Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

Kapitel V. Genauigkeit der Triangulierungen. Geschichtliche Abrisse.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

würden, geschlossen werden kann, jedoch mit geringerer Sicherheit als bei Benützung von ν^4 und m^4. Ausser den 4ten Potenzen könnten auch noch die 6ten, 8ten u. s. w. Potenzen von ε zugezogen werden.

Mag unsere vorstehende Gleichung (12) so bleiben, oder noch weiter behandelt werden, jedenfalls haben wir in der Vergleichung der Werte $m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n}$ und $\nu^4 = \frac{[\varepsilon^4]}{n}$ einen ersten Weg zur Auffindung des bis jetzt von aller Theorie ausgeschlossen gewesenen Maximalfehlers eröffnet.

Wenn zu den vielen Tausenden von Dreiecksschlussfehlern w, welche in dem nachfolgenden § 123. u. ff. zu berichten sein werden, nicht bloss die Mittelwerte $\frac{[w^2]}{n}$ sondern auch noch $\frac{[w^4]}{n}$ ausgerechnet würden, so könnte daran unsere Theorie der Gleichung (12) erprobt werden. —

Kapitel V.

Genauigkeit der Triangulierungen. Geschichtliche Abrisse.

§ 122. Allgemeines.

Die Frage nach der Genauigkeit der Messungen und die Beantwortung dieser Frage ist der Anfang und das Ende aller feineren geodätischen Untersuchungen, und zur Gewinnung eines Urteils über solche Fragen ist es von besonderer Wichtigkeit, die Werke der Vergangenheit in Hinsicht auf die erstrebte und die erreichte Genauigkeit zu studieren.

Wie wir schon in der Einleitung S. 8 bemerkt haben, sind die Genauigkeits-Untersuchungen in der früheren geodätischen Litteratur viel zu wenig gepflegt worden.

Vor etwa 30 Jahren, zu Beginn der Europäischen Gradmessung, diente als Anhaltspunkt zur geodätischen Genauigkeitsschätzung eine gelegentliche Bemerkung von General Baeyer in seinem „Messen auf der sphäroidischen Oberfläche“ 1862, S. 79, nämlich: „den wahrscheinlichen Fehler der besten Winkelmessungen können wir nicht unter $\frac{1}{4}$ Sekunde annehmen.“ Die Gradmessung in Ostpreussen bot gar keine Genauigkeitsberechnung, und die „Bestimmung des mittleren Fehlers der Winkelmessungen in Baeyers berühmter „Küstenvermessung“, erwies sich beim ersten Blick im Sinne der M. d. kl. Q. als unzutreffend.

Über die klassischen Messungen von Gauss in Hannover war nichts bekannt.

Ebenso war es in Süddeutschland. Über die Bayerische Triangulierung, das geodätische Hauptwerk Deutschlands im Anfang des Jahrhunderts, gab die Bayerische Litteratur, in welcher man nachzuschlagen berechtigt war, nur unbestimmte Auskunft über „befriedigende Übereinstimmung“ oder dergl. Auch das amtliche Württembergische Landesvermessungswerk ging allen Genauigkeitsfragen entweder geflissentlich aus dem Wege oder es bot Zahlen, welche an Objektivität augenscheinlich zu wünschen übrig liessen. Die vorzügliche Badische Triangulierung war in der geodätischen Litteratur ganz unbekannt. Ein Mann machte in jener Zeit eine rühmliche Ausnahme in solchem Schweigen, *Gerling*, den wir schon auf S. 5 mit Anerkennung nennen mussten, hat über seine Kurhessischen Messungen Auskunft durch mittlere Fehler gegeben, ebenso auch Schleiermacher in Darmstadt.

Im Jahre 1872 haben wir alles, was sich damals an geodätischen Genauigkeitsangaben finden liess, gesammelt und in den „astr. Nachrichten, 80. Band", 1873, Nr. 1898, S. 17—22 veröffentlicht; es war dieses die erste derartige Arbeit, welche auch die heutige internationale Fehlerformel für eine Anzahl von Dreiecksschlussfehlern benützt hat. Seit jener Zeit hat die internationale Erdmessung angefangen, geodätisches Genauigkeitsmaterial zu sammeln und geordnet zu veröffentlichen, und zwar für Triangulierung in den Berichten des italienischen Generals *Ferrero*, wodurch die private Thätigkeit in solcher Hinsicht zum grossen Teil überflüssig geworden ist.

Hiebei wollen wir auch aus den Verhandlungen der Konferenz 1893 in Genf, S. 70 citieren: Der allgemeine Bericht über Triangulierungen würde merklich an Wert gewinnen, wenn sämtliche Staaten der Erdmessung eine historische Übersicht ihrer geodätischen Arbeiten, sowie Angaben über die angewandten Instrumente geben wollten.

Auch in dieser Hinsicht hat schon 2 Jahrzehnte früher der deutsche Geometer-Verein das Mögliche gethan, und indem wir in den nachfolgenden Paragraphen einen Überblick über die Geschichte der Triangulierungen in charakteristischen Beispielen, insbesondere für Deutschland geben, können wir die zahlreichen Vorarbeiten dazu, welche vom deutschen Geometerverein ausgegangen sind, benützen.

§ 123. Die internationale Näherungsformel für den mittleren Winkelfehler.

Auf der Konferenz der permanenten Kommission der internationalen Erdmessung in Nizza 1887, wurde eine Formel zur Berechnung des mittleren Winkelfehlers von Triangulierungen vereinbart, worüber die veröffentlichten „Verhandlungen" über diese Konferenz, Berlin 1888, S. 54—55 bzw. S. 56—58 Folgendes geben:

Nach dem Vorschlag des Herrn General *Ferrero*, unter Mitwirknng von *Helmert* und *Foerster* sollen die Berichte über die Triangulierungen in Zukunft für jedes System von Dreiecken einen Zahlenwert m enthalten, zu berechnen nach der Formel:

$$m^2 = \frac{\Sigma\, w^2}{3\,.\,n} \quad \text{oder} \quad m = \sqrt{\frac{\Sigma\, w^2}{3\,.\,n}} \tag{1}$$

In dieser Formel bezeichnet man mit w den Widerspruch zwischen $180° +$ sphär. Excess und der Winkelsumme jedes Dreiecks, und mit n die Zahl der Dreiecke des Netzes.

Dieser Wert m soll als *Näherungswert* für die erlangte Genauigkeit betrachtet werden.

Unter Lassung voller Freiheit für weitergehende Untersuchungen dieser Art kann man dieser Formel eine bereits gute Annäherung an die Wahrheit zuschreiben, und es spricht zu Gunsten dieser Formel auch der Umstand, dass man mit deren

Hilfe ohne erhebliche Rechenarbeit rasch ein Vergleichsmass für die Genauigkeit der Triangulierungen gewinnt.

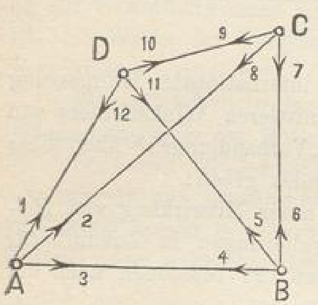
Für ein einzelnes Dreieck ist der Wert $m^2 = \frac{w^2}{3}$ genau das aus dem Widerspruche w hervorgehende arithmetische Mittel der mittleren Fehlerquadrate der drei Winkel.

Bildet man für n Dreiecke den Wert m^2 nach der Formel (1), so ist m^2 das arithmetische Mittel der mittleren Fehlerquadrate aller Dreieckswinkel, wobei dieselben zunächst als unabhängig von einander gedacht sind.

Die Formel ist aber auch noch richtig, wenn die Dreiecke wie in einem Netze von einander abhängen; nur gehen dann bei der Mittelbildung die mittleren Fehler verschiedener Richtungen mit etwas verschiedenem Gewichte in das Ergebnis ein, infolge dessen die Sicherheit seiner Berechnung nicht die erreichbar grösste ist. Dieser Mangel wird aber unerheblich, sobald die Anzahl n eine bedeutende ist, wie in allen grösseren Dreiecksnetzen. Es ist erwünscht, zur Berechnung *alle* überhaupt in einem Netze vorhandenen Dreiecke heranzuziehen (und nicht z. B. in einem Vierecke nur 3 Dreiecke), damit jede die Sicherheit beeinflussende Auswahl vermieden wird.

Wenn eine Triangulierung sich nicht in lauter Dreiecke zerlegen lässt, d. h. wenn auch Vierecke, Fünfecke u. s. w. auftreten, so sind diese letzteren natürlich entsprechend zu behandeln, d. h. aus einem Viereck würde man $m = w : \sqrt{4}$ berechnen. Um glatte Tabellen zu erhalten, verfährt man dann am einfachsten so, dass man das w^2 eines Vierecks zunächst ausrechnet, aber nur mit $\frac{3}{4}$ seines Wertes zu den Dreiecken in Rechnung stellt, ebenso $\frac{3}{5}$ bei einem Fünfeck u. s. w.

Fig. 1.



Zu den vorerwähnten Bemerkungen über verschiedene Richtungsgewichte in einem Vierecke haben wir die nachfolgende Betrachtung angestellt:

In Fig. 1. ist ein Viereck mit Richtungsmessung in allen 6 Linien hin und her, also mit 12 Sichten in 4 Sätzen angenommen.

Wir betrachten die drei Dreiecke

$$ADC \qquad ADB \qquad ABC$$

und bilden diesen entsprechend folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} -v_1+v_2 \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot -v_8+v_9-v_{10} \;\cdot\; +v_{12}+w_1=0 \\ -v_1 \;\cdot\; +v_3-v_4+v_5 \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot -v_{11}+v_{12}+w_2=0 \\ \quad -v_2+v_3-v_4 \;\cdot\; +v_6-v_7+v_8 \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot +w_3=0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Hiezu gehören die drei Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} +6k_1+2k_2-2k_3+w_1=0 \\ +2k_1+6k_2+2k_3+w_2=0 \\ -2k_1+2k_2+6k_3+w_3=0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Die Auflösung giebt:

$$k_1 = \frac{-2w_1+w_2-w_3}{8}\,,\quad k_2 = \frac{w_1-2w_2+w_3}{8}\,,\quad k_3 = \frac{-w_1+w_2-2w_3}{8}$$

Nun ist $[v\,v] = -[w\,k]$ und die Ausrechnung hiernach giebt:

$$-8\,[w\,k] = 2\,w_1^2 + 2\,w_2^2 + 2\,w_3^2 - 2\,w_1\,w_2 + 2\,w_1\,w_3 - 2\,w_2\,w_3 \qquad (4)$$

Das kann man aber übersichtlicher gestalten durch Einführung eines *vierten* Summen-Widerspruches w_4, welcher dem vierten Dreieck $B\,C\,D$ als Ergänzung zu (1) entspricht, nämlich:

$$w_4 = w_1 - w_2 + w_3 \qquad (5)$$

Durch diese Einführung kann man die Summe (4) algebraisch auf folgende Form bringen:

$$-8\,[w\,k] = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2$$

und den mittleren Richtungsfehler n erhält man, da 3 unabhängige Bedingungsgleichungen benützt wurden:

$$\mu^2 = \frac{[v^2]}{3} = \frac{-[w\,k]}{3} = \frac{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2}{3\,.\,8}$$

Der mittlere Winkelfehler m, welcher zum Richtungsfehler μ in der Beziehung steht, $m = \mu\sqrt{2}$, wird also erhalten:

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= 2\,\mu^2 = \frac{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2}{12} \\ \text{oder} \qquad m &= \sqrt{\frac{[w^2]}{12}} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Wo nun $[w^2]$ die Summe aller *vier* w^2 ist.

Wenn die 4 Dreiecke, welche zu dem Viereck (Fig. 1.) gehören, nun mit *anderen* Dreiecken zusammen genommen werden sollen, so darf man den Wert m^2 aus (6) nur als aus *drei* Dreiecken berechnet einführen. Wenn also z. B. folgende 6 Werte w vorliegen:

$$w_0\ ,\ w_1\ ,\ w_2\ ,\ w_3\ ,\ w_4\ ,\ w_5 \qquad (7)$$

wobei w_0 und w_5 selbständig aus je *einem* Dreieck, dagegen w_1, w_2, w_3, w_4 zusammen aus einem Viereck mit 2 Diagonalen erhalten sind, so hat man zu rechnen:

$$m^2 = \frac{w_0^2 + \frac{3}{4}\,(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2) + w_5^2}{3\,(1 + 3 + 1)} \qquad (8)$$

Wenn man diese Unterscheidung nicht macht, sondern kurz so rechnet:

$$m^2 = \frac{w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 + w_5^2}{3\,.\,6} \qquad (9)$$

so werden die 12 Richtungen des Vierecks mit zu starken Gewichten eingeführt.

Als einfaches Zahlenbeispiel hiezu wollen wir das Hannoversche Stadt-Triangulierungsnetz von S. 189 nehmen. Dasselbe giebt nach S. 190—191 folgende 7 Dreiecksschlüsse:

$w_1 = -1{,}02''$	$w^2 = 1{,}04$	$w_4 = -0{,}76''$	$w^2 = 0{,}58$
$w_2 = +2{,}22$	$w^2 = 4{,}93$	$w_5 = +2{,}30$	$w^2 = 5{,}29$
$w_3 = -2{,}36$	$w^2 = 5{,}57$	$w_6 = +4{,}30$	$w^2 = 18{,}49$
		$w_7 = -2{,}76$	$w^2 = 7{,}62$
	11,54		31,98
	31,98		$\frac{3}{4}\,[w^2] = 23{,}99$
	$[w^2] = 43{,}52$		

Wenn man kurzer Hand nach der Formel (1) oder (9) rechnet, so hat man:

$$m = \sqrt{\frac{43,52}{3 \cdot 7}} = \pm 1,44'' \tag{10}$$

dagegen nach der etwas strengeren Formel (8):

$$m = \sqrt{\frac{11,54 + 23,99}{3 \cdot 6}} = \pm 1,40'' \tag{11}$$

Diese beiden Werte differieren nicht viel, man sieht also, dass in diesem Falle die glatte internationale Formel ziemlich dasselbe giebt, wie die kleine Verfeinerung mit der Vierecksbehandlung.

Streng sind die beiden Werte (10) und (11) nicht, denn die strenge Rechnung mit allen Proben gab nach S. 195 den mittleren Fehler einer *Richtung* (dort ebenfalls mit m bezeichnet) $= \pm 1,04''$, es ist also der mittlere Winkelfehler entsprechend zu nehmen:

$$m = 1,04 \sqrt{2} = \pm 1,47'' \tag{12}$$

dass dieses etwas besser mit (10) als mit (11) stimmt, ist Zufall. —

Einen Zusatz zu der internationalen Fehlerformel wollen wir noch in dem Sinne machen, dass wir die Zuverlässigkeit eines darnach berechneten m schätzen. Da man die w als wahre unabhängige Fehler behandelt, muss man weiter die Formel (14) § 117. S. 450 anwenden, welche auf den fraglichen Fall übertragen giebt:

$$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3\,n}} \left(1 \pm \frac{0,7071}{\sqrt{n}}\right)$$

also nach (10):

$$m = 1,44'' \left(1 \pm \frac{0,7071}{\sqrt{7}}\right) = 1,44'' \left(1 \pm 0,267\right)$$

oder $\quad m = \pm 1,44'' \pm 0,38''$

d. h. die Angabe, der mittlere Fehler sei $= 1,44''$, ist selbst mit einer Unsicherheit von 27 % ihres eigenen Wertes oder $\pm 0,38''$ behaftet.

§ 124. Verschiedene Berechnungen des mittleren Winkelfehlers.

Die internationale Fehlerformel ist streng richtig nur in dem seltenen Falle, dass Dreiecke unabhängig von einander, z. B. in einer Kette ohne Seitengleichungen, gemessen vorliegen. Schon bei Messung in vollen Richtungssätzen, wo ein Satz sich auf mehr als ein Dreieck erstreckt, ist die Formel nicht mehr streng.

Im Allgemeinen haben wir bei Winkelausgleichung mit r Bedingungsgleichungen den mittleren Winkelfehler

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} \quad \text{bzw.} \quad = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{r}} \tag{1}$$

Als Beispiel hiezu können wir das Schwerd sche Basisnetz von § 65. nehmen, welches hiernach den mittleren Fehler eines Winkels vom Gewichte 1, auf S. 211 gegeben hat $m = \pm 4,77''$. Wir haben aber auch sofort dabei gesehen (S. 212—213), dass dieser Gewichts-*Einheits*-Fehler nicht das ist, was man als Charakteristikum einer Triangulierung haben will, weshalb auf S. 213 auch noch der mittlere Fehler für mittleres Gewicht g berechnet wurde, den wir nun mit m' bezeichnen wollen:

$$m' = \pm 0,99'' \tag{2}$$

Aber auch das ist noch nicht ein mit anderen Netzergebnissen vergleichbarer Wert, weil auf einer der Stationen des Netzes auf S. 208 ein für die Station selbst überschüssiger Winkel gemessen ist. (Station Mannheim mit 3 Winkeln (7), (8), (9) zwischen 3 Strahlen.) Wir wollen daher die weitere Aufgabe stellen, den mittleren Fehler zu berechnen für das mittlere Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels. Indem wir die Formeln (6) S. 255 auf die letzten 3 Werte unten auf S. 208 anwenden, bekommen wir:

$$\frac{1}{P_7} = 0{,}1000 - \frac{0{,}1000^2}{0{,}1690} = 0{,}0408$$

$$\frac{1}{P_8} = 0{,}0357 - \frac{0{,}0357^2}{0{,}1690} = 0{,}0282$$

$$\frac{1}{P_9} = 0{,}0333 - \frac{0{,}0333^2}{0{,}1690} = 0{,}0267$$

Hiezu noch die Summe der 6 ersten $\frac{1}{p}$ von S. 208: 0,2177

Gesamtsumme 0,3134

Mittel für 9 Werte 0,0348

Dieses ist die mittlere Gewichts-Reciproke für einen auf der Station ausgeglichenen Winkel, man berechnet also den mittleren Fehler m eines auf der Station ausgeglichenen Winkels von mittlerem Gewichte, unter Zuziehung der Zahl 4,77″ von (15) S. 211:

$$m = 4{,}77\sqrt{0{,}0348} = \pm\, 0{,}89'' \tag{3}$$

Dieses ist etwas kleiner als das obige 0,99″ bei (2), wie es auch sein muss, weil das Gewicht des auf der Station ausgeglichenen Winkels im Allgemeinen grösser sein muss als das Gewicht des nicht ausgeglichenen Winkels.

Dieses kleine Beispiel hat uns dazu gedient, den scharfen Begriff zu bilden für das, was wir künftig stets berechnen wollen, nämlich den *mittleren Fehler m von mittlerem Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels.*

In dem einfachen Falle des Schwerd schen Netzes S. 208 konnte dieses m leicht streng berechnet werden. Die allgemeinere strenge Theorie hiezu auf später (Gleichungen (17)—(20) verschiebend, haben wir inzwischen noch einiges andere zu behandeln.

Hat man eine Triangulierung nach *Richtungen* ausgeglichen, wie z. B. das Hannover sche Stadt-Netz in § 61. mit Fig. 1. S. 189, so giebt die Ausgleichung einen mittleren *Richtungs*-Fehler, welchen wir nun mit μ bezeichnen wollen, also bei r Bedingungsgleichungen:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} \tag{4}$$

Diesem entspricht ein mittlerer Winkelfehler:

$$m = \mu\sqrt{2} \tag{5}$$

wie als Beispiel schon in (12) § 123. S. 472 angegeben wurde.

Hat man dabei ungleiche Richtungs-Messungs-Gewichte p in der Zahl n, so ist das mittlere Gewicht g zu berechnen aus den Reciproken, d. h.:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{p}\right] \tag{5}$$

Z. B. in dem belgisch-deutschen Verbindungs-Netze von S. 292—293 hat man $\left[\frac{1}{p}\right] = 57,8$ und mit $n = 34$ (ohne Rücksicht auf die Anschluss-Besonderheiten):

$$\frac{1}{g} = \frac{57,8}{34} = 1,70$$

der mittlere Richtungsfehler für die Gewichtseinheit ist nach S. 293 (dort mit m bezeichnet):

$$\mu_1 = \pm 0,62''$$

also der mittlere Richtungsfehler für mittleres Stationsrichtungsgewicht:

$$\mu = \mu_1 \sqrt{\frac{1}{g}} = 0,62 \sqrt{1,7} = \pm 0,81'' \qquad (6)$$

Wir gehen über zu dem sehr häufigen Falle der Ausgleichung nach Bessels Methode (§ 72—74.). Die hier auftretenden Verbesserungen, welche man gewöhnlich mit (1) (2) (3) ... bezeichnet, sind *Winkel*-Verbesserungen im Netz, und wenn man von Gewichts-Unterscheidungen absieht, so bekommt man bei r Bedingungsgleichen den mittleren Winkelfehler geradezu:

$$m = \sqrt{\frac{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots (n)^2}{r}} \qquad (7)$$

Wenn die Besselschen Nullpunkts-Korrektionen z nach § 74. berechnet sind, so kann man daraus zuerst einen mittleren Richtungs-Fehler und dann wieder durch Multiplikation mit $\sqrt{2}$ einen mittleren Winkelfehler berechnen in dieser Weise:

$$m = \sqrt{2 \frac{v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \ldots}{r}} \qquad (8)$$

wobei

$$\left. \begin{array}{l} v_0 = z \\ v_1 = z + (1) \\ v_2 = z + (2) \text{ u. s. w.} \end{array} \right\} \qquad (9)$$

Für die einzelne Station ist hiebei:

$$-z = \frac{[p'](1) + p''(2) + p'''(3)}{[p^\circ] + [p'] + [p''] + [p''']} \qquad (10)$$

wo $[p^\circ]$, $[p']$, $[p'']$, $[p''']$ nach S. 234 die Anschnitts-Zahlen der einzelnen Strahlen sind, so dass die Beziehung besteht:

$$[p^\circ]\, v_0 + [p']\, v_1 + [p'']\, v_2 + \ldots = 0 \qquad (11)$$

Da diese ganze Berechnung mit z eine willkürliche Verteilungsart ist, kann man statt (10) auch kürzer so rechnen:

$$-z = \frac{(1) + (2) + (3) + \ldots (s-1)}{s} \qquad (12)$$

wo s die Zahl der Strahlen für die fragliche Station ist, d. h. man stimmt nach (12) und (9) die $s - 1$ Winkel-Korrektionen auf s Richtungs-Korrektionen mit der Summe Null ab, indem dann statt (11) einfach $[v] = 0$ entsteht.

Dieses Verfahren ist angewendet in dem „Schweizerischen Dreiecksnetz, II. Band, Zürich 1885", S. 39, und auch bei der Neubearbeitung der Mecklenburgischen Triangulierung wurde in den Abrissen nicht mehr wie früher nach Bessel mit $[[p]\, v] = 0$, sondern einfach mit $[v] = 0$ orientiert (vgl. den späteren § 138.).

Wenn man die Wahl hat, entweder nach der Winkelformel (7) oder nach der Richtungsformel (8) zu rechnen, wobei aber m selbst beidemal ein Winkelfehler ist, so ist die Richtungsform (8) vorzuziehen, weil dabei keine Richtung im Vergleich mit einer anderen bevorzugt oder benachteiligt ist.

Die ganze Rechnung (7) oder (8) wird wohl nur noch auf ältere Triangulierungen, etwa bis 1880 anzuwenden sein, und zwar mit der Form (8) im Geodätischen Institut, (7) bei der Landesaufnahme.

Bequemlichkeits-Berechnungen mit dem durchschnittlichen Fehler.

In allen bisherigen Formeln treten Quadratsummen auf, welche für den vorliegenden Zweck auszurechnen sind. Obgleich dieses keine ins Gewicht fallende Arbeit ist, fühlt man doch manchmal bei überschläglichen Berechnungen, kritischen Vergleichungen u. s. w. das Bedürfnis, rasch einen mittleren Fehler zu bilden, indem man nur die absolute Summe $[\pm \delta]$ irgend welcher Fehler-Elemente δ benützt. Da wir die hiezu nötigen Theorieen bereits früher in § 114. und § 115. behandelt haben, bilden wir hier sofort die Anwendungen:

Wenn n einzelne Dreiecke vorliegen und die Summe $[\pm w]$ ihrer ohne Rücksicht auf das Vorzeichen zusammengenommenen Widersprüche, so hat man den mittleren Winkelfehler:

$$m = 1{,}2533 \frac{[\pm w]}{n\sqrt{3}} \tag{13}$$

Für Bessel sche Ausgleichung und Winkel-Verbesserungen (1) (2) ... hat man mit absoluter Summierung (1) + (2) + (3) + ... nach (12) § 115. S. 444:

$$m = 1{,}2533 \frac{(1) + (2) + (3) + \dots (n)}{\sqrt{n\,r}} \tag{14}$$

Wenn man die Bessel schen Winkel-Korrektionen (1) (2) (3) ... mittelst der Nullpunkts-Korrektionen z auf Richtungen reduziert hat, so dass die Richtungsverbesserungen v_0, v_1, v_2 ... nach (9) vorliegen, wobei die Anzahl aller dieser v gleich n' sei, so wird der mittlere Winkelfehler:

$$\left.\begin{aligned} m &= 1{,}2533 \sqrt{2}\, \frac{v_0 + v_1 + v_2 + \dots}{\sqrt{n' r}} \\ m &= 1{,}7715 \frac{[\pm v]}{\sqrt{n' r}} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

In geschichtlicher Beziehung ist hiezu zu berichten, dass in dem Werke von General Baeyer „die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie", Berlin 1849, in § 97. S. 353 eine „Bestimmung des mittleren Fehlers der Winkelmessungen angegeben wird nach der Formel:

$$\varepsilon = \frac{s}{m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 \pm \frac{\varrho \sqrt{\pi - 2}}{\sqrt{m}} \right\} \tag{16}$$

wo s die Summe $[\pm v]$ unserer Formel (15) und m die Anzahl der v bedeutet, also mit umgesetzten Bezeichnungen entsprechend unserer Formel (15):

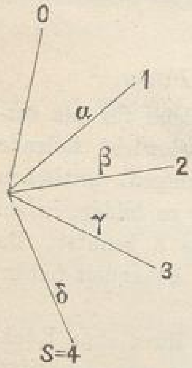
$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{[\pm v]}{n'} \left\{ 1 \pm \frac{0{,}5096}{\sqrt{n'}} \right\} \tag{16a}$$

$$m = 1{,}2533 \frac{[\pm v]}{n'} \left\{ 1 \pm \frac{0{,}5096}{\sqrt{n'}} \right\} \tag{16b}$$

Dieses ist die erste Formel der Gruppe (15) in unserem § 117. S. 540, wenn daselbst im ersten Gliede der mittlere Fehler, im zweiten Gliede der wahrscheinliche Fehler gewonnen wird.

Die ganze Rechnungsart (16) gehört aber offenbar gar nicht hierher, da die v nicht wahre Fehler, sondern scheinbare Fehler für n' Elemente mit r Bedingungsgleichungen sind. Auch würde im Sinne der heutigen Terminologie (§ 70. S. 230) die Formel (16) nicht einen mittleren Winkelfehler, sondern einen Richtungsfehler geben. Wir haben all dieses hier nur mitgeteilt zur Aufklärung für die geodätische Litteratur, etwa 1850—1875, wo die falsche Formel (16) lange eine Rolle spielte.

Fig. 1.



Mittleres Gewicht eines Winkels auf der Station.

In dem einfachen Falle, den wir oben bei (2)—(3) behandelt haben, konnte das mittlere Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels leicht angegeben werden. Folgendes ist die weitere Theorie hiezu nach dem Vorgang des „Schweizerischen Dreiecksnetzes, II. Band, Zürich 1885“, S. 38 und des „Märkisch-Thüringischen Netzes des geodätischen Instituts, Berlin 1889“, S. 63—64.

Bezeichnet Fig. 1. eine Station, deren Nullstrahl nicht zum Netze gehört, dann haben die Winkel zwischen den übrigen Strahlen folgende Gewichts-Reciproken:

$$\begin{array}{ll}
(1,2) = [\alpha\,\alpha] - 2\,[\alpha\,\beta] + [\beta\,\beta] & (2,3) = [\beta\,\beta] - 2\,[\beta\,\gamma] + [\gamma\,\gamma] \\
(1,3) = [\alpha\,\alpha] - 2\,[\alpha\,\gamma] + [\gamma\,\gamma] & (2,4) = [\beta\,\beta] - 2\,[\beta\,\delta] + [\delta\,\delta] \\
(1,4) = [\alpha\,\alpha] - 2\,[\alpha\,\delta] + [\delta\,\delta] & (2,1) = [\beta\,\beta] - 2\,[\beta\,\alpha] + [\alpha\,\alpha] \text{ u. s. w.}
\end{array}$$

Denkt man sich alle diese Werte angeschrieben und addiert, so findet man mit Rücksicht darauf, dass $[\alpha\,\beta] = [\beta\,\alpha]$ u. s. w. ist, allgemein für s Strahlen 1. 2. 3. 4. die Summe:

$$(2\,s - 2)\,([\alpha\,\alpha] + [\beta\,\beta] + [\gamma\,\gamma]) - 4\,([\alpha\,\beta] + [\alpha\,\gamma] + [\alpha\,\delta] + [\beta\,\gamma] + [\beta\,\delta] + [\gamma\,\delta]) \quad (17)$$

kürzer bezeichnet $= \quad 2\,(s-1)\,[A\,A] - 4\,[A\,B]$ (18)

Da $s\dfrac{s-1}{2}$ Winkel zwischen s Strahlen möglich sind, und hiebei jeder Winkel zweimal auftritt, bekommt man den Mittelwert für einen Winkel dieser Station:

$$m^2 = \frac{\mu^2}{s}\left(2\,[A\,A] - 4\,\frac{[A\,B]}{s-1}\right) \quad (19)$$

Dabei ist die Bedeutung der Zeichen $[A\,A]$ und $[A\,B]$ durch Vergleichung von (17) und (18) bestimmt, und in (19) ist μ der Gewichtseinheits-Fehler. Denkt man sich diesen Ausdruck (19) auch für die übrigen Stationen berechnet, so bekommt man daraus nach dem Prinzip des arithmetischen Mittels der Fehlerquadrate, den Gesamt-Mittelwert:

$$\frac{m^2}{\mu^2} = 2\,\frac{\left([A_1\,A_1] - \dfrac{2}{s_1 - 1}\,[A\,B]\right) + \left([A_2\,A_2] - \dfrac{2}{s_2 - 1}\,[A_2\,B_2]\right) + \ldots}{s_1 \qquad + \qquad s_2 \qquad + \ldots} = \frac{1}{P} \quad (20)$$

Diese Formel gilt zunächst für den Fall von Fig. 1., wo der Nullstrahl nicht zum Netz gehört. Wenn der Nullstrahl selbst zum Netz gehört, so gilt die Formel (20) immer noch, jedoch muss dann der Nullstrahl in der Zahl s mitgezählt werden. Man findet dieses, wenn man die ganze Betrachtung für diesen Fall wiederholt.

Der durch (20) bestimmte Wert P ist das gesuchte mittlere Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels.

Um die Bedeutung dieser Formeln deutlich zu machen, nehmen wir von § 72.

die Virecks-Ausgleichung der Gradmessung in Ostpreussen, und haben von S. 240 oder aus der Tabelle von S. 244:

	$[\alpha\,\alpha]$, $[\beta\,\beta]$ u. s. w.	$[\alpha\,\beta]$, $[\alpha\,\gamma]$ u. s. w.	
Nidden	+ 0,0611	0,0175	$s_1 = 3$
"	+ 0,0764		
Lattenwalde	+ 0,1431	0,0745	$s_2 = 3$
"	+ 0,0805		
Kalleninken	+ 0,1667	0,0833	$s_3 = 3$
"	+ 0,1667	0,1753	
Gilge	+ 0,3333	0.	$s_4 = 1$
	1,0278		10

$$\frac{1}{P} = 2\,\frac{1{,}0278 - 0{,}1753}{10} = 0{,}17050$$

Als mittleren Gewichtseinheits-Fehler nehmen wir nach (6) S. 247 den Wert m_2 aus der Netz-Ausgleichung, nämlich $\pm 4{,}88''$, es ist also nun der mittlere Winkel-Fehler für mittleres Stationsgewicht:

$$m = 4{,}88\sqrt{0{,}1705} = \pm 2{,}02''.$$

Bei einer grossen Zahl von Stationen und Richtungen wird diese Rechnung wohl meist nahe dasselbe geben, wie eine der früher bei (7) und (8) S. 474 erwähnten genäherten Mittelbildungen.

Es sind hier auch die drei Formeln für den Gewichtseinheits-Fehler vorzuführen, welche wir früher auf S. 152 und S. 157—160 kennen gelernt haben, nämlich mit kurzen Bezeichnungen zusammengefasst:

Stationen $$\mu_1 = \sqrt{\frac{[v'\,v']}{n'}} \tag{21}$$

Netz $$\mu_2 = \sqrt{\frac{[v''\,v'']}{r}} \tag{22}$$

Gesamt-Ausgleichung $$\mu = \sqrt{\frac{[v'\,v'] + [v''\,v'']}{n' + r}} \tag{23}$$

Das Verhältnis $\mu_2 : \mu_1$ giebt für eine Triangulierung Aufschluss darüber, ob, und in welchem Mass, die Netz-Ausgleichung Fehler-Einflüsse zu Tage gefördert hat, welche auf den Stationen verborgen blieben.

Die Netz-Ausgleichung ist für die Genauigkeitsbeurteilung im Ganzen massgebend, und unser im bisherigen behandelter mittlerer Winkelfehler m bezieht sich nur auf Netz-Ausgleichung. Hat man Genauigkeits-Berechnungen, welche sich bei einer Triangulierung auf μ_1 oder μ beziehen, so kann man sie, wenn alle drei Werte μ_1, μ_2 μ bekannt sind, dadurch verhältnismässig auf μ_2 reduzieren.

§ 125. Triangulierung der Niederlande von Snellius 1610.

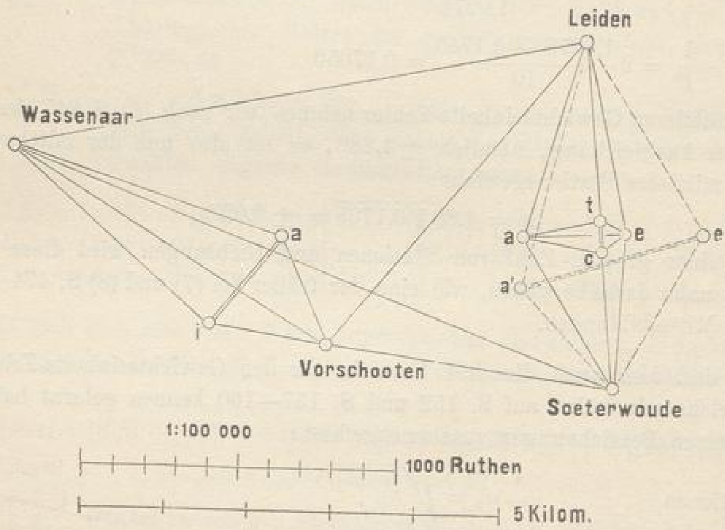
Die erste Triangulierung im heutigen Sinne, mit Winkelmessung in Gradmass, und trigonometrischer Berechnung verdanken wir dem Niederländer *Willebrord Snel van Roien* (latinisiert *Snellius*) geb. 1580 in Leiden, gest. 1626.

Sein berühmtes Werk (in d. Kgl. Bibliothek in Berlin vorhanden) hat den Titel: „Eratosthenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate, a Willebrordo Snellio *Διὰ τῶν ἐξ ἀποσχημάτων μετρυσῶν διοπτρῶν.* Suscitatus. (O quam contemta res est homo, nisi supra humana se erexerit) Lugduni Batavorum apud Jodocum à Colster. Ann. CIƆIƆCXVII (1617).

Hiezu ist weiter zu erwähnen eine wertvolle historische Abhandlung in der „Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, onder redactie van I. Boer, Hz. te Utrecht, Jaargang V, 1889, 1e Aflevering“: Overzicht van de graadmetingen in Nederland (met plaat) door Dr. J. D. van der Plaats, und: Graadmeting, Geschiedkundig overzicht door G. B. H. de Balbian.

Nachstehende Fig. 1. giebt das Basisnetz der Triangulierung von Snellius.

Fig. 1. (1 : 100 000.)



Die erste Basis von Snellius war die kleine Strecke tc auf der Geraden Leiden-Soeterwoude, nämlich $tc = 87{,}05$ Ruten ($= 327{,}85^m$). Daraus wurde durch zwei Dreiecke abgeleitet $ae = 326{,}43$ Ruten und unmittelbar gemessen 326,90 Ruten. Das trigonometrische Ergebnis $ae = 326{,}43$ R. wurde beibehalten, und daraus abermals durch 2 Dreiecke abgeleitet: Leiden-Soeterwoude $= 1092{,}35$ Ruten ($= 4114{,}06^m$). Damit wurde trianguliert bis Wassenaar und Vorschooten, und zwischen diesen zwei Punkten wieder eine Grundlinie $ai = 348{,}1$ Ruten gemessen. Der trigonometrische Anschlussfehler wird hier nicht mitgeteilt.

Dagegen hat Snellius einen Anschluss an eine dritte 166 Ruten lange Grundlinie zwischen Oudewater und Montfort etwa 30^{km} östlich von der ersten Grundlinie, der trigonometrische Anschluss ist $2923{,}3 - 2934{,}6 = -11{,}3$ Ruten oder $1 : 260$, wozu Snellius bemerkt (S. 181), dass er solche Genauigkeit kaum zu hoffen gewagt habe.

Unsere Fig. 1. zeigt noch eine vierte, punktierte Grundlinie $a'\,e' = 475{,}00$ R. Dieses ist Snellius' spätere Messung und Musschenbroeks Berechnung, sie giebt Leiden-Soeterwoude $= 1097{,}117$ Ruten gegen 1092,35 R. der ersten Bestimmung.

Die ganze Triangulierung von Snellius umfasst 33 Dreiecke, welche im wesentlichen in der heute noch üblichen Weise zu einer Breitengradmessung zwischen Alkmaar und Bergen op Zoom benützt wurden.

§ 126. Triangulierung von *Schickhart* in Württemberg 1620.

Als zweiten selbständigen Urheber einer Landestriangulierung haben wir den schwäbischen Professor *Schickhart* in Tübingen zu nennen, welcher im Jahre 1629 eine kleine Schrift veröffentlichte, die nach seinem Tode nochmals gedruckt worden ist mit dem Titel:

„Kurtze Anweisung, wie Künstliche Land-Tafeln auss rechtem Grund zu machen, und die bissher begangene Irrthumb zu verbessern, sampt etlich New erfundenen Vörtheln, die Polus Höhin auffs leichtest, und doch scharpff gnug zu forschen. Durch Herrn Wilhelm Schickharten Seel. gewesenen Professorn in Tübingen. Emendationis primus est gradus, Errorem detexisse. Tübingen. Verlegts Johann Georg Cotta. Im Jahr 1669. (22 Seiten 4° und 1 Kupfertafel.)

