,}54 + 23{,}99}{3 \cdot 6}} = \pm 1{,}40'' \tag{11}$$

Diese beiden Werte differieren nicht viel, man sieht also, dass in diesem Falle die glatte internationale Formel ziemlich dasselbe giebt, wie die kleine Verfeinerung mit der Vierecksbehandlung.

Streng sind die beiden Werte (10) und (11) nicht, denn die strenge Rechnung mit allen Proben gab nach S. 195 den mittleren Fehler einer *Richtung* (dort ebenfalls mit m bezeichnet) $= \pm 1{,}04''$, es ist also der mittlere Winkelfehler entsprechend zu nehmen:

$$m = 1{,}04\sqrt{2} = \pm 1{,}47'' \tag{12}$$

dass dieses etwas besser mit (10) als mit (11) stimmt, ist Zufall. —

Einen Zusatz zu der internationalen Fehlerformel wollen wir noch in dem Sinne machen, dass wir die Zuverlässigkeit eines darnach berechneten m schätzen. Da man die w als wahre unabhängige Fehler behandelt, muss man weiter die Formel (14) § 117. S. 450 anwenden, welche auf den fraglichen Fall übertragen giebt:

$$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3\,n}}\left(1 \pm \frac{0{,}7071}{\sqrt{n}}\right)$$

also nach (10):

$$m = 1{,}44''\left(1 \pm \frac{0{,}7071}{\sqrt{7}}\right) = 1{,}44''\left(1 \pm 0{,}267\right)$$

oder $\quad m = \pm 1{,}44'' \pm 0{,}38''$

d. h. die Angabe, der mittlere Fehler sei $= 1{,}44''$, ist selbst mit einer Unsicherheit von 27 % ihres eigenen Wertes oder $\pm 0{,}38''$ behaftet.

§ 124. Verschiedene Berechnungen des mittleren Winkelfehlers.

Die internationale Fehlerformel ist streng richtig nur in dem seltenen Falle, dass Dreiecke unabhängig von einander, z. B. in einer Kette ohne Seitengleichungen, gemessen vorliegen. Schon bei Messung in vollen Richtungssätzen, wo ein Satz sich auf mehr als ein Dreieck erstreckt, ist die Formel nicht mehr streng.

Im Allgemeinen haben wir bei Winkelausgleichung mit r Bedingungsgleichungen den mittleren Winkelfehler

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} \quad \text{bzw.} \quad = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{r}} \tag{1}$$

Als Beispiel hiezu können wir das Schwerd sche Basisnetz von § 65. nehmen, welches hiernach den mittleren Fehler eines Winkels vom Gewichte 1, auf S. 211 gegeben hat $m = \pm 4{,}77''$. Wir haben aber auch sofort dabei gesehen (S. 212—213), dass dieser Gewichts-*Einheits*-Fehler nicht das ist, was man als Charakteristikum einer Triangulierung haben will, weshalb auf S. 213 auch noch der mittlere Fehler für mittleres Gewicht g berechnet wurde, den wir nun mit m' bezeichnen wollen:

$$m' = \pm 0{,}99'' \tag{2}$$