Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 117. Mittlerer Fehler des mittleren Fehlers

$$\frac{[\pm\varepsilon]}{n} = t = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, m \tag{13}$$

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2 = \frac