Über sein trigonometrisches Messungsverfahren sagt der Verfasser in diesem Buche:

Hierzu muss man ein gerechtes Instrument haben, mit demselbigen hin und her auff die hohe Berg und Kirchen-Thürn steigen, die *Angulos* oder Winckel der umbliegenden Ort fleissig absehen, ihre Zahl in ein Schreibtafel verzeichnen, und darauss hernachher die Landtafel formiren. Darzu brauchen andere gemeiniglich ein Scheiben, so in 360 Grad abgetheilt, auch mit eim Zeiger und Absehen zugericht ist, wie in der figur numero I zu sehen. Ich aber halte nicht vil drauff, wo man gar scharpff handeln soll: dann ist sie klein, so giebt sies nicht subtil gnug, ist sie aber gross, so wirds unbequem über Land zu bringen. Das Metall ist schwer, Holz aber wandelbar. Drumb mach ich nur 3 gleiche Stäb in Form eines △ aequilateri zusamen, theil sie auss *ex Tabulis Tangentium*, gib ihnen auff den Ecken ihr unbewegliche, an die Seit aber ein lauffendes Absehen, und observire damit, so zeigt es mir alle Minuten fleissig. Dann die Stäb seind lang, bringen doch dem Raisenden kein Beschwerd, weil man sie von einander legen kann; so ist auch ihrer Beständigkeit wol zu trauen, sintemal kein Holtz nach der Längin schweinet. Mit solche stäben sind die Ort, so im andern Exempel abgerissen, abgesehen worden. Ich will von dem Prozess nur ein stücklin zum Beyspill erzehlen. Es ligt bei Reutlingen ein zerfallen Schloss auff eim hohen Berg, die Achel genannt, darauf bin ich, sampt guten Freunden (als Gehülffen und Zeugen diser Verrichtung) gestige, hab mein Schragen aufgestellt, und zur lincke seit von dem Capellin des Wurmlingerbergs angefangen, gegen der rechten Hand hinumb zu messen, auf den Tübinger S. Gergen Thurn 7 gr. 45 min. von dannen gen Walthausen (vor Zeiten der Graven von Tübingen Cantzley, jetzund ein Mayerhof) 10 gr. 18 min. dannen gen Kirchentälinsfurt 8 g. 10 m. dannen gen Oferdingen 37 gr. 54 m. dannen gen Metzingen (seind alle Dörfer) 55 g. 13 m. dannen gen Hohen Neyffen, das veste Bergschloss, 24 g. 49 m. dannen Eningen 67 g. 7 m. endlich wider biss an den ersten Wurmlinger Berg, 148 gr. 46 min. Und obwol in disem Spatio gegen der Alb, nichts anders zu sehen war, als der rauhe Berg, geliebt es mir doch, zur Ergäntzung des Vmbkreises, diss auch zu messen, von Prob und Sicherheit wegen, weil die gantze Summ, als ein voller Circkel 360 Grad machen soll, hab ich nun ein paar Minuten zu vil gefunden, so für unempfindlich zu halten, und etwan durch den unebnen Horizont, mögen eingeschlichen sein. Also fort hab ich auch zu vorgemelte Kirchentälinsfurt, Walthausen, Wurmlinger Berg; item Roseck, Herrenberg, Weilenburg, alt Rotenburg (eim alten Burgstell) und mehr andern, sonderlich hohen Orten, gethan: Darauss die umbligende Dörffer und Stätt mit solcher Schärpf in Grund gelegt, dass, so man von eim Thurn zum andern ein Schnur anspannen sollt, die Tafel weisete wie viel sie Würtembergische Schuch lang seyn.

Als Beispiel seiner Methode giebt Schickhart das in Fig. 2. S. 480 abgebildete Netz.

Dieses ist ein Holzschnitt nach der Figur in Schickharts Buche von 1669 (aus der Bibliothek der Universität Tübingen).

Herr Vermessungs-Kommissär *Steiff* in Stuttgart schrieb uns dazu, dass die erste Ausgabe Schickharts von 1629, (welche sich in der Stuttgarter öffentlichen Bibliothek befindet), ein wesentlich besseres Dreiecksnetz enthält, das auch mehr Winkel giebt, und den Winkel Tübingen-Achalm-Kirchentellinsfurt $= 18° 28'$ statt $16° 28'$, wie in der Ausgabe von 1669 ist (vgl. Z. f. V. 1891, S. 535 und nun in unserem nachstehenden Holzschnitte S. 480 verbessert).

Herr Steiff hat auch, entsprechend dem Wunsche von „Z. f. V. 1891", S. 536, die Punkte Schickharts mit verschiedenen Hilfsmitteln erforscht und deren Coordinaten im heutigen Württembergischen System bestimmt, nämlich für die von Achalm aus angezielten Punkte:

Wurmlingen	$y = -17697$	$x = -\ 5234$
Tübingen Kirchturm	$+\ 1276$	$+\ 98$
Kirchentellinsfurth Kirchturm	$+25168$	$+\ 4456$
Oferdingen Kirchturm	$+40883$	$+12138$
Metzingen Kirchturm	$+60599$	$+\ 6704$
Hohen-Neuffen	$+88102$	$+14133$
Eningen Kirchturm	$+53979$	-12707

(1)

Diese Coordinaten sind in Württembergischen Fuss gegeben, wobei 1 Fuss = 0,2864226m ($log = 9.4570073$). Der Punkt Waldhausen ist als unsicher nicht dabei.

Achalm Turm hat die Coordinaten in Württemb. Fuss:

$$y = +49865 \qquad x = -9889$$
$$= +14282{,}5^m \qquad = -2832{,}4^m$$

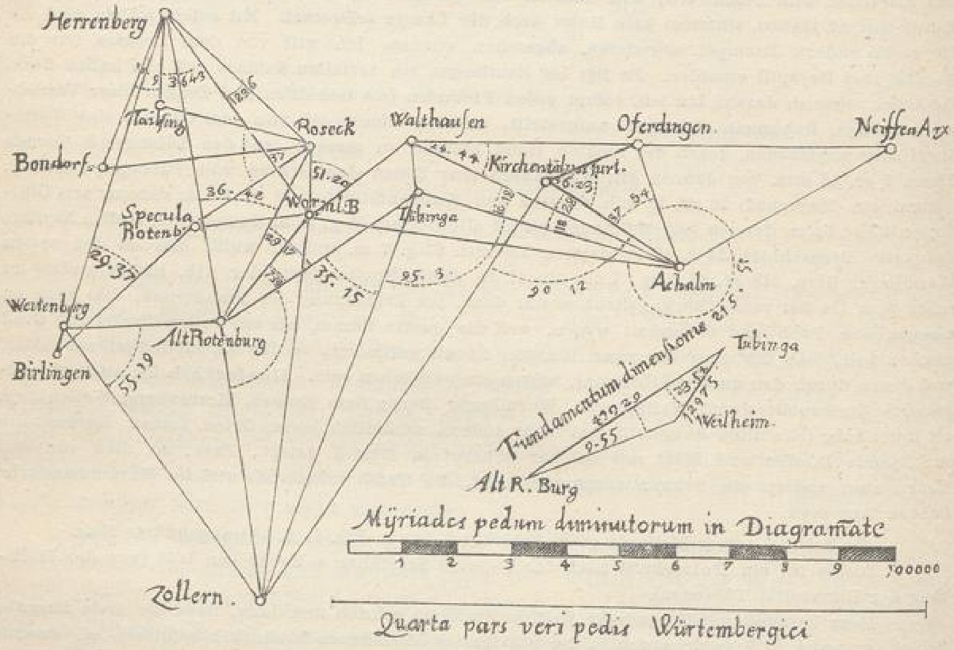
Schickhart s Standpunkt vor 1829 war aber jedenfalls nicht der Turm, sondern nach Steiffs Ermittlung die Mitte der Burgfläche mit den Coordinaten

in Württemb. Fuss $y = +9833$ $x = -9801$.

Fig. 2. Trigonometrisches Netz von Schickhart etwa 1620.

Exemplum Regionis circa Tubingam ex concatenatis angulis accuratissime delineati.

(Massstab 1 : 440 000)



Wir haben daraus Veranlassung genommen, die Schickhart schen Winkel in Form eines Richtungssatzes als Rückwärts-Einschneidung auszugleichen (nach dem Schema S. 351), wie aus folgendem Abrisse zu ersehen ist, in welchem unter α die von Schickhart in seinem Texte und in seinen Netzbildern als gemessen angegebenen Einzelwinkel und unter β deren Horizontausgleichung verstanden sind, und das übrige im Wesentlichen ebenso wie auf S. 351 ist.

Abriss der Station Achalm, nach Schickhart 1629.

Zielpunkt	Entf. s	Einzelwinkel α	Einzelwinkel β	Richtungswinkel beob. B	Richtungswinkel trig. φ	$v = \varphi - B$	v^2
Neuffen . . .	12,93km			57° 56,1′	57° 59,4′	+3,3′	11
		67° 7′	67° 6,7′				
Eningen . . .	1,45			125 2,8	125 2,8	0,0	0
		148 46	148 45,7				
Wurmlingen. .	19,39			273 48,5	273 51,8	+3,3	11
		7 45	7 44,8				
Tübingen. . .	14,19			281 33,3	281 31,0	−2,3	5
		18 28	18 27,7				
Kirchentellinsf.	8,16			300 1,0	300 1,4	+0,4	0
		37 54	37 53,7				
Oferdingen . .	6,79			337 54,7	337 49,0	−5,7	32
		55 13	55 12,7				
Metzingen . .	5,64			33 7,4	33 8,7	+1,3	2
		24 49	24 48,7	204,0	204,1	+0,3	61
Neuffen . . .	12,93						
		360° 2′	360° 0,0′				

$$m = \sqrt{\frac{61}{7-3}} = \pm 3,9'$$

Der mittlere Fehler einer Richtung ergiebt sich $= 4'$, ein befriedigendes Mass, wenn man bedenkt, dass auch in der Unsicherheit der Zielpunkte noch ein Teil der Fehler enthalten ist. Die Standpunkts-Coordinaten selbst fanden wir:

Achalm $\quad y = +49826 \pm 16 \qquad x = -9794 \pm 14$ Württemb. Fuss
(1629) $\quad = +14271{,}3^{m} \pm 4{,}6^{m} \qquad = -2805{,}3^{m} \pm 4{,}1^{m}$ Meter.

Dieser Punkt liegt 29^{m} nordwestlich (Richtungw. = 338°) vom Turm. Weiteres hierüber ist zu erwarten von den Untersuchungen, welche Herr *Steiff* in Stuttgart angestellt hat und noch fortsetzen wird.

Berichtigend haben wir auch noch anzugeben, dass unsere Entfernungsberechnungen von „Zeitschr. f. Verm. 1891“, S. 536 insofern unzutreffend waren, als der Punkt Tübingen nicht das zu Schickharts Zeit noch gar nicht vorhandene Schloss mit den Coordinaten $y = 0$ und $x = 0$, sondern Stadtkirchturm mit $y = +1276$ und $x = +98$ Württb. Fuss zu nehmen ist, womit die Entfernungsvergleichung ganz erheblich besser wird, und jedenfalls den Massstab 1 : 440 000 giebt, ebenso wie auch die Vergleichung der 7 Entfernungen s aus vorstehender Ausgleichung mit den entsprechenden Abmessungen aus Schickhart s Karte.

Einen tieferen Einblick in die Geschichte von Schickhart s trigonometrischem Werke giebt eine vor Kurzem von dem Inspektor *Regelmann* des Württemb. statistischen Landesamtes aus tief vergrabenen Archiv-Schätzen an das Licht gezogene Sammlung von alten Karten und Urkunden, mit sehr interessanten Facsimile-Abbildungen, herausgegeben unter dem Titel:

Abriss einer Geschichte der Württembergischen Topographie, und nähere Angaben über die Schickhart sche Landesaufnahme Württembergs, zum X. Geographentag zu Stuttgart, von Inspektor *C. Regelmann,* aus den Württemb. Jahrbüchern für Statistik und Landeskunde 1893, im Auszug auch „Zeitschr. f. Verm. 1893“ S. 289—296.

Wilhelm Schickhart, geb. 1592, Hebraicer, Mathematiker und Astronom, Professor in Tübingen, gest. 1635, machte seine trigonometrischen Messungen von 1624 bis 1635. Als Scholarch des Landes stieg er bei seinen Visitationsreisen auf alle Berge und Türme, und beobachtete auf seinem „Schragen“ oder mit dem Kompass, nach allen wichtigen Zielpunkten, machte auch Aufzeichnungen über Wasserläufe u. s. w.

Seine Originalmessungen sind vor Kurzem im Geheimen Haus- und Staatsarchiv in Stuttgart wieder aufgefunden worden als ein Büchlein von 216 Seiten mit dem Titel:

„Pinax observationum chorographicarum. Portolani ejusmodi lineas vocant Πορεντ(?)άνες N.B. Diss kleine Büchlin hatt mich vil und grosse Mühe kostet, biss ich auff so vil berg herum geraiset bin, und alles abgemessen. Wilhelm Schickhart, G. W. — Thesauri loco asservetur."

Dazu kreisrunde Scheiben von 16cm Durchmesser mit Strahlen und beigeschriebenen Zielpunktsnamen.

Zu dem Worte „Portolani" entnehmen wir aus einem Berichte über den Deutschen XI. Geographentag in Bremen, 19. April 1895, Prof. Oberhummer (München), „dass im Altertum Seekarten vorhanden gewesen sein müssen, die erhaltenen Periplen, die den Portolanen der Italiener entsprächen, verlangen eine kartographische Ergänzung". Das von Schickhart gebrauchte griechische Wort Πορ... ist noch nicht erklärt.

Das von Regelmann beigegebene Facsimile der Seite 216 dieses Buches giebt:

Vayhing auf d. Fildern 15. Febr. 1635.

108 Mayring	126 Sielming
135 Hoh. Neuffen	115 Pliening
145 Hoh. Aurach	73½ Degerloch
140 Echterding	45 Cannstatt
193 Rohr	46 . . oder 47 . . circiter, Stuttgart
127 Bernhausen	65 Kaltenthal.

Hiezu sind uns die Coordinaten der heutigen Württembergischen Landesvermessung, bezogen auf Tübingen, mitgeteilt worden, mit welchen wir folgende Richtungswinkel berechnet haben:

106° 16′ Möhringen	124° 17′ Unter-Sielmingen
133 12 Hohen-Neuffen	113 54 Plieningen
143 15 Hohen-Urach	72 2 Degerloch
137 58 Echterdingen	43 24 Cannstatt
191 13 Rohr	45 32 Stuttgart
126 2 Bernhausen	? Kaltenthal

Vaihingen mit $y = +4342^m$ und $x = +23672^m$ liegt 3′ 32″ östlich von Tübingen und hat gegen Tübingen die Meridianconvergenz $= 2' 40''$. Damit und durch Vergleichung der beiden vorstehenden Zahlenreihen findet man weiter, dass Schickharts Angaben von 1635 magnetische Azimute sind mit einer Missweisung 2° 40′ westlich, auch kann man daraus den mittleren Fehler von Schickharts Kompass-Peilungen berechnen, derselbe ergiebt sich $= \pm 22'$.

Zu dieser magnetischen Missweisung von $\delta = 2° 40'$ westlich für das Jahr 1635 mögen auch noch zwei andere alte Angaben aus Württemberg citiert werden, nämlich nach Kieser 1684, $\delta = 5° 49'$ westlich („Zeitschr. f. Verm. 1893", S. 15) und Joh. Majer in Walddorf 1705, $\delta = 9° 30'$ westl. (Jordan-Steppes, „deutsches Verm. I." S. 265) und nach Regelmann S. 45 giebt Majer auch an: Deklination „welche alle 7 Jahre variert" (jährliche Änderung $\frac{1°}{7}$?).

Auf den 216 Seiten seines Pinax hat Schickhart mehrere tausend Richtungsmessungen von 1624—1635 gesammelt, und daraus eine Karte konstruiert in 13 Blättern in 1 : 130 000, von denen leider nur noch ein *einziges*, Tabule VIII, in Form der heutigen Gradabteilungskarten, mit 50′ geogr. Länge und 25′ geogr. Breite erhalten ist. Alle 12 anderen Blätter sind — ein echt schwäbisches Schicksal — im dreissigjährigen Krieg zu Grunde gegangen. Aber wenigstens eine Verkleinerung und Ergänzung des Schickhartschen Landesvermessungswerkes vom Anfang des 17. Jahrhunderts ist erhalten und weiter ausgebildet worden in der Karte des Herzogtums Wirtenberg des Pfarrers Joh. Majer in 1 : 250 000 von 1710, über welche wir früher (Jordan-Steppes, „deutsch. Verm. 1882", S. 264—265) einiges berichtet haben.

Dass Schickhart bereits die Aufgabe des Rückwärts-Einschneidens (Konstruktion mit 2 Kreisen) kannte, haben wir auch schon früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1892“, S. 297 durch einen Brief von Schickhart an Kepler von 1624, mitgeteilt, wie auch in unserem Band II. 4. Aufl. 1893, S. 307, und Schickharts Anschauung des Messtisches daselbst S. 687.

In diesem Zusammenhange ist auch zu erwähnen (aber allerdings nicht als trigonometrische Messung) das altwürttembergische Forstkartenwerk in 1 : 8256 von Kieser, beschrieben von Regelmann in der „Zeitschr. f. Verm. 1893“, S. 7—19.

Nach neuester Mitteilung ist Aussicht vorhanden, dass das Württembergische statistische Landesamt den ganzen *Pinax* Schickharts mit einer Übersichtskarte veröffentlichen und dadurch eine Ehrenpflicht gegenüber dem Ahnherrn der Schwäbischen Geodäten erfüllen wird. — Die Fortsetzung der Untersuchungen von Herrn Steiff würde sich namentlich auch darauf erstrecken, ob Schickhart 1830 seine auf einige Minuten genauen Winkelmessungen nur graphisch verwertet hat oder ob er auch schon im heutigen Sinne trigonometrisch gerechnet hat?

§ 127. Die französischen Gradmessungen des vorigen Jahrhunderts.

Von den Niederländern (Snellius 1615) ging die geodätische Führerschaft an die Franzosen über, welche namentlich im 18ten Jahrhundert die berühmten Gradmessungen in Peru und Lappland ausgeführt haben, durch welche die Abplattung der Erde geodätisch entschieden worden ist.

Die französische Gradmessung in Peru von 1736 ist beschrieben in dem Werke „Mesure des trois premiers degrés dans l'hémisphère australe, par M. de La Condamine“, Paris 1751. Auf S. 22—39 dieses Werkes sind die Winkel von 43 Dreiecken mitgeteilt. Der grösste Widerspruch ist 13″ und die Quadratsumme aller Widersprüche ist 1718, also der mittlere Winkelfehler:

$$m = \sqrt{\frac{1718}{43 \,.\, 3}} = \pm 3{,}65'' \tag{1}$$

Auf S. 85 dieses Werkes wird auch der Basisanschluss mitgeteilt. Die Triangulierung stützte sich auf die 6273 Toisen lange Basis von Yarouqui und leitete aus derselben durch 43 Dreiecke die Basis von Tarqui ab mit dem Resultat 5260,03 Toisen, während die unmittelbare Messung 5258,949 Toisen gab. Die Differenz ist:

$$1{,}081 \text{ Toisen oder } 205^{mm} \text{ für } 1^{km}.$$

Die Entfernung beider Grundlinien unter sich ist etwa 3° oder ungefähr 330 Kilometer.

Die Triangulierung der französischen Gradmessung in Lappland vom Jahre 1736 zwischen Tornea und Kittis umfasst 21 Dreieckspunkte mit einer Basis. Diese Triangulierung ist deutscherseits wiederholt nach d. M. d. kl. Q. behandelt worden. Im Jahre 1827 wurde dieselbe von Rosenberger ausgeglichen, wobei der wahrscheinliche Fehler eines Winkels = 6,0″ berechnet wurde („Astr. Nachr.“, 6. Band, S. 18). Hansen hat im Jahr 1831 ebenfalls eine Ausgleichung dieser Triangulierung unternommen und findet den mittleren Winkelfehler = 10,99″ („Astr. Nachr.“ 9. Band, S. 243). Der Unterschied rührt davon her, dass Rosenberger, wie Hansen „Astr.

Nachr." 9. Band, S. 216 angiebt, unter 24 Bedingungs-Gleichungen 6 hatte, welche bereits in den übrigen enthalten waren.

Nach einer Notiz von Nagel im „Civilingenieur 1890", S. 412 findet man aus 16 Dreiecken nach der internationalen Formel:

$$m = \sqrt{\frac{8744}{16 \, . \, 3}} = \pm 13{,}50'' \tag{2}$$

Die französische Gradmessung von Méchain und Delambre zwischen Dünkirchen und Barcelona von 1792 wurde in 3 Bänden 1806—1810 veröffentlicht in dem berühmten Werke: „Base du système métrique etc." III. Band, S. 605 sagt über die Genauigkeit:

bei 36 Dreiecken	ist der Dreiecks-Widerspruch w zwischen	$0''$	und	$1''$
„ 27	„ „ „ „ „ „ „	$1''$	„	$2''$
„ 18	„ „ „ „ „ „ „	$2''$	„	$3''$
„ 4	„ „ „ „ „ „ „	$3''$	„	$4''$
„ 3	„ „ „ „ „ „ „	$4''$	„	$5''$

Indem man nun auch für die einzelnen w jeweils den Durchschnitts-Wert der betreffenden Gruppe nimmt, z. B. $0{,}5''$ für die ersten 36 Dreiecke, $1{,}5''$ für die folgenden 27 Dreiecke u. s. w., berechnet man den mittleren Winkelfehler näherungsweise $m = \pm 1{,}05''$.

(Dieses sind 88 Dreiecke, während auf S. 605 die Zahl 90 Dreiecke genannt ist.)

Nagel berechnet im Civilingenieur 1890 S. 412 nach der internationalen Formel aus 98 Dreiecken:

$$m = \sqrt{\frac{367{,}48}{98 \, . \, 3}} = \pm 1{,}12'' \tag{3}$$

§ 128. England, Russland, Dänemark.

I. *Die britische Landes-Vermessung.*

Die schon 1783 unter General Roy begonnene Triangulierung gelangte 1858 zum Abschluss unter James und Clarke.

Es wurde hierüber ein grosses Werk herausgegeben:

„Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland. Account of the observations and calculations of the principal triangulation and of the figure, dimensions and mean specific gravity of the earth as derived from, etc., by Captain Alexander Ross Clarke under the direction of Colonel H. James, Superintendent of the Ordnance survey. London 1858."

Die Ausgleichung der Triangulierung ist in 21 Partial-Netze, mit zusammen 202 Punkten, zerlegt worden.

Die Ausgleichung erfolgte nach Richtungen („ord. trig. surv." S. 273—277). Der Netz-Ausgleichung ging eine genäherte Stations-Ausgleichung voran, welche wir schon in § 69, Tabelle S. 228 beschrieben haben. An diese Stations-Ausgleichungen schlossen sich genäherte Gewichts-Bestimmungen an („ord. trig. surv." S. 66), wobei teils die Abweichungen der einzelnen Richtungs-Beobachtungen von ihrem Mittel, teils die Zahl der Einstellungen, als Genauigkeitsmass dienten. Die Resultate der Stations-Ausgleichungen gingen mit diesen Gewichten wie unmittelbar beobachtete Richtungen in die Netz-Ausgleichungen ein.

Es findet also in jedem einzelnen der 21 Partialnetze Richtungs-Ausgleichung mit ungleichen Gewichten statt, worüber schon in § 82. S. 283 einiges bemerkt wurde.

Die Anzahl aller Richtungen ist 1554, es kommen also durchschnittlich 74 Richtungen auf ein Partialnetz.

Als ganzes behandelt hätte die Ausgleichung 920 Gleichungen gegeben, während in den Gruppen die Gleichungs-Anzahl zwischen 12 und 64 sich bewegt („ord. trig. survey" S. 277). In Bezug auf die gegenseitigen Gruppen-Anschlüsse wird auf S. 272—273 Folgendes berichtet: Nachdem eine Gruppe unabhängig von allen anderen ausgeglichen war, wurden die daraus erhaltenen Korrektionen in den Bedingungs-Gleichungen der nächsten Gruppe substituiert und die Quadratsumme der Fehler in dieser zweiten Gruppe zum Minimum gemacht, in gleicher Weise schloss sich eine zweite Gruppe an, und so fort. Vier der Triangulierungs-Gruppen haben unabhängigen Anfang (oder fünf nach S. 276 und 277, nämlich 1. 6. 7. 12. 14.), ohne fremde Bedingungen, vielmehr wurden Bedingungen aus diesen Anfangs-Gruppen in die anstossenden Gruppen übertragen. Für die Anschlüsse der gemessenen Grundlinien wurden keine Zwangs-Bedingungen eingeführt, denn es kamen niemals 2 Grundlinien in einer Gruppe zusammen. Zwar könnte man durch Basis-Anschlussbedingungen die Fehler-Anhäufung vermindern, allein andernfalls bekommt man in den ungezwungenen Basis-Anschlüssen eine gute Probe für die Theodolit-Arbeit.

Über die Winkel-Genauigkeit sind keine Berechnungen angestellt, doch sind die Dreiecks-Schlüsse sämtlich angegeben; wir haben aus diesen 464 Dreiecks-Schlüssen („ord. trig. surv." S. 426—495) folgende Tabelle gebildet, wobei mit n die Anzahl der Dreiecke in jeder Gruppe, mit $[\pm w]$ die absolute Summe der Dreiecks-Widersprüche und mit $\frac{[\pm w]}{n}$ deren Durchschnittswerte bezeichnet sind.

Gruppe Num.	n	$[\pm w]$	$\frac{[\pm w]}{n}$	Gruppe Num.	n	$[\pm w]$	$\frac{[\pm w]}{n}$
1.	21	34,65″	1,6″	11.	35	116,67″	3,3″
2.	24	94,58	3,9	12.	16	32,49	2,0
3.	14	66,31	4,7	13.	16	69,23	4,3
4.	19	65,68	3,5	14.	22	43,03	2,0
5.	40	104,31	2,6	15.	45	202,14	4,5
6.	14	78,69	5,6	16.	29	63,72	2,2
7.	18	42,70	2,4	17.	19	57,17	3,0
8.	20	39,54	2,0	18.	12	33,35	2,8
9.	21	27,08	1,3	19.	19	45,42	2,4
10.	14	38,77	2,8	20.	19	53,25	2,8
				21.	27	105,79	3,9
Summe von 1. bis 21.					464	1414,57	

Aus allen 464 Dreiecken hat man also nach der Bequemlichkeitsformel (13) § 124. S. 475:

$$m = 1{,}2533 \frac{1414{,}57}{464 \sqrt{3}} = \pm 2{,}21''$$

In dem Rapport sur les triangulations, Brüssel 1892, von Ferrero, Grande Bretagne S. 4 wird nach der internationalen Formel berechnet aus 476 Dreiecken:

$$m = \pm 1{,}79''$$

ausserdem auf S. 30 aus 552 Dreiecken:

$$m = \sqrt{\frac{5548}{552\,.\,3}} = \pm 1{,}83'' \tag{1}$$

Wir wollen auch noch die Basisanschlüsse mitteilen:

Von den 6 gemessenen Grundlinien wurden zwei ausgewählt, nämlich die von Lough Foyle und Salisbury Plain, welche mit Colby s Kompensations-Stangen gemessen sind. Die trigonometrische Verbindung zwischen den zwei ausgewählten Grundlinien gab einen Widerspruch von 0,418 Fuss dessen Verteilung auf *eine* Masseinheit für die ganze Vermessung führte. Die Differenzen zwischen den wirklich gemessenen Linien und den hiefür trigonometrisch aus jener festgesetzten Einheit abgeleiteten Werten zeigt folgende Tafel („ord. trig. surv." S. XIV und S. 422):

Jahr	Basis	Basismess-Apparat	Basislänge	trigon. Resultat	Differenz	für 1km
			engl. Fuss	engl. Fuss	engl. Fuss	mm
1791	Hounslow Heath	Stahlkette	27 406,190	27 406,363	+ 0,173	+ 6,3
1794	Salisbury Plain I	Stahlkette	36 576,830	36 577,656	+ 0,826	+ 22,6
1801	Misterton Carr	Stahlkette	26 344,060	26 343,869	− 0,191	− 7,2
1806	Rhuddlan Marsh	Stahlkette	24 516,000	24 517,596	+ 1,596	+ 65,1
1817	Belhelvie	Stahlkette	26 517,530	26 517,770	+ 0,240	+ 9,1
1827	Lough Foyle	Kompens.-Stangen	41 640,887	41 641,103	+ 0,216	+ 5,2
1849	Salisbury Plain II	Kompens.-Stangen	36 577,858	36 577,656	− 0,202	− 5,5
			219 579,355	219 582,013	+ 2,658	

Die Entfernungen der Grundlinien von einander betragen zwischen 62 und 371 englischen Meilen („ord. trig. survey" S. 424) oder etwa zwischen 100 und 600 Kilometern.

Die Gesamtlänge dieser 7 Grundlinien ist rund 66,9km, also eine Grundlinie im Mittel 9,6km.

II. Russland.

Die erste Russische Gradmessung ist behandelt in dem Werke:

„Beschreibung der unter allerhöchstem Kaiserlichen Schutze von der Universität veranstalteten Breitengrad-Messung in den Ostsee-Provinzen Russlands, ausgeführt und bearbeitet 1821—1831 mit Beihilfe von B. W. v. Wrangel und Anderen, von *F. G. W. Struve*, Direktor der Dorpater Sternwarte. Erster und zweiter Teil, Dorpat 1831. (S. 137—138 und S. 148—149.)

Der mittlere Fehler eines Dreiecks-Winkels nach den Wiederholungen und Vergleichungen auf den Stationen fand sich:

$$m = \pm 0{,}60''$$

Für 31 geschlossene Dreiecke ist die Quadratsumme der Widersprüche = 30,60, also der mittlere Fehler eines Winkels hieraus:

$$m = \sqrt{\frac{30{,}60}{31\,.\,3}} = + 0{,}57'' \tag{2}$$

Aus der Vereinigung der beiden von Struve und Tenner geleiteten Gradmessungen wurden 2 Dreiecke doppelt erhalten, deren Proben im 10. Band (1833) der „Astr. Nachr." S. 323—328 mitgeteilt sind, (auch abgedruckt in unserer vorigen Auflage, III. Band, 2. Aufl. 1890, S. 178—179).

III. Dänemark.

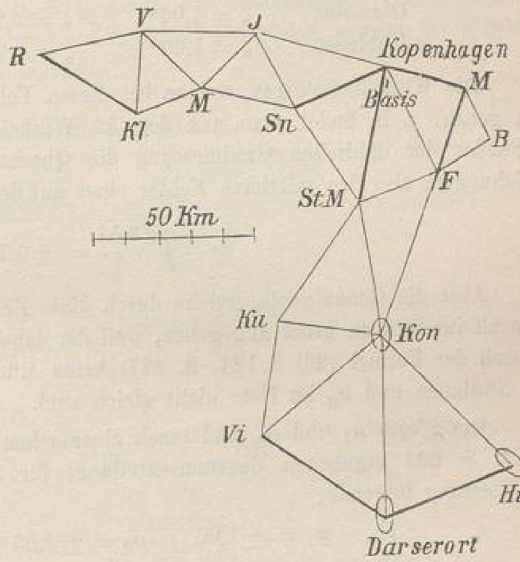
Die dänische Gradmessung wurde im Jahr 1816 unter Leitung von Schumacher begonnen, und bis 1823 von Altona bis Lysabbel auf Alsen fortgesetzt, dann 1837 bis 1848 weiter ausgedehnt, 1850 unter Leitung von Andrae vollendet und veröffentlicht in dem Werke:

„Den Danske Gradmaaling, udgived af C. G. Andrae, Geheime Etatsraad og Directeur for Gradmaalingen Kjobenhavn, I.—IV. Band, 1867—1884". Hiezu gehört auch:

„Problèmes de haute géodésie, extraits de l'ouvrage danois: „den danske gradmaaling", 1er cahier: Formation et calcul des triangulations géodésiques, Copenhague 1881; 2er cahier: calcul des latitudes, des longitudes et des azimuts sur le sphéroïde terrestre etc. 1883."

Ein interessanter Litteratur-Bericht über das Werk: „Den Danske Gradmaaling" ist von Helmert gegeben in der „Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft", 1877, S. 184—239 und 1878, S. 57—80.

Fig. 1.
Dänisches Haupttriangulierungs-Netz.
(Massstab 1 : 2 500 000.)



Die dänische Triangulierungs-Berechnung zeichnet sich durch feine Theorieen und durch scharfe Genauigkeits-Untersuchungen aus. Unsere Fig. 1. zeigt einen Teil der dänischen Dreiecke, welche auf Grund der Kopenhagener Basis berechnet sind. Die Verbindung der 2701 Meter langen Grundlinie bei Kopenhagen mit der ersten Hauptseite Kopenhagen—Snoldelev wird durch ein Basisnetz von 5 Dreiecken erzielt (welches in Fig. 1. wegen Kleinheit des Massstabes nicht mit aufgenommen ist). Für die 7 Dreiecks-Seiten, welche in Fig. 1. stark gezogen sind, sind die mittleren Fehler berechnet worden, und zwar mit Trennung des Einflusses der Winkelmessungs-Fehler von dem Einfluss des Basisfehlers. Folgende Tabelle giebt hiefür die Fehlerquotienten, ausgedrückt in Millionteilen der Seiten selbst, oder in Millimetern für 1 Kilometer.

Dreiecks-Seiten s	Anzahl der Dreiecke	Fehler, herrührend von Winkel-messung	Basis-messung	Mittlerer Gesamt-fehler
Grundlinie	. .	0,0	1,7	1,7 Milliontel
Kopenhagen-Snoldelev	5	4,4	1,7	4,7
Kopenhagen-St. Möllehöi	6	4,5	1,7	4,8
Kopenhagen-Malmö	8	4,9	1,7	5,2
Malmö-Falsterbo	8	5,0	1,7	5,3
Refsnaes-Klöveshöi	11	6,8	1,7	6,9
Vigerlöse-Darserort	11	7,1	1,7	7,3
Darserort-Hiddensö	12	7,3	1,7	7,5

Man bemerkt, dass der Einfluss des Basisfehlers neben dem Einfluss der Winkelfehler schon im 5ten Dreieck fast verschwindet.

Für die Punkte Kongsbjerg, Darserort und Hiddensö wurden auch die Fehlerellipsen berechnet.

Indem die Kopenhagener Basis als fehlerfrei angenommen wird, und alle Winkelfehler von der Basis an berücksichtigt werden (Andrae Fall II.), hat man die grosse Halbaxe a, die kleine Halbaxe b und das Azimut z der grossen Halbaxe für die erwähnten drei Fehler-Ellipsen:

Kongsberg	$a = 0{,}56^m$	$b = 0{,}12^m$	$z = 1°$
Darserort	„ $= 1{,}06^m$	„ $= 0{,}29^m$	„ $= 178°$
Hiddensö	„ $= 1{,}00^m$	„ $= 0{,}34^m$	„ $= 156°$

Die Winkelmessungen, welche bei diesen Fehler-Ellipsen benützt wurden, sind sehr genau, z. B. findet man aus den 32 Winkel-Verbesserungen von S. 296 des 1. Bandes der dänischen Gradmessung die Quadratsumme 3,57 mit 7 Bedingungs-Gleichungen, also den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels:

$$m = \sqrt{\frac{3{,}57}{7}} = \pm 0{,}71''$$

Aber die Genauigkeit, welche durch diese Fehler-Ellipsen veranschaulicht wird, ist noch insofern zu gross angegeben, weil der dabei benützte Gewichtseinheits-Fehler (μ nach der Formel (23) § 124. S. 477) keine Rücksicht darauf nimmt, dass μ_1 in den Stationen und μ_2 im Netz nicht gleich sind.

Die Werte μ_1 und μ_2 sind (nach einer schon früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1877“, S. 393 gegebenen Zusammenstellung) für 5 Ausgleichungen der dänischen Gradmessung folgende:

1)	$\mu_1 = \pm 1{,}00$	$\mu_2 = \pm 1{,}63$	$\mu_2 : \mu_1 = 1{,}63$
2)	1,00	1,65	1,65
3)	1,00	3,08	3,08
4)	1,64	2,99	1,82
5)	0,96	1,75	1,82

Der Wert 3) $\mu_2 : \mu_1 = 3{,}08$ ist durch besondere Umstände bedingt, im übrigen ist im Mittel rund:

$$\mu_2 : \mu_1 = 1{,}7$$

d. h. nahezu derselbe Wert wie bei der preussischen Landes-Triangulierung.

Nach dem „Rapport sur les triangulations“ von Ferrero, Brüssel 1892, Seite 5 und Seite IV, 5 hat Dänemaek nach der internationalen Formel:

1817—1824	$[w^2] = 37{,}25$	$n = 20$	$m = \pm 0{,}79''$
1837—1847	„ $= 152{,}19$	„ $= 51$	„ $= \pm 1{,}00''$
1867—1870	„ $= 9{,}39$	„ $= 16$	„ $= \pm 0{,}44''$
	$[w^2] = 198{,}83$	$n = 87$	

also aus allen 87 Dreiecken:

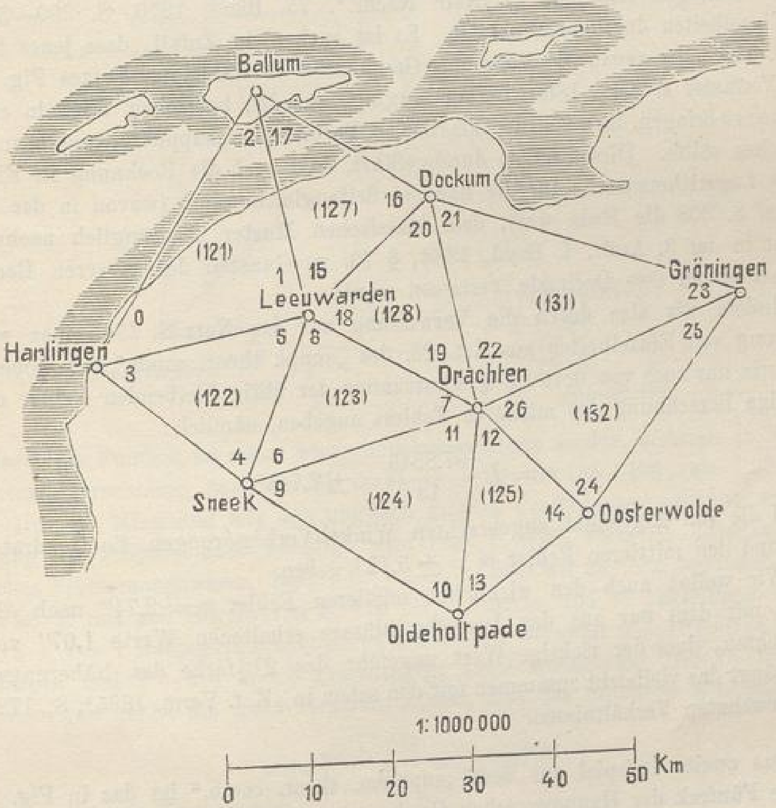
$$m = \sqrt{\frac{198{,}83}{87 \, . \, 3}} = \pm 0{,}87'' \tag{3}$$

§ 129. Die klassischen Arbeiten von Gauss.

Die Theorie der Triangulierungs-Ausgleichung ganzer Netze nach bedingten Beobachtungen (mit Correlaten) ist zuerst veröffentlicht 1826 von Gauss in dem „supplementum theoriae combinationis" (vgl. S. 4 oben oder Gauss' Werke, IV. Band, S. 82—93).

Allerdings die erste trigonometrische Ausgleichung überhaupt ist etwas früher, nämlich 1821, eine Rückwärtseinschneidung für einen Stationspunkt mit 6 Richtungsbeobachtungen (vgl. S. 5 und S. 230) allein die Dreiecks*netze* treten 1826 in dem „supplementum ..." zum erstenmal auf mit zwei Beispielen, erstens für Winkelmessungen, zweitens für Richtungsmessungen.

Fig. 1. Niederländisches Dreiecksnetz.



Das erste Beispiel von art. 23. des suppl. ist in Fig. 1. gezeichnet, die Messungen sind genommen aus „Krayenhof, précis historique des operations trigonométriques en Hollande" (vgl. auch allgemeine geographische Ephemeriden, 4. Band, 1799, S. 80 und „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 172—173). Die 27 Dreieckswinkel, welche in Fig. 1. mit 0, 1... 26 numeriert sind, gelten als einzeln unabhängig gemessen (ob sie das wirklich sind, kam bei einem Rechenbeispiele jener Abhandlung wohl nicht sehr in Frage). Es bestehen 9 Dreiecke mit folgenden Schlussfehlern:

		w	w^2
121.	c	$-3,958''$	15,6658
122.	d	$+0,722$	0,5213
123.	e	$-0,753$	0,5670
124.	f	$+2,355$	5,5460
125.	g	$-1,201$	1,4424
			23,7425

		w	w^2
127.	h	$-0,461''$	0,2125
128.	i	$+2,596$	6,7392
131.	k	$+0,043$	0,0018
132.	l	$-0,616$	0,3795
			23,7425
			31,0755

Nach der heutigen internationalen Formel würde man also rechnen:

$$m = \sqrt{\frac{31,0755}{9\,.\,3}} = \pm 1,073'' \tag{1}$$

Indessen ist davon jetzt nicht die Rede. Wir wollen vielmehr die Gauss sche Ausgleichung verfolgen, und können uns insofern kurz fassen, als ein ganz ähnliches Beispiel, ebenfalls mit 9 Dreiecken und 27 Winkeln mit 2 Horizontproben und 2 Seitengleichungen, dessen Netz auf S. 174 gezeichnet ist, seit Jahren in unseren früheren Auflagen (erstmals in „Astr. Nachr.", 75. Band, 1870, S. 299—302) mit allen Einzelheiten durchgerechnet ist. Es ist auch nicht Zufall, dass jenes badische Netz S. 174 ganz genau die Form des Gauss schen vorstehenden Netzes Fig. 1. hat, indem Verfasser s. Zeit, 1869, darauf ausging, aus den badischen Winkeln ein Netz zusammen zu bringen, das genau dem klassischen Vorbilde des „supplementum theor. comb." entsprechen sollte. Dieses ist so durchgeführt, dass auch die Rechnung in Einheiten der 7ten Logarithmenstelle für die linearen Seitengleichungen, (wovon in der Controverse auf S. 308 die Rede war), dem klassischen Muster ursprünglich nachgeahmt, und erst in der 3. Aufl., I. Band, 1888, § 70. zu Gunsten der besseren Rechnung, in Einheiten der 6ten Decimale, verlassen wurde.

Indem wir also durch die Verweisung auf das Netz S. 174 einer weiteren Vorführung von Einzelheiten aus Art. 23. des „suppl. theor. comb." überhoben sind, wollen wir nur noch von dort die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler und die zugehörige Berechnung des mittleren Fehlers angeben, nämlich:

$$m = \sqrt{\frac{97,8845}{13}} = \pm 2,7440'' \tag{2}$$

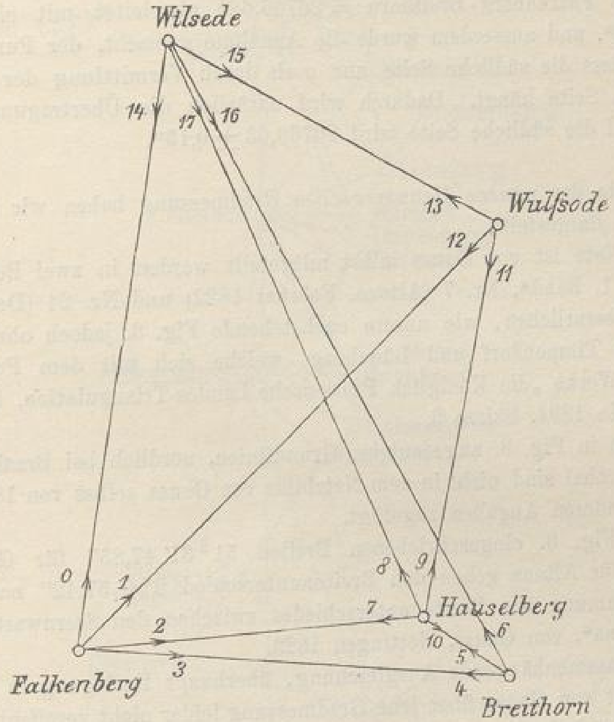
während die von Krayenhof angebrachten Winkel-Verbesserungen die Quadratsumme 341,42 und den mittleren Fehler $m = \pm 5,12''$ geben.

Wir wollen auch den wirklichen mittleren Fehler $m = 2,74''$ nach (2) vergleichen mit dem nur aus den Dreiecksschlüssen erhaltenen Werte 1,07'' von (1), und beachten, dass der richtige Wert ungefähr das $2\frac{1}{2}$fache des Näherungswertes ist; es hängt das vielleicht zusammen mit den schon in „Z. f. Verm. 1885", S. 172—173 unten, erwähnten Verhältnissen.

Das zweite Beispiel aus dem „supplem. theor. comb." ist das in Fig. 2. gezeichnete Fünfeck der Hannover schen Gradmessung, deren Netz von Gauss als Beilage der „Astr. Nachr.", 1. Band, Nr. 24 mitgeteilt worden ist, wie wir in unserer nachfolgenden Fig. 3. S. 493 sehen werden.

Bleiben wir bei diesem als Beispiel herausgeschnittenen Fünfeck stehen, so können wir über dasselbe in Kürze sagen, dass es eine Ausgleichung nach gleichgewichtigen *Richtungen* enthält, ähnlich wie unsere zwei Beispiele von § 59. S. 178 und § 61. S. 189; und es sind unsere dort gegebenen Rechnungen in der That nichts anderes als Nachahmungen des nun schon 70 Jahre alten Beispiels aus der Lüneburger Haide, nur mit dem formellen Unterschiede, dass nicht mehr in Einheiten der 7ten Logarithmenstelle in den linearen Seitengleichungen gerechnet wurde (vgl. 308).

Fig. 2. (1 : 500 000.)



Das klassische Fünfeck ist schon wiederholt kommentiert worden, erstmals in Helmert s Ausgleichungsrechnung nach der M. d. kl. Q. 1872, S. 185—195, wo auch bereits auf S. 189 der Missstand mit den ungleich grossen Coefficienten erkannt und durch Änderung der Masseinheiten beseitigt wird (vgl. S. 308), ferner in „Jordan-Steppes, Deutsches Vermessungswesen, 1882“, S. 1—10, so dass wir uns hier begnügen können, nach Fig. 1. mit den Regeln von S. 176 für 5 Punkte und 18 Richtungen die Zahl $18 - 15 + 4 = 7$ Bedingungsgleichungen abzuzählen, worunter $9 - 10 + 3 = 2$ Seitengleichungen und $9 - 5 + 1 = 5$ unabhängige Dreiecksschlüsse. Die 18 Richtungsverbesserungen geben die Quadratsumme 1,2288, also den mittleren Richtungsfehler:

$$\mu = \sqrt{\frac{1,2288}{7}} = \pm 0,419'' \tag{3}$$

oder den mittleren Winkelfehler:

$$m = \mu \sqrt{2} = \pm 0,593'' \tag{4}$$

Es ist vielleicht auch hier gut, die Anwendung der internationalen Fehlerformel von § 123. zu machen; es sind 7 Dreiecke möglich, welche geben:

w	$-1,368''$,	$-1,139''$,	$+1,773''$,	$+1,042''$,	$-1,481''$,	$-0,813''$,	$-0,750''$
w^2	1,8714 ,	1,2973 ,	3,1435 ,	1,0858 ,	2,1934 ,	0,6610 ,	0,5625

$$m = \sqrt{\frac{10,8149}{7 \,.\, 3}} = \pm 0,718'' \tag{5}$$

Es wird dann noch von Gauss in Art. 25. des „suppl." das Funktionsgewicht einer Seite berechnet (also ähnlich wie wir zu unserem Hannoverschen Fünfeck in § 62. die Genauigkeit einer Netzdiagonale berechnet haben). Es wurde die nördliche Seite Wilsede-Wulfsode = 22877,94^m als fehlerfreie Basis angenommen und daraus die südliche Seite Falkenberg-Breithorn = 26766,68^m abgeleitet mit einem mittleren Fehler $\pm$ 0,12^m, und ausserdem wurde die Annahme gemacht, der Punkt Hauselberg falle fort, so dass die südliche Seite nur noch durch Vermittlung der westlichen an der nördlichen Seite hängt. Dadurch wird natürlich die Übertragungs-Genauigkeit vermindert und die südliche Seite wird 26766,63 $\pm$ 0,15^m.

Das Netz der *ganzen* Hannoverschen Gradmessung haben wir in Fig. 3. auf folgender Seite dargestellt.

Dieses Netz ist von Gauss selbst mitgeteilt worden in zwei Beilagen zu den „Astr. Nachr., 1. Band", Nr. 7 (Altona, Februar 1822) und Nr. 24 (Dezember 1822), letzteres im Wesentlichen, wie unsere nachstehende Fig. 3. jedoch ohne die Verbindung zwischen Timpendorf und Lüneburg, welche sich mit dem Punkte Nindorf findet in dem Werke „die Königlich Preussische Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, VI. Teil", Berlin 1894, Skizze 3.

Auch die in Fig. 3. angedeuteten Grundlinien, nördlich bei Braak und südlich bei Seeberg (Gotha) sind nicht in dem Netzbilde von Gauss selbst von 1822 enthalten, sondern nach anderen Angaben zugefügt.

Die in Fig. 3. eingeschriebenen Breiten 51° 31′ 47,85″ für Göttingen und 53° 32′ 45,27″ für Altona geben den Breitenunterschied 2° 0′ 57,42″ nach S. 64 des Werkes „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona", von Gauss, Göttingen 1823.

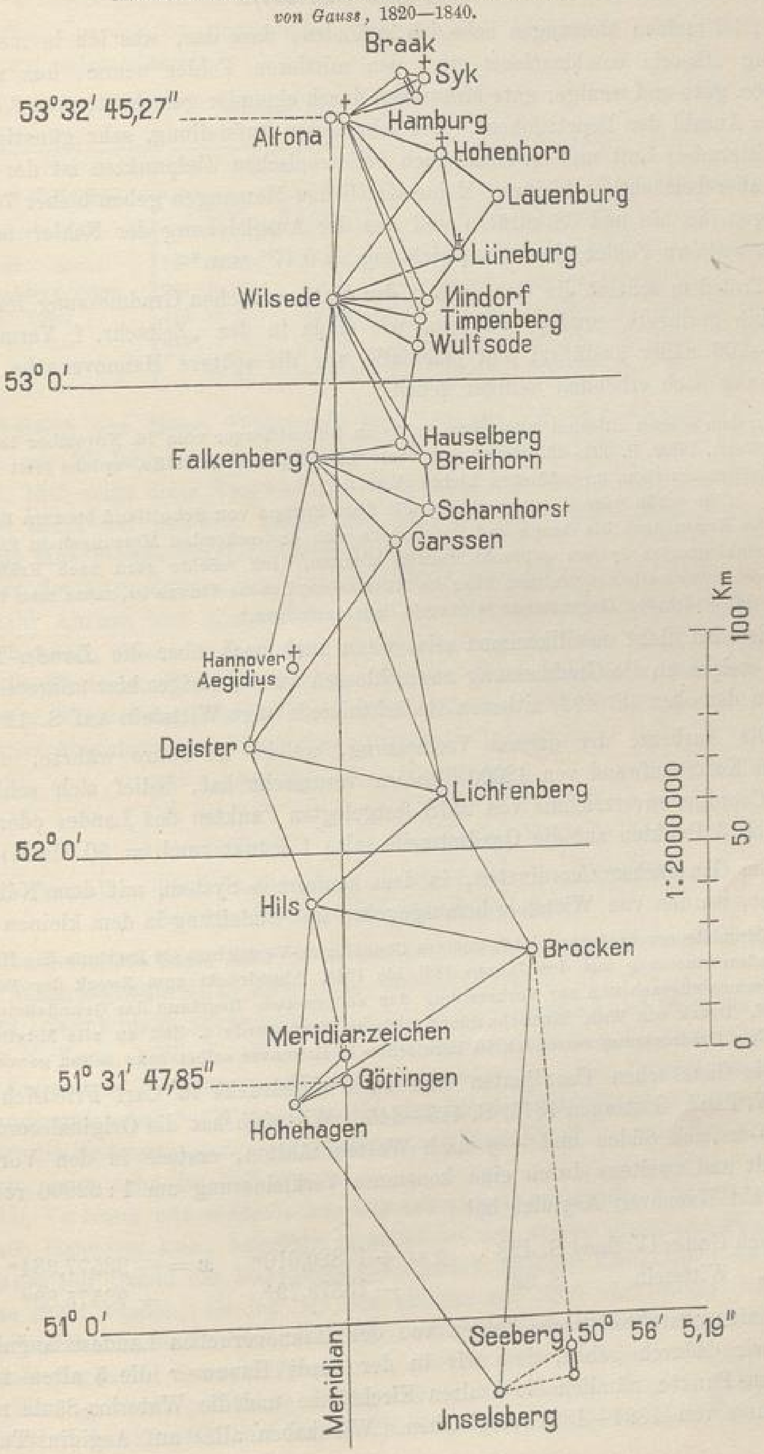
Eine zusammenhängende Ausgleichung, überhaupt Darlegung in einem öffentlichen Werke ist von Gauss über jene Gradmessung leider nicht veröffentlicht worden. Die Originalakten befanden sich bis nach 1866 in dem Königlichen Archive zu Hannover, wurden dann aber auf Requisition des Generalfeldmarschalls v. Moltke an den Preussischen Generalstab nach Berlin abgegeben, wo sie sich im Besitze der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme noch befinden.

Auf diesem Wege ist über die Geschichte der Gaussschen Vermessungen in Hannover erst in neuester Zeit Aufklärung gegeben worden durch eine Arbeit: „Beiträge zur Kenntnis von Gauss' praktisch geodätischen Arbeiten, nach Original-Materialien bearbeitet von *Gaede*, Hauptmann, bei der trig. Abteilung der Landesaufnahme." („Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 113, 145, 161, 177, 193, 225.) Ferner ist hier zu erwähnen: „Gedächtnisrede auf Carl Friedrich Gauss, zur Feier des 30. April 1877", von Theodor Wittstein, Dr. phil. und Professor. Hannover Hahnsche Buchhandlung 1877.

Wir wollen nur einige charakteristische Stellen zitieren:

An Bessel schrieb Gauss am 5. November 1823 („Briefwechsel mit Bessel", S. 423 und „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 205): „Ich habe das System meiner Hauptdreiecke in diesen Tagen sorgfältig ausgeglichen .... Es sind zusammen 26 Dreiecke, worin alle Winkel von mir selbst beobachtet sind. Die grösste Summe der Fehler ist 2,2″, wo bei einer Seite das Pointieren sehr schwierig war; die nächstgrösste ist 1,8″. Keine der 76 vorkommenden Richtungen ist bei der Ausgleichung um eine ganze Sekunde geändert, die grösste Änderung beträgt 0,813″."

Fig. 3.
Hannover'sche Gradmessung zwischen Göttingen und Altona von Gauss, 1820—1840.



Ferner Gauss an Bohnenberger am 16. November 1823 („Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 431 und „Zeitschr. f. Verm. 1885“, S. 205):

„Bei meinen Messungen habe ich gefunden, dass das, was ich in meiner Abhandlung „theoria combinationis etc.“ den mittleren Fehler nenne, aus mehreren Stationen, gute und weniger gute Messungen durch einander gerechnet, etwa $3{,}5'' : \sqrt{n}$ ist (n = Anzahl der Repetitionen). Bei sehr fester Aufstellung, sehr günstiger (d. i. nicht zitternder) Luft und ausschliesslich heliotropischen Zielpunkten ist der mittlere Fehler aber beträchtlich kleiner. Meine sämtlichen Messungen geben bisher 76 Hauptrichtungen (38 hin und 38 zurück) und aus der Ausgleichung der Fehler fand sich, dass der *mittlere* Fehler einer Hauptrichtung $= 0{,}47''$ war.“

Trotzdem scheint die Genauigkeit der Hannoverschen Gradmessung im ganzen doch eine geringere gewesen zu sein, wie Gäde in der „Zeitschr. f. Verm. 1885“, S. 205—206 näher ausführt; und jedenfalls war die spätere Hannoversche *Landes*-Vermessung noch erheblich weniger genau.

In dem soeben zitierten Briefe von Gauss an Bohnenberger vom 16. November 1823 („Zeitschrift f. Verm. 1882“, S. 430—431) findet sich auch eine prophetische Stelle, welche jetzt 70 Jahre, nachdem sie geschrieben, im schönsten Lichte glänzt:

„Wie schön wäre es, wenn einmal alle über Europa von Schottland bis zum Banat und von Kopenhagen bis Genua und Formentera sich erstreckenden Messungen in Ein zusammenhängendes System gebracht werden könnten. Ich möchte gern nach Kräften dazu vorbereiten, allein wenn man über die Mitte seines Lebens hinaus ist, muss man bei einem so ausgedehnten Gegenstande je eher je lieber anfangen.“

Es wird nicht unwillkommen sein, wenn auch noch über die *Landes*-Triangulierung, welche an die Gradmessung angeschlossen wurde, einiges hier mitgeteilt wird: In der oben (S. 492) zitierten Gedächtnisrede sagt Wittstein auf S. 12:

Die Ausbeute der ganzen Vermessung, welche 24 Jahre währte, und den mässigen Kostenaufwand von 42000 Thalern verursacht hat, belief sich schliesslich auf ein Coordinatenverzeichnis von 2578 festgelegten Punkten des Landes oder durchschnittlich 3 Punkten auf die Quadratmeile (also 1 Punkt rund = 50 Mark.)

Die Gaussschen Coordinaten, in dem konformen System, mit dem Nullpunkte Göttingen, wurden von Wittstein herausgegeben mit Einleitung in dem kleinen Bande:

„Grundsteuerveranlagung. Allgemeines Coordinaten-Verzeichnis als Ergebnis der Hannoverschen Landesvermessung aus den Jahren 1821 bis 1844. Abgedruckt zum Zweck der Benützung bei den Vermessungsarbeiten zur Vorbereitung der anderweiten Regelung der Grundsteuer. Hannover 1868. Druck von Wilh. Riemschneider.“ (Dieses Werk wurde s. Zeit an alle Mitglieder der Europäischen Gradmessung versendet, ist inzwischen in Hannover selbst sehr selten geworden. —)

Die Gaussschen Coordinaten sind auch abgedruckt in Carl Friedrich Gauss Werke IV. Band, Göttingen 1873, S. 415—445. Wittstein hat die Originalcoordinaten, welche $+x$ nach Süden und $-y$ nach Westen zählten, erstens in den Vorzeichen umgestellt und zweitens durch eine konstante Verkleinerung um 1 : 62900 reduziert, z. B. Punkt Hannover, Aegidius hat

nach Gauss IV Band	S. 428	$y = +13880{,}010^m$	$x = -93577{,}384^m$
„ Wittstein	S. 36	$-13879{,}79^m$	$+93575{,}89^m$

Einige charakteristische Zahlen von der Hannoverschen Landestriangulierung können wir dadurch geben, dass wir in der Stadt Hannover die 5 alten trigonometrischen Punkte, nämlich die 4 alten Kirchtürme und die Waterloo-Säule mit der Neumessung von 1891—1892 vergleichen. Wir haben alles auf Aegidius-Turm als

Centralpunkt bezogen, die Richtungswinkel nach den 4 anderen Punkten aus den Coordinaten berechnet, durch die Meridiankonvergenzen auf Nord reduziert, und auch die aus den Coordinaten berechneten Entfernungen beigesetzt, wodurch folgende Vergleichung entstanden ist:

Abrisse der Station Aegidius.

Richtung nach	1840		1892		Differenzen	
	Azimut	Entfernung	Azimut	Entfernung		
Waterloo-Säule	247° 23′ 15″	841,78m	247° 22′ 40″	841,26m	− 35″	− 0,52m
Neustädter Turm	284 29 22	761,64	284 29 24	761,98	+ 2	+ 0,34
Markt-Turm	313 25 10	378,56	313 24 54	378,58	− 16	+ 0,02
Kreuz-Turm	314 8 0	631,85	314 9 11	631,64	+ 71	− 0,21
	85′ 47″	2613,83m	86′ 09″	2613,46m	+ 22″	− 0,37m

Obgleich von diesen Differenzen vielleicht ein Teil auf Punktverschiebungen im Laufe von 50 Jahren zu rechnen sein wird („Zeitschr. d. Hann. Arch. u. Ing.-Ver. 1889“, S. 156) zeigt diese Vergleichung doch auf einen Blick, dass jene Messungen von 1840 nicht das geliefert haben und offenbar auch nicht liefern wollten, was man heute eine genaue Stadt-Triangulierung nennt.

Von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme in Berlin haben wir eine Anzahl Abrisse und Abschriften „aus dem Gradmessungs-Journal 1823 von C. F. Gauss“, unter welchen sich findet: „Hannover Aegidius, Juli 19. Vormittags, Aufstellung im Zentrum, Repsolds Ocular, Einfache Winkel, Kreis rechts (der Erfolg zeigt starke Verrückung des Bocks)“. Hier sind über 100 Sichten gegeben, welche eine Gesamt-Absuchung des Horizontes vorstellen. Darunter:

133° 35′ 26″ Hannover Marktturm
133 33 24 „ „
104 38 40 „ Neustädter Turm.

An demselben Platz Nachmittags (— 93577,384 + 13880,010)

104° 38′ 55″ Hannover Neustädter Turm.

Wir bemerken dazu, dass der Kreuzturm von Aegidius aus nicht zu sehen ist und die Waterloo-Säule 1823 noch nicht vorhanden war.

Es scheint nicht unpassend, hier auch einen Ausspruch von Gauss zu citieren, (Zeitschr. f. Verm. 1885, S. 185): „Vor Gott ist's am Ende wohl auch einerlei, ob wir die Lage eines Kirchturms auf einen Fuss oder die eines Sternes auf eine Sekunde bestimmt haben.“ Hiernach wurde also bei dem Einschneiden auf weite Entfernungen die Bestimmung eines Kirchturms „auf einen Fuss“ als eine gute angesehen, was heute nicht mehr der Fall ist.

Als Verfasser mit süddeutschen trigonometrischen Begriffen und Anschauungen 1882 nach Hannover kam, bemerkte er sofort bei den ersten Rückwärts-Einschneide-Rechnungen auf Grund der klassischen Coordinaten, dass die Missstimmigkeiten 5 bis 10mal so gross wurden, als bei den aus gleicher und noch viel früherer Zeit stammenden Coordinaten der Türme von Stuttgart oder Karlsruhe; und die trigonometrischen Übungsmessungen bei Springe, Nenndorf u. s. w. bis 1890 bestätigten dieses in vollem Masse. Eine grössere praktische Triangulierung zur Leine-Aufnahme („Zeitschr. f. Verm. 1891“, S. 426—427 und Handb. II. Band, 4. Aufl. 1893, S. 302—303) gab endlich unzweideutig zu erkennen, dass die Landes-Triangulierung 1820—1840 nicht die Absicht gehabt haben kann, eine Grundlage für Kataster-Aufnahmen wie in gleicher Zeit z. B. in Württemberg zu liefern, sondern dass es sich nur um Grundlage für topographische Karten gehandelt haben kann. Die Feldmarks-Vermessungen sind in Hannover ebenso wie überall in Norddeutschland in jener Zeit ohne Anschluss an die Landes-Triangulierungen ausgeführt. Und als man später, wie aus dem Titel des Gauss-Wittstein schen Coordinaten-Verzeichnisses von 1868 zu ersehen ist, anfing, die Gauss schen Coordinaten auch zur „Regelung der Grundsteuer" heranzuziehen, galt das Bestimmen eines trigonometrischen Punktes im Anschluss an die alten Punkte jedesmal als eine Art Haupt- und Staats-Aktion, welche nicht immer zum gewünschten Ziele führte.

Bei alledem ist auch hier wieder zu erinnern: Wenn heute ein Trigonometer in Schwaben oder Preussen — seine $[a\,a]$, $[b\,b.\,1]$ u. s. w. ausrechnet, und seine z durch Mittelbildung eliminiert u. s. w., so thut er nichts anderes als was Gauss 1820 in Hannover ausgedacht und eigenhändig in Tausenden von Fällen ausgerechnet hat. —

Dieselbe Anerkennung ist allerdings dem anderen Produkte von Gauss' Ingenium, dem conformen Coordinaten-System, bis jetzt noch nicht widerfahren, das schwächere System des Bayern Soldner hat fast ganz Deutschland erobert. —

In Hannover wurde das alte klassische Gauss sche System mit dem Nullpunkt Göttingen, nach 1866 in 31 Partialsysteme zerschlagen, welche zwar selbst noch conform waren, dann aber 1881 den Soldner schen nicht conformen Systemen von Celle u. s. w. weichen mussten.

Der scharfsinnige Hannover sche Mathematiker *Wittstein,* welcher zur Zeit des Hannover schen Königreiches sein Land bei der Europäischen Gradmessung vertreten hatte, hat es tief beklagt, dass die Gauss schen geodätischen Werke anderwärts nicht gewürdigt worden seien, darunter die „conforme Abbildung." Wittstein schrieb in der oben S. 492 von uns zitierten Gedächtnisrede auf Gauss, S. 13: „So bleibt denn nur übrig, von der *künftigen Generation* zu hoffen, dass dieselbe eines Tages erkennen wird, welche Schätze hier noch zu heben sind, und dass sie dasjenige, was jetzt im Gebrauche ist, dahin verweisen wird, wohin es längst gehört." — (Vgl. hiezu auch „Zeitschr. f. Verm. 1895," S. 340).

Nach diesen, teilweise abschweifenden, aber für die Geschichte unserer Wissenschaft nicht unwichtigen Bemerkungen haben wir noch als Appendix zu den Gauss-schen Arbeiten die Triangulierung von Kurhessen durch *Gerling* zu behandeln.

Gerling war ein Schüler von Gauss, hat sich mühsam in seines Lehrers Theorie der Fehlerausgleichung eingearbeitet, und dieselbe auf die schöne Aufgabe, welche sein Kurhessisches Land ihm bot, angewendet.

Gerling hat hierüber in seinen „Beiträgen zur Geographie Kurhessens", Kassel 1839, ausführliche Mitteilungen gemacht; er giebt daselbst auf S. 182 den mittleren Fehler einer Richtung (im Gauss schen Sinn) $= \pm 0{,}88''$.

Ferner wurden im „General-Bericht der Europ. Gradm. für 1865", S. 47 von Börsch und Kaupert Angaben für den mittleren Richtungs-Fehler der kurhessischen Triangulierung gemacht, nämlich für die erste Abteilung 0,95″ und 0,99″, im Mittel 0,97″ und für die zweite Abteilung 1,37″. Unter Voraussetzung, dass die Messungen, für welche Gerling im Jahr 1839 den Wert 0,88″ gab, in den Angaben vom Jahr 1865 mit inbegriffen sind, nehmen wir als Gesamtresultat das Mittel aus den Angaben 0,97″

und 1,37″ für die erste und zweite Abteilung, d. h. 1,17″ und damit wird der mittlere Winkelfehler für Kurhessen:

$$m = 1{,}17\sqrt{2} = \pm 1{,}65''$$

Weiteres über Gerlings Ausgleichung wollen wir im Anschluss an eine Stelle aus Art. 22. des „supplementum theor. comb.“ behandeln. Gauss sagt nämlich in jenem Art. 22. (wie es scheint, absichtlich unbestimmt ausgedrückt):

„Wir können die Bemerkung nicht übergehen, dass unsere Theorie, wenn deren reine und strenge Anwendung beabsichtigt ist, voraussetzt, dass die mit $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ etc. bezeichneten Grössen entweder thatsächlich unmittelbar beobachtet sind, oder aus Beobachtungen so abgeleitet sind, dass sie unter sich unabhängig bleiben oder wenigstens als unabhängig betrachtet werden können.

In der gewöhnlichen Praxis werden die Dreieckswinkel selbst beobachtet, welche daher als $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ etc. genommen werden können, aber wir müssen eingedenk sein, dass, wenn ein System solche Dreiecke enthält, deren Winkel nicht unmittelbar beobachtet wurden, sondern als Summen oder Differenzen direkt beobachteter Winkel erhalten werden —, dass dann jene Winkel nicht als Beobachtungen zu nehmen, sondern in der Form ihrer Zusammensetzung in die Rechnung aufzunehmen sind.

Anders verhält sich die Sache bei einer Beobachtungsart, ähnlich derjenigen, welche Struve befolgt hat („Astr. Nachr. 2. Band, 1824“, S. 431), wobei die Richtungen der einzelnen, von demselben Scheitelpunkt ausgehenden Seiten erhalten werden durch Vergleichung mit einer und derselben willkürlichen Richtung. Dann nämlich sind eben diese Winkel als $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ etc. zu nehmen, wodurch alle Dreieckswinkel in Gestalt von Differenzen sich darbieten, und die Bedingungsgleichungen der ersten Art (Stationsbedingungen), die durch die Natur der Sache von selbst erfüllt sind, als überflüssig wegfallen.

Die Art der Beobachtung, die ich selbst bei der in den letzten Jahren ausgeführten Dreiecksmessung angewendet habe, ist zwar sowohl von der ersten als der zweiten Art verschieden, jedoch kann sie mit Rücksicht auf den Erfolg der zweiten gleich geachtet werden, so dass auf den einzelnen Stationen die Richtungen der von ihnen ausgehenden Seiten, von einem willkürlichen Anfangspunkt an gezählt, als die Grössen $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ etc. genommen werden mussten.“

Diese in praktisch-geodätischer Beziehung nicht erschöpfende Darstellung, welche Gauss selbst von seinem Messungsverfahren hinterlassen hat, hat früher manche Zweifel hervorgerufen, zu deren Beseitigung die Mitteilungen, welche durch Gerling auf uns gekommen sind, zuerst den Weg gezeigt haben.

Gerling hat in seinen „Beiträgen zur Geographie Kurhessens“ (Kassel 1839) und in seinen „Ausgleichungs-Rechnungen der praktischen Geometrie“ (Hamburg und Gotha 1843) eine Triangulierungs-Ausgleichungsmethode angewendet und gelehrt, welche vollständig durchsichtig und anschaulich ist. Er hat nämlich die in grosser überschüssiger Zahl vorhandenen *Winkel*messungen jeder Station durch den „Horizont-Abschluss“ auf jeder Station für sich ausgeglichen, und dann die dadurch erhaltenen Resultate in Gestalt von unabhängigen Richtungen mit gleichen Gewichten in die Netzausgleichung eingeführt, genau so, wie es Gauss in Art. 24 des „suppl. theor. comb.“ gethan hat. Die Winkelmessungen auf der einzelnen Station waren nicht gleichartig verteilt, es wurden nicht alle Kombinationen gemessen.

Das von Gauss selbst in dem Briefwechsel mit Schumacher (2. Band S. 142) gegebene Horizontabschlussbeispiel enthält nicht alle Kombinationen und auch nicht gleiche Gewichte der Winkelmessungen, überhaupt keine symmetrische Gesamtanordnung.

Was sodann die Einführung der Horizontabschlussresultate in die Netzausgleichung betrifft, wobei diese Resultate als unabhängige, gleichgewichtige Richtungen behandelt wurden, so ist zunächst ein theoretischer Irrtum zu erwähnen, in welchem Gerling befangen war. Er schreibt nämlich auf S. 168 u. 169 seiner „Ausgleichungsrechnungen“:

„Man kann *offenbar* (?) die aus den Horizontabschlüssen gefundenen mittleren Fehler der gemessenen Winkel auf die Richtungen selbst übertragen, indem man jeden Winkel als die Differenz zweier Richtungen betrachtet. Demgemäss wäre der mittlere Fehler einer einmal angeschnittenen Richtung $= \frac{m}{\sqrt{2}}$ und die *Anschnittszahl* diente als Gewicht, wenn man bei weiterer Benützung dieser Richtungen ihnen verschiedene Genauigkeit beizulegen die Absicht hätte."

„Die Vermehrung der Rechnung . . . würde aber sehr *bedeutend* (?) werden und doch jedenfalls wenig oder gar nichts nützen. Es kommen nämlich ausser den Repetitionszahlen noch manche andere Umstände in Betracht . . ."

Betrachtet man diese Darlegung im Lichte der seit Gerling weiter entwickelten Wissenschaft, so findet man, dass die Aufstellung von *Einzel*gewichten der ausgeglichenen Richtungen nur in besonderen Fällen ausführbar (vgl. unseren früheren § 82. S. 282), im Allgemeinen aber nicht möglich ist, dass vielmehr im allgemeinen Fall der gesamte Horizontabschluss mit einer Gruppe von Gewichts*gleichungen* in die Netzausgleichung übergeht. Indessen ist der Gerling sche Gedanke der „Anschnittszahlen" oder ähnlicher Einzelgewichte ein so natürlicher, dass er auch schon praktische Verwertung fand (vgl. S. 283).

Wäre die Gewichtsbemessung beim Übergang zum Netz theoretisch so einfach, wie Gerling sie sich dachte, so wäre sie ohne Zweifel schon längst in die Praxis eingeführt.

Dass nun Gauss selbst keine Gewichtsunterscheidungen machte, muss durch die Annahme erklärt werden, dass derselbe eine skrupulöse Gewichtsunterscheidung a priori, welche ja, wie heute zweifellos nachgewiesen, bei solchen Messungen dem Erfolg nicht genügend entspricht, schon damals in praktischer Beziehung für illusorisch hielt. Diese Ansicht wurde von General Schreiber dargelegt durch folgende Worte („Zeitschr. f. Verm. 1879", S. 141):

„Nach meinem Dafürhalten könnte man sich, wenn nun einmal nach Richtungen beobachtet werden soll, die Gewichtsgleichungen füglich schenken. Wenn nur der Beobachter dafür sorgt, dass auf jeder Station ein gewisses Normalgewicht für jeden Winkel ungefähr erreicht wird, so wird man sämtliche Richtungen als gleichgewichtig und von einander unabhängig in die Systemausgleichung einführen dürfen, ohne an wirklicher Strenge etwas zu opfern. Ähnlich hat es auch Gauss gemacht, der bekanntlich repetierend, und folglich nach Winkeln, keineswegs aber, wie mehrfach behauptet worden ist, alle Kombinationen beobachtet hat. Aus seinen mir vorliegenden Protokollen geht vielmehr hervor, dass er auf jeder Station so lange gemessen hat, bis er meinte, dass jeder Winkel sein Recht bekommen habe. Er hat dann die Station ausgeglichen, aber keine Gewichtsgleichungen aufgestellt, sondern die hervorgehenden Richtungswerte als gleichgewichtig und von einander unabhängig in die Systemausgleichung eingeführt. Dass Gauss so verfahren ist mit dem vollen Bewusstsein dessen, was die theoretische Strenge erforderte und was an wirklicher Strenge verloren ging, wird kaum bezweifelt werden."

Die Brücke zwischen dem Gauss schen Verfahren und dem „strengen" Ausgleichungsverfahren wurde zuerst von Hansen gefunden, wie wir auf S. 275 (im Kleingedruckten) angegeben haben; und heute ist durch all das, was wir an Theorieen in § 70., § 82. vorgetragen haben, wohl jeder Zweifel über die Ausgleichung nach Winkeln oder nach Richtungen, sei es formell streng oder nur genähert, beseitigt.

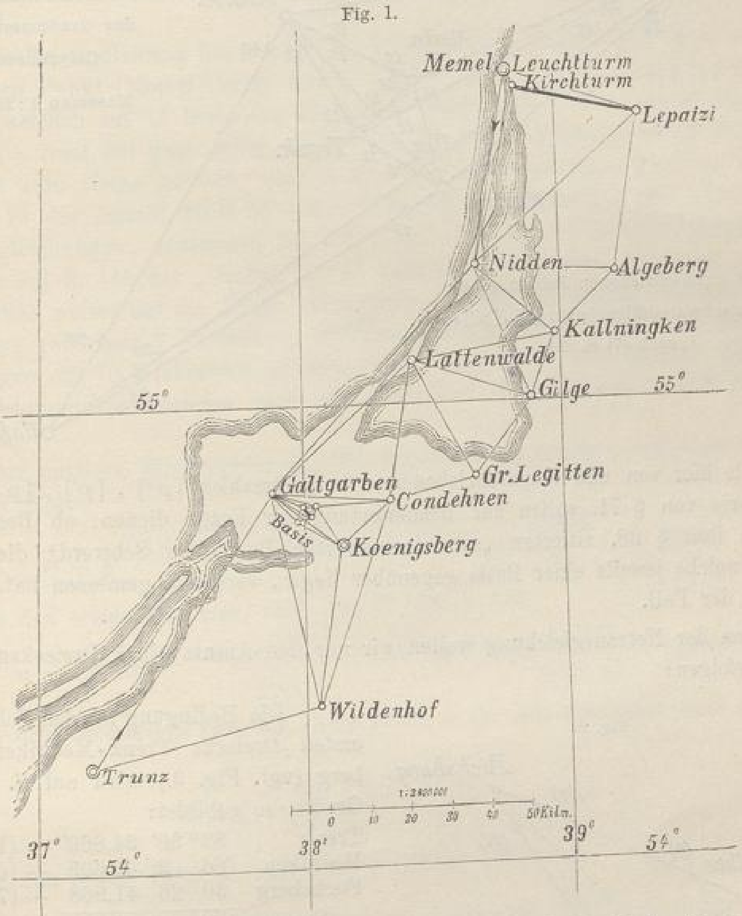
§ 130. Die Arbeiten von Bessel und Baeyer.

I. Die Gradmessung in Ostpreussen.

Das zweite klassische Erdmessungswerk in Deutschland ist veröffentlicht in dem Werke: „Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit preussischen und russischen Dreiecksketten, ausgeführt von F. W. Bessel, Direktor der Königsberger Sternwarte, Baeyer, Major im Generalstabe, Berlin 1838."

Diese Gradmessung, deren Netz in Fig. 1. dargestellt wird, ist ebenso wie die hannoversche Gradmessung ein in der Geschichte unserer Wissenschaft hochwichtiges

Fig. 1.



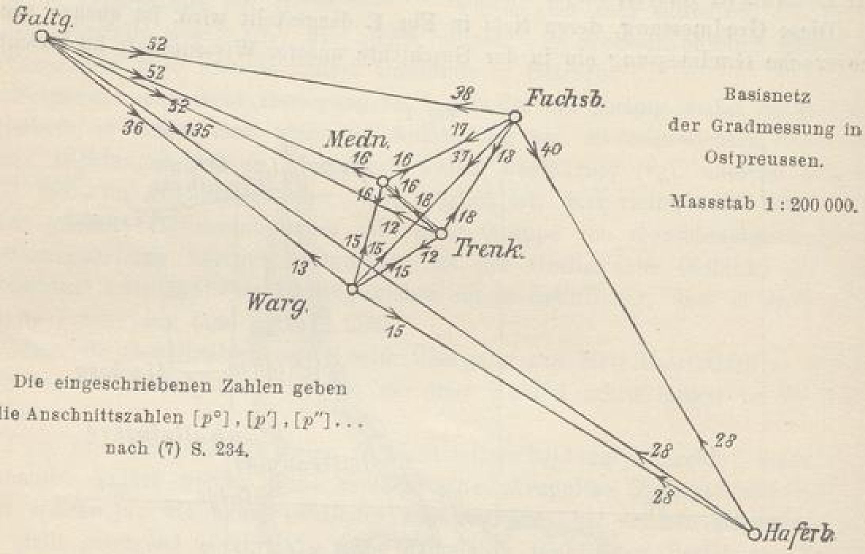
Werk, in welchem die Triangulierungs-Ausgleichung und die Erdbestimmung überhaupt in ihrer theoretischen Entwicklung wesentlich gefördert worden sind.

Auf Seite IV des Vorworts wird die neue Triangulation als Bestandteil einer ununterbrochenen trigonometrischen Verbindung von Formentera und von dem nördlichen England bis zu den russischen Gradmessungen bezeichnet, welche, an die Hauptsternwarten Europas angeschlossen, „eine Grundlage für die Bestimmung der Figur der Erde wenigstens in dem Umfange dieses Weltteils" geben sollte.

Man erblickt hierin bereits den Grundgedanken der internationalen Vereinigung, welcher 25 Jahre später durch den Mitarbeiter Bessels, General Baeyer, in der That zur Verwirklichung geführt worden ist.

In nachfolgender Fig. 2. geben wir das Basisnetz mit der kurzen, nur 1,8km langen Grundlinie Trenk-Medniken, deren Doppelmessung schon auf S. 38 und S. 40 von uns erwähnt worden ist.

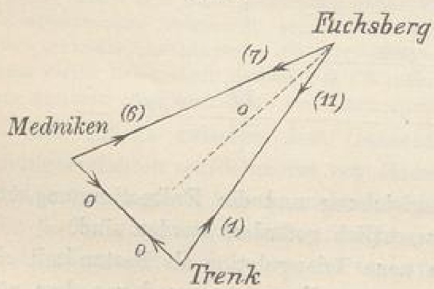
Fig. 2.



Die hier von uns eingeschriebenen Anschnittszahlen $[p^\circ]$, $[p']$, $[p'']$ ... aus der Theorie von § 71. sollen zur Beantwortung der Frage dienen, ob Bessel nach dem von ihm § 38. zitierten „sehr lesenswerten Buch von Schwerd“ die spitzen Winkel, welche jeweils einer Basis gegenüber liegen, verstärkt gemessen hat. Dieses ist nicht der Fall.

Von der Netzausgleichung wollen wir nur den Ansatz einer Dreiecksgleichung näher verfolgen:

Fig. 3.



Die Bedingung für den Schluss des ersten Dreiecks Trenk-Medniken-Fuchsberg (vgl. Fig. 3.) wird auf S. 141 der Gradm. so gebildet:

Trenk	83°	30′	34,866″	+ (1)
Medniken	66	2	43,605	− (6)
Fuchsberg	30	26	41,908	+ (7) − (11)
Summe	180°	0′	0,379″	
Soll	180	0	0,015	
Widerspruch			+ 0,364″	

Bedingungsgleichung

$$0 = +\,0{,}364'' + (1) - (6) + (7) - (11)$$

Man sieht hieraus, dass die (1), (2), (3) ... *Winkel*verbesserungen sind, und nicht Richtungsverbesserungen. Auf jeder Station mit s Richtungen treten solche (1) (2) ... in der Anzahl $s-1$ auf. Da alles übrige in unserem früheren § 71. bis

§ 74. zur Genüge behandelt worden ist, wollen wir nur noch einige Genauigkeitsfragen behandeln mit der Vorbemerkung, dass die Spalten l^2 u. s. w. der Tabelle von S. 238 und alles was mittlere Fehler betrifft (also der ganze § 73.), *nicht* von Bessel selbst, sondern erst aus späterer Zeit stammen, indem Bessel seine Arbeit ohne alle Genauigkeitsuntersuchungen abgeschlossen hat, obgleich er schon im Jahr 1816 eine Formel zur Berechnung des mittleren Fehlers aus Stationsmessungen aufgestellt hatte (vgl. eine Notiz von Helmert nach Hagen „Vierteljahrsschr. d. Astr. Ges. 1877" S. 192). Auch von den mit Hilfe der z berechneten Richtungskorrektionen $v_0 = z$, $v_1 = z + (1)$, $v_2 = z + (2) \ldots$ hat der Verfasser der Gradm. in O. keinen weiteren Gebrauch gemacht.

Wir wollen diese Gelegenheit benützen, um einige unserer früheren Formeln anzuwenden.

Die Triangulierung der Gradm. in O. hat 17 Standpunkte und einen nur angeschnittenen Punkt (Memel-Turm), also $p = 18$ Punkte, dazu 87 eingeschnittene Richtungen, welchen auf 17 Stationen 70 Winkel entsprechen. Von den 87 Richtungen sind 76 (= 2mal 38) gegenseitig, dazu 4 einseitige Netzrichtungen und 7 Richtungen, die nicht zum Netze gehören, also $= 38 + 4 = 42$ Netzlinien. Man hat also nach (18) S. 176 die Anzahl $42 - 36 + 3 = 9$ Seitengleichungen und $38 - 17 + 1 = 22$ Dreiecksgleichungen, zusammen $84 - 4 - 54 + 1 + 4 = 31$ Bedingungsgleichungen, wie auch auf S. 140 der „Gradm. in O." nach anderer Abzählungsart angegeben ist.

Ohne weiter auf die Frage einzugehen, welche Bedeutung den gar nicht zu dem Netze gehörigen 7 Richtungen zuzuweisen wäre, haben wir für 31 Bedingungsgleichungen mit 70 Winkelverbesserungen (1), (2), (3)... (70) oder 87 entsprechenden Richtungsverbesserungen nach den Formeln (7) u. ff. von § 124. Folgendes berechnet:

Der mittlere Winkelfehler aus den Quadraten der (1) (2)... (70) wird nach (7) § 124. S. 474:

$$m = \sqrt{\frac{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots (70)^2}{r}} = \sqrt{\frac{17{,}868}{31}} = \pm 0{,}76''$$

oder aus den ersten Potenzen, nach (14) §. 124. S. 475:

$$m = 1{,}2533 \, \frac{(1) + (2) + (3) + \ldots (70)}{\sqrt{n \, . \, r}} = 1{,}2533 \, \frac{24{,}785}{\sqrt{70 \, . \, 31}} = \pm 0{,}67''$$

dagegen nach Reduktion mit dem Bessel schen z, aus den Quadraten nach (8) § 124. S. 474:

$$m = \sqrt{2 \frac{[v^2]}{r}} = \sqrt{2 \, \frac{11{,}90}{31}} = \pm 0{,}89'' \tag{1}$$

und mit den ersten Potenzen nach (15) § 124. S. 475:

$$m = 1{,}2533 \sqrt{2} \, \frac{v_0 + v_1 + v_2 \cdots}{\sqrt{n' r}} = 1{,}2533 \sqrt{2} \, \frac{23{,}26}{\sqrt{87 \, . \, 31}} = \pm 0{,}79''$$

Die 3te dieser Bestimmungen $m = \pm 0{,}89''$ aus den Quadraten der Richtungsverbesserungen dürfte die beste sein. (Näheres s. JordanSteppes I. S. 34—35.)

Wenn wir endlich noch die Näherungsrechnung nach der internationalen Formel aus den Dreiecken anwenden wollen, so haben wir dazu bereits eine Vorbereitung S. 12 und die Anwendung in § 121. S. 467 mit $m = 1{,}177''$, allein die dort benützten 22 Dreiecke sind nur diejenigen, welche als Ausgleichungsbedingungen unabhängig sind. Im ganzen sind es 29 Dreiecke, welche geben:

$$m = \sqrt{\frac{41,154}{3 \,.\, 29}} = \pm 0,688'' \tag{2}$$

II. Die Küstenvermessung.

Der technisch-praktische Mitarbeiter Bessels bei der Gradmessung in Ostpreussen, Major *Baeyer*, hatte bei diesem Unternehmen auch Kenntnis der Bessel schen Theorie gewonnen und verwertete dieselbe nach Bessels Tode (1846) selbständig, bei Herausgabe des Werkes:

Die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie. Ausgeführt von der trigonometrischen Abteilung des Generalstabes. Herausgegeben von J. J. Baeyer, Oberst und Abteilungsvorsteher im Generalstabe und Dirigent der trigonometrischen Abteilung, Berlin 1849.

Man erkennt in der „Küstenvermessung" das peinlichste Bestreben, dem Vorbilde der Gradmessung in Ostpreussen nachzukommen; bei der „Bestimmung des mittleren Fehlers der Winkelmessungen" auf S. 353 der Küstenvermessung wurde von Baeyer die unzutreffende Rechnungsart angewendet, welche wir schon in § 124. S. 475 im Kleingedruckten behandelt haben. Nach gleichen Prinzipien, wie im Vorstehenden, bei der Gradmessung in Ostpreussen (d. h. nach (7) u. ff. in § 124.) behandeln wir nun auch die Küstenvermessung.

Die Küstenvermessung besteht aus zwei Netzen. Das erste Netz hat 30 Stationen, 47 Bedingungsgleichungen, 113 Winkelkorrektionen und entsprechend $113 + 30 = 143$ Richtungskorrektionen, jedoch sind auf S. 290—294 145 Richtungskorrektionen angegeben, weil in Trunz eine Vermehrung um 2 eintritt.

Das zweite Netz hat 25 Stationen, 86 Bedingungsgleichungen, 141 Winkelkorrektionen und $141 + 25 = 166$ Richtungskorrektionen.

Man berechnet daraus den mittleren Winkelfehler m auf verschiedene Weise:

Für das erste Netz: a) aus den Winkelkorrektionen

$$m = \sqrt{\frac{30,15}{47}} = \pm 0,80''$$

$$m = 1,2533 \frac{45,327}{\sqrt{113 \,.\, 47}} = \pm 0,78''$$

b) aus den Richtungskorrektionen

$$m = 1,2533 \sqrt{2} \, \frac{34,3764}{\sqrt{145 \,.\, 47}} = \pm 0,74'' \tag{3}$$

Für das zweite Netz: a) aus den Winkelkorrektionen

$$m = \sqrt{\frac{43,86}{86}} = \pm 0,71''$$

$$m = 1,2533 \frac{72,63}{\sqrt{141 \,.\, 86}} = \pm 0,83''$$

b) aus den Richtungskorrektionen

$$m = 1,2533 \sqrt{2} \, \frac{49,7174}{\sqrt{166 \,.\, 86}} = + 0,74'' \tag{4}$$

$$\text{Durchschnittswert } m = \pm 0,77'' \tag{5}$$

Die Näherungsformel der internationalen Erdmessung giebt nach dem „Rapport" für 1892 von Ferrero auf Seite XIII, 45 als Ergebnis von 148 Dreiecken der Küstenvermessung:

$$m = \sqrt{\frac{139,659}{3 \cdot 148}} = \pm 0,56'' \qquad (6)$$

Einiges weitere zur „Küstenvermessung" haben wir früher in „Jordan-Steppes d. Verm. I. S. 38—44" gegeben, nebst Kommentierung eines weiteren Werkes von Baeyer: „Verbindung der preussischen und russischen Dreiecksketten."

Nachtrag zu § 130.

Gerade während des Druckes von § 130. erscheint ein neuer, VII. Teil des Werkes „Königlich Preussische Landestriangulation", gemessen und bearbeitet von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, Berlin 1895. Dieser neue Band enthält als zweite Abteilung „die Ergebnisse älterer Messungen" und darunter namentlich die „Gradmessung in Ostpreussen und die Küstenvermessung."

Ohne dieses noch mit unserem Vorstehenden verschmelzen zu können, wollen wir wenigstens die Hauptangaben für mittlere Fehler ausziehen:

Bessel hat 1834 seine Dreiecke in Hinsicht des Excesses sphärisch berechnet mit einem Halbmesser $r = 3271628,89$ Toisen $= 6376523^m$ oder $log\ r = 6,80458$, d. h. mit r gleich dem Aequatorhalbmesser, welcher dem metrischen System zu Grunde liegt, während nach Besselschen Erddimensionen von 1841 in der Breite von 55° zu nehmen ist $log\ r = 6.80514$. Der Radius wird grösser, also die Excesse kleiner, was bei dem grössten Dreieck Galtgarben-Wildenhof-Trunz $0,019''$ ausmacht. Dadurch ändern sich auch die Dreiecksschlüsse ein wenig, und der schon oben bei (2) S. 502 angegebene Wert $m = 0,688''$ entspricht den umgerechneten Dreiecksschlüssen, welche auf S. 153 des VII. Teiles „Triangulation" einzeln angegeben sind.

Für die Küstenvermessung giebt „Hauptdreiecke, VII. Teil" auf S. 186 als Berechnung aus den Richtungskorrektionen:

1. für das erste Netz (nördlicher Teil) $m^2 = 3,1416 \dfrac{34,3764^2}{145 \times 47} = 0,545$

$$m = 0,738''$$

2. für das zweite Netz (südlicher Teil) $m^2 = 3,1416 \dfrac{49,7174^2}{166 \times 86} = 0,544$

$$m = 0,738''$$

Diese Werte stimmen mit den unserigen schon oben unter (3) und (4) S. 502 angegebenen überein (abgesehen von der Abrundung).

Auf S. 187 „VII. Teil, Hauptdreiecke" sind auch die Berechnungen des mittleren Winkelfehlers nach der internationalen Formel gegeben:

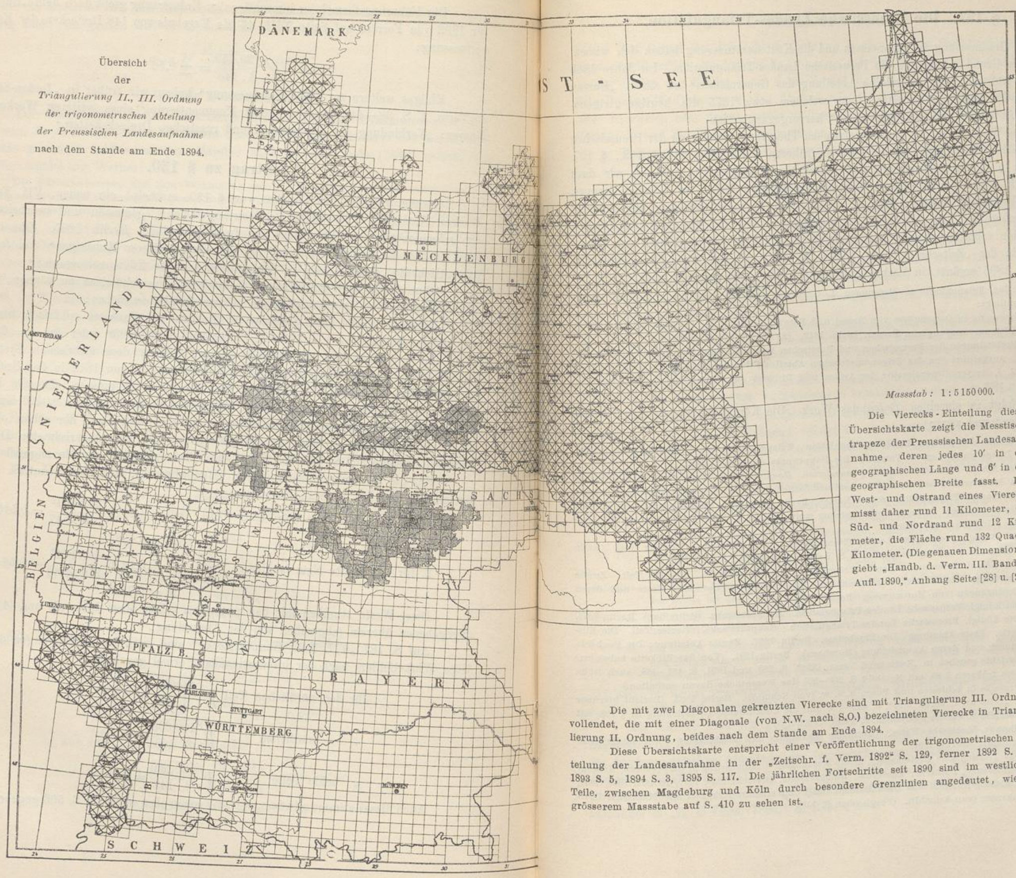
$$\text{für den nördlichen Teil } \sqrt{\frac{39,021}{3 \cdot 45}} = 0,538'' \qquad (7)$$

$$\text{„ „ südlichen „ } \sqrt{\frac{100,638}{3 \cdot 103}} = 0,571'' \qquad (8)$$

$$\text{„ beide Teile } \sqrt{\frac{139,659}{3 \cdot 148}} = 0,561'' \qquad (9)$$

Auch dieses stimmt mit dem, was wir schon oben unter (6) S. 503 gegeben haben.

Übersicht
der
Triangulierung II., III. Ordnung
der trigonometrischen Abteilung
der Preussischen Landesaufnahme
nach dem Stande am Ende 1894.



Massstab: 1 : 5150000.

Die Vierecks-Einteilung dieser Übersichtskarte zeigt die Messtischtrapeze der Preussischen Landesaufnahme, deren jedes 10′ in der geographischen Länge und 6′ in der geographischen Breite fasst. Der West- und Ostrand eines Vierecks misst daher rund 11 Kilometer, der Süd- und Nordrand rund 12 Kilometer, die Fläche rund 132 Quadr.-Kilometer. (Die genauen Dimensionen giebt „Handb. d. Verm. III. Band, 3. Aufl. 1890," Anhang Seite [28] u. [29]).

Die mit zwei Diagonalen gekreuzten Vierecke sind mit Triangulierung III. Ordnung vollendet, die mit einer Diagonale (von N.W. nach S.O.) bezeichneten Vierecke in Triangulierung II. Ordnung, beides nach dem Stande am Ende 1894.

Diese Übersichtskarte entspricht einer Veröffentlichung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme in der „Zeitschr. f. Verm. 1892" S. 129, ferner 1892 S. 195, 1893 S. 5, 1894 S. 3, 1895 S. 117. Die jährlichen Fortschritte seit 1890 sind im westlichen Teile, zwischen Magdeburg und Köln durch besondere Grenzlinien angedeutet, wie in grösserem Massstabe auf S. 410 zu sehen ist.

§ 131. Die Preussische Landes-Triangulation.

Die Gradmessung in Ostpreussen und die Küstenvermessung haben den wissenschaftlichen Grund gelegt für die Preussische Landes-Triangulation. Im Jahre 1865 wurde die frühere „trigonometrische Abteilung des Generalstabs" zu einem „Bureau der Landes-Triangulation" erweitert, aus welchem etwa 1875 die heutige „trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme" hervorgegangen ist.

Alles Wesentliche der trigonometrischen Theorieen, welche wir der Preussischen Landesaufnahme verdanken, ist in unseren früheren § 71. bis § 81., § 103., § 107. bis § 108. u. a. in wissenschaftlicher Entwicklung dargestellt, und da wir dazu früher auch einen geschichtlichen Kommentar gegeben haben in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen 1882", I., S. 59—164, so wollen wir hier uns zunächst darauf beschränken, die wichtigsten Litteratur-Angaben zur Preussischen Landes-Triangulation vorzuführen unter Benützung einer dankenswerten Mitteilung von Oberst Morsbach in der „Zeitschr. f. Verm. 1891", S. 129 u. ff. mit einer Übersichtskarte, welche auf 1895 ergänzt, in Verkleinerung auf S. 504—505 gegeben wird.

Von den Triangulierungs-Messungen I. Ordnung sind bis 1895 die folgenden Druckwerke veröffentlicht:

1) Gradmessung in Ostpreussen von Bessel und Baeyer, Berlin 1838. (S. oben § 130. S. 499.)
2) Die Küstenvermessung von Baeyer, Berlin 1849. (S. oben § 130. S. 502.)
3) Die Verbindungen der Preussischen und Russischen Dreiecksketten bei Thorn und Tarnowitz. Ausgeführt von der Trigonometrischen Abteilung des Generalstabes. Herausgegeben von J. J. Baeyer, Generalmajor der Armee und Dirigent der Trigonometrischen Abteilung. Berlin 1857.

Es folgt in einzelnen *Teilen* das Werk „Die Königliche Preussische Landes-Triangulation" und zwar:

Die Königl. Preussische Landes-Triangulation, Triangulation der Umgegend von Berlin, Berlin 1867. Dieses war ein erster Versuch. Die Hauptwerke dieser Art sind:

I. Teil. *Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke.* Erster Teil: Hauptdreiecke in der Provinz Posen an der Weichsel und östlich derselben, herausgegeben vom Bureau der Landes-Triangulation mit 3 Karten, Berlin 1866, und Hauptdreiecke, erster Teil. *Zweite vermehrte Auflage.* Herausgegeben vom Bureau der Landes-Triangulation. Berlin 1870 (von Morozowicz).

II. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. Zweiter Teil. Erste Abteilung: Die Haupttriangulation in Schleswig-Holstein. Berlin 1873.
Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. Zweiter Teil. Zweite Abteilung: Die Märkisch-Schlesische und die Schlesisch-Posensche Kette und deren Ergänzungen (von Morozowicz). Berlin 1874.

III. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. (Schreiber.) Berlin 1876.

IV. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. Vierter Teil. Die Elbkette. Erste Abteilung: Die Ergebnisse. Berlin 1887. Zweite Abteilung: Die Beobachtungen und deren Ausgleichung (Morsbach). Berlin 1891. (Von der Elbkette haben wir Berichte gegeben in „Zeitschr. f. Verm. 1888", S. 399 und 1891, S. 455—459, auch ist in dem früheren § 80. mit Netzbild S. 280—281 das Wesentliche davon enthalten.)

V. Teil. Dreiecke in Schlesien und Posen u. s. w. (von Schmidt). Berlin 1893. (Bericht hierüber s. „Zeitschr. f. Verm. 1894", S. 452—456 und die Coordinaten-Ausgleichung in § 108. mit Netzbild S. 415 ist aus jenem V. Teil.)

VI. Teil. Hannov.-Sächsische Kette. Göttinger Basisnetz und Sächsisches Dreiecksnetz (von Schmidt). Berlin 1894.

VII. Teil. Das Thüringische Dreiecksnetz, ältere Messungen; Gradmessung in Ostpreussen, Küstenvermessung, Dänischer Anschluss, Weichselkette, Dreiecke 1858, 1859, 1861/62, 1865, 1867. Schleswig-Holsteinsche Dreieckskette, das Posensche Dreiecksnetz, das Märkische Dreiecksnetz (von Schmidt). (Vergl. oben S. 503.)

Triangulation II. Ordnung.

Auf Grund der Dreiecke I. Ordnung werden fernere Punkte derart bestimmt, dass einschliesslich der Punkte I. Ordnung auf den Messtisch (126 Quadratkilometer in der Breite von Berlin) deren 2 bis 3, auf die Quadratmeile also etwa 1 entfallen. Die Punkte II. Ordnung werden ähnlich wie die Zwischenpunkte I. Ordnung einzeln oder zu zweien oder dreien, unter völligem Anschluss an die bereits ausgeglichenen Punkte I. und II. Ordnung, ausgeglichen.

Trigonometrische Höhenmessungen führt die II. Ordnung seit 1877 nicht mehr aus.

Triangulation III. Ordnung.

Auf Grund der vorhergegangenen Triangulation I. und II. Ordnung wird das Netz so enge gestaltet, dass die Gesamtzahl von 10 Punkten für jede Quadratmeile bezw. von annähernd 22 Punkten für jeden Messtisch erreicht wird.

Bei idealer Verteilung der Punkte müssen somit noch 19—20 Punkte auf 1 Messtisch seitens der III. Ordnung bestimmt werden.

Ein Netz von 6 Messtischblättern mit Triangulierung III. Ordnung als Arbeit eines Jahres von Trigonometer Messner zeigt S. 411.

Seit 5 Jahren haben wir folgende Einzelmitteilungen über Triangulierung III. Ordnung:

Z. f. Verm. 1892, S. 195 von 1891: 63 Messtische in Sachsen, Hannover und Braunschweig.
Z. f. Verm. 1893, S. 5 von 1892: 40 Messtische in Hannover, Hessen-Nassau, Westfalen, Braunschweig, Waldeck.
Z. f. Verm. 1894, S. 3 von 1893: 63 Messtische in Hannover, Westfalen, Hessen-Nassau.
Z. f. Verm. 1895, S. 117 von 1894: 102 Messtische in Brandenburg, Sachsen, Westfalen. Rheinprovinz.

Die Veröffentlichung der *Gesamt*-Dreiecksmessungen der Preussischen Landesaufnahme I., II. und III. Ordnung erfolgt in einem amtlichen Werke mit Abrissen, Coordinaten und Höhen, dessen Übersichtskarte, mit Einteilung nach Bänden, schon in unserem „Handb. d. V. II. Band, 4. Aufl. 1893, S. 338“ gegeben worden ist.

Die bis jetzt (1895) erschienenen Bände sind:

I. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Polar-Coordinaten, geogr. Positionen und Höhen von 38° der Länge bis zur östl. Landesgrenze. Herausgegeben vom Bureau der Landes-Triangulation (von Morozowicz). Berlin 1874, im Selbstverlage.

II. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation von 36° bis 38° der Länge und von 53° der Breite bis zur Ostsee (Schreiber). Berlin 1875.

III. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation von 34° bis 36° der Länge und von 53° der Breite bis zur Ostsee (Schreiber). Berlin 1876.

IV. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Schleswig-Holstein, Lübeck (Schreiber). Berlin 1878.

V. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Polar-Coordinaten, geogr. Coordinaten und Höhen von 32° bis 34° der Länge und von 53° der Breite bis zur Ostsee, Pommern, Brandenburg, Westpreussen (Schreiber). Berlin 1882.

VI. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Regierungsbezirk Stralsund und Stettin (Schreiber). Berlin 1884.

Bis hierher sind nur *geographische* Coordinaten (Geogr. Längen und Breiten) gegeben. Es folgt die Einführung des *rechtwinkligen* conformen Coordinatensystems der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, dessen Theorie gegeben ist in unserem „Handb. d. V. III. Band, 3. Aufl. 1890,“ S. 448—453 und neuerdings von Oberst-Lieutenant von Schmidt „Projektionsmethode der trig. Abt. d. Preuss. Landesaufnahme in „Z. f. Verm. 1894,“ S. 385 u. 409.

VII. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Abrisse, Coordinaten und Höhen sämtlicher von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme bestimmter Punkte. Regierungsbezirk Oppeln, herausgegeben von der trig. Abt. d. Landesaufnahme (Schreiber). Berlin 1885. (Litteraturbericht hiezu s. „Zeitschr. f. Verm. 1886", S. 252—256.)

XI. Teil. Mit Titel wie V und VI, Bromberg, Marienwerder, rechtwinkl. Coord. nur für die Punkte I. Ordnung (Schreiber). Berlin 1886.

VIII. Teil. Abrisse, Coordinaten und Höhen (Titel wie VII), Regierungsbezirk Breslau (Schreiber) Berlin 1888.

IX. Teil. dto. Liegnitz (Schreiber). Berlin 1890.

X. Teil. dto. Posen (Morsbach). Berlin 1892.

XII. Teil. dto. Frankfurt a. O. (von Schmidt). Berlin 1894.

Zu all diesem gehört noch die folgende von der trigonometrischen Abteilung ihren Veröffentlichungen beigegebene Bemerkung:

„Die durch Beschluss des Zentraldirektoriums der Vermessungen vom 29. Dezember 1879 für den Anschluss der Spezialvermessungen vorgeschriebenen rechtwinkligen sphäroidischen Coordinaten werden in der Trigonometrischen Abteilung nicht berechnet. Ihre Ableitung aus den geographischen Coordinaten für die durch den genannten Beschluss festgesetzten Coordinatennullpunkte bleibt den Technikern der Spezialvermessungen überlassen."

Die hier erwähnten Coordinatennullpunkte der Spezialvermessungen beziehen sich auf die 40 Kataster-Coordinatensysteme, welche wir in einer Karte dargestellt und beschrieben haben in unserem II. Band „Handb. d. Verm., 4. Aufl. 1893," S. 226 und III. Band, 3. Aufl. 1890, S. 344. Man vergleiche dazu auch eine Erörterung in „Zeitschr. f. Verm. 1891," S. 412—413.

Was die Genauigkeit, insbesondere die mittleren Winkelfehler der Preussischen Landes-Triangulation betrifft, so haben wir viele Auszüge und Berechnungen an verschiedenen Stellen im Vorhergehenden und in dem schon erwähnten Kommentar „Jordan-Steppes, Deutsches Vermessungswesen 1882," I S. 59 u. ff. gemacht, einige Zusammenfassungen auch in unserem III. Bande „Handb. d. Verm., 3. Aufl. 1890," S. 182—183 gegeben; worauf zu verweisen ist.

Den mittleren Winkelfehler im Ganzen fanden wir dort $m = \pm 0{,}64''$.

Inzwischen sind nach der internationalen Näherungsformel die Dreiecke seit der Gradmessung in Ostpreussen bis 1891 behandelt worden und es ist daraus abgeleitet auf Seite XIII, 45 des „Rapport für 1892" von Ferrero:

Für 690 Dreiecke $[\Delta^2] = 636{,}427$

also $$m = \sqrt{\frac{636{,}427}{3 \,.\, 690}} = \pm 0{,}554''$$

Indessen die *neueren* Messungen der Landesaufnahme geben kleinere Fehler.

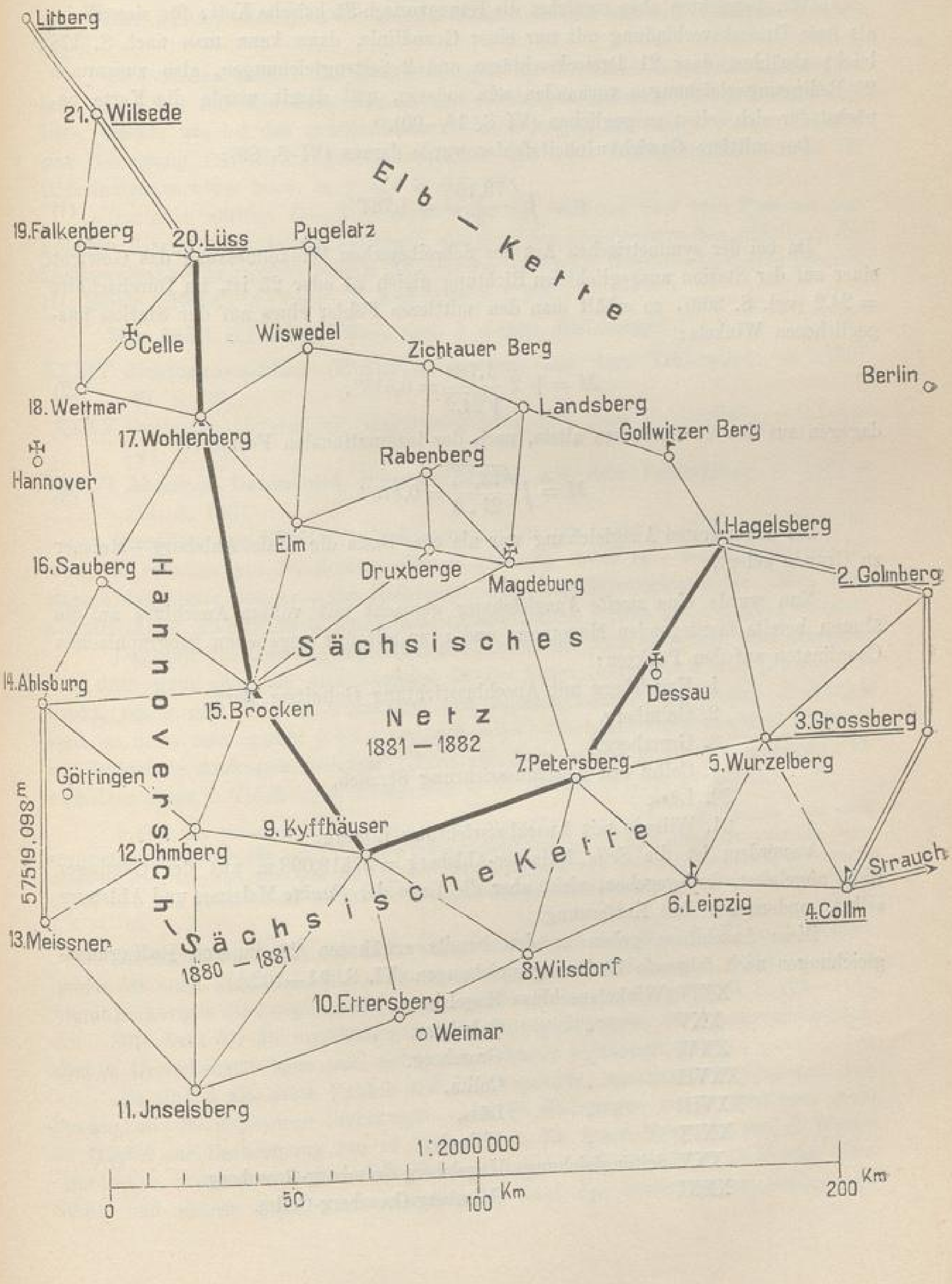
Zum Schlusse unserer Berichte über die Preussische Landes-Triangulation wollen wir noch mit nachstehender Fig. 2 die Ausgleichung der Hannoverisch-Sächsischen Kette und des Sächsischen Netzes vorführen, als Auszug aus dem VI. Teil der Königl. Preussischen Landes-Triangulation „Hauptdreiecke, Berlin 1894" (s. oben S. 506). Es wird möglich sein, dadurch einen Einblick in den Gang der Landes-Triangulation, mit ihren Ketten in Zwangsanschluss und ihren Füllnetzen zu erlangen.

Zuerst müssen wir einen Blick rückwärts werfen auf S. 280—281, wo die Elbkette gezeichnet ist, deren südwestliche Grenze nun auf S. 509 als nordöstliche Grenze wiederkehrt, d. h. die ganze Linie von Litberg bis Hagelsberg ist bereits durch die

Elbkette unabänderlich festgelegt und auch noch der östliche Teil Hagelsberg bis Collm ist festgelegt durch das inzwischen ausgeglichene Märkisch-Schlesische Dreiecksnetz.

Fig. 2.

Hannoverisch-Sächsische Kette und Sächsisches Netz.



Die Hannoverisch-Sächsische Kette ist also im Norden und im Osten vielfach angebunden, was durch die doppelt gezogenen Linien auf S. 509 angedeutet ist, und ausserdem ist im Westen die Linie Meissner—Ahlsburg = 57519,098 ^{m} aus der Göttinger Basis abgeleitet.

Wir betrachten aber *zunächst* die Hannoverisch-Sächsische Kette für sich allein, als freie Dreiecksverbindung mit nur einer Grundlinie, dann kann man nach S. 176 leicht abzählen, dass 21 Dreiecksschlüsse und 2 Seitengleichungen, also zusammen 23 Bedingungsgleichungen vorhanden sein müssen, und damit wurde die Kette zunächst für sich selbst ausgeglichen (VI S. 19—90).

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wurde daraus (VI S. 89):

$$m = \sqrt{\frac{73,166}{23}} = 1,784'' \qquad (1)$$

Da bei der symmetrischen Art der Schreiberschen Winkelmessung das Gewicht einer auf der Station ausgeglichenen Richtung gleich 24 oder 25 ist, im Durchschnitt = 24,2 (vgl. S. 269), so erhält man den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels:

$$M = \sqrt{2}\,\frac{1,784}{\sqrt{24,2}} = 0,513'', \qquad (2)$$

dagegen aus den 21 Dreiecken allein, nach der internationalen Formel:

$$M = \sqrt{\frac{13,93}{21\,.\,3}} = 0,470'' \qquad (3)$$

Bei dieser ersten Ausgleichung war als *eine* Basis die Linie Ahlsburg—Meisner zu Grunde gelegt.

Nun wurde eine *zweite* Ausgleichung gemacht mit vollem Anschluss an die älteren bereits festliegenden Messungen und zwar mit fest gegebenen geographischen Coordinaten auf den Punkten:

1. Hagelsberg mit Anschlussrichtung Golmitzer Berg,
2. Golmberg,
3. Grossberg,
4. Collm mit Anschlussrichtung Strauch,
20. Lüss,
21. Wilsede mit Anschlussrichtung Litberg.

Ausserdem ist die *Seite* Meissner-Ahlsberg = 57519,098 m aus der Göttinger Basis abgeleitet, fest gegeben, nicht aber die Lage der *Punkte* Meissner und Ahlsburg selbst, sondern nur ihre Entfernung.

Diese Anschlüsse geben zu den bereits erwähnten 23 inneren Bedingungsgleichungen noch folgende 13 Zwangsgleichungen (VI. S. 91—102.)

XXIV	Winkelanschluss	Hagelsberg,
XXV	„	Golmberg,
XXVI	„	Grossberg,
XXVII	„	Collm,
XXVIII	„	Lüss,
XXIX	„	Wilsede,
XXX	Seitengleichung	Hagelsberg-Golmberg-Grossberg,
XXXI	„	Golmberg-Grossberg-Collm,

XXXII Basisverbindung zwischen Wilsede-Lüss- und Ahlsburg-Meissner, mit einem logarithmischen Fehlergliede $= + 0{,}0000063 \cdot 1$ (VI. S. 94).

XXXIII Basisverbindung zwischen Grossberg-Collm und Ahlsburg-Meissner, mit einem logarithmischen Fehlergliede $= + 0{,}0000062 \cdot 7$ (VI. S. 94).

Nun kommt aber noch der Polygonschluss, den wir auf S. 177 bereits erwähnt haben.

Es bestehen noch 3 Polygongleichungen für die Verbindung zwischen Hagelsberg und Lüss, auf dem Zuge Hagelsberg-Petersberg-Kyffhäuser-Brocken-Wohlenberg-Lüss. Gerade wie bei den gewöhnlichen Feldmesserzügen hat man in diesem Polygon eine Bedingung für Richtungswinkelanschluss und zwei Bedingungsgleichungen für Coordinatenanschluss bezw. in y und in x.

Das dazu nöthige Coordinatensystem ist das conforme über ganz Preussen ausgedehnte System, in welchem überhaupt alle x, y der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme angegeben werden (Theorie der conformen Doppelprojektion in unserem III. Bande, „Handb. d. Verm., 3. Aufl. 1890," § 92).

Man findet auf diesem Wege noch 3 weitere Gleichungen:

XXXIV Richtungsanschluss (Kyffhäuser-Brocken) mit dem Fehlergliede $+ 1{,}189''$ (VI. S. 95),

XXXV Ordinaten-Unterschied Hagelsberg-Lüss mit dem Fehlergliede $+ 0{,}173$ m (VI. S. 101),

XXXVI Abscissen-Unterschied Hagelsberg-Lüss mit dem Fehlergliede $+ 0{,}367$ m (VI. S. 102).

Die Gleichung XXXIV für Richtungsanschluss ist leicht zu bilden, auf VI. S. 95 wird sie erhalten aus der Summe aller $t_{2\cdot 1} - t_{1\cdot 2}$, wenn $t_{2\cdot 1}$ der Richtungswinkel einer Polygonseite und $t_{1\cdot 2}$ der Richtungswinkel der Gegenrichtung ist. Man kann die Gleichung XXXIV auch durch den sphäroidischen Excess des Polygons ableiten.

Dagegen die Coordinatengleichungen XXXV und XXXVI werden *sehr* umständlich, denn wenn man sie sich zunächst in der Form $[s \sin t] = 0$ und $[s \cos t] = 0$ denkt, wo s und t die Entfernungen und Richtungswinkel der ebenen Projektion sind, so muss man sowohl jedes s als auch jedes t durch alle Dreieckswinkel hindurch auf fehlerfreie Anfangswerte zurückführen und dann nach s und t differentiieren. So enthalten diese 2 Gleichungen schliesslich je 51 Glieder (VI. S. 101—102).

Früher, als das allgemeine conforme Coordinatensystem x y der Landesaufnahme noch nicht vorhanden war, wurde für den Zweck der Polygongleichungen je ein *besonderes* geodätisches Coordinatensystem angenommen, was für den Fall eines Polygons von 1867 mit Eingehung auf Einzelheiten von uns kommentiert worden ist in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen 1882", I. S. 81—85.

Nachdem wir somit die 13 Zwangsgleichungen XXIV bis XXXVI nachgewiesen haben, ist auch klar, dass die zweite Ausgleichung 36 Gleichungen enthalten muss, womit im übrigen die Ausgleichung nach bekannter Weise vor sich geht (VI. S. 103—114).

Die Zahl der 36 unabhängigen Bedingungsgleichungen der Hannoverisch-Sächsischen Dreieckskette kann man sich auch nochmals so zurechtlegen:

Es sind 6 alte feste Punkte und 15 Neupunkte, zusammen 21 Stationen vorhanden und 86 gemessene Richtungen. Also 86 Richtungen auf 21 Stationen giebt 65 Winkel zur Bestimmung von 15 Neupunkten. Zu einem Neupunkt sind 2 Winkel erforderlich, zusammen $2 \cdot 15 = 30$ Winkel, folglich sind $65 - 30 = 35$ Winkel überzählig und ebenso gross auch zunächst die Zahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen. Es ist dabei aber die Seitenlänge Meissner-Ahlsburg noch nicht berücksichtigt, diese giebt noch eine Seitengleichung hinzu, man hat also nun $35 + 1 = 36$ Bedingungsgleichungen, ebenso wie oben in der Aufsuchung I ... XIV ... XXXVI.

Die Verbesserungen sind begreiflicher Weise in der zweiten Ausgleichung wegen des Anschlusszwanges erheblich grösser geworden als in der ersten freien Ausgleichung. Nach VI. S. 115 war in der ersten Ausgleichung bei 23 Bedingungsgleichungen die Quadratsumme der Verbesserungen = 73,166, dagegen in der zweiten Ausgleichung mit 36 Bedingungen, Quadratsumme = 223,049, woraus man zur Vergleichung berechnen kann den Gewichtseinheitsfehler:

ohne Anschlusszwang $$m = \sqrt{\frac{73,166}{23}} = 1,78'' \tag{4}$$

mit „ $$m' = \sqrt{\frac{223,049}{36}} = 2,49'' \tag{4 a}$$

Der Wert (4) ist derselbe wie schon oben bei (1).

Wir haben auch noch die Netzrichtungsverbesserungen (1), (2) ... (86) zugezogen, deren absolute Summe im ersten Falle = 12,898 und im zweiten Falle = 19,406 ist, woraus man rechnen kann den mittleren Netzrichtungsfehler:

ohne Anschlusszwang $$\mu = 1,2533 \frac{12,898}{\sqrt{83,23}} = 0,370'' \tag{5}$$

mit „ $$\mu' = 1,2533 \frac{19,406}{\sqrt{86,36}} = 0,437'' \tag{5 a}$$

Man hat $m : m' = 1 : 1,4$ und $\mu : \mu' = 1 : 1,2$.

Interessanter sind die auf VI. S. 115—116 gegebenen Vergleichungen beider Ausgleichungen in Hinsicht auf Verdrehung u. s. w. durch den Anschlusszwang. Derselbe hat eine Vergrösserung von etwa 1 : 100 000 hervorgebracht.

Werfen wir noch einen Blick auf das „Sächsische Netz“, welches nach Festlegung der soeben besprochenen Hannoverisch-Sächsischen Kette von allen Seiten durch einen festen Rahmen begrenzt ist.

Die Ausgleichung wurde ebenso gemacht wie die schon in § 108. mit dem Netzbilde S. 415 von uns beschriebene Coordinaten-Einschaltung, wir können uns also kurz fassen.

Da im Norden die Elbkette und auf allen anderen Seiten die Hannoverisch-Sächsische Kette festliegen, hat das Sächsische Netz nur noch 5 freie Innenpunkte nämlich:

Magdeburg	mit $\delta y =$	II	und	$\delta x =$	I
Druxberge	„ „	IV	„	„	III
Elm	„ „	VI	„	„	V
Rebenberg	„ „	VIII	„	„	VII
Wiswedel	„ „	X	„	„	IX

Die Ausgleichung bekommt also 10 Unbekannte I bis X, entsprechend den 20 Unbekannten von S. 416—417.

Damit haben wir das Wesentliche angeführt, was zu dem auf S. 509 dargestellten Netzen und Ketten gehört, und es scheinen uns diese Beispiele sehr willkommen zur Darstellung der Methoden der heutigen Preussischen Landesaufnahme.

Die beste Übersicht aller Ketten und Netze der Preussischen Landesaufnahme bekommt man aus der Kartenbeilage zu dem VII. Teil, „Preuss. Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, 1895 (vgl. S. 506). Man sieht daraus, dass die Landes-Triangulation ihrer Vollendung entgegengeht, wie auch der Chef der trigonometrischen Abteilung Oberstlieutenant von Schmidt in der „Zeitschr. f. Verm., 1894," S. 385 berichtet, „dass die Triangulation I. Ordnung voraussichtlich im Jahre 1897 abgeschlossen sein „werde — worauf die Aufgabe komme, das geschaffene Werk dauernd zu erhalten und „soweit es Not thut, mit veränderten Mitteln und auf neuen Grundlagen fortzusetzen."

§ 132. Triangulierungen des geodätischen Instituts.

Von 1864—1886 sind von dem königlich preussischen geodätischen Institute drei grössere Triangulierungs-Arbeiten ausgeführt worden, nämlich, nach der Zeit ihrer Veröffentlichung:

1) Das rheinische Dreiecksnetz I. Heft: die Bonner Basis, 1876,
II. „ die Richtungsbeobachtungen, 1878,
III. „ die Netz-Ausgleichung, 1882;

2) das hessische Dreiecksnetz, 1882;

3) das märkisch-thüringische Dreiecksnetz, 1889.

Berichte hierüber sind gegeben in der „Vierteljahrsschrift d. Astr. Gesellschaft 1877", S. 146—166, Bonner Basis, ferner „Zeitschr. f. Verm., 1879", S. 97—149, Schreiber, Richtungsbeobachtungen und Winkelbeobachtungen „Z. f. Verm., 1884", S. 69—78, Rheinisches Dreiecksnetz und „Z. f. Verm., 1889", S. 155—159, Hessisches Dreiecksnetz.

Diese Triangulierungen wurden ursprünglich nach dem Muster der „Küsten-Vermessung" angelegt, und sind später im Anschluss an die übrige Weiter-Entwicklung der Ausgleichungs-Theorie fortgeführt worden.

Die Bonner Basis und das Basisnetz sind schon 1847 unter Baeyers Leitung gemessen worden, zur Verbindung der früheren preussischen und französischen Dreiecke. Aus manchen Gründen blieben diese Messungen 20 Jahre lang liegen und wurden von General Baeyer erst nach Gründung des geodätischen Instituts etwa um 1869 wieder aufgenommen und nach Süden zu dem Rheinischen Dreiecksnetz erweitert; wobei namentlich die *badische* Regierung durch liberales Entgegenkommen und Kostenteilnahme zu dem Gelingen des Unternehmens beigetragen hat.

Das Rheinische Dreiecksnetz war nach der Absicht seines Urhebers dazu bestimmt, als erstes Werk *über die Hindernisse der politischen Landesgrenzen in Deutschland hinweg*, eine neue Aera der Geodäsie in Deutschland einzuleiten. —

In idealem Sinne ist dieser Zweck erreicht worden, aber die Landes-Triangulierungen der 6 Staaten, über welche das Rheinische Dreiecksnetz sich ausbreitet, werden unabhängig von demselben weiter behandelt. —

Das Rheinische Dreiecksnetz ist ein Torso geblieben.

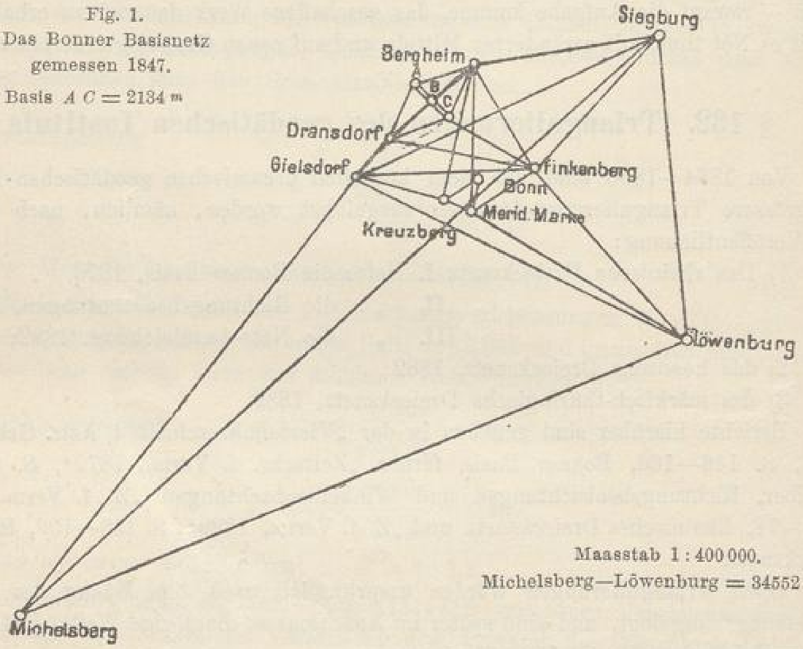
Die Bonner Basis von 1847, mit ihrem Basisnetze ist in nachstehender Fig. 1. dargestellt. Die Vergrösserung der kurzen Basis $A\,B = 2134^{m}$ auf die Seite Michelsberg—Löwenburg = 34552 ist rund 16 fach.

Die Bonner Basis wurde im Jahre 1892 zweifach nachgemessen, d. h. es wurde eine Länge von 2513^{m} in der Nähe der früheren Basis gemessen und auf die alte Linie bezogen, erstens von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme mit dem Bessel schen Basis-Apparate, und zweitens von dem geodätischen Institute mit dem mikroskopischen Brunner-Apparate. Die erstere Messung (Landesaufnahme) ist mitgeteilt von Oberst Morsbach in der „Zeitschr. f. Verm., 1893“, S. 2:

Mittel aus 4 Messungen auf die Höhe von Normal-Null reduziert:

$$B_0 = 2512{,}92767^{\mathrm{m}}$$

Fig. 1.
Das Bonner Basisnetz
gemessen 1847.
Basis $A\,C = 2134^{\mathrm{m}}$



Maasstab 1 : 400 000.
Michelsberg—Löwenburg $= 34552^{\mathrm{m}}$

Die Messung des geodätischen Instituts ist mitgeteilt in den Verhandlungen der internationalen Erdmessung in Genf 1893, Seite 178, nämlich mit Vergleichung mit der Landesaufnahme, in der mittleren Basishöhe:

$$\begin{array}{lr} \text{geodätisches Institut} & B = 2512{,}995^{\mathrm{m}} \\ \text{Landesaufnahme} & B = 2512{,}984 \\ \hline & \text{Differenz} \quad 11^{\mathrm{mm}} \end{array}$$

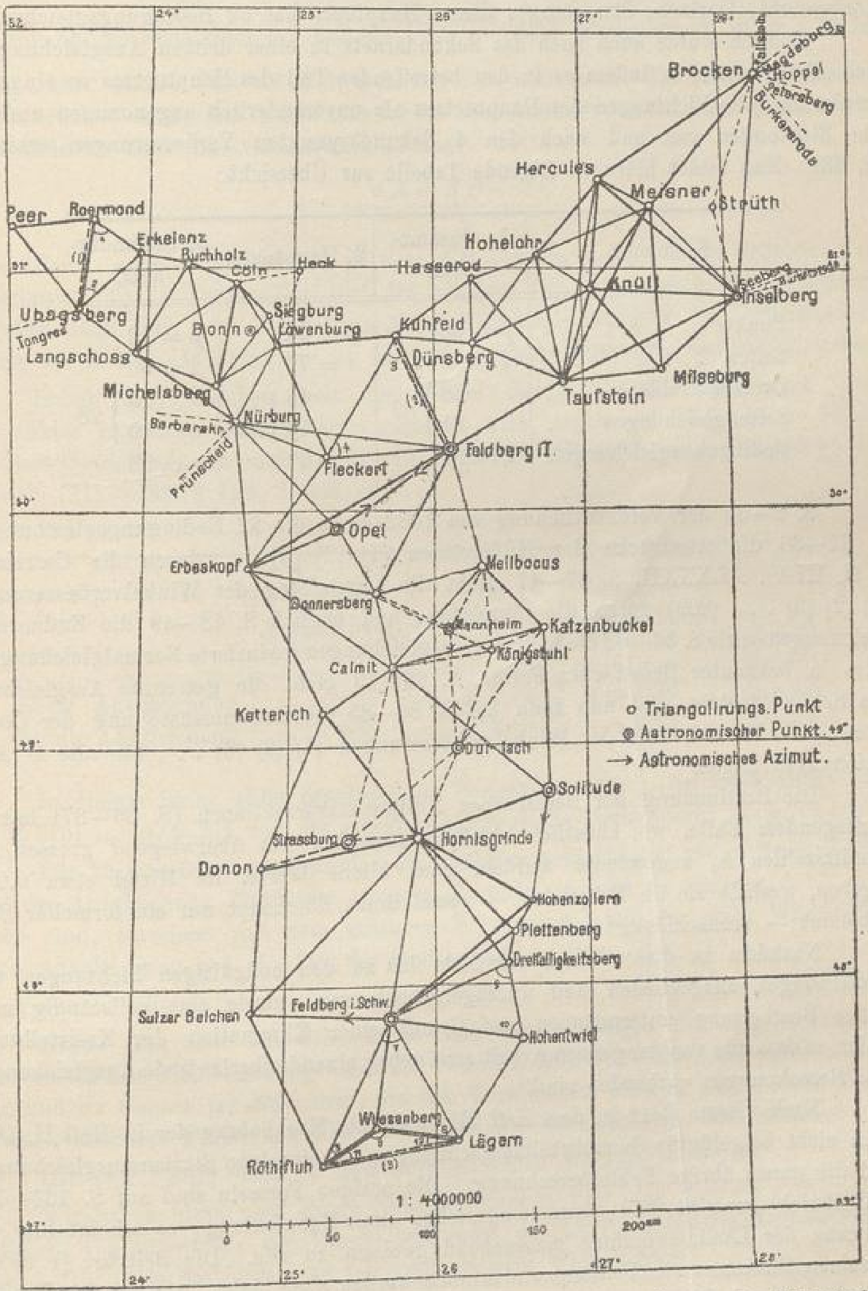
Zurückkehrend zu dem Rheinischen Dreiecksnetz des geodätischen Instituts 1878—1883 haben wir über das angewendete Messungsverfahren zuerst zu berichten, dass das schon von der Gradmessung in Ostpreussen und von der Küstenvermessung her geläufige Verfahren der Richtungsbeobachtungen ohne festen Verteilungsplan, aber mit der Neuerung einer *Nullpunktsmarke* angewendet wurde. Es wurde nämlich ein künstlicher Zielpunkt in Entfernung weniger Kilometer auf jeder Station hergestellt, welcher in *jedem* Satze als Nullpunkt eingestellt wurde. Es wurde dadurch eine gewisse Unabhängigkeit von den Zufällen der Heliotropen-Lichter erzielt, aber das Verfahren im Ganzen hat sich schliesslich doch nicht völlig bewährt. —

Nach diesem betrachten wir das Netz selbst in der Darstellung von Fig. 2, S. 515, welche jedoch in ihrem nordöstlichen Teile auch noch das „hessische Dreiecksnetz“ des geodätischen Instituts von 1882 mitenthält.

Fig. 2.

Das Rheinische und das Hessische Dreiecksnetz.

(Maassstab 1:4000000).



Indem die Seite Kühfeld-Feldberg i. T. als nordöstliche Grenze des Rheinischen Netzes genommen wird, bleiben 36 trigonometrische Punkte mit 93 vorwärts und rückwärts beobachteten Richtungen, welche als Gesamtnetz mit 82 Bedingungsgleichungen ausgeglichen wurden.

Nebenher geht aber eine zweite Ausgleichung mit Trennung des Ganzen in ein „Hauptnetz“ von 32 Punkten und ein Sekundärnetz von 4 Punkten (Mannheim, Königsstuhl, Durlach, Strassburg); dieses Hauptnetz hat 62 Bedingungsgleichungen.

Endlich wurde auch noch das Sekundärnetz in einer dritten Ausgleichung für sich allein behandelt, indem es in den betreffenden Teil des Hauptnetzes so eingefügt wurde, dass die Richtungen des Hauptnetzes als unveränderlich angenommen und nur die Richtungen von und nach den 4 Sekundärpunkten Verbesserungen erhielten (S. 63). Man bildet hiernach folgende Tabelle zur Übersicht:

Elemente.	1. Gesamtnetz.		2. Hauptnetz.		3. Sekundärnetz.	
Punkte	$p = 36$		$p = 32$		$p = 12$	
Seiten	$l = 93$		$l = 77$		$l = 30$	
Dreiecksschlüsse . . .	58	82	46	62	19	28
Seitengleichungen . .	24		16		9	
Bedingungsgleichungen	$r = 82$		$r = 62$		$r = 28$	

S. 2—30 der Veröffentlichung von 1882 giebt die 82 Bedingungsgleichungen, S. 31—36 die Ausdrücke der Hilfsgrössen [1] [2] [3] . . . durch die Correlaten I, II, III . . . LXXXII, S. 37—47 giebt die Darstellung der Winkelverbesserungen (1) (2) (3) . . . (209) durch die Correlaten, und endlich S. 48—49 die Endnormalgleichungen sowie S. 56—62 die Eliminationsgleichungen (reduzierte Normalgleichungen), alles in bekannter Bessel scher Form. S. 63—79 giebt die getrennte Ausgleichung des Sekundärnetzes, und nun kann auf S. 80—85 die Zusammenstellung der Correlaten I, II, III etc. und der Winkelverbesserungen (1) (2) (3) . . . für alle 3 Ausgleichungen folgen.

Die Bestimmung der Bessel schen Nullpunktskorrektionen (S. 86—87) hat in vorliegendem Falle, wo künstliche *Nullpunktsmarken* mit überwiegend grossen Abschnittszahlen h_0 angewendet wurden, ganz kleine Werte, im Mittel etwa 0,01″, ergeben, weshalb sie im Folgenden — zumal ihnen überhaupt nur ein formeller Sinn zukommt — vernachlässigt wurden.

Nachdem in dieser Weise das Netz bis zu den endgültigen Richtungen und Entfernungen ausgeglichen und durchgerechnet war, wurde eine vollständig neue *zweite* Bearbeitung unternommen auf Grund einer Elimination der Kreisteilungsfehler, so dass nun von der ganzen Arbeit *zwei* neben einander herlaufende Ausgleichungen und Berechnungen vorhanden sind.

Nach diesem folgt in dem Heft III, 1882 die Nachholung der in Heft II, 1878 noch nicht beigefügten Genauigkeitsberechnungen der einzelnen Stationsausgleichungen und die ganze übrige Fehlerberechnung. Die nötigen Formeln sind auf S. 134—135 (mit Berichtigung S. 207) zusammengestellt, ohne Entwicklung; es scheint hier der Vorgang der Landesaufnahme massgebend gewesen zu sein. Die Beiträge $[v\ v]$ der einzelnen Stationen zur Fehlerquadratsumme werden aber nicht, wie bei der Landesaufnahme, durch Beifügung des Gliedes $[V_0\ V_0]$ zu jeder Stationselimination gewonnen, sondern durch Bildung aller einzelnen Differenzen $d\,A$, $d\,B$, $d\,C$ . . . zwischen den

Beobachtungen und dem aus der Stationsausgleichung hervorgegangenen wahrscheinlichsten Wert jeder Richtung (vgl. hiezu das Frühere S. 239 im Kleingedruckten und S. 318). Nachdem die Stationseliminationen bereits abgeschlossen sind, ist dieses Verfahren sehr praktisch und auch theoretisch ohne Weiteres klar, wenn man nur sich von der Notwendigkeit des Abzuges $\frac{[\Sigma\, d\, A]^2}{o}$ noch Rechenschaft giebt. Dieser Abzug rührt daher, dass die $d\,A$, $d\,B$, $d\,C$ . . . noch nicht die wahrscheinlichsten Verbesserungen sind, das wahrscheinlichste Verbesserungssystem jeder Station verlangt vielmehr noch eine Gesamtverschiebung

$$z = -\frac{d\,A + d\,B + d\,C}{4}$$

woraus dann $v_0 = z$ $v_1 = d\,A + z$ $v_2 = d\,B + z$ $v_3 = d\,C + z$ als definitive Verbesserungen mit der Summe Null und der richtigen Quadratsumme $[v\,v]$ hervorgehen. Nachdem dann auch noch der Beitrag N der Netzausgleichung zu der Fehlerquadratsumme auf S. 144—145 ermittelt ist, kann die Fehlerberechnung selbst vor sich gehen.

Indem die Gewichtseinheit dem Mittel der Richtungsbeobachtungen eines Zielpunktes in beiden Fernrohrlagen zugeteilt wird, ergab sich der mittlere Fehler für diese Gewichtseinheit nach S. 146—147 von Heft III, 1882, unter Anwendung der Formeln (21)—(23) § 124. S. 477 so:

	Stations-Ausgleichung	Netz-Ausgleichung	Gesamt-Ausgleichung	Quotient $\frac{\mu_2}{\mu_1}$	Quotient $\frac{\mu_2}{\mu}$
Erste Ausgleichung	$\mu_1 = 1{,}17''$	$\mu_2 = 2{,}16''$	$\mu = 1{,}20''$	1,8	1,8
Zweite Ausgleichung	$\mu_1 = 0{,}78$	$\mu_2 = 2{,}18$	$\mu = 0{,}83$	2,8	2,6

In diesem Sinne giebt das hessische Dreiecksnetz (d. h. der nordöstliche Teil auf S. 515) $\mu_2 : \mu_1 = 2{,}4$ und das märkisch-thüringische Dreiecksnetz $\mu_2 : \mu_1 = 1{,}9$.

Für 12 einzelne Winkel wurden die Funktionsgewichte und die mittleren Fehler nach der Ausgleichung durch die strengen Formeln, welche in unserem § 53. enthalten sind, berechnet mit dem mittleren Ergebnis $\pm\, 0{,}29''$ für einen Winkel der ersten Ausgleichung und $\pm\, 0{,}20''$ der zweiten Ausgleichung

also im Mittel: $m' = \pm\, 0{,}25''$ (1)

Dieses sind aber nur theoretische Rechenwerte, wegen des oben erwähnten Missverhältnisses 1,8, beziehungsweise 2,6 zwischen dem Gewichtseinheitsfehler μ_2 im Netz und im Ganzen μ, muss man, um der Wirklichkeit sich zu nähern, die theoretischen mittleren Fehler mit diesen Verhältnissen multiplizieren, und erhält dann:

Mittlerer Fehler eines im Netz ausgeglichenen Winkels $= \pm\, 0{,}52''$ (2)

Wir haben hiezu noch einige Nebenrechnungen nach den Formeln (13)—(15) § 124. S. 475 angestellt: der Durchschnittswert der 58 Dreiecksschlusswidersprüche ist $= 1{,}016''$, also der hieraus zu folgernde mittlere Winkelfehler:

$$= 1{,}2533\, \frac{1{,}016}{\sqrt{3}} = 0{,}74'' \tag{3}$$

Ferner geben die 209 Winkelverbesserungen (1) (2) . . . (209) der Auflösung 1. S. 83—85, Heft III, 1882 den Durchschnittswert 0,261″ also bei 82 Bedingungsgleichungen den mittleren Winkelfehler:

$$= 1{,}2533 \sqrt{\frac{209}{82}}\, 0{,}261'' = \pm\, 0{,}52'' \tag{4}$$

Im Mittel aus diesen zwei Werten (3) und (4) hat man also für den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels den Wert $\pm\, 0{,}63''$ und wegen der 82 Bedingungsgleichungen kann man entsprechend den mittleren Fehler eines im Netz ausgeglichenen Winkels setzen:

$$= \sqrt{\frac{209 - 82}{209}}\, 0{,}63'' = \pm\, 0{,}49'' \tag{5}$$

was mit (2) nahezu übereinstimmt und eine Bestätigung dafür ist, dass man die theoretischen mittleren Fehler unter (1) zuvor mit den betreffenden Quotienten 1,8 beziehungsweise 2,6 multiplizieren muss, um sie den in Wirklichkeit zu befürchtenden Fehlern zu nähern. (Einiges weitere hiezu haben wir noch in der „Z. f. V. 1884“, S. 74—78 gegeben).

Die mittleren Winkelfehler nach der internationalen Formel sind von Helmert gegeben auf S. XII. 5 des „Rapport sur les triangulations“ für 1892 von Ferrero, nämlich:

Bonner Basisnetz $m = \sqrt{\frac{46{,}9505}{27 \,.\, 3}} = \pm\, 0{,}761''$

Rheinisches Dreiecksnetz $m = \sqrt{\frac{117{,}9386}{73 \,.\, 3}} = \pm\, 0{,}734''$

Hessisches Dreiecksnetz $m = \sqrt{\frac{72{,}5128}{34 \,.\, 3}} = \pm\, 0{,}843''$

Anschluss Breslau u. s. w. $m = \sqrt{\frac{8{,}7037}{3 \,.\, 3}} = \pm\, 0{,}983$

Gesamtmittel $m = \sqrt{\frac{246{,}1056}{137 \,.\, 3}} = \pm\, 0{,}774''$

§ 133. Bayern.

Bayern hat das Verdienst, am Anfang dieses Jahrhunderts die erste zusammenhängende Triangulierung und Landesvermessung mit rechtwinkligen Coordinaten durchgeführt und dadurch ein erstes geodätisches Zentrum in Deutschland geschaffen zu haben, an welches sich die andern Südstaaten rasch anschlossen.

Ausser dem Astronomen und Geodäten *Soldner* (1776—1833) sind es die Mechaniker und Optiker *Reichenbach*, *Utzschneider*, *Fraunhofer*, welche durch ihre lange unübertroffenen geodätischen Instrumente zu diesem Ergebnisse beigetragen haben.

Man vergl. hiezu

„Johann Georg Soldner und sein System der bayerischen Landesvermessung, Vortrag vom 27. Juli 1885 von Bauernfeind, München 1885, „Zeitschr. f. Verm. 1886,“ S. 45.

Die trigonometrischen Messungen begannen am Anfang dieses Jahrhunderts, die letzte Berechnung erfolgte aber erst 1866—1870.

Ein amtliches Werk über die bayerische Triangulierung erschien 1873, aus Veranlassung der internationalen Erdmessung:

„Die bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, herausgegeben von der Kgl. Steuer-Kataster-Kommission in Gemeinschaft mit dem topographischen Bureau des Kgl. Generalstabs", München 1873. 1. Abschnitt, die Grundlinien, bearbeitet von Direktor v. Bauernfeind, 2.–8. Abschnitt, Triangulierung und Gradmessungsresultate, bearbeitet von Oberstlieutenant v. Orff, (vgl. die Einleitung S. 6).

Es sind drei Grundlinien gemessen, bei München 1801, Nürnberg 1807 und Speyer 1819. Die Winkelmessungen sind nach der Repetitionsmethode gemacht und stationsweise ausgeglichen. Die Ergebnisse der Stationsausgleichungen wurden in die Netzausgleichung von 1866—1870 als unmittelbare Richtungsmessungen eingeführt, jedoch nicht mit gleichen Gewichten (wie bei Gauss und Gerling), sondern mit den Anschnittszahlen als Gewichten (vgl. hiezu § 82. S. 283).

Das Gesamtnetz wurde in 32 Polygone zerlegt, von denen jedoch ein Teil, namentlich die letzten, Nichts zum Zusammenhalt des Ganzen beiträgt, sondern mehr den Charakter von Punkteinschaltungen hat. Die ersten Polygone schliessen sich an die 3 gemessenen Grundlinien an, und der Zusammenhang der Polygone wird durch Zwangsbedingungen, welche sich auch auf die Basisanschlüsse erstrecken, gewonnen.

Als Beispiel für die Zwangsanschlüsse zwischen den einzelnen Teilnetzen nehmen wir mit Fig. 1 die Verbindung der Polygone IV und V. Das Polygon IV gründet sich auf die Basis Speyer—Oggersheim (welche mit 19794,974ᵐ in die Rechnung eingeht) nahezu in ähnlicher Weise wie bei dem badischen Netze von S. 174. Das Polygon IV wird als frei ausgeglichen und bietet Anschlusszwang nach dem Polygon V.

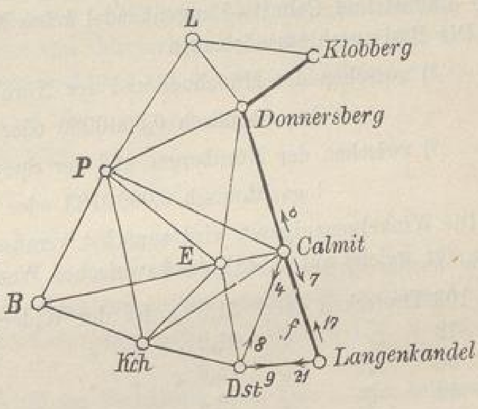
Fig. 1.

Zwangsanschluss zwischen dem Polygon IV und V.

Polygon V (1 : 2 000 000).

Polygon IV.

Das östliche Polygon IV enthält dieselben Anschlussseiten wie die drei starkgezogenen Seiten des westlichen Polygons V (vgl. auch S. 174).



Dst = Derstenberg

Da in dem Polygon V alle Sichten gemessen sind, kann man aus den 10 Punkten und 21 Linien nach bekannten Regeln (S. 176) abzählen, dass 12 Dreiecksgleichungen und 4 Seitengleichungen bestehen, *ohne* Rücksicht auf den Anschluss, welcher, da 3 Grundlinien vorhanden sind, jedenfalls noch 2 weitere Seitengleichungen herbeigeführt (E und F zu den ursprünglichen A, B, C, D S. 362—363 des bayerischen Triangulierungswerkes).

Der Umstand, dass die Winkel in Calmit und in Donnersberg nicht wieder geändert werden dürfen, giebt nicht etwa zu den bereits vorhandenen 12 Winkelgleichungen noch deren 2 neue, sondern er äussert sich darin, dass z. B. die Richtungskorrektionen (17), (7), (8) u. s. w., welche von dem östlichen Netz herkommen, auch im westlichen Teile beibehalten werden müssen.

Die Winkelgleichung f für das Dreieck Derstenberg, Langenkandel, Calmit würde ohne Anschlusszwang lauten:

$$(9) - (8) + (17) - (21) + (4) - (7) - 3{,}759'' = 0.$$

Es ist aber im östlichen Polygon IV bereits unabänderlich bestimmt $(17) = +0{,}355''$, $(7) = -0{,}282''$, womit die vorstehende Gleichung übergeht in:

$$(9) - (8) - (21) + (4) - 3{,}122'' = 0$$

wie sie in der That auf S. 362 des bayerischen Triangulierungswerkes unter f) steht.

Thatsächlich braucht man diese umständliche Herleitung nicht zu machen, man nimmt einfach die Winkel des Dreiecks f als Differenzen der Stationsrichtungen, nachdem man bei denjenigen Strahlen, welche bereits eine Netzausgleichung durchgemacht haben, die von dort erhaltenen Richtungskorrektionen angebracht hat, z. B. in unserem Dreieck f):

Derstenberg	=	65°	6′	12,500″
Calmit	=	42	31	25,482
Langenkandel	=	72	22	20,255
		179	59	58,237
Soll		180	0	1,359
				− 3,122″

Daraus geht die obige Gleichung hervor, wenn man für die Richtungen Langenkandel—Calmit und Calmit—Langenkandel *keine* Korrektionen einführt.

Die Basisanschlüsse betragen:

1) zwischen der Münchner und der Nürnberger Basis:

logarithmisch 0,0000030 oder 7^{mm} für 1^{km}

2) zwischen der Nürnberger und der Speyerer Basis:

logarithmisch 0,0000133 oder 31^{mm} für 1^{km}

Die Winkelgenauigkeit wird zunächst veranschaulicht durch die Dreieckswidersprüche, für welche auf S. 481 des bayerischen Werkes folgende Tabelle gegeben wird:

Bei	106	Dreiecken oder	31,3 %	ist der Widerspruch zwischen	0,0″	und	0,9″
„	72	„ „	21,2 „	„ „ „ „	1,0	„	1,9
„	53	„ „	15,6 „	„ „ „ „	2,0	„	2,9
„	42	„ „	12,4 „	„ „ „ „	3,0	„	3,9
„	29	„ „	8,6 „	„ „ „ „	4,0	„	4,9
„	13	„ „	3,8 „	„ „ „ „	5,0	„	5,9
„	11	„ „	3,2 „	„ „ „ „	6,0	„	6,9
„	7	„ „	2,1 „	„ „ „ „	7,0	„	7,9
„	4	„ „	1,2 „	„ „ „ „	8,0	„	8,9
„	2	„ „	0,6 „	„ „ „ „	9,0	„	9,9
	339		100,0 %				

Indem man in der ersten Gruppe den Mittelwert 0,5″ für alle einzelnen Dreiecke annimmt, in der zweiten Gruppe den Mittelwert 1,5″ etc., findet man den mittleren Winkelfehler:

$$m = \pm 1{,}81''$$

In dem internationalen „Rapport" für 1892 von Ferrero wird auf Seite II, 4 für Bayern und Pfalz nach der internationalen Formel aus 337 Dreiecken berechnet:

$$m = \sqrt{\frac{3183{,}0102}{337 \cdot 3}} = \pm 1{,}774'' \tag{1}$$

Dazu hat *Nagel* im „Civilingenieur" 36. Band, 1890, S. 407 bemerkt, dass die bayerische Gradmessungs-Kommission aus Versehen ein Viereck als Dreieck gezählt und zwei andere Vierecke absichtlich weggelassen hat. Indem dann Nagel die Vierecke nach § 123. S. 470 auf Dreiecke reduziert, berechnet er:

$$m = \sqrt{\frac{3205{,}5771}{339 \cdot 3}} = \pm 1{,}775'' \tag{2}$$

Man hat also aus den Dreiecksschlüssen allein den mittleren Winkelfehler 1,78″, worin der Anschlusszwang nicht wirksam ist.

Aus den 32 Polygonausgleichungen, welche allen Anschlusszwang mitenthalten, berechnet v. Orff auf S. 485 des bayerischen Werkes aus 1013 Richtungsverbesserungen ζ mit 593 Bedingungsgleichungen, den mittleren Fehler einer Richtung vom Gewichte 1:

$$e = \sqrt{\frac{[P\zeta^2]}{593}} = \sqrt{\frac{10295}{593}} = \pm 4{,}16'' \tag{3}$$

Um hieraus einen mittleren Fehler für durchschnittliches Gewicht zu bilden, kann man auf S. 341—477 des bayerischen Werkes die Summe der Anschnittszahlen $= 75258$ und die Anzahl der Richtungen $= 1013$ abzählen, womit man die durchschnittliche Anschnittszahl $= 75$, oder das durchschnittliche Gewicht $= 7{,}5$ berechnet und damit den mittleren Fehler einer Richtung für durchschnittliches Gewicht:

$$e_1 = \frac{4{,}16}{\sqrt{7{,}5}} = \pm 1{,}52'' \tag{4}$$

und den mittleren Winkelfehler:

$$m = e_1 \sqrt{2} = \pm 2{,}15'' \tag{5}$$

Dieses ist der mittlere Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels für *durchschnittliches* Stationsgewicht. Eine bessere Berechnung für *mittleres* Stationsgewicht (mit dem Mittel der Gewichtsreciproken) nach (17)—(20) § 124. S. 476 haben wir nicht gemacht.

Der Wert (5) ist grösser als (2) im Verhältnis etwa 1,2 : 1, was bei den zahlreichen Zwangsbedingungen in stärkerem Masse erwartet werden konnte, oder auch die Rechnung nach (5) ungenügend erscheinen lässt.

Unter Bayern gehört auch noch *Schwerd*s Basisnetz, das wir bereits in § 65. behandelt haben. Wenn man dazu auch den mittleren Fehler nach der internationalen Formel berechnen will, so muss man zu den 3 Dreiecksschlüssen, welche wir bereits auf S. 209 unten bei (6) angegeben haben, noch den 4ten bilden, welchen wir mit den Winkeln $(1-2)$, $(3+4)$ und (7) finden $= -0{,}832''$, wobei aber zu bemerken ist, dass die internationale Formel nicht mehr *ein*deutig ist, wenn, wie in diesem Falle Stationsproben vorhanden sind.

Wir nehmen die angegebenen 4 Dreiecksschlüsse, nämlich:

$$w = \quad -1{,}578'' \quad +1{,}655'' \quad +0{,}809'' \quad -0{,}832''$$
$$w^2 = \quad 2{,}4901 \quad 2{,}7390 \quad 0{,}6545 \quad 0{,}6922$$

$$m = \sqrt{\frac{6{,}5758}{4 \cdot 3}} = \pm 0{,}740'' \tag{6}$$

Dieses wäre mit dem strenger gerechneten Werte 0,989″ von (25) S. 213 zu vergleichen.

§ 134. Württemberg

Nachdem wir die Württembergischen Messungen des 17ten Jahrhunderts schon in § 126. behandelt haben, kommen wir an die Landesvermessung dieses Jahrhunderts, deren Geschichte eng verknüpft ist mit dem Namen *Bohnenberger* s.

Derselbe wurde 1765 in Simmotzheim geboren, wurde Pfarrvikar 1789, ging zur Geodäsie und Astronomie über, worin er als Professor in Tübingen 1803, und später als wissenschaftlicher Leiter der Württembergischen Landes-Triangulierung, von 1818 bis zu seinem Tode 1831, thätig war.

(Joh. G. F. Bohnenberger, Lebensbeschreibung, von Ofterdinger in Ulm, Sep.-Abdr. aus „math.-naturw. Mitteilungen II 1885“, Tübingen, Fues, 1885).

Schon vor der amtlichen Landesvermessung, welche 1818 begann, hatte Bohnenberger privatim viel trigonometrisch und topographisch gemessen, worüber wir anderen Orts („J.-St., deutsches Vermessungswesen 1882 I,“ S. 244—251 und S. 265—266) berichtet haben.

Auch als Astronom und mathematischer Geodät hat Bohnenberger grosse Verdienste, aber die amtliche Württembergische Landes-Triangulierung 1818—1840 ist nur in ihren Anfängen Bohnenberger s unverkümmertes Werk.

Am deutlichsten hat hierüber Professor *Baur* in Stuttgart, welcher noch aus mancher lebenden Tradition aus Landesvermessungszeiten schöpfen konnte (vgl. Baur s Lebensgang 1820—1894, „Z. f. V. 1894“, S. 423—427) sich ausgesprochen als er 1869 für die Europäische Gradmessung einen Bericht über die Württembergische Triangulierung zu erstatten hatte:

Die Winkel der Hauptdreiecke sind grösstenteils von Bohnenberger selbst gemessen worden, und zwar durchgängig nach der Repetitionsmethode. Die Zahl der Repetitionen wechselt von 2 bis 25, meist beträgt sie 5; mit wenigen Ausnahmen wurden die Ablesungen nur an *einem* Nonius gemacht. Die Signale waren teils Türme, teils Pyramiden bis 20m Höhe. Die Punktbezeichnung für die Dauer wurde durch Signalsteine bewirkt.

Die Originalaufzeichnungen sind durchaus nicht mehr über alle auf den Hauptpunkten gemachten Messungen vorhanden, es scheinen von den Bohnenberger schen Aufzeichnungen selbst welche verloren gegangen zu sein. An die Direktion der Vermessung sind nur die von ihm berechneten Coordinaten abgegeben, die Aufzeichnungen und Berechnungen aber von ihm selbst zurückbehalten worden.

Dass das Triangulierungsnetz von 1818—1840 nicht ein einheitliches Ganzes ist, wird bald erkannt, insbesondere fallen am Nordwestrand der Alb zwei Lücken in den Hauptverbindungen unangenehm auf.

Diese Verhältnisse werden begreiflich, wenn man sich des Ganges erinnert, den Bohnenberger s Triangulierung genommen hat und vermöge der Umstände überhaupt nehmen musste. Er war nicht in der Lage, vor Beginn der Katastervermessung ein zweckmässiges, möglichst wenig Hilfspunkte umfassendes Netz über das Land legen zu können, sondern war gezwungen, für die mit der Triangulierung beginnende Detailvermessung in denjenigen Landesteilen, in denen sie nach und nach, vermöge irgend welcher für die *Verwaltungsbehörden* (Obersteuerrat *Mittnacht*) massgebender Rücksichten, angeordnet wurden, die erforderlichen trigonometrischen Anhaltspunkte herzustellen. So musste die Landestriangulierung stückweise zu Ende gebracht werden, und es ist wohl nicht zu verwundern, wenn bei aller anerkennenswerten Tüchtigkeit Bohnenbergers in den Grenzen solcher benachbarter Triangulierungsgebiete (z. B. an dem oben erwähnten Nordwestrand der Alb) eine Häufung von nahe bei einander liegenden Hauptpunkten, Einschaltungen kleiner Anschlussdreiecke, überhaupt ein Netz zum Vorschein kommt, welches das Gepräge seines Ursprungs an der Stirn trägt.

Bohnenbergers theoretische Geodäsie ist enthalten in der Schrift:

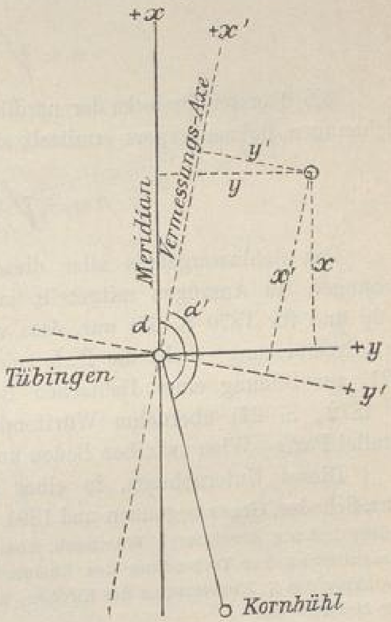
„De computandis dimensionibus trigonometricis in superficie terrae sphaeroidica institutis commentatur Joan. Theophil Frider. Bohnenberger, ordinis philosophici T. T. Decanus. Tubingae litteris Ernesti Eiferti 1826."

In § 15 entwickelt hier Bohnenberger die sphärischen Coordinaten und sagt dazu: Formulae *conveniunt* cum iis, quibus usus est cel. *Soldner* in computandis dimensionibus bavaricis.

Bohnenberger würde Soldners Vorgang nicht bedurft haben, und der schwierigere Teil der Sache, nämlich die Berechnung der *geographischen* Coordinaten aus den rechtwinkligen ist durchaus Bohnenbergers Werk.

Die Abhandlung „De computandis . ." ist seit Baur württembergisches geodätisches Quellenwerk gewesen und wurde später vollständig ins Deutsche übersetzt: „Die Berechnung der trigonometrischen Vermessungen, von E. Hammer, Stuttgart 1885."

Fig. 1.



Das Württembergische Coordinatensystem mit dem Nullpunkt in der Tübinger Sternwarte hat die Eigentümlichkeit, dass seine X-Achse gegen den Tübinger Meridian um um einen kleinen Winkel von 15,58″ verdreht ist.

Es rührt dieses davon her, dass ein vorläufiges Azimut, das Bohnenberger schon 1792 und 1796 mit einem Sextanten gemessen hatte, auch für die Landesvermessung 1818 zunächst beibehalten wurde, nämlich:

Azimut Tübingen Kornbühl

$$\alpha' = 169^\circ\ 12'\ 44{,}3''$$

Später 1819 wurde endgiltig bestimmt:

Azimut Tübingen Kornbühl

$$\alpha = 169^\circ\ 12'\ 59{,}88''$$

(Kohler S. 131 und Bohnenberger „De computandis etc. . . § 17)." Für die eigentliche Landesvermessung blieb man aber bei dem alten Azimut α' und hat damit die Coordinaten, welche in Fig. 1. mit $x'\ y'$ bezeichnet sind, aus denen man $x\ y$ herleiten kann durch die Gleichungen:

$$y = y' + x' \sin(\alpha - \alpha')$$
$$x = x' - y' \sin(\alpha - \alpha')$$

wobei $\alpha - \alpha' = 15{,}58''$. Die Breite und Länge des Nullpunktes sind (nach Kohler S. 295 u. S. 316):

$$\text{Tübingen } \varphi_0 = 48^\circ\ 31'\ 12{,}4'' \qquad \lambda_0 = 26^\circ\ 42'\ 51'' \tag{1}$$

Nach Abschluss der ganzen Landesvermessung wurde ein mit Karten und Aktenauszügen wohl versehenes amtliches Werk herausgegeben:

„Die Landesvermessung des Königreichs Württemberg, in wissenschaftlicher, technischer und geschichtlicher Beziehung, auf Befehl der K. Regierung bearbeitet, und mit deren Genehmigung herausgegeben von Konrad Kohler, Professor, Trigonometer bei dem K. Katasterbureau. Stuttgart, J. G. Cotta scher Verlag. 1858."

Aber auch hier vermisst man die Hand Bohnenbergers, denn gerade in dem wichtigsten Teile der Triangulierung giebt Kohlers Buch nicht den Nachweis des Zusammenhangs der Schluss-Coordinaten mit den Originalmessungen, sondern nur viele Beispiele der angewendeten Messungs- und Rechnungsmethoden.

Der eigentlich wissenschaftliche Nachfolger Bohnenbergers, der oben genannte Prof. *Baur* hat 1869 als Probe von dem, was sich aus der Bohnenberger schen Triangulierung für wissenschaftliche Zwecke herstellen liesse, zwei Ketten von Dreiecken, teils aus den Originalbeobachtungen, teils aus denjenigen Bohnenberger schen Dreiecken, bei welchen „beobachtete Winkel" in den Berechnungen angeführt sind, hergestellt, durch welche der Zusammenhang zwischen der Bayerischen und Badischen Vermessung einerseits im Norden, andererseits im Süden, und hier wiederum auf der Basis Solitude Ludwigsburg vermittelt werden könnte (Gen. Ber. der Eur. Gradmessung für 1869 S. 68). Die erste der zwei untersuchten Ketten enthält 33 geschlossene Dreiecke, die zweite hat deren 22. Alle diese 55 Dreiecke geben die Quadratsumme der Widersprüche = 820,7 also den mittleren Winkelfehler

$$m = \sqrt{\frac{820,7}{55 \,.\, 3}} = \pm 2,23'' \qquad (1)$$

Die 6 ersten Dreiecke der nördlichen Kette, welche unmittelbar aus Originalaufzeichnungen Bohnenbergers ermittelt sind, geben:

$$m = \sqrt{\frac{13,64}{6 \,.\, 3}} = \pm 0,87'' \qquad (2)$$

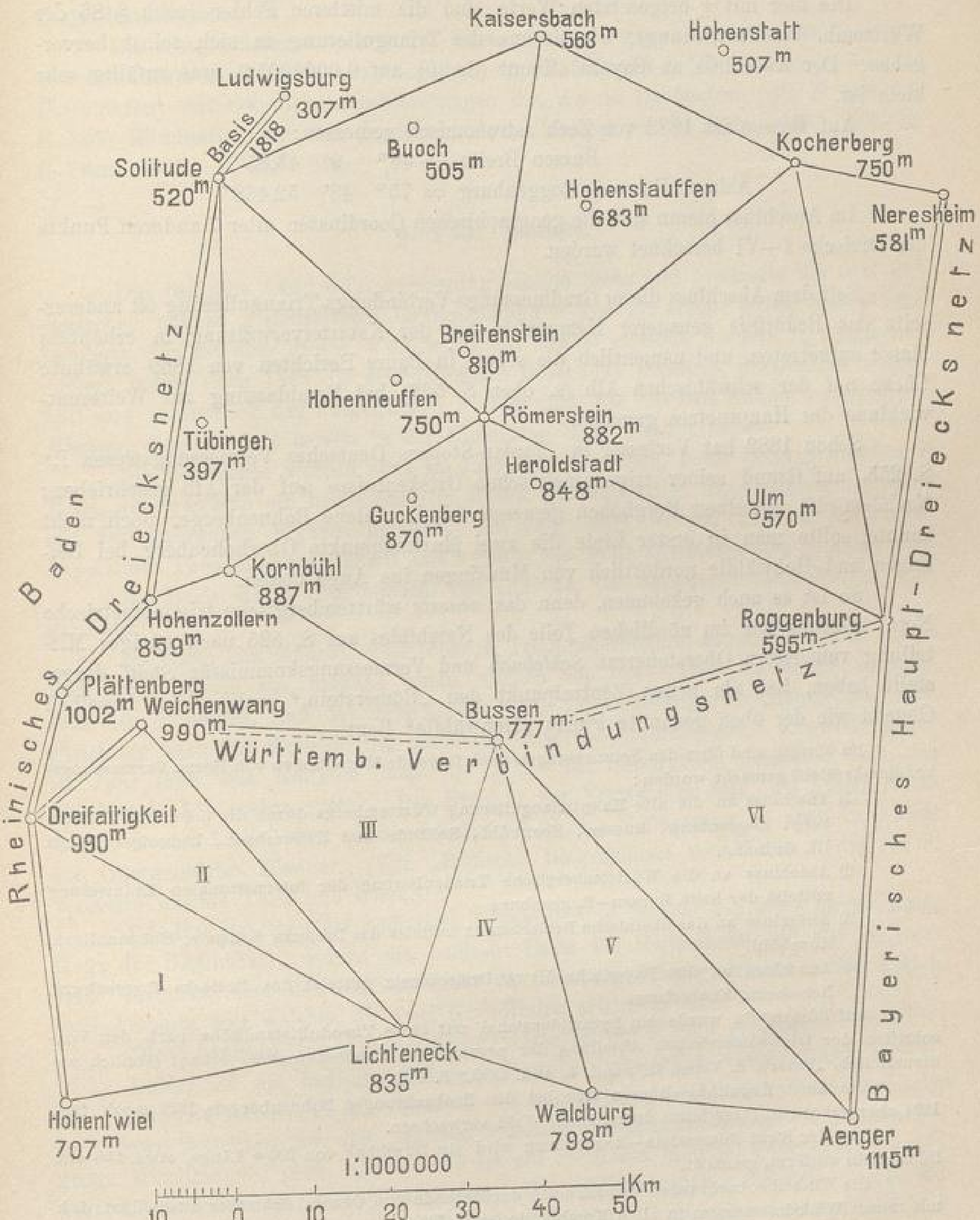
Das Schlussergebnis aller dieser von Prof. Baur 1869 angestellten Untersuchungen (in Auszügen mitgeteilt in den Gen.-Ber. d. Europ. Gradm. für 1869, S. 68 und für 1870 S. 67) war, dass von einer Verwertung der alten Messungen für die „Gradmessung" nicht die Rede sein könne, und auf der Versammlung in Berlin 1871, zur Bildung einer Deutschen Reichs-Gradmessungs-Kommission, (Gen.-Bericht für 1872, S. 27) übernahm Württemberg eine Verbindungstriangulierung auf dem Parallel Paris—Wien zwischen Baden und Bayern, im südlichen Teile von Württemberg.

Dieses Unternehmen, in einer Kette von 6 Dreiecken bestehend, wurde von Baur, Schoder, Gross begonnen und 1891 von Hammer zu Ende geführt in einer amtlichen Veröffentlichung der Königl. Württemb. Kommission für die internationale Erdmessung, III. Heft. Triangulierung zur Verbindung des Rheinischen Netzes mit dem bayerischen Hauptdreiecksnetz, im Auftrag des K. Ministeriums des Kirchen- und Schulwesens bearbeitet von E. Hammer, Stuttgart. J. B. Metzler 1892."

Nach diesem Werke ist der südliche Teil unseres Netzbildes auf S. 525 mit den Dreiecken I bis VI dargestellt; wir berichten auch sofort von S. 86 daselbst die 6 Dreiecksschlüsse, welche nach der internationalen Formel den mittleren Winkelfehler geben:

$$m = \sqrt{\frac{4,0469}{6 \cdot 3}} = \pm 0,474'' \qquad (3)$$

Fig. 2.
Neue Württembergische Triangulierung.



Die Dreiecksberechnung begann mit der aus dem Rheinischen Dreiecksnetz entlehnten Basis (S. 71):

$$\text{Hohentwiel—Dreifaltigkeit} = 35577{,}505^{\text{m}} \quad (log = 4.5511755 \cdot 0)$$

Durch die 6 Dreiecke hindurch wurde erhalten:

Aenger—Roggenburg $= 62203{,}318^{m}$ $(log = 4.7938135{\cdot}5)$
$\pm 0{,}309$ ± 21.6

Die hier mit $\pm$ beigesetzten Werte sind die mittleren Fehler (nach § 86 der Württemb. Veröffentlichung), wie sie aus der Triangulierung in sich selbst hervorgehen. Der Anschluss an Bayern stimmt (S. 90) auf 0.0000005·9, was zufällig sehr klein ist.

Auf Bussen ist 1882 von Zech astronomisch gemessen:

Bussen Breite $= 48° \;\; 9' \;\; 45{,}85''$
Azimut Bussen—Roggenburg $= 75° \;\; 43' \;\; 52{,}468''$

Im Anschluss hieran sind die geographischen Coordinaten aller 7 anderen Punkte der Dreiecke I—VI berechnet worden.

Seit dem Abschluss dieser Gradmessungs-Verbindungs-Triangulierung ist andererseits das Bedürfnis genauerer Netzpunkte bei der Katasterverwaltung in erhöhtem Masse aufgetreten, und namentlich die schon in Baurs Berichten von 1869 erwähnte Lücke auf der schwäbischen Alb (s. oben S. 522) hat Veranlassung zur Weiterentwicklung des Hauptnetzes gegeben.

Schon 1882 hat Verfasser in „Jordan-Steppes Deutsches Vermessungswesen I," S. 255, auf Grund seiner trigonometrischen Ortskentnisse auf der Alb geschrieben: Nachdem die einzelnen Berghöhen gemessen sind, welche Bohnenberger noch nicht kannte, sollte man in erster Linie die zwei Maximalpunkte Oberhohenberg bei Deilingen und Hohwäldle nordöstlich von Münsingen ins Auge fassen.

So ist es auch gekommen, denn das *neueste* württembergische trigonometrische Netz, welches wir im nördlichen Teile des Netzbildes auf S. 525 nach gütiger Mitteilung von Herrn Obersteuerrat *Schlebach* und Vermessungskommissär *Steiff* dargestellt haben, hat als neuen Zentralpunkt den „Römerstein," welcher in derselben Gegend wie der oben genannte Punkt „Hohwäldle" liegt.

Im übrigen sind über den Neumessungen noch folgende Mitteilungen von Herrn Vermessungskommissär Steiff gemacht worden:

1) Anschluss an die alte Haupttriangulierung Württembergs durch die 6 Punkte Kochenberg, Roggenburg, Bussen, Kornbühl, Solitude und Kaisersbach, bisheriger Punkt III. Ordnung.
2) Anschluss an die Württembergische Triangulierung der internationalen Erdmessung mittelst der Seite Bussen—Roggenburg.
3) Anschluss an das Rheinische Dreiecksnetz mittelst des Dreiecks Solitude, Hohenzollern, Kornbühl.
4) Anschluss an das Bayerische Haupt-Dreiecksnetz mittelst des Dreiecks Roggenburg, Neresheim, Kocherberg.

Auf Römerstein wurde ein Pyramidensignal mit $19{,}6^{m}$ Theodolitstandhöhe nach den Vorschriften der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme erbaut (ähnlich wie Steuerndieb, „Handb. d. Verm. II. Band, 4. Aufl. 1893," S. 256).

Die Sicht Kornbühl—Bussen war bei den Beobachtungen Bohnenbergers 1821 noch frei, 1894 aber nahezu in ihrer Mitte durch einen Wald verwachsen.

Auf der Sicht Römerstein—Roggenburg wird ein Durchhau von 200^{m} Länge, etwa 6^{km} von Römerstein entfernt, gemacht.

Die Winkelbeobachtungen werden nach der Methode von General Schreiber ausgeführt, d. h. mit reinen Winkelmessungen in allen Kombinationen (§ 79).

Über den neuesten Stand der Triangulierung III. Ordnung wird Auskunft gegeben in

Vorschriften, betreffend die Erhaltung und Fortführung der Flurkarten und Primärkataster im Königreich Württemberg. Amtsblatt des Steuerkollegiums von 1895, Nr. 1 und 2.

Württemberg hat auf 19 504 Q.-Kilom. (oder rund 354 Q.-Meilen) 29 244 trigonometrische Signalpunkte I.—III. Ordnung, nämlich 2890 Hochpunkte (namentlich Kirchtürme) und 26 354 Bodenpunkte, also rund 3 trigonometrische Punkte auf je 2 Quadratkilometer.

Die Ausgleichungen werden im Wesentlichen so gemacht wie unsere Vorwärts- und Rückwärts-Einschneide-Ausgleichungen von S. 343 und S. 351 (jedoch in anderen Formularen) mit Coordinatenverbesserungen dx, dy in Decimetern (vgl. S. 329 und S. 397) Elimination mit dem Rechenschieber. Einiges weitere hiezu giebt „Zeitschr. f. Verm. 1895," S. 280—286.

§. 135. Baden.

Die badische Landes-Triangulierung ist die beste und genaueste der drei süddeutschen nahezu gleichzeitigen Unternehmungen aus der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts, sie hat aber diesen Wert nicht auf *ein*mal erreicht, sondern in zweifachem Anlauf, indem nach 1840 die grundlegenden Messungen revidiert, grossenteils wiederholt und namentlich neu ausgeglichen worden sind, wie wir zum Ruhme des Urhebers, *Rheiner*, dieser Arbeit bereits in der Einleitung S. 6 erwähnt haben.

Die Messungen wurden etwa im Jahr 1816 begonnen, unter Leitung von Oberst Tulla, von welchem ein heute noch in Baden gebräuchliches Ausgleichungsverfahren mit fehlerzeigenden Figuren herrührt. Im Jahr 1823 wurden mehrere Münchener Repetitions-Theodolite angeschafft, mit welchen von da an alle Messungen gemacht sind.

Als Basis diente ursprünglich, von 1820 an, die bayerische Linie Speyer—Oggersheim.

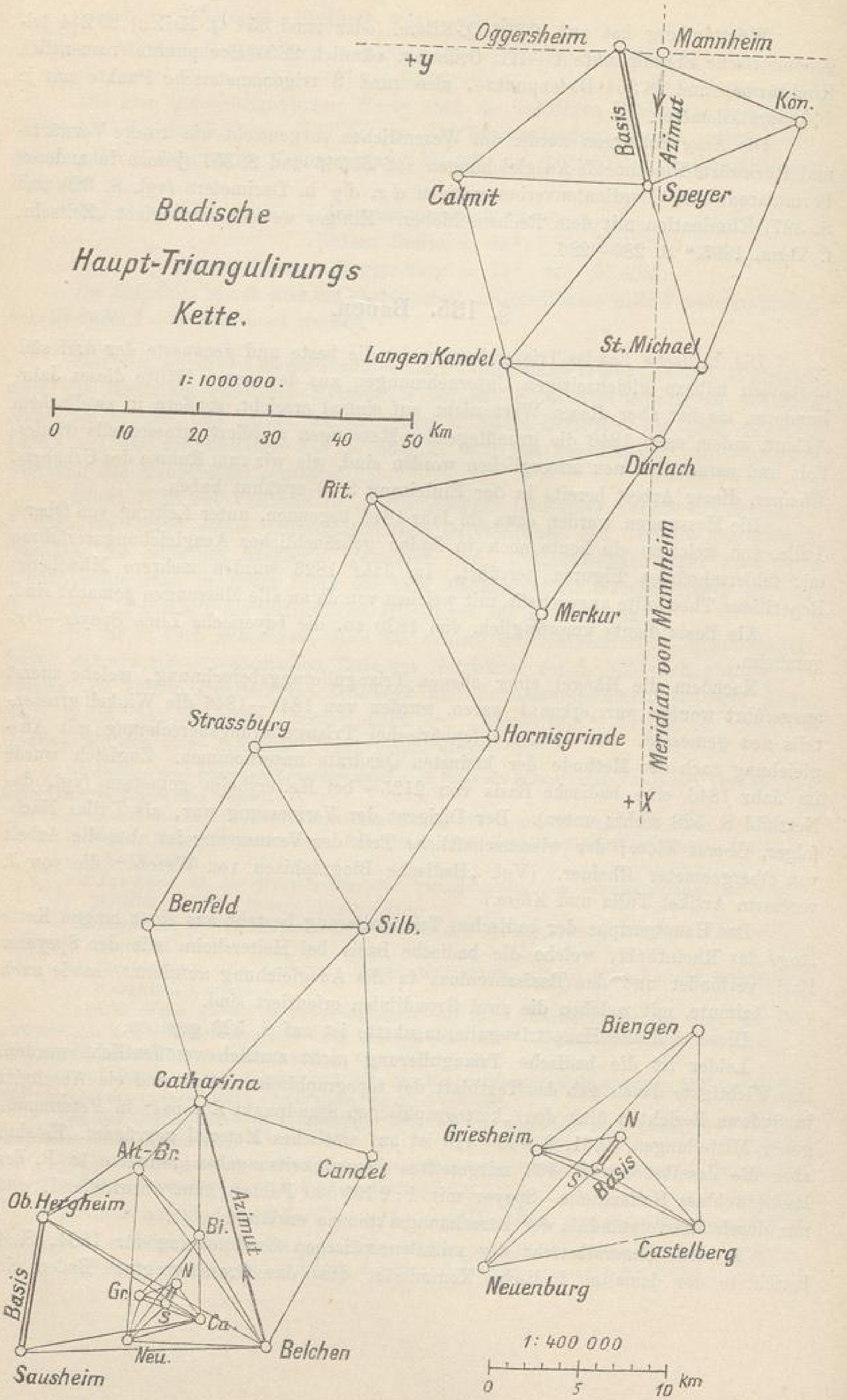
Nachdem die Mängel einer ebenen Triangulierungsberechnung, welche zuerst ausgeführt worden war, erkannt waren, wurden von 1841—1846 die Winkel grossenteils neu gemessen, und die neue (sphärische) Triangulierungsberechnung mit Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate unternommen. Zugleich wurde im Jahr 1846 eine badische Basis von 2125^m bei Heitersheim gemessen (vgl. das Netzbild S. 528 rechts unten). Der Dirigent der Vermessung war, als Tullas Nachfolger, Oberst Klose; der wissenschaftliche Teil der Vermessung ist aber die Arbeit von Obergeometer Rheiner. (Vgl. „Badische Biographieen von Weech," die von J. verfasstn Artikel Tulla und Klose.)

Das Hauptgerippe der badischen Triangulierung besteht aus einer langen Kette längs des Rheinthals, welche die badische Basis bei Heitersheim mit der Speyerer Basis verbindet und den Basisanschluss in die Ausgleichung aufnimmt, sowie auch *zwei* Azimute, mit welchen die zwei Grundlinien orientiert sind.

Diese badische Haupttriangulierungskette ist auf S. 528 gegeben.

Leider ist die badische Triangulierung nicht amtlich veröffentlicht worden. Das Wichtigste davon gab das Textblatt des topographischen Atlas, und ein Abschnitt in Sydows Berichten über den „kartographischen Standpunkt Europas" in Petermanns geogr. Mitteilungen, 1861, S. 468—470 ist auf amtliches Material gegründet. Es sind aber die daselbst auf S. 468 mitgeteilten Genauigkeitsangahen teilweise (z. B. der Basisanschluss Heitersheim—Speyer mit 1 : 2 199 000 Fehler) ganz unzutreffend, und nur durch Missverständnis der Berechnungsakten zu erklären.

In dem Generalbericht der mitteleuropäischen Gradmessung für 1864, S. 4 berichtete der damalige badische Kommissär, dass das Grossherzogtum Baden ein


Oggersheim
Mannheim
+y
Basis
Azimut
Kön.
Calmit
Speyer
Badische
Haupt-Triangulirungs
Kette.
1: 1000 000.
0 10 20 30 40 50 Km
Langen Kandel
St. Michael
Durlach
Rit.
Merkur
Meridian von Mannheim
Strassburg
Hornisgrinde
+X
Benfeld
Silb.
Biengen
Catharina
Griesheim
N
S
Basis
Alt-Br.
Candel
Ob. Hergheim
Azimut
Bi.
Basis
N
Gr.
S
Ca.
Neu.
Belchen
Sausheim
Castelberg
Neuenburg
1: 400 000
0 5 10 Km

Dreiecksnetz von Tranchot (?) besitze, über dessen Genauigkeit keine Mitteilung gemacht werden konnte. —

In dem Generalbericht der mitteleuropäischen Gradmessung für 1866, Seite 3—4 wird weiter von Differenzen berichtet, erstens zwischen badischen und hessischen Dreiecksseiten u. s. w. und zweitens zwischen badischen Dreiecksseiten selbst und ihren aus den rechtwinkligen Coordinaten abgeleiteten Werten, z. B. der Differenz von $0{,}44^m$ zwischen einer Seite s und ihrem Werte $\sqrt{(y'-y)^2+(x'-x)^2}$ (Einzelheiten hiezu in unserer 2. Aufl. II. Band, 1878, S. 157). Diese Differenz $0{,}44^m$ ist aber lediglich die Wirkung der *Erdkrümmung* in den Soldnerschen Coordinaten, eine Wirkung, welche damals, 1866, übersehen wurde. —

Unter solchen und ähnlichen Umständen, namentlich nachdem die weniger genaue Bayerische Triangulierung zur amtlichen Veröffentlichung als Gradmessungswerk bestimmt war, und nachdem eine Deutsche Reichs-Kommission für Gradmessung 1871 in Berlin vorläufig sich versammelt und die geodätischen Verhältnisse der deutschen Staaten erwogen hatte („Generalbericht über die Europ. Gradm. für 1872," S. 22—35) hielt ich es für das dringendste Bedürfnis, — unbeschadet aller Neumessungspläne — wenigstens einmal zu untersuchen und festzustellen, *was* an geodätischem Material in Baden vorhanden war und welche Genauigkeit dem Vorhandenen zuzuschreiben sei.

Auf diesem Wege entstand eine autographisch als Manuskript gedruckte Denkschrift:

„Triangulierung des Grossherzogtums Baden, in der Zeit von 1823—1852 ausgeführt von Oberst Klose und Obergeometer Rheiner, im Auftrage des Gr. Ministeriums des Innern, auf Grund der Akten des Gr. Kataster-Bureaus beschrieben und durch Revisions-Berechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate erläutert von W. Jordan, Professor der Geodäsie am Gr. Polytechnikum. Karlsruhe, Februar 1873." 68 S. 4° und 5 Tafeln.

Dieses wurde von dem Verfasser nur als eine Vorarbeit betrachtet zu einem erschöpfenden amtlichen Werke (etwa wie in Bayern) über die geodätischen Messungen, welche bis heute die Grundlage der gesamten badischen amtlichen Geodäsie bilden. Dieser Gedanke ist unausgeführt geblieben. —

Aus jener Autographie und aus den amtlichen Akten ist folgendes mitzuteilen:

Alle Winkelmessungen waren nach der Repetitionsmethode gemacht in *neuer* (centesimaler) Teilung (viele Originalmessungen hievon sind auch veröffentlicht in unserer 2. Aufl. „Handb. d. Verm., I. Band, 1877," S. 270—271). Bei der grossen Zahl solcher Einzelwinkel (z. B. auf Mannheim sind 59 Winkel zwischen 14 Richtungen vorhanden) musste vor allem Horizontausgleichung stattfinden, über welche aber kaum Nachweise gegeben werden können; es wurden eben schliesslich gewisse einzelne Winkel auf jeder Station herausgemittelt und als unabhängige Winkel in das Netz eingeführt.

Wo man die Geschichte der trigonometrischen Ausgleichungen verfolgt, findet man namentlich bei Praktikern (bis in die jüngsten Jahrzehnte) eine lange Scheu, von dem Euklidischen Begriff des Winkels die geodätische Abstraktion der „Richtung" zu bilden. So auch in Baden um 1840—1850. Von dem Gerlingschen Buch von 1843 (vgl. Einleitung S. 5) findet sich keine Einwirkung in Rheiners Rechnungen.

Es scheinen *eigene* Theorien, die sich auch an die Namen der Gebrüder Dienger knüpfen, damals in Baden wirksam gewesen zu sein (von Professor Dienger in Karlsruhe haben wir eine spätere Schrift „Ausgleichung der Beobachtungsfehler, Braunschweig 1857," mit vielen geodätischen Anwendungen).

Wir wollen das an dem Beispiele des Heitersheimer Basisnetzes (S. 528 rechts unten) zeigen.

Es sind 18 einzelne Winkel als gemessen eingeführt, (deren Verteilung jedoch aus der Figur von S. 528 unten nicht ersehen werden kann), das Netz bietet 10 Bedingungsgleichungen, worunter 3 Seitengleichungen. Es schiene somit nach heutiger Anschauung angezeigt, 10 Correlatengleichungen zu bilden und die 18 Winkelcorrektionen in den 10 Correlaten auszudrücken. Statt dessen verfährt die offizielle Rechnung umständlicher so: Es seien $x_1\, x_2\, x_3 \ldots . x_{18}$ die zu findenden Winkelkorrektionen, und die 10 Bedingungsgleichungen allgemein ausgedrückt durch:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_3\, x_3 + \ldots \quad + a_{18}\, x_{18} + w_1 = 0 \\ b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + b_3\, x_3 \ldots \quad + b_{18}\, x_{18} + w_2 = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ k_1\, x_1 + k_2\, x_2 + k_3\, x_3 \ldots \quad + k_{18}\, x_{18} + w_{10} = 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

wozu die Minimumsgleichung gehört:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots \quad x_{18}^2 = \text{Minimum} \tag{2}$$

Nun wurden die Gleichungen (1) und (2) differentiiert:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3 + \ldots \quad a_{18}\, dx_{18} = 0 \\ b_1\, dx_1 + b_2\, dx_2 + b_3\, dx_3 + \ldots \quad b_{18}\, dx_{18} = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3 + \ldots \quad x_{18}\, dx_{18} = 0 \tag{4}$$

Eine Zahl von 10 einzelnen Differentialen dx_1 etc. wurde mittelst der 10 Gleichungen (3) in den 8 übrigen Differentialen ausgedrückt und in (4) substituiert, worauf hier alle Coefficienten der noch vorhandenen Differentiale einzeln gleich Null zu setzen waren, um 8 Gleichungen für die 8 unabhängigen x zu erhalten. Diese 8 Gleichungen wurden zuerst für sich aufgelöst und führten dann auch zur Bestimmung der übrigen x.

Es ist bekannt, dass dieses die Art und Weise ist, mittelst welcher man die Correlatenmethode analytisch zu begründen pflegt; die numerische Anwendung ist aber offenbar umständlicher als die Correlatenmethode selbst, doch hat dieses auf die Schlussergebnisse keinen Einfluss. Die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler wurde im obigen Falle = 88,68, woraus bei 10 Bedingungsgleichungen der mittleren Winkelfehler = $\pm$ 2,95^{cc} = $\pm$ 0,95″ folgt.

In dieser schwerfälligen, aber den badischen Geodäten von 1840—1850 zur Ehre gereichenden Weise, (wobei auch z. B. die Coefficienten $\frac{\mu}{\varrho}\, cotg$ der linearen Seitengleichungen 7stellig, ebenso genau wie die Dreieckswinkel selbst gerechnet wurden) — ist dann in der heute noch üblichen Weise Netz an Netz mit Zwangsanschlüssen gereiht worden, so dass das Ganze mit 21 Partialnetzen weit über die badischen Grenzen hinaus zum Anschluss an Hessen, Württemberg, Schweiz und Frankreich durchgeführt wurde. Wir wollen dieses hier nur soweit verfolgen, als das Netzbild S. 528 gestattet.

Das Heitersheimer Basisnetz haben wir schon oben bei den Gleichungen (1)—(4) durchgenommen, der Übergang von dem kleinen Basisnetz zu der französischen Basis Sausheim-Oberhergheim und zur Anschlussseite Belchen-Catharina ist formell in *ein* Netz zusammengefasst, besteht aber sachlich aus *fünf* Partialnetzen, deren jedes immer nur *einen* neuen Punkt hinzufügt (offenbar Wirkung der schwerfälligen Ausgleichungsmethode).

Als dritte Gruppe ist die lange Kette von Catharina-Belchen bis zu der Basis Speyer-Oggersheim zu nennen, welche nach dem Netzbilde S. 528 den Rückgrat des Ganzen bildet. Diese Gruppe bietet in sich selbst 15 Dreiecksgleichungen nebst einer Horizontgleichung und einer Seitengleichung um Speyer, also 17 innere Bedingungsgleichungen. Dazu treten aber die 2 äusseren Zwangs-Gleichungen für den Basisanschluss (eine durchlaufende Seitengleichung) und für Identität der geographischen Orientierung durch die *zwei* Azimute Belchen-Catharina und Mannheim-Speyer (letzteres durch das Hilfsdreieck Mannheim-Speyer-Oggersheim mit der Basis Speyer-Oggersheim verbunden). Das Netz als Ganzes giebt mit seinen 19 Bedingungsgleichungen einen mittleren Winkelfehler von $\pm 4{,}51^{cc} = \pm 1{,}46''$.

Nun ging es nördlich zu den Punkten Donnersberg, Klobberg, Melibocus u. a., welche auf S. 174 dargestellt sind (in dem Netze das erstmals in „Astr. Nachr. 75. Band, 1870," S. 289—306 als Nachweis für die Genauigkeit süddeutscher Triangulierungen von uns veröffentlicht worden war). Nach Vollendung der ganzen Ausgleichung, mit ihren 17 bzw. 21 Partialnetzen, wurde ein rechtwinkliges Coordinatensystem nach Soldner scher Art, angelegt mit der Sternwarte Mannheim als Nullpunkt, $+x$ nach Süden, $+y$ nach Westen, worauf dann 1852 die vorzügliche badische Katastervermessung in solidester Weise aufgebaut werden konnte.

Im Übrigen auf die Autographie selbst oder auch den Abschnitt in „Jordan-Steppes, Deutsches Vermessungswesen 1882, I," S. 270—285 verweisend, wollen wir hier nur diejenigen Genauigkeitsrechnungen vorführen, welche aus den Dreiecksschlüssen nach der internationalen Formel gewonnen werden können:

Auf S. 54—57 der Autographie sind 121 Dreiecke mit ihren Schlussfehlern angegeben, von denen aber nur 86 badischen Messungen zugehören; die 35 übrigen sind von den Nachbarstaaten entlehnt und werden auch zum Teil auf die theoretische Summe $200^g +$ Excess bereits ausgeglichen vorgeführt. Die 86 badischen Dreiecke geben die Quadratsumme der Widersprüche in Sekunden neuer Teilung = 6215,24, also den mittleren Winkelfehler:

$$m = \sqrt{\frac{6215{,}24}{86 \cdot 3}} = \pm 4{,}908^{cc} = \pm 1{,}590'' \tag{5}$$

oder in anderer Form:

$$m = \sqrt{\frac{652{,}45}{86 \cdot 3}} = \pm 1{,}590'' \tag{6}$$

Statt der alten Seiten- und Basis-Anschlüsse aus der Zeit von 1850 können wir nun seit der Herausgabe des Rheinischen Dreiecksnetzes 1882 des geodätischen Instituts, die an Objektivität und Unabhängigkeit nichts zu wünschen übriglassenden Vergleichungen zwischen alten badischen Dreiecksseiten und Dreiecksseiten des geodätischen Instituts vornehmen (im Nachfolgenden S. 532):

Die Pfeilerbauten und Punktfestlegungen für das Rheinische Dreiecksnetz auf badischem Gebiete waren 1868—1872 vom Verfasser besorgt worden, und ich hatte namentlich alles gethan, um die neuen Punkte in das alte badische Coordinatensystem mit dem Nullpunkt Mannheim genau einzubinden. Die badischen Coordinaten der neuen Punkte sind in unserer 2. Aufl. „Handb. d. Verm., II. Band, 1878," S. 450

mitgeteilt (dagegen fehlen sie in der Veröffentlichung des geodätischen Instituts, Rheinisches Dreiecksnetz II, 1882, wie auch die Lagepläne, die Höhen und andere Einzelheiten dort weggelassen sind —).

Mit diesen badischen Coordinaten haben wir alsbald nach dem Erscheinen des Rheinischen Dreiecksnetzes 1883, Vergleichungen berechnet, welche zuerst in der „Zeitschr. f. Verm. 1884," S. 77 mitgeteilt sind, wie auch in Nachstehendem zu sehen ist, wo mit Rh_1 und Rh_2 die zwei Ausgleichungen des Rheinischen Dreiecksnetzes unterschieden sind, welche schon in § 132 S. 517 erwähnt wurden.

Seite.	*log* $\frac{Rh_1}{Rh_2}$	*log* Bad.	Bad.—Rhein.
			log
Mannheim-Durlach.	4.736 2660 4.736 2651	4.736 2765	+ 0.000 0105 114
Königsstuhl-Katzenbuckel . . .	4.378 5264 4.378 5259	4.378 5363	0.000 0101 104
Königsstuhl-Durlach	4.686 1360 4.686 1356	4.686 1437	0.000 0077 81
Katzenbuckel-Durlach	4.822 6414 4.822 6409	4.822 6505	0.000 0091 96
Durlach-Hornisgrinde	4.683 2435 4.683 2426	4.683 2449	0.000 0014 23
Hornisgrinde-Feldberg	4.917 6656 4.917 6644	4.917 6674	0,000 0018 30
		Mittel	+ 0.000 0071

Die logarithmische Differenz 0,000 0071 entspricht 7,1 : 0,434 = 16 Milliontel der Länge oder 16 Millimeter auf 1 Kilometer, und nahezu ebenso gross, nämlich 0,000 0085 oder 19 Milliontel beträgt die *Änderung* des Massstabsverhältnisses innerhalb des badischen Gebietes. Beides sind sehr befriedigende Ergebnisse.

§ 136. Hessen.

Im Jahre 1808 wurde durch *Eckhardt* und *Schleiermacher* zwischen Darmstadt und Griesheim eine 7,7^{km} lange Basis mit drei Messstangen von je 4 Toisen Länge, aus Kiefernholz gemessen. Als Normalmass diente eine noch heute auf dem Darmstädter Museum befindliche Toise von Lenoir. Die definitive Annahme für die Basislänge ist 3976,087 Toisen = 7749,5379^{m} (vgl. die Dreiecksberechnung von Nell, „Zeitschr. f. Verm. 1881," S. 109, nämlich 3099,815 hess. Klafter (zu 2,5^{m}) = 7749,5375^{m}). Die Winkelmessung geschah durch Theodolite mit centesimaler Teilung, mit 20facher Repetition.

Für die Ausgleichung der Triangulierung wurde in Hessen schon sehr frühzeitig die Methode der kleinsten Quadrate angewendet, und zwar in einer Form, welche *Schleiermacher* (geb. etwa um 1780, gest. 1844) dafür fand, dieselbe besteht darin, dass man bei der Ausgleichung von Winkeln, welche in einzelnen Dreiecken mit Polygonschlussproben gruppiert sind, die einzelnen Dreiecke zuerst vorläufig auf $180° + \varepsilon$ ausgleicht, und dann die Seitengleichungen und Horizontgleichungen von den Dreiecksgleichungen trennt, indem die Correlaten der letzteren möglichst früh eliminiert werden. Es wird hiebei der Umstand, dass die Dreiecksgleichungen nur je *drei* Unbekannte enthalten, also eine ganze Menge Coefficienten = Null sind, zur bequemen Elimination benützt.

Da indessen dieser Umstand auch in anderer Art ausgenützt werden kann, und sich bei jeder Eliminationsart in irgend welcher Weise von selbst günstig bemerklich machen muss (wie an dem Netze von S. 174 und an dessen Behandlung in den früheren Auflagen unseres Buches gesehen werden kann), so ist ein besonderer Gewinn in der fraglichen Methode nicht zu sehen, dagegen ist es ein ungemein grosses Verdienst Schleiermachers, dass er schon vor 1830 *überhaupt* die M. d. kl. Q. praktisch zu verwerten verstand.

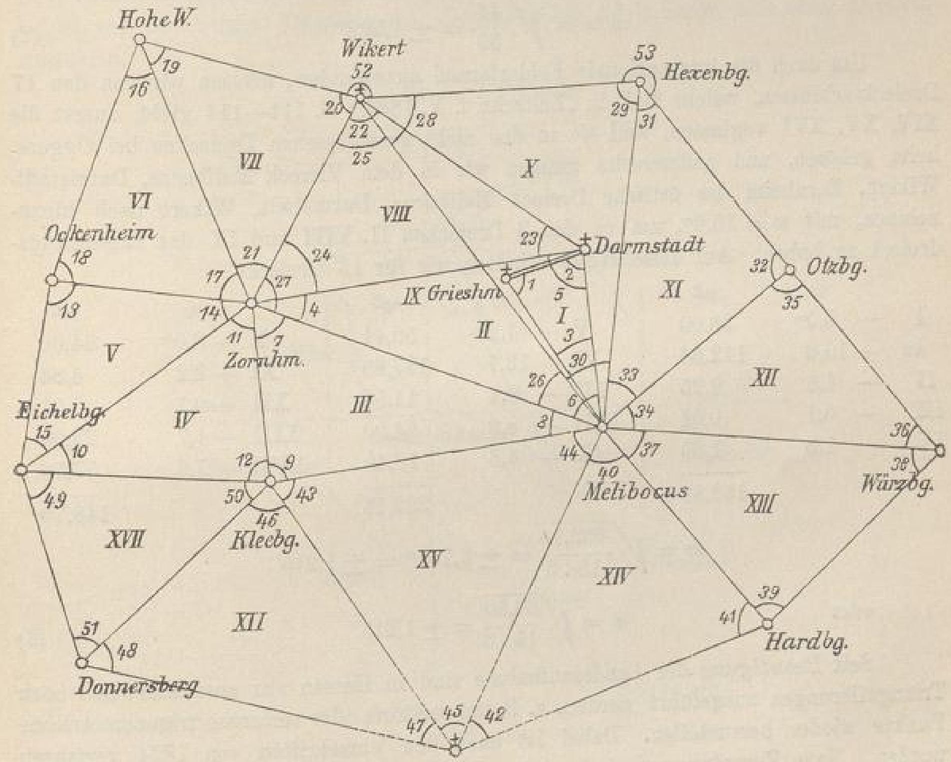
Eine kritische Beleuchtung der Schleiermacherschen Methode giebt Helmert in Schlömilchs „Zeitschr. f. M. u. Ph. 14. Jahrg. 1869," S. 201—205 mit dem Resultat, dass die Methode unter Umständen am Platz, aber z. B. nicht auf Richtungsmessungen zu übertragen sei. Die neueste Mitteilung von Nell in der „Zeitschr. f. Verm. 1881," S. 7—11 (mit Anwendung auf unser badisches Netz von S. 174) bestätigt dieses.

Amtlich veröffentlicht ist über die Triangulierung von Hessen nur eine kleine Schrift: Die Dreiecke I. und II. Ranges in der Provinz Rheinhessen für die Basis bei Darmstadt berechnet, Darmstadt gedruckt in dem lithographischen Institute 1821.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1891," S. 109—121 wurde von Prof. *Nell* eine Dreiecksausgleichung nach Schleiermachers Methode gegeben für ein Netz, das in nachstehender Fig. 1. dargestellt ist:

Fig. 1.

Hessisches Dreiecksnetz 1 : 750 000.



Das Netz hat 15 Punkte, 31 Linien und 50 gemessene Winkel. Die 3 Winkel 42, 45, 47 auf Oggersheim sind nicht gemessen, man hat also $p = 15$ Punkte im Ganzen, aber darunter einen, welcher nur vorwärts eingeschnitten ist, und $l = 31$ Linien im Ganzen, worunter $l' = 4$ einseitig gemessene.

Man hat daher nach (12) S. 174:

$$31 - 30 + 3 = 4 \text{ Seitengleichungen}$$
$$(31 - 4) - (15 - 1) + 1 = 14 \text{ Dreiecksgleichungen}$$
$$50 - 30 + 4 = 24 \text{ Gleichungen im Ganzen,}$$

und zwar ausser den $4 + 14$ Netzgleichungen noch 6 Stationsgleichungen, nämlich 2 auf Zornheim und je eine auf Melibocus, Klobberg, Wikert, Hexenberg. Die von Nell gegebene Ausgleichung liefert die Quadratsumme der 50 Winkelverbesserungen in Sekunden neuer Teilung $(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots = 609{,}45$, also den mittleren Fehler eines gemessenen Winkels:

$$m' = \sqrt{\frac{609{,}45}{24}} = \pm 5{,}04^{cc} = \pm 1{,}633'' \tag{1}$$

Dieses ist aber nicht der mittlere Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels, wegen der 6 Stationsgleichungen.

Ohne uns auf eine genauere Berechnung nach (17)—(20) § 124. S. 476 einzulassen, wollen wir die 50 Winkel mit 6 Stationsgleichungen näherungsweise betrachten als konzentriert auf $50 - 6 = 44$ Winkel ohne Stationsgleichungen, d. h. wir wollen aus (1) ableiten den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels:

$$m = m' \sqrt{\frac{44}{50}} = \pm 1{,}532'' \tag{2}$$

Um auch die internationale Fehlerformel anzuwenden, müssen wir von den 17 Dreiecksschlüssen, welche Nell in „Zeitschr. f. V. 1881," S. 111—114 giebt, zuerst die XIV, XV, XVI weglassen, weil sie zu den nicht geschlossenen Dreiecken bei Oggersheim gehören, und andererseits müssen wir in dem Viereck Melibocus, Darmstadt, Wikert, Zornheim das östliche Dreieck Melibocus, Darmstadt, Wikert noch hinzunehmen, mit $w = 10{,}6^{cc}$, um zu den 3 Dreiecken II, VIII und IX das Ergänzungsdreieck zu haben. Auf diese Weise erhalten wir für 15 Dreiecke:

	w	w^2		w	w^2		w	w^2
I	$-\ 6{,}0^{cc}$	36,00	V	$-\ 7{,}1^{cc}$	50,41	X	$+\ 8{,}0^{cc}$	64,00
Ia	$+\ 10{,}6$	112,36	VI	$-\ 13{,}7$	187,69	XI	$+\ 2{,}2$	4,84
II	$-\ 1{,}5$	2,25	VII	$+\ 3{,}4$	11,56	XII	$+\ 0{,}1$	0,01
III	$-\ 0{,}1$	0,01	VIII	$-\ 8{,}0$	64,00	XIII	$+\ 4{,}7$	22,09
IV	$-\ 1{,}3$	1,69	IX	$-\ 4{,}3$	18,49	XVII	$-\ 7{,}6$	57,76
		152,31			332,15			148,70

$$m = \sqrt{\frac{633{,}16}{15\,.\,3}} = \pm 3{,}751^{cc} = \pm 1{,}215''$$

oder

$$m = \sqrt{\frac{66{,}50}{15\,.\,3}} = \pm 1{,}215'' \tag{3}$$

Seit Beendigung der Landesaufnahme sind in Hessen nur ausnahmsweise noch Triangulierungen ausgeführt worden, z. B. um zerstörte oder verlorene trigonometrische Punkte wieder herzustellen. Dabei ist nach den Vorschriften von 1824 verfahren worden. Neue Verordnungen sind seitdem nicht gegeben worden.

§ 137. Nassau.

Obgleich Nassau kein selbständiger Staat mehr ist, ist doch die Nassau sche Landes-Triangulierung erhalten geblieben mit dem Soldner schen Coordinatensystem, dessen Nullpunkt *Schaumburg* als Nr. 36 unter den 40 Preussischen Coordinaten-Nullpunkten erscheint, welche in der Anweisung IX vom 25. Okt. 1881 angegeben wurden.

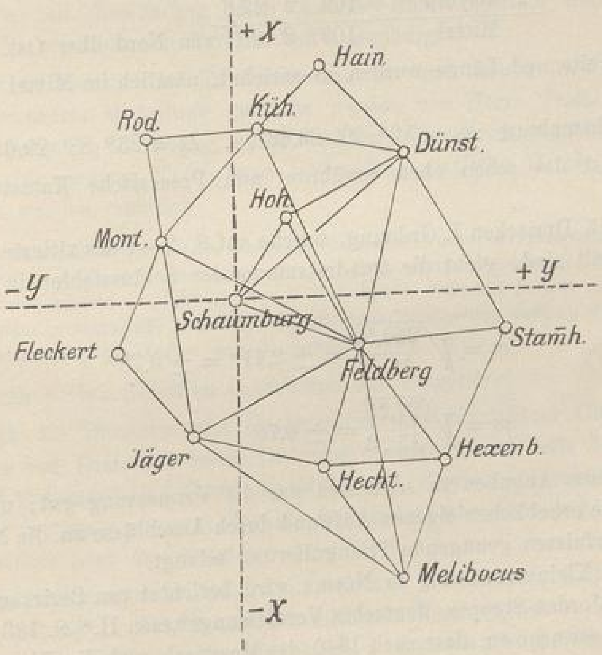
Über die Triangulierung des früheren Herzogtums Nassau wollen wir aus den früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 313—322 gesammelten Nachrichten einiges vorführen.

Die Nassauische Triangulierung und Landesvermessung ist der jüngste Zweig an dem süddeutschen von Bayern hervorgegangenen Stamme der deutschen Geodäsie. Da der Beginn dieses Unternehmens erst in die zweite Hälfte dieses Jahrhunderts fällt, konnten die inzwischen in den Nachbarstaaten gesammelten Erfahrungen dabei gut benützt werden. Aus diesem Grunde und wegen der Kleinheit des bereits von andern Triangulierungen fast ganz umgebenen Landes erscheint dessen Vermessung in geodätischer Hinsicht als ein einheitliches leicht zu überblickendes Ganzes.

Eine Beschreibung der Vermessung und eine Zusammenstellung ihrer Hauptresultate wurde amtlich veranstaltet und im Druck vervielfältigt, doch kam das Werk nicht in den Buchhandel. Dasselbe heisst:

„Die Landesvermessung des Herzogtums Nassau, insbesondere die als Grundlage derselben festgestellten Resultate der Triangulierung.“ Wiesbaden 1863. (Bearbeitet von Oberbergrat Oderheimer.) Gedruckt bei Adolf Stein, mit einer Dreiecksnetzkarte.

Fig. 1. (1 : 200 000.)



Unterm 14. Februar 1853 wurde eine Kommission zur Ausführung der Landesvermessung niedergesetzt, bestehend aus den technischen Mitgliedern Oberstlieutenant Heymann, Baurat Born und Geometer Wagner unter einem Ministerial-Präsidenten.

Die Kommission zog zuerst in Hessen-Darmstadt Erkundigungen ein, und beschloss auf den Rat des dortigen Geheimen Obersteuerrats Dr. Hügel, die Triangulierung an die Hauptdreieckspunkte der Nachbarstaaten anzubinden, und damit eine eigene Basismessung, sowie astronomische Orientierung zu ersparen.

Das so entstandene Netz ist Fig. 1. S. 535 dargestellt:

Als Basis diente die Seite Melibocus-Feldberg. Diese Seite war nämlich von Bayern mitgeteilt worden:

$$= 19828{,}99 \text{ bayr. Ruten} = 11574{,}54 \text{ nass. Ruten} = 57872{,}70^{\text{m}}$$

und von Hessen, aus hessischen Coordinaten abgeleitet:

$$= 23149{,}21 \text{ hess. Ruten} = 11574{,}61 \text{ nass. Ruten} = 57873{,}05^{\text{m}}$$

Das Mittel aus diesen beiden Werten, nämlich

$$\text{Melibocus-Feldberg} = 11574{,}573 \text{ nass. Ruten} = 57872{,}86^{\text{m}} \tag{1}$$

oder

$$\log MF = 4\,.\,0635062 \text{ in nass. Ruten}$$

wurde der Triangulierung als Basis zu Grunde gelegt.

Nach Vollendung der Dreiecksseitenberechnung wurde zu rechtwinkligen sphärischen (Soldner schen) Coordinaten übergegangen.

Als Coordinatenursprung wurde der Punkt Schaumburg gewählt (vgl. oben Fig. 1.) mit $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten; und dazu ein Orientierungs-Azimut von den Nachbarstaaten geodätisch entlehnt, nämlich das Azimut Schaumburg-Feldberg

aus Hessen	109° 2′ 17,5″	
„ Bayern	109 2 22,6	
Mittel	109° 2′ 20″	von Nord über Ost. (2)

Auch Breite und Länge wurden so entlehnt, nämlich im Mittel von Mannheim und München:

$$\text{Schaumburg} \quad \varphi_0 = 50^\circ\ 20'\ 23{,}63'' \quad , \quad \lambda_0 = 25^\circ\ 38'\ 29{,}61'' \tag{3}$$

Dieses ist das schon oben erwähnte, nun Preussische Kataster-Coordinatensystem Nr. 36.

In den 15 Dreiecken I. Ordnung, welche auf S. 2—7 des zitierten Nassauischen Werkes mitgeteilt sind, giebt die Quadratsumme der Schlussfehler in neuer Teilung 260,52, also:

$$m = \sqrt{\frac{260{,}52}{15\,.\,3}} = \pm\, 2{,}41^{cc} = \pm\, 0{,}78''$$

oder

$$m = \sqrt{\frac{27{,}35}{15\,.\,3}} = \pm\, 0{,}78'' \tag{4}$$

Nach diesen Angaben zu schliessen war die Vermessung gut, und es hat das kleine Land ohne erheblichen eigenen Aufwand durch Anschlüsse an die Nachbarstaaten eine allen Bedürfnissen genügende Triangulierung erlangt.

Über die Kleinvermessung in Nassau wird berichtet von Bezirksgeometer Kreis in Eltville, in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen II.“ S. 133—147, woraus wir von S. 136 entnehmen, dass nach 1840 der Messtisch und die Lineartriangulation in Abnahme und die Polygonalmethode mit dem Theodolit in Aufschwung kam, zunächst mit Partial-Coordinaten einzeln für jede Gemarkung und nach 1862, als die vorhin beschriebene Landes-Triangulierung vollendet war, als allgemeines Coordinatenverfahren im neueren Sinne.

§ 138. Oldenburg.

In dem General-Bericht über die mitteleuropäische Gradmessung für das Jahr 1865, Berlin 1866, S. 21—29 ist mitgeteilt, dass Oldenburg ein Dreiecksnetz besitzt, welches zum Teil von Gauss selbst gemessen und im übrigen im Anschluss an die Gauss sche Gradmessung in Hannover ausgeführt wurde von dem Geheimen Oberkammerrat *v. Schrenck*. Die daselbst mitgeteilten Dreiecke sind auf die theoretische Summe 180° sph. Excess abgestimmt, und daher zur Genauigkeitsberechnung nicht dienend.

In „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen II.“, S. 452 ist mitgeteilt, dass unterm 24. Februar 1836 eine Instruktion für das Verfahren bei der Vermessung erschienen ist, mit 14 Schematen für Winkelmessung, Dreiecks- und Coordinaten-Berechnung.

Über das hiebei zu Grunde gelegte Coordinaten-System, ob dasselbe wegen des Anschlusses an Hannover conform ist oder dergl., ist dort keine Mitteilung gemacht.

Der Meridian von Oldenburg ist als x-Achse angenommen worden, wie ersehen werden kann aus dem Werke: „Die Korrektion der Unter-Weser u. s. w.“, dargestellt von *L. Franzius*, Oberbaudirektor, Leipzig 1895.

Die diesem Werke beigegebene Karte in 1 : 50000 enthält ein rechtwinkliges Coordinaten-Netz mit Bezifferung nach Kataster-Ruten „östlich vom Meridian von Oldenburg“ und „nördlich vom Parallel von Oldenburg“.

Über die Oldenburgische Triangulierung ist uns soeben (5. Juli 1895) noch eine sehr dankenswerte Mitteilung gemacht worden von Herrn *Treiss*, Grossherzogl. Vermessungsinspektor in Oldenburg, wobei von Herrn Obervermessungsdirektor *Scheffler* zwei nur noch in wenigen Exemplaren vorhandene amtliche Drucksachen zur Verfügung gestellt wurden, nämlich:

Resultate der, behufs der höchst verordneten Landes-Parzellar-Vermessung in den Jahren 1835, 1836 und 1837 ausgeführten Triangulierung des Herzogtums Oldenburg. Abgeleitet aus der Hannover schen Gradmessung. Oldenburg den 2. Mai 1838, v. Schrenk, Hofrat und Obergeometer.

Kammer-Bekanntmachung, betreffend die spezielle Vermessung der, zu dem vormals Münsterischen Landesteil gehörigen Ämter, vom 24. Februar 1836.

Aus diesen beiden Schriften entnehmen wir Folgendes:

Da durch die Hannover sche Gradmessung das Herzogtum Oldenburg bereits mit einer Reihe von Dreiecken erster Ordnung umspannt und teils bedeckt war, so wurde durch Mitteilungen von Gauss die Mühe, ein eigenes Dreiecksnetz erster Ordnung zu legen, fast ganz erspart; nur die 2 Punkte erster Ordnung, Oldenburg und Wildeshausen waren noch zu bestimmen.

Bei allen Rechnungen ist unterstellt worden, dass unsere Erde ein Ellipsoid sei mit der Abplattung 1 : 302,78 und dem mittleren Meridiangrad = 57009,76 Toisen (nach Walbeck). Die Entfernungen sind nach Preussisch-Rheinländischen Ruten zu

$12 \times 139{,}13$ Pariser Linien und nach Oldenburgischen Katasterruten $= 10 \times 131{,}161964$ Pariser Linien $= 10 \times 135{,}75306$ Preuss.-Rheinl. Linien angegeben. Hienach ist:

$$1 \text{ Preuss. Rute} = 3{,}7662420^m \; (log = 0.5759082 \cdot 2)$$
$$1 \text{ Oldenburg. Rute} = 2{,}9587897^m \; (log = 0.4711041 \cdot 0)$$

Ein Verzeichnis giebt geodätische Coordinaten, bezogen auf den Meridian des Schlossturms zu Oldenburg; welcher Art diese Coordinaten sind, conform oder congruent, wird nicht angegeben. Indem wir die Coordinaten in Meter verwandeln, entnehmen wir aus diesem Verzeichnis als Beispiele:

Punkt	y	x	Breite	Länge
Oldenburg	0,000m	0,000m	53° 8′ 22,447″	25° 52′ 51,334″
Windberg	46232,275	28530,337	52 52 52,194	25 11 38,474
Quekenberg	31177,742	66505,958	52 32 27,367	25 25 16,642
Crapendorf	12173,470	32818,276	52 50 40,110	25 42 0,761

Hier ist x nach Süden positiv und y nach Westen positiv gezählt.

Dazu sind auch Polar-Coordinaten gegeben, von welchen wir die Entfernungen in Meter verwandelt haben, wie folgendes zeigt, wobei wir auch die zu den vorhergehenden Breiten und Längen gehörigen genauen Meridianconvergenzen zugesetzt haben:

Punkt	Azimut von Süd über West	Entfernung	Meridian-Convergenz
Oldenburg	0° 0′ 0″	0,000m	0′ 0,000″
Windberg	58 19 17	54326,689	32 51,857
Quekenberg	25 7 3	73451,063	21 53,485
Crapendorf	20 21 6	35003,306	8 38,509

Da diese Azimute nur auf 1″ abgerundet gegeben sind, kann man damit nicht mit der Genauigkeit der rechtwinkligen Coordinaten x, y rechnen, und die obigen geographischen Coordinaten sind zunächst unbequem, weil sie mit den *Walbeck* schen Erddimensionen abgeleitet sind, welche besondere Hilfstafeln oder Differentialformeln im Vergleich mit den üblichen Bessel schen Erddimensionen verlangen.

Wir haben daher, um über die Natur der rechtwinkligen Coordinaten einen ersten Aufschluss zu erhalten, die Dreiecksseiten zugezogen, welche in dem „Generalbericht der mitteleurop. Gradmessung für 1864“, S. 26 mitgeteilt sind, und zwar in Metermass verwandelt wie im nachstehenden unter $log\ S$ gegeben ist. Dazu haben wir berechnet aus den Coordinaten $x\,y$ zuerst $\sqrt{(y'-y)^2+(x'-x)^2}$ und dann die $log\ S'$ nach den bekannten Soldner schen Formeln, und dazu noch $log\ S''$ unter der Annahme, dass die $x\,y$ conforme Coordinaten seien (also $log\ S''$ nach der Formel (13) von „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 171). Für die Breite $\varphi = 53°$ hat man dazu

$$log\, r = 6.80504, \; log\,\frac{1}{2\,r^2} = 6.8089\ , \; log\,\frac{\mu}{2\,r^2} = 2.7267$$

für 7stell. Logarithmen. So wurde erhalten:

	log S	log S' (Soldner)	log S'' (conform)	$log \sqrt{(y'-y)^2+(x'-x)^2}$ eben
Windberg				
Quekenberg	4.611 1937	4.611 1934	4.611 1924	4.611 2004
Crapendorf	4.587 4703	4.587 4670	4.587 4663	4.587 4690
Windberg	4.535 6451	4.535 6442	4.535 6388	4.535 6443

Wegen der nahen Beziehungen der Oldenburgischen Vermessung zu der Hannover schen Landesvermessung mit den Gauss schen conformen Coordinaten war die Vermutung nahe, dass auch die Oldenburgischen Coordinaten conform seien; indessen aus diesen kurzen Vergleichsrechnungen kann das nicht geschlossen werden. Näheres hierüber hoffen wir in nächster Zeit in der „Zeitschr. f. Verm.“ zu bringen.

Hier sei nur noch bemerkt, dass in der oben (S. 537) zitierten „Kammer-Bekanntmachung“ vom 24. Februar 1836 sich auch ein Formular (Schema Nr. *V*) für Polygonzüge befindet, mit Anweisung (§ 31.—41.) schon ganz im heutigen Sinne. Ausser dem Schema *V* für Polygonberechnung mit Logarithmen, ist noch ein Schema *VI* für Berechnung ohne Logarithmen und ein Schema *VII* für Berechnung mit Ulffer schen Coordinatentafeln.

§ 139. Mecklenburg.

Im Norden von Deutschland ist in der Zeit von 1853—1874 ein geodätisches Werk ausgeführt worden, welches durch seinen Urheber *Paschen*, der in Göttingen ein Schüler von Gauss gewesen, und von 1862—1873 als Mitglied der Europäischen Gradmessung thätig war, den Gauss schen und den Bessel schen Theorien gefolgt ist, und zu dem Besten aus jener geodätischen Periode gehört.

Die darüber vorhandenen amtlichen Veröffentlichungen sind:

Grossherzoglich Mecklenburgische Landesvermessung, ausgeführt durch die Grossherzoglich Mecklenburgische Landesvermessungs-Kommission, unter der wissenschaftlichen Leitung von F. Paschen, weiland Grossherzoglich Geheimer Kanzleirat. Herausgegeben im Auftrage und auf Kosten des Grossherzoglichen Ministeriums des Innern, von Köhler, Generalmajor z. D. zu Schwerin, Bruhns, weiland Geheimer Hofrat, Professor und Direktor der Sternwarte zu Leipzig, Förster, Professor und Direktor der Sternwarte zu Berlin. Schwerin 1882.

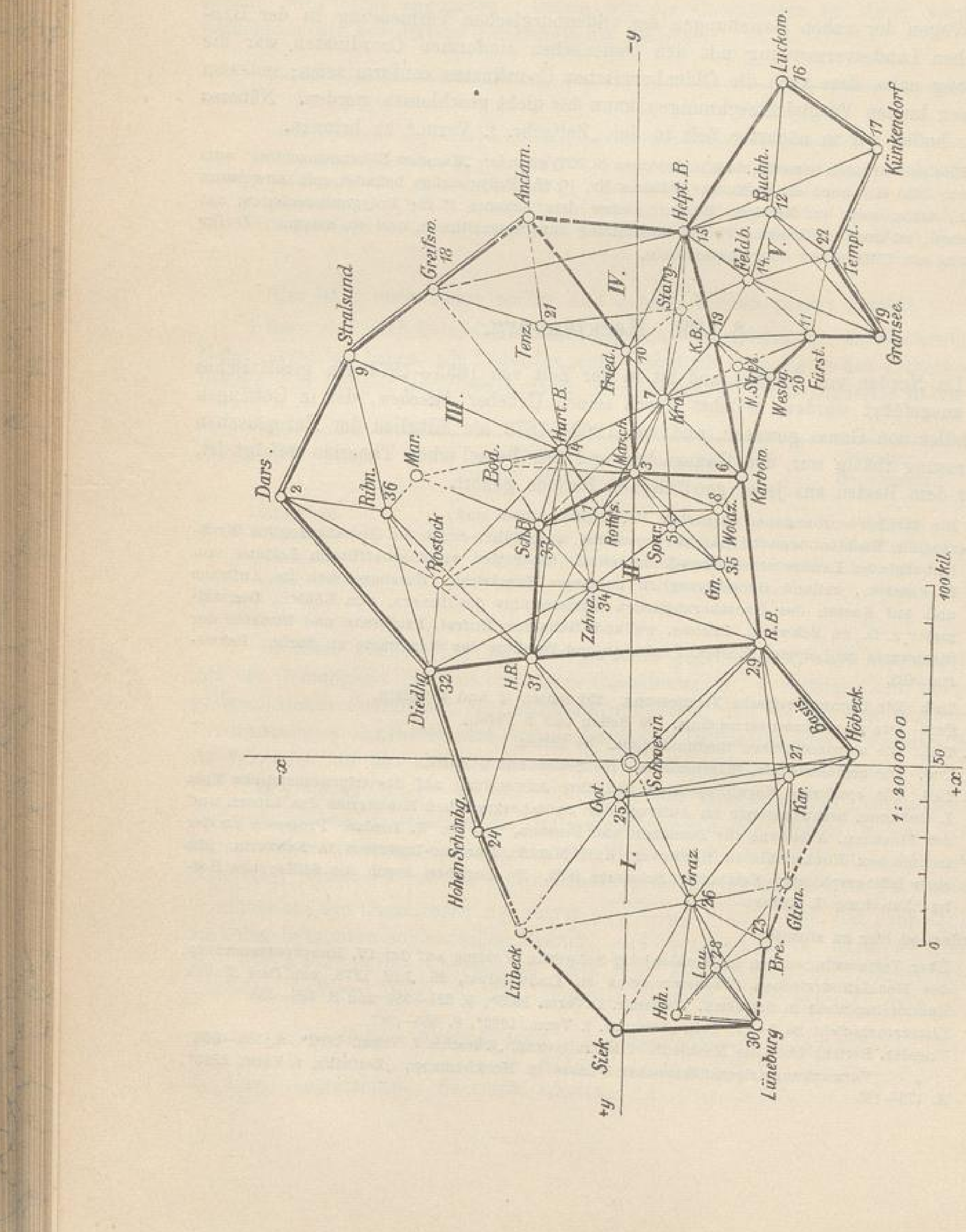
I. Teil. Die trigonometrische Vermessung. 251 Seiten 4° und 4 Tafeln.
II. Teil. Das Coordinatenverzeichnis. 79 Seiten und 2 Tafeln.
III. Teil. Die astronomischen Bestimmungen. 80 Seiten.
IV. Teil. Die geometrischen Nivellements. 106 Seiten und 1 Tafel.
V. Teil. Die conforme Kegelprojektion und ihre Anwendung auf das trigonometrische Netz 1. Ordnung, herausgegeben im Auftrage der Grossherzoglichen Ministerien des Innern und der Finanzen, Abteilung für Domänen und Forsten, von Dr. W. Jordan, Professor an der technischen Hochschule in Hannover, Karl Mauck, Kammer-Ingenieur in Schwerin. Mit einer lithographierten Netzkarte. Schwerin 1895. Zu beziehen durch die Stiller sche Hofbuchhandlung (J. Ritter).

Ausserdem ist hier zu zitieren:

Über Vermessungswesen in Mecklenburg-Schwerin, Vortrag auf der IV. Hauptversammlung des Mecklenburgischen Geometervereins zu Ludwigslust, 26. Juli 1878, von Carl Mauck Kammeringenieur in Schwerin, „Zeitschr. f. Verm. 1879“, S. 321—351 und S. 425—438.
Litteraturbericht zu I—IV. Teil, „Zeitschr. f. Verm. 1883“, S. 355—367.
Vogeler, Bericht über die Mecklenb. Triangulierung, „Zeitschr. f. Verm. 1892“, S. 552—563.
„ Vermarkung trigonometrischer Punkte in Mecklenburg, „Zeitschr. f. Verm. 1893“, S. 179—185.

Nachdem von 1780—1788 eine topographische Karte durch Zusammenlegung der einzelnen seit 1756 gemachten Feldmarkaufnahmen durch den Grafen von Schmettau hergestellt worden war, wurde auf Anregung des Generals Baeyer bei dessen Küstenvermessung eine wissenschaftliche Neumessung beschlossen, deren Netzbild hier unten zu sehen ist.

Fig. 1.
Mecklenburgische Triangulierung 1853—1874.



Wegen der Anschlüsse an die zahlreichen Nachbartriangulationen von Preussen, Dänemark, Hannover, entschied man sich dafür, von einer Basismessung in Mecklenburg abzusehen.

Mit der „Küstenvermessung" hat Mecklenburg 10 Anschlussseiten gemeinsam, nämlich die in unserer Fig. S. 540 am Umfang doppelt ausgezogenen Linien im Norden, Süd-Osten und im Süden.

Mit Dänemark und Hannover ist das westliche kleine Dreieck Lüneburg, Lauenburg, Hohenhorn gemeinsam (jedoch Hohenhorn nicht mehr vorhanden).

Mit der Preussischen Landesaufnahme von Schleswig-Holstein bestehen Verbindungen durch die schon der Küstenvermessung angehörigen Punkte Hohenschönberg und Dieterichshagen, und an die Elbkette hat Mecklenburg Anschluss in Gliewitz, Höhbeck, Ruhnerberg (vgl. die Elbkette S. 280—281).

Das Mecklenburgische Netz umfasst 36 Stationen (auf S. 540 mit den Numern 1—36 bezeichnet, hiezu kommen die von der Preussischen Landesaufnahme und von Dänemark entlehnten 2 Stationen Höhbeck und Sick, und 10 nur vorwärts eingeschnittene Punkte, also $36 + 2 + 10 = 48$ Punkte.

Zu den Winkelmessungen dienten zwei grössere Universalinstrumente von Pistor und Martins mit nicht drehbaren Kreisen, deren $1''$—$2''$ betragende regelmässige Teilungsfehler bestimmt und in Rechnung gebracht wurden. Die Anordnung der Horizontalmessungen nach Richtungen ist im Wesentlichen diejenige der Gradmessung in Ostpreussen, jede Hauptrichtung wurde mindestens 24 mal eingestellt. Die Stationsausgleichungen folgten ebenfalls dem Bessel schen Muster, jedoch mit Zufügung der von der Preussischen Landesaufnahme mit $(V\,V)$ bezeichneten Fehlerquadratsummen nebst Divisoren (vgl. S. 157).

Zur Signalisierung dienten Betram sche Heliotrope in 96 Fällen, Türme in 69, Signalpyramiden in 11 und Signaltafeln von circa 1^m im Quadrat in 70 Fällen, zusammen 246 Richtungen, wozu noch 16 Entlehnungen aus fremden Vermessungen kommen, so dass im Ganzen 262 Richtungen vorhanden sind, von denen aber 23 nicht zum Netze gehören, also nur 239 Netzrichtungen übrig bleiben.

Zur Anwendung der Regeln von § 58. S. 176 haben wir hiernach:

$$R = 239 \text{ Richtungen}, \; p = 48 \text{ Punkte}$$
$$\text{worunter } p' = 10 \text{ nur vorwärts eingeschnittene Punkte}$$
$$r = 239 - 134 + 4 = 109 \text{ Bedingungsgleichungen} \tag{1}$$

ferner

$$l = 94 + 51 = 145 \text{ gemessene Linien}$$
$$l' = 51 \text{ nur einseitig gemessene Linien}$$
$$(\text{wobei } 2 \cdot 94 + 51 = 239 = R)$$

also

$$145 - 96 + 3 = 52 \text{ Seitengleichungen} \tag{2}$$
$$\text{und} \quad 94 - 38 + 1 = 57 \text{ Dreiecksgleichungen} \tag{3}$$

Ehe von der Ausgleichung mit diesen $52 + 57 = 109$ Bedingungsgleichungen weiter gehandelt wird, ist zu sagen, wie die vielen Fremd-Anschlüsse behandelt wurden:

Von allen Anschlussseiten wurde zunächst nur *eine*, nämlich die südliche Höhbeck-Ruhnerberg als Basis angenommen, worauf sich *nach* der Ausgleichung gegen 5 andere sichere Anschlussseiten Differenzen bis zu 80 Einheiten der 7. logarithmischen Decimale ergaben, im Mittel Differenz $10 \cdot 0$, was mit einer anderweitig angegebenen

Korrektion von $+ 31 \cdot 6$ nun eine Gesamtkorrektion von $+ 41 \cdot 6$ Einheiten der 7. logarithmischen Decimale im Vergleich mit der ersten Annahme der Basisseite Höhbeck-Ruhnerberg ergab.

Vor der Netzausgleichung wurde auch eine Überlegung betreffs der Gewichtsverhältnisse angestellt mit dem Ergebnis, dass für die zwei verschiedene Instrumente von Gewichtsunterscheidung abgesehen, und alle Messungen mit gleicher Gewichtseinheit in die Netzausgleichung aufgenommen wurden.

Diese Ausgleichung selbst wurde nach der Bessel schen Methode vollzogen, aber mit Trennung in 5 Partialgruppen mit beziehungsweise 22, 22, 22, 21, 22 Bedingungsgleichungen (in unserer Fig. S. 540 mit I II III IV V bezeichnet) und successiver Herstellung der gegenseitigen Verbindung nach der Anleitung, welche Gauss im Artikel 20 des Supplementum theor. comb. so gegeben hat: Man verteilt die Bedingungsgleichungen in zwei oder mehrere Gruppen und sucht zuerst eine Ausgleichung, durch welche die erste Gruppe mit Umgehung der übrigen befriedigt wird, dann werden die durch diese Ausgleichung veränderten Beobachtungen so behandelt, dass nur die zweite Gruppe berücksichtigt wird und so fort. So wird man, indem bald die eine, bald die andere Gruppe benützt wird, immer kleinere Korrektionen erhalten, und wenn die Abteilung geschickt angelegt war, bald zu stehenden Werten kommen.

Nach dieser Anleitung hat Paschen sein Netz mit 109 Gleichungen in den schon erwähnten 5 Partialnetzen behandelt, wobei nicht nur, wie wohl Gauss ursprünglich dachte, die Bedingungsgleichungen für *ein*gewichtige unabhängige Richtungsmessungen, sondern die schwerfälligen Bessel schen Gewichtsgleichungen durch alle Näherungen hindurch geschleppt werden mussten.

Dabei ist auch zur Bezeichnungsart etwas zu sagen: In Preussen bezeichnete man allgemein die Winkelkorrektionen mit (1), (2), (3)..., dann gewisse Hilfsgrössen mit [1], [2], [3]... und die Correlaten mit I II III... (vgl. unsere Formelzusammenstellung von § 55. S. 156—160). Letztere Bezeichnung I II III ist zweifellos unbequem, wenn man es mit grossen Zahlen zu thun hat. Die Mecklenburgische Publikation bezeichnet deswegen die Correlation mit [*1*] [*2*] [*3*]... (Einiges Weitere hiezu haben wir in der „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 359—360 gegeben.)

Es mag hier genügen, mitzuteilen, dass die indirekte Auflösung durch 5malige Wiederholung erreicht worden ist, nämlich durch 4 erste „Überrechnungen" und dann noch eine empirische Verteilung der noch gebliebenen Widersprüche in einer „fünften Überrechnung". Z. B. die erste Korrektion hat so nach und nach folgende Werte durchlaufen: (Seite 164—165 des Meckl. Werkes I. Teil):

$$(1) = + 0{,}64280'' \ , \ 0{,}54339'' \ , \ 0{,}55545'' \ , \ 0{,}53864''.$$

Ob durch diese indirekte Methode im Vergleich mit der Ausgleichung in einem Ganzen ein Vorteil erzielt worden ist, könnte wohl nur der Urheber derselben beantworten, wenn er etwa in die Lage gekommen wäre, abermals eine solche Arbeit auszuführen. Jedenfalls ist der beabsichtigte Erfolg erreicht worden mit einer Genauigkeit von etwa 0,05''.

Genauigkeitsberechnungen wurden in der ersten Bearbeitung 1882 nicht angestellt; es hat aber Kammeringenieur Vogeler in der „Zeitschr. f. Verm. 1892", S. 560 bis 562 Verschiedenes über die Genauigkeit des Mecklenburgischen Hauptnetzes mitgeteilt, namentlich die Schlussfehler der Dreiecke betreffend, aus denen er den mittleren

Winkelfehler $m = 1{,}16''$ herleitete. Auch der internationale „Rapport sur les triangulations“ für 1892 von Ferrero giebt auf S. XII 7 für die 69 Mecklenburgischen Dreiecksschlüsse mit Einschluss von 4 durch Multiplikation mit $\sqrt{0{,}75}$ auf Dreiecke reduzierten Werten die Berechnung für den mittleren Winkelfehler; in Übereinstimmung mit Vogeler:

$$m = \sqrt{\frac{276{,}873}{69\,.\,3}} = \pm\, 1{,}157'' \tag{4}$$

Die conforme Kegel-Projektion.

Zur Gewinnung rechtwinkliger Coordinaten, überhaupt zur Nutzbarmachung der Triangulierung für kartographische Zwecke, hat Paschen eine Projektionsart gewählt, welche erstens im Sinne aller Gauss schen geodätischen Prinzipien eine „*conforme*“ Abbildung der krummen Erdoberfläche bietet, und zweitens der geographischen Form des Mecklenburgischen Landes mit Hauptausdehnung von West nach Ost sich möglichst anpasst, d. h. die conforme Kegelprojektion mit dem mittleren Parallelkreis von Mecklenburg unter 53° 45′ Breite als Normalparallel.

Diese Projektionsart, deren Grundgedanke mit sphärischer Anwendung zuerst ausgesprochen wurde von Lambert in „Beiträge zum Gebrauch der Mathematik, III. Teil, Berlin 1772, S. 135 u. ff., ist schon von Gauss zur Papen schen Karte von Hannover nutzbar gemacht worden, wie Wittstein in „Astr. Nachr., 71 Band, 1868“, S. 369 angiebt, in dem er selbst dann die Theorie dieser Projektion auf dem Ellipsoid entwickelt.

Eine im engeren Sinne geodätisch zu nennende Anwendung der conformen Kegelprojektion haben wir von Schreiber in dem Werke „die Königl. Preuss. Landestriangulation, Hauptdreiecke, III. Teil, 1876“, S. 103 u. ff., doch sind die im Vorwort das. S. VI angekündigten weiteren Ausführungen nicht mehr erschienen. Einen Kommentar dazu haben wir in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen 1882“, I., S. 96—102 gegeben.

Die Kegelprojektion eignet sich zur geodätischen Anwendung dann sehr gut, wenn man es mit geographischen Coordinaten zu thun hat, während für rechtwinklige Coordinaten jene Projektion mehr nur in übertragener Weise sich anpasst; allein bei so mässiger Ausdehnung von nur etwa 200 Kilometer von Westen nach Osten, wie in dem Falle von Mecklenburg, wird die conforme Kegelprojektion mit einer conformen querachsigen Projektion fast identisch, und schon bei Dreiecken II. Ordnung praktisch genommen damit identisch, oder in den Hauptformeln entsprechend der bekannten Gauss schen conformen Projektion mit cylindrischem Meridiananschluss, wenn man nur x und y in beiden Fällen vertauscht.

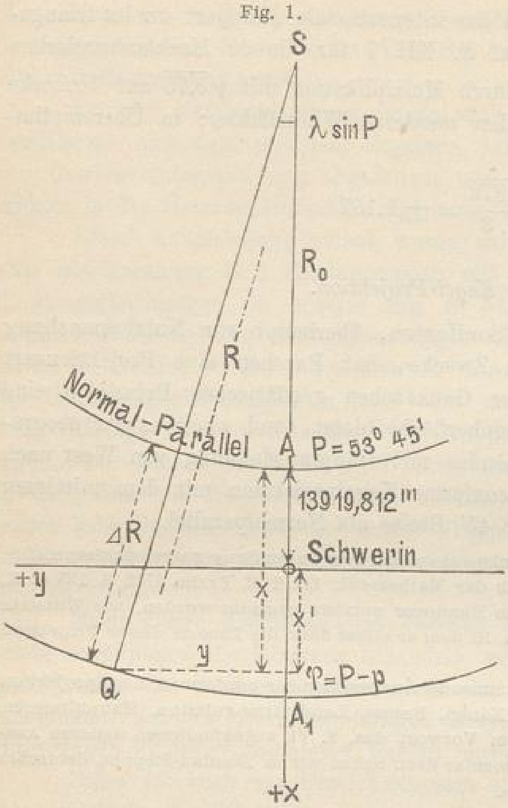
Ohne auf all dieses, was in dem V. Teile des oben auf S. 539 zitierten Werkes enthalten ist, hier einzugehen, wollen wir nur das Wesentliche zur Anlage des Coordinatensystems vorführen:

Nachdem auf Grund der Netzausgleichung sämtliche Winkel und Entfernungen des Dreiecksnetzes endgültig berechnet waren, wurde zur Gewinnung von Coordinaten geschritten. Zur astronomischen Orientierung diente die Polhöhe des Dreieckspunktes Granzin, beziehungsweise deren Übertragung auf Schwerin:

Schwerin Schlossturm, Breite = 53° 37′ 26,6900″.

Die Länge dieses Punktes von Berlin beträgt 1° 58′ 26,895″ in dem System der Preussischen Landesaufnahme, doch wurden die geographischen Längen für Mecklenburg lediglich relativ gegen den Schlossturm Schwerin angegeben. Die Berechnung der geographischen Breiten und Längen geschah Punkt für Punkt nach den indirekten

Fig. 1.



Formeln der zweiten Abhandlung von Gauss über „Gegenstände der höheren Geodäsie", (welche in abgeänderter Form und mit neuen Hilfstafeln in unserem III. Bande, „Handb. d. Verm., 3. Aufl. 1890", S. 398 u. S. [39] gegeben werden).

Auf der Breite P hat eine Meridiantangente bis zum Schnitte mit der Erdachse die Länge $R_0 = N_0 \, cotg \, P = AS$ in Fig. 1. (wenn N_0 der Querkrümmungshalbmesser ist) und die Meridianconvergenz zweier Punkte auf der Breite P mit dem Längenunterschiede λ ist $= \lambda \sin P$.

Ein Punkt mit der Breite φ erhält den Projektionsstrahl $SA_1 = SQ = R$, indem für R die Formel (12) S. 3 des amtlichen Werkes, V. Teil, Mecklenb. Landesverm. gilt. Indem man dann ein rechtwinkliges Coordinatensystem anordnet, mit dem Ursprung A, mit $+x$ nach Süden und $+y$ nach Westen, hat man für einen Punkt Q, dessen Breite $= \varphi$ und Projektionsstrahl $= R$, dessen Länge westlich vom Meridiane von Schwerin $= \lambda$ ist, nach Fig. 1. die Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} y = R \sin \lambda' \qquad \text{(wobei } \lambda' = \lambda \sin P) \\ x = R \cos \lambda' - R_0 \\ \text{oder wenn } R - R_0 = \varDelta R \text{ gesetzt wird:} \\ x = \varDelta R - 2 R \sin^2 \dfrac{\lambda'}{2} \end{array}\right\} \quad (5)$$

Verschiebung des Coordinaten-Nullpunktes.

Das zuerst sich darbietende Coordinatensystem mit dem Nullpunkte A im Normalparallel, mit der Breite $P = 53° 45'$, (vgl. Fig. 1.) ist nicht unmittelbar beibehalten worden, sondern es wurde eine konstante Verschiebung in der Meridianrichtung vorgenommen, so dass der Nullpunkt in dem Schlossturm von Schwerin liegt.

Die Verschiebung beträgt $\varDelta x = 13919{,}812^m$.

Da hiernach (Fig. 1.) $x' = x - \varDelta x$ ist, so erhalten wir für die neuen Coordinaten (5):

$$\left.\begin{array}{l} y = R \sin \lambda' \\ x' = -13919{,}812^m + R \cos \lambda' - R_0 \\ \text{oder } x' = -13919{,}812^m + \varDelta R - 2 R \sin^2 \dfrac{\lambda'}{2} \end{array}\right\} \quad (6)$$

Ausser diesen strengen Formeln (5) oder (6) sind auch Reihenentwicklungen angewendet worden, welche aber jetzt nicht vorgeführt zu werden brauchen.

Nachdem mit diesen Mitteln die rechtwinkligen Coordinaten aller 38 Standpunkte des Netzes von S. 540 berechnet waren, wurden daraus wieder rückwärts alle Richtungswinkel abgeleitet, nämlich für irgend zwei Punkte MN:

$$tang\,(M\,N) = \frac{y_n - y_m}{x_n - x_m}$$

wozu noch Correktionsglieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ kommen, die hier nicht namhaft gemacht werden sollen. (Vgl. hiezu auch „Zeitschr. f. Verm. 1895", S. 421—424.)

Alle solche Richtungswinkel $(M\,N)$, deren Zahl $R = 239$ ist, (vgl. oben S. 541) wurden dann stationsweise mit den gemessenen Richtungssätzen verglichen, indem letztere mit der Verbesserungssumme $[v] = 0$ auf die $(M\,N)$ orientiert wurden, und für jede Station einen Beitrag $[v^2]$ zur Gesamtsumme aller v^2 lieferten.

Diese $[v^2]$ sind in nachfolgender Tabelle enthalten, welche ausserdem unter der Bezeichnung $[v'^2]$ die Quadratsummen derjenigen Richtungsverbesserungen v' enthält, welche nach der Theorie des Bessel schen z aus den Winkelverbesserungen (1), (2), (3) ... der Netzausgleichung erhalten worden waren, d. h. die in der nachfolgenden Tabelle mit v' bezeichneten Grössen sind dieselben, welche früher in (9) und (11) § 124. S. 474, mit v_0 , v_1 , v_2 ... bezeichnet waren.

Damit kann die nachfolgende Tabelle verstanden werden:

Zusammenstellung der Fehlerquadratsummen auf den 38 einzelnen Stationen des Mecklenburgischen Dreiecksnetzes von S. 540.

Nr.	Stationen	$[v^2]$	$[v'^2]$	Nr.	Stationen	$[v^2]$	$[v'^2]$
1	Breetze	0,13″	0,11″	20	Kraase	2,80″	2,68″
2	Buchholz	0,51	0,72	21	Künkendorf . . .	5,08	4,77
3	Dars	2,69	2,55	22	Lauenburg . . .	1,83	1,79
4	Dietrichshagen . .	3,95	3,83	23	Lukow	0,29	0,28
5	Feldberg	10,24	10,09	24	Lüneburg	2,90	2,89
6	Friedrichsruh . .	4,75	4,85	25	Marxhagen . . .	6,69	6,39
7	Fürstenberg . . .	0,73	0,61	26	Ribnitz	4,35	4,56
8	Gnevsdorf . . .	2,30	2,37	27	Rothspalk . . .	3,59	3,68
9	Gottmannsförde .	0,83	0,80	28	Ruhnerberg . . .	4,96	5,12
10	Gransee	0,26	0,27	29	Schmokberg . . .	4,84	5,17
11	Granzin	1,14	1,09	30	Hohen-Schönberg	0,30	0,23
12	Greifswald . . .	0,37	0,30	31	Siek	0,08	0,14
13	Hartberg	6,20	6,14	32	Sparow.	3,24	3,30
14	Helpterberg . . .	2,50	2,74	33	Stralsund	0,68	0,75
15	Hoebeck	0,67	0,72	34	Templin	4,61	4,07
16	Hohe-Burg . . .	1,50	1,40	35	Tenzerow	0,55	0,56
17	Karbow	0,90	0,85	36	Wesenberg . . .	2,80	3,09
18	Karenz	5,64	5,63	37	Woldzegarten . .	3,77	3,80
19	Keulenberg . . .	5,37	5,04	38	Zehna	3,22	3,21
	Summe 1—19 =	50,68	50,11		Summe 20—38 =	56,58	56,48
					Hiezu „ 1—19 =	50,68	50,11
						107,26	106,59

Das Netz enthält, wie oben auf S. 541 mitgeteilt ist, 109 Bedingungsgleichungen; hieraus folgt ein mittlerer Richtungsfehler:

$$\mu = \sqrt{\frac{107,26}{106}} = \pm\, 0,99''$$

und für die Paschen sche Netzausgleichung:

$$\mu = \sqrt{\frac{106,59}{109}} = \pm\, 0,99''$$

Aus diesen mittleren Richtungsfehlern folgt ein mittlerer Winkelfehler:

$$m = \sqrt{2} \times 0{,}99'' = \pm 1{,}40''. \qquad (7)$$

Dieses ist unter den gegebenen Umständen die beste Bestimmung des mittleren Winkelfehlers. Dass derselbe etwas grösser ausfällt als der Wert $m = 1{,}157''$ in (4) von S. 543 nach der internationalen Näherungsformel, wird nicht bloss Zufall, sondern auch durch die kleinen Fehlerreste der indirekten Elimination und ähnliche Umstände zu erklären sein.

§ 140. Sachsen.

In dem Königreich Sachsen sind vor 30 Jahren zwei glückliche Umstände zusammengekommen, deren Vereinigung eine vorzügliche Haupttriangulierung des Landes hervorgebracht hat, nämlich erstens die in jene Zeit fallende Gründung der mitteleuropäischen Gradmessung (jetzt internationalen Erdmessung) und zweitens das dringende Bedürfnis einer neuen Landesvermessung für Kataster, Topographie u. s. w.

Während in anderen Staaten die in abgeschlossenem Zustande befindlichen oder bereits selbständig wissenschaftlich arbeitenden Landesaufnahme der „Gradmessung" gegenüber sich neutral, oder gar ablehnend verhielten, bedurfte es in Sachsen nur eines geringen Anstosses, um an Stelle der alten Triangulierung aus dem vorigen Jahrhundert, deren Winkel höchstens auf 15″ sicher sein konnten, („Nagel, Denkschrift 1876," S. 6) eine neue Triangulierung im Sinne der Gauss'-Bessel schen neueren Geodäsie zu setzen.

Über die älteren Vermessungszustände in Sachsen erhält man Auskunft in dem Werke:

Die Vermessungen im Königreich Sachsen, eine Denkschrift mit Vorschlägen für eine auf die europäische Gradmessung zu gründende rationelle Landesvermessung von *A. Nagel,* Regierungsrat und Professor der Geodäsie am Königl. Sächs. Polytechnikum. Dresden, in Kommission von A. Huhle 1876.

Dieses enthält eine geschichtliche Darstellung der seit 1781 in Sachsen ausgeführten Vermessungsarbeiten, nämlich der topographischen Landesvermessung von 1781—1811 und 1821—1825, der Landesvermessung für das Grundsteuersystem 1827—1841, dann von 7 grösseren Lokalmessungen 1811—1863 und endlich der europäischen Gradmessung in Sachsen seit 1862. (Bericht hierüber s. „Zeitschr. f. Verm. 1876," S. 264—269).

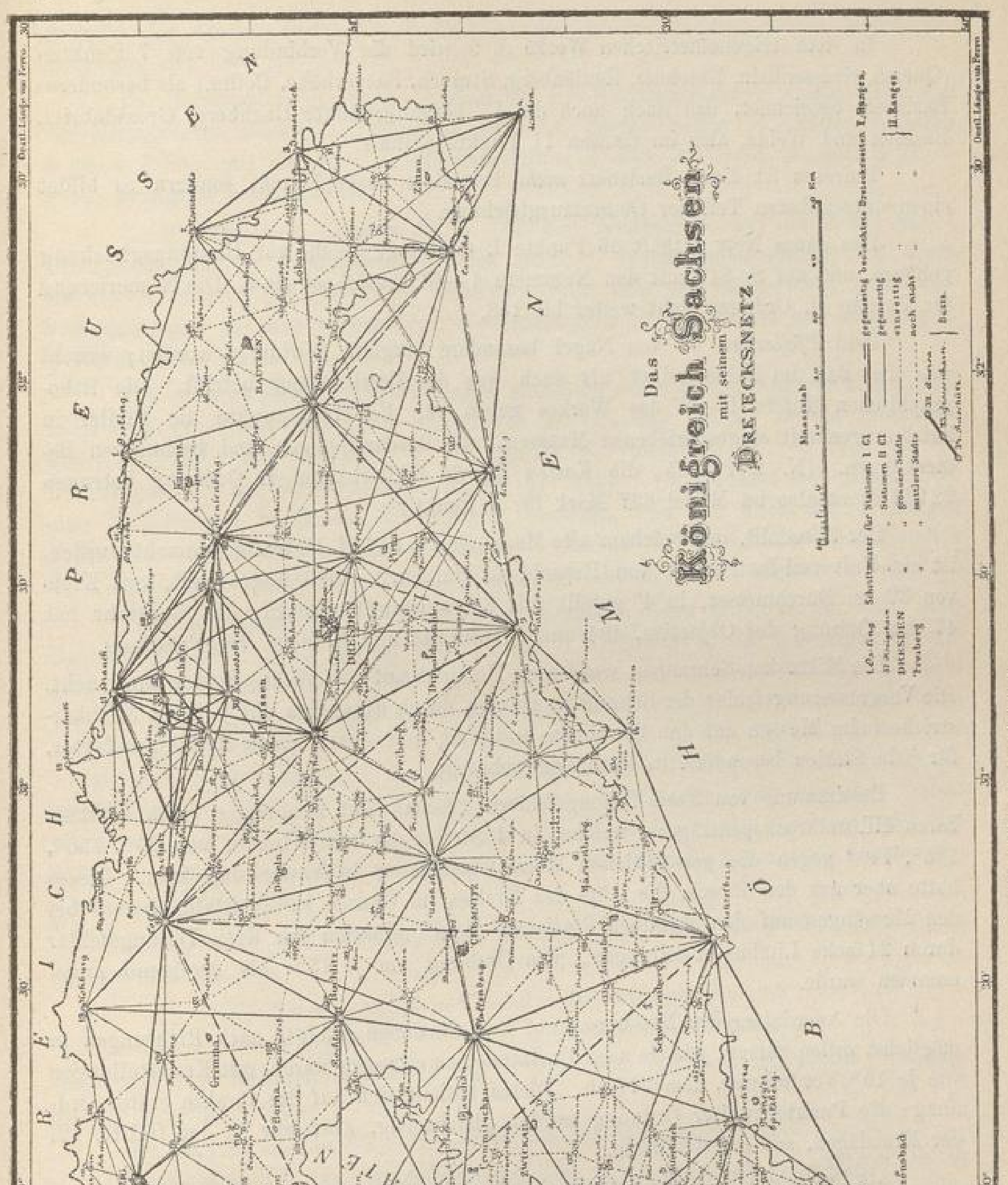
Die im Laufe von 28 Jahren, 1862—1890 entstandene neue sächsische Triangulierung ist veröffentlicht worden in einem grossen Werke:

I. Die Grossenhainer Grundlinie. Astr.-geodät. Arbeiten für die Europ. Gradm. im Königreich Sachsen, I. Abteil. die Grossenhainer Grundlinie, von Bruhns und Nagel, Berlin 1882, und Auszug hieraus im Civilingenieur XXVIII, 1882, Heft 1. (Bericht von Helmert in der „Zeitschr. f. Verm. 1883," S. 596—604).

II. Das trigonometrische Netz. Astronomisch-geodätische Arbeiten für die europäische Gradmessung im Königreiche Sachsen, ausgeführt und veröffentlicht im Auftrage des Königl. sächsischen Ministeriums der Finanzen. II. Abteilung, das trigonometrische Netz I. Ordnung, bearbeitet von A. Nagel, Professor der Geodäsie an der königl. technischen Hochschule zu Dresden, mit 7 lithographierten Tafeln und 32 in den Text gedruckten Figuren. 1890, Druck und Verlag von P. Stankiewicz' Buchdruckerei zu Berlin. (1. Band, 772 S., 4⁰ mit VII Tafeln.)

Hiezu haben wir in der „Z. f. V. 1891," S. 47—58 einen Bericht gegeben mit einer Übersichtskarte, welche wir auch hier S. 547 nochmals vorführen.

Die Basis bei Grossenhain ist 1872, in der Länge von 8909^{m} in 12 Teilen mit dem Bessel schen Apparate gemessen worden; in unserem „Handb. d. Verm., III. Band. 3. Aufl. 1890," S. 117 ist das Basisnetz mit 11 Punkten gezeichnet.



Masstab 1 : 1400 000.

In dem trigonometrischen Werke S. 9 wird die Verbindung von 7 Punkten (Quersa, Grossenhain, Raschütz, Keulenberg, Strauch, Baeyerhöhe, Collm,) als besonderes Basisnetz bezeichnet, das auch noch die 4 Übergangspunkte Buchberg, Grossdobritz, Baselitz und Weida, also im Ganzen 11 Punkte enthält.

Indessen ist dieses Basisnetz *nicht* besonders ausgeglichen, sondern es bildet einen untrennbaren Teil der Gesamtausgleichung.

Das ganze Netz enthält 36 Punkte I. Ordnung, welche zur Hauptausgleichung gehören, und auf S. 547 mit den Nummern 1—36 bezeichnet sind. Die Numerierung für Punkte II. Ordnung geht weiter bis 158.

Dem *Pfeilerbau* ist von Nagel besondere Sorgfalt gewidmet worden; sowohl was den Bau im Felde selbst, als auch was die Versicherung betrifft. Die lithographischen Tafeln II—V des Werkes geben für die Hauptpunkte die Pfeiler in Zeichnungen mit eingeschriebenen Maassen, mit Beschreibungen und besonderen Bemerkungen. (N. S. 26—45, die Kosten der 36 Pfeilerbauten I. Ordnung betrugen 22 944 Mark also im Mittel 637 Mark für 1 Punkt.)

Der Theodolit, mit welchem alle Messungen I. und II. Ordnung gemacht wurden, ist ein Universal-Instrument von Repsold in Hamburg, 1863 angeschafft, mit Kreis von 32 cm Durchmesser, in 4′ geteilt mit Schraubenmikroskopen, das Fernrohr hat 47 mm Öffnung des Objectivs, 494 mm Brennweite und 27 fache Vergrösserung.

Die Mikroskop-Schrauben wurden in Hinsicht auf periodische Fehler untersucht. Die Vergrösserungsfehler der Schrauben wurden durch Einstellen auf je beide Nachbarstriche beim Messen auf den Stationen bestimmt und durch einen Reduktionsfaktor, für jede Station besonders, in Rechnung gebracht.

Bestimmung von Kreis-Teilungsfehlern geschah mit Benützung eines verstellbaren Hilfsmikroskopenträgers, welcher in 4 Stellungen mit Winkeln von 90°, 150°, 135°, 140° gegen die gewöhnlichen Mikroskopenträger in Anwendung kam. Dieses hatte aber nur den Zweck, die Güte des Kreises im Ganzen zu ermitteln, worauf bei den Messungen auf den einzelnen Stationen die Elimination der Kreis-Teilungsfehler durch 24 fache Limbusverstellungen, also Drehung um je 15°, als genügend angenommen wurde.

Die Anordnung der Messungen auf den Stationen erfolgte nach Richtungen in möglichst vollen Sätzen, wie sie nach Umständen zu erlangen waren, mit Kreisstellungen von je 15° Verdrehung, also 24 fach. Dieses bezieht sich auf die Punkte erster Ordnung; die Punkte zweiter Ordnung wurden gleichzeitig, aber nur in der Hälfte, 12, der Kreislagen, *mit* angeschnitten.

Als Besonderheit ist die Berücksichtigung der Horizontierungsfehler zu erwähnen. (N. S. 103—114.) Da der Zielachsenfehler und der Horizontalachsenfehler durch Durchschlagen des Fernrohrs eliminiert werden, so bleibt nur noch der Einfluss des Vertikalachsenfehlers oder Aufstellungsfehlers zu berücksichtigen übrig, (dessen Theorie in unserem II. Bande, „H. d. V., 4. Aufl., 1893,“ S. 203—204 entwickelt ist).

Auch 2 sphäroidische Korrektionen, welche theoretisch wohl bekannt sind, aber bei Triangulierungen im allgemeinen nicht berücksichtigt werden, sind von Nagel zugezogen worden (N. S. 123 und S. 125).

(Wegen der Theorie dieser Reduktionen können wir auf unseren III. Band, „H. d. V., 3. Aufl., 1890,“ § 70. nebst S. 495 und § 75 verweisen). In dem sächsischen

Beispiel der Station Röden (N. S. 125) ist die grösste Wirkung dieser beiden Reduktionen nur 0,04″.

Die Stationsausgleichungen und dann die Netzausgleichung wurde nach der vervollständigten Bessel schen Methode gemacht, deren Theorie in unseren früheren § 49. — § 55., mit der Formelzusammenstellung S. 156—160 und Beispiel § 71. — § 74. genügend behandelt ist.

Z. B. Station 1. Ossling (N. S. 165 und Netzbild S. 547 nordöstl.) hat 4 Richtungen und 3 Stationswinkel, also auch 3 *Winkel*verbesserungen im Netz, welche (N. S. 167) mit (1) (2) (3) bezeichnet sind, aber fälschlicherweise *Richtungs*verbesserungen genannt werden (vgl. die Unterscheidung von Winkel und Richtung in § 70. S. 230—231).

Die meisten Stationsausgleichungen enthalten ausser den Richtungen I. Ordnung auch eine erhebliche Zahl von Richtungen II. Ordnung, welche in die Hauptausgleichung nicht mit eingehen. Z. B. Station 6. Valtenberg (N. S. 212) hat 21 Richtungen mit den Winkelverbesserungen (37) . (38) . . . (56), welche sich alle auf die eine Nullrichtung Neukirch, II. Ordnung, beziehen, und von allen 21 Richtungen gehen nur 11 in die Hauptausgleichung ein, während die 10 anderen, einschliesslich der Nullrichtung Neukirch, in den Bedingungsgleichungen nicht mehr vorkommen.

Diese Umstände sind namentlich zu beachten beim Abzählen der Zahl aller Bedingungsgleichungen. Wenn alles, I. und II. Ordnung in die Ausgleichung einginge, so hätte man (N. S. 640—644) bei 36 Stationen und 435 Winkeln die Zahl von $435 + 36 = 471$ Richtungen, es sind aber deren nur 262 in der Ausgleichung, weil nur 255 Winkel I. Ordnung vorhanden sind (N. S. 665, $[k] = 255$) und nur 7 Stationen Nullrichtungen I. Ordnung haben, nämlich Ossling, Nostitzhöhe, Jauernick, Lausche, Hohburg, Döbra, Grossenhain. Alle anderen 29 Stationen haben Nullrichtungen II. Ordnung. Die Zahl der Richtungen I. Ordnung ist also $255 + 7 = 262$ in Übereinstimmung mit N. S. 488, wo 131 gegenseitig beobachtete Linien angegeben sind.

Mit $p = 36$ und $l = 131$, $R = 262$ hat man daher nach den Gauss schen Regeln S. 176:

$$l - 2p + 3 = 131 - 72 + 3 = 62 \text{ Seitengleichungen,}$$
$$l - p + 1 = 131 - 36 + 1 = 96 \text{ Dreiecksgleichungen,}$$

dazu noch eine Basisseitengleichung (N. S. 535), weil die Basis mit einem Zwischenpunkte eingeführt ist.

Im Ganzen sind es $62 + 96 + 1 = 159$ Bedingungsgleichungen.

Diese Zahl von 159 Gleichungen ist sehr gross und man kann fragen, ob es nicht besser gewesen wäre, ein Basisnetz auszuscheiden. Durch Abtrennen eines besonderen Basisnetzes, mit der Diagonale Weida-Buchberg oder wenigstens Strauch-Gross-Dobritz, hätte, ohne wesentliche Genauigkeitseinbusse, die Ausgleichung des Netzes I. Ordnung an Gleichungen erheblich entlastet werden können.

Hier ist auch zu fragen, ob nicht die Punkte Baselitz neben Gross-Dobritz und Buchberg neben Keulenberg hätten gespart werden können, was ebenfalls die Gleichungszahl vermindert und das Ganze übersichtlicher gemacht hätte?

Allerdings würden bei Abtrennung eines besonderen Basisnetzes die Basisnetzpunkte ihrer *Lage* nach nicht mehr genügend mit den Punkten erster Ordnung verbunden sein, sondern sie müssten nach der Hauptausgleichung nochmals besonders angeschlossen werden, doch wäre das neben der Entlastung der Hauptausgleichung nebensächlich.

Die 159 Normalgleichungen wurden in *einem* Gusse aufgestellt und aufgelöst, was wohl das Äusserste ist, was in Bezug auf die Zahl der Gleichungen bisher geleistet worden ist oder noch geleistet werden wird. — Allerdings ging bei dieser Riesenarbeit nicht alles glatt ab; schon im Vorwort S. IV wird berichtet, dass in Folge eines Druckfehlers im 10 stelligen thesaurus logarithmorum die erste Auflösung vergeblich war. Auch nach Entdeckung dieses Hindernisses stiess die Auflösung noch auf Schwierigkeiten (N. S. 628), indem nach der ersten Durchrechnung noch Widersprüche von etwa 0,01″ in den Bedingungsgleichungen blieben, welche durch indirekte Hilfsmittel in *fünfmaliger* Wiederholung schliesslich bis auf 0,00005″ heruntergebracht wurden.

Bei der Aufstellung der linearen Seitengleichungen hat Nagel unseren Satz von dem Flächenmass für die Günstigkeit mit benützt, wie wir schon auf S. 307 erwähnt haben.

Welche kolossale Arbeit in der sächsischen Auflösung der 159 Gleichungen aufgewendet wurde, kann man aus den allmählichen Mitteilungen hierüber in den Gen.-Berichten der Gradmessung sehen; für 1878 S. 107, 1879 S. 112, 1880 S. 37, für 1882 S. 129. —

Die sächsische Triangulierung hat den Ruhm, den kleinsten mittleren Winkelfehler bis zu ihrer Zeit erreicht zu haben, nämlich $= \pm 0{,}35''$.

Die 197 geschlossenen Dreiecke, (welche N. S. 484—485 mit ihren Schlussfehlern zusammengestellt sind), geben die Quadratsumme der 197 Schlussfehler = 72,53, also den mittleren Winkelfehler (N. S. 662):

$$m = \sqrt{\frac{72{,}53}{197 \cdot 3}} = \pm 0{,}35'' \qquad (1)$$

Die Verteilung der Schlussfehler nach der Grösse der Dreiecke zeigt gerade für die grössten Dreiecke gute Schlüsse, was (N. S. 102) durch den Umstand erklärt wird, dass *lange* Sichten stets *hoch* über dem Boden weggehen und deswegen von Seitenrefraktion weniger zu leiden haben als kurze und niedere Sichten.

Aus allen 36 Stationen zusammen wurde der mittlere Gewichtseinheitsfehler berechnet (N. 665):

$$m = \sqrt{\frac{9350}{9814}} = \pm 0{,}976''$$

Ausserdem wurde (N. S. 663—664) eine Rechnung mit den Gewichtscoefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ u. s. w. angestellt, welche aber richtiger nach unserem § 124. (17)—(20) S. 476 zu machen wäre. —

Es folgt noch der mittlere Gewichtseinheitsfehler im Netz (N. S. 673) entsprechend unseren Formeln (21)—(23) § 124 S. 477.

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{281}{159}} = 1{,}33'' \text{ (Netz)} \qquad (2)$$

und aus N. S. 665 und S. 673 zusammen der mittlere Gewichtseinheitsfehler aus den Stationen und dem Netz zusammen:

$$\mu = \sqrt{\frac{9350 + 281}{9814 + 159}} = \pm 0{,}98'' \tag{3}$$

wie gewöhnlich ist μ_2 grösser als μ und zwar ist das Verhältnis:

$$\frac{\mu_2}{\mu} = \frac{1{,}33}{0{,}98} = 1{,}36 \tag{4}$$

Dieser Quotient, welcher eigentlich gleich 1 sein sollte, ist charakteristisch für etwaige verdeckte Fehler im Netz: und giebt also eine Fehlervergrösserung im Verhältnis 1,36 : 1.

Dazu wurden noch einige Funktions-Gewichte und Fehler berechnet, die wir schon in „Z. f. V., 1891," S. 56—57 zusammengestellt haben.

Der kleine mittlere Winkelfehler $m = \pm 0{,}35''$ in (1) wird, abgesehen von der Vortrefflichkeit des Beobachters, in der grossen Zahl der Messungen zu suchen sein, welche aus der Hereinziehung vieler Richtungen II. Ordnung in die Stationsausgleichungen I. Ordnung folgte, indem I. Ordnung 262 Richtungen hat, wozu noch 209 Richtungen II. Ordnung hinzukamen.

Auf der Station Porsberg (N. S. 214—227) sind 8 Richtungen I. Ordnung, welche mit 13 Richtungen II. Ordnung zusammen eine Ausgleichung von 21 Richtungen bilden, und davon haben die 8 Richtungen I. Ordnung Anschnittszahlen zwischen 33 und 36, dabei ist Einstellung mit Fernrohr links und rechts zusammen als Anschnittszahl = 1 gerechnet. Nach der Schreiberschen Methode (S. 270—271) würden die Anschnittszahlen erheblich kleiner werden, und bei dieser grossen Ungleichheit müssen auch die sächsischen Stationswinkelgewichte erheblich grösser werden als bei der preussischen Wiederholungsart, d. h. es ist die grosse Schlussgenauigkeit der sächsischen Triangulierung wesentlich auf der grossen Zahl und der Verknüpfung der Messungswiederholungen beruhend.

Jenes in Sachsen zum erstenmal unternommene Hineinziehen von Richtungen II. Ordnung in die Sätze der Stationsausgleichungen I. Ordnung hatte ausser der Genauigkeitssteigerung in I. Ordnung noch den Vorteil, dass II. Ordnung selbst mit grosser Genauigkeit sofort mit eingebunden wurde (jedoch ohne Rücksicht, ob nach Jahren Sichthindernisse für Fortsetzung II. Ordnung entstehen). Andererseits erforderte das Zusammennehmen einen bequemen von Zeit und anderen Umständen unabhängigen Geschäftsgang, welchen *ein* Beobachter und Leiter sich verschaffen konnte, der aber bei der sonst nötigen Arbeitsteilung zwischen I. und II. Ordnung nicht immer ausführbar sein würde.

Nach der Netzausgleichung und Berechnung wurde ein rechtwinkliges Coordinatensystem nach Soldnerscher Art angelegt, dessen Nullpunkt der Basiszwischenpunkt 33 Grossenhain, und dessen x-Achse der durch diesen Punkt gehende Meridian ist.

§ 141. Zusammenfassung der mittleren Winkelfehler.

Um eine erste Übersicht über die zahlreichen in dem vorstehenden Kapitel berechneten Genauigkeitswerte zu gewinnen, wollen wir damit beginnen, eine Tabelle aller derjenigen mittleren Winkelfehler aufzustellen, welche nach der Näherungsformel (1) S. 469 von § 123 für deutsche Triangulierungen aus diesem Jahrhundert berechnet worden sind.

Folgendes ist diese Tabelle:

Triangulierung	Citat	$[w^2]$	n	$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}}$
Hannover, Gauss	§ 129. S. 491, (5)	10,81	7	$\pm 0{,}72''$
Gradmessung in Ostpreussen, Bessel	§ 130. S. 502, (2)	41,15	29	0,69
Küstenvermessung, Baeyer	§ 130. S. 503.	139,66	148	0,56
Preussische Landesaufnahme	§ 131. S. 508.	636,43	690	0,55
" "	§ 131. S. 510, (3)	13,93	21	0,47
Geodätisches Institut	§ 132. S. 518.	246,11	137	0,77
Bayern	§ 133. S. 521, (2)	3205,58	339	1,77
" Schwerd	§ 133. S. 522, (6)	6,58	4	0,74
Württemberg, Bohnenberger	§ 134. S. 524, (2)	13,64	6	0,87
" Schoder, Hammer	§ 134. S. 524, (3)	4,05	6	0,47
Baden	§ 135. S. 531, (6)	652,45	86	1,59
Hessen	§ 136. S. 534, (3)	66,50	15	1,22
Nassau	§ 137. S. 536, (4)	27,35	15	0,78
Mecklenburg	§ 139. S. 543, (4)	276,87	69	1,16
Sachsen	§ 140. S. 550, (1)	72,58	197	0,35
	Summe	5413,64	1769	

$$\text{Gesamtmittel } m = \sqrt{\frac{5413{,}64}{1769 \cdot 3}} = \pm 1{,}01'' \tag{1}$$

Wir haben also aus 1769 deutschen Dreiecken dieses Jahrhunderts den mittleren Fehler eines Winkels in runder Zahl $m = \pm 1''$.

Wenn man die vorstehenden Zahlen auch zu kritischen Vergleichungen benützen will, so muss man, abgesehen von allen Nebenumständen geschichtlicher und sachlicher Art, von denen jetzt nicht die Rede sein soll, in mathematischer Beziehung auch die Zahl n der Dreiecke berücksichtigen, aus welcher ein Wert m berechnet ist, und gerade mit Rücksicht hierauf haben wir in § 117. und § 118. auch noch den mittleren Fehler des mittleren Fehlers bestimmt, und da die Dreieckswidersprüche den Charakter *wahrer* Fehler ε haben, wobei aber im einzelnen Falle $w^2 = 3\varepsilon^2$ ist, haben wir aus (14) S. 450 für unseren Fall:

$$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3\,n}}\left(1 \pm \frac{0{,}7071}{\sqrt{n}}\right) \tag{2}$$

Dieses auf zwei Werte von der vorstehenden Tabelle, Bayern und Württemberg angewendet giebt:

$$\text{Bayern } m = 1{,}77'' \left(1 \pm \frac{0{,}7071}{\sqrt{339}}\right) = 1{,}77'' \,(1 \pm 0{,}04)$$

$$\text{Württemberg } m = 0{,}47'' \left(1 \pm \frac{0{,}7071}{\sqrt{6}}\right) = 0{,}47'' \,(1 \pm 0{,}29)$$

Es erscheint also der Bayerische Wert 1,77″ viel mehr feststehend, weil aus der grossen Zahl von 339 Dreiecken ermittelt, als der nur aus 6 Dreiecken abgeleitete Württembergische Wert 0,47″, welcher mehr nur den Charakter eines innerhalb 1″ schwankenden Zufallswertes hat.

Eine weitere Tabelle dieser Art bietet uns der schon mehrfach zitierte „Rapport sur les triangulations présenté à la dixième conférence générale à Bruxelles, en 1892, par le Général A. Ferrero,“ welcher auf S. 5 eine solche Zusammenstellung giebt, aus welcher wir nachstehendes entlehnen:

Triangulierung.	$[w^2]$	n	$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}}$
Oesterreich-Ungarn	1753,37	670	$\pm 0{,}93''$
Belgien	523,04	219	0,89
Dänemark	198,82	87	0,87
Spanien	791,15	325	0,90
Frankreich	5467,08	914	1,41
Grossbritannien	5548,18	552	1,83
Griechenland	179,79	102	0,77
Italien	1305,24	514	0,92
Norwegen	273,13	179	0,71
Portugal	699,05	139	1,29
Rumänien	325,67	36	1,74
Russland	4181,79	998	1,18
Schweden	1088,96	304	1,09
Schweiz	88,75	40	0,86
Summe	22424,02	5079	

$$\text{Gesamtmittel } m = \sqrt{\frac{22424{,}02}{5079\,.\,3}} = \pm 1{,}21'' \tag{3}$$

Wenn man diese Tabelle und die vorhergehende für Deutschland zusammennimmt, so bekommt man aus 6848 Dreiecken als Gesamtmittel für Europa:

$$m = \sqrt{\frac{27838{,}66}{6848\,.\,3}} = \pm 1{,}16'' \tag{4}$$

Alle diese 6848 Dreiecksschlüsse zusammengebracht zu haben, ist das Verdienst des italienischen Generals und internationalen Erdmessungs-Kommissärs Ferrero.

Der mittlere Winkelfehler $m = \pm 1''$ für Europäische Triangulierungen I. Ordnung ist dadurch sichergestellt.

Wenn wir von diesen 6848 Dreiecken nicht bloss die Summen $[w^2]$ sondern auch noch die Summen $[w^4]$ hätten, dann könnten wir mit Hilfe unserer Gleichung (12) § 121. S. 467 noch weitere Schlüsse aus jenem kostbaren Materiale ziehen. —

Zur Zeit der ersten Triangulierungen, die wir haben, am Anfange des 17ten Jahrhunderts war der mittlere Winkelfehler, vor Erfindung des Fernrohrs, soweit wir aus den dürftigen Angaben von Snellius und Schickhart (§ 125. und § 126.) schliessen können, etwa $\pm 2'$ bis $\pm 4'$ (Schickhart $\pm 4'$ für eine Richtung, S. 481).

Im 18. Jahrhundert, bei den klassischen Gradmessungen der Franzosen, ging der mittlere Winkelfehler rasch herunter auf einige Sekunden ($\pm 3{,}6''$ und $\pm 1{,}1''$, S. 483 und S. 484).

Im 19. Jahrhundert haben wir in Europa aus den gründlichen Berechnungen von Ferrero, (s. oben (4)) einen mittleren Winkelfehler von $\pm 1''$.

Welches wird die Genauigkeitssteigerung im 20. Jahrhundert werden? —

Alles Vorstehende bezieht sich nur auf die *Winkel*-Genauigkeit. Wie sich die Winkelfehler in den Dreiecken fortpflanzen und zu Basisanschlussfehlern führen, ist eine Frage, welche interessante Theorien erzeugt hat und in neuerer Zeit durch die internationale Erdmessung auch praktischer Lösung näher geführt worden ist. Wir werden in unserem III. Bande „Handb. d. V.," 4. Aufl. darauf zurückkommen. Inzwischen ist hiezu zu zitieren das Werk „Veröffentlichung des geodätischen Instituts, die Europäische Längengradmessung in 52° Breite von Greenwich bis Warschau. I. Heft. Hauptdreiecke und Grundlinienanschlüsse von Helmert, Berlin 1893." (Vgl. auch S. 283 und 291).

Einen Bericht über S. 241 u. ff. dieses Werkes, Basisanschlüsse betreffend, haben wir in „Z. f. V., 1894," S. 220—222 gegeben; auch gehört hiezu: „Verbindung und Vergleichung geodätischer Grundlinien, zusammengestellt im Centralbureau der internationalen Erdmessung, von Dr. Fr. Kühnen, Verhandl. d. X. allgem. Konferenz d. internat. Erdmessung zu Brüssel, 1892," S. 518—546. „Zeitschr. f. Verm., 1894," S. 75—79.

Nachträge.

Die Neubearbeitung dieses im Sept. 1893 unerwartet rasch im Buchhandel vergriffenen Bandes ist aus verschiedenen Gründen nicht ganz in einem Zuge möglich gewesen, und es sind am Schlusse noch einige Ergänzungen zu früheren Kapiteln angewachsen.

§ 142. Rückwärtseinschneiden mit mehreren Standpunkten.

Von der Triangulierung der Stadt Hannover, deren Netz auf S. 408—409 gegeben ist, hat sich im Jahre 1894 eine Gruppen-Ausgleichung von 5 unter sich polygonometrisch verbundenen Punkten ergeben, welche als praktisches Beispiel zu Kap. III hier noch eine Stelle finden mag (vgl. auch „Zeitschr. f. Verm. 1895", S. 273—276).

Bei Stadttriangulierungen kann es oft vorkommen, dass man von einem Platze aus zwar eine genügende Zahl von Türmen oder anderen bereits durch Coordinaten bestimmten Hochpunkten sehen, aber sie nicht auf *einen* Theodolitstandpunkt zusammenbringen kann. Wie man trotzdem alles in eine Ausgleichung zusammenfassen kann, wollen wir an dem nachfolgenden Beispiele zeigen:

Der Lageplan (Fig. 1. S. 555) zeigt den Königsworther Platz in Hannover, von welchem aus 7 trigonometrische Punkte gesehen werden können, aber nie von *einem* Punkte aus mehr als 4, weil die Gebäude, Bäume u. s. w. die Sichten stören. Nach vielem Absuchen wurden 4 Standpunkte A, B, D, E ausgewählt, welche mit einem Hilfspunkte C als Polygon zusammen gemessen wurden und dadurch in die nötigen Centrierungsverbindungen gebracht wurden. Zugleich wurden auch 2 Kontrollbolzen a und b gesetzt, welche zu der nachfolgenden Ausgleichung zwar in keiner Beziehung stehen, aber doch, um alles Technische zu erwähnen, auch mit aufgeführt werden sollen. (Die Festlegungen von A, B, C, D, E sind mit Eisenbolzen nach „Handb. d. Verm. II. Band, 4. Aufl., 1893", S. 281 und die Punkte a und b nach S. 364 ebendas. gemacht.) Die 6 Entfernungen $AB = 22{,}783$ m, $BE = 60{,}276$ m u. s. w. sind mit gewöhnlichen Messlatten auf wenige Millimeter genau erhalten. Der beste Punkt ist A mit 4 Sichten: Martin, Wasserturm, Hochschule S. und S O.; auch B hat noch 3 Sichten: Martin, Wasserturm, Solms, während E und D nur noch je 2 Sichten: Palmenhaus, Christus und Hochschule, Christus haben.

Wir wollen zuerst die Coordinaten aller gegebenen Punkte und die genähert orientierten Messungs-Abrisse geben:

festgegebene Punkte:

Martin, Turm	$y = -25273{,}930$ m	$x = -28710{,}901$ m	
Wasserturm	$-25538{,}488$	$-29071{,}474$	
Solms, Turm	$-24695{,}660$	$-27176{,}634$	
Palmenhaus	$-25977{,}983$	$-25706{,}108$	(1)
Hochschule S. Turm	$-24709{,}769$	$-26868{,}278$	
„ SO. „	$-24667{,}066$	$-26851{,}965$	
Christus, Turm	$-24158{,}271$	$-26989{,}625$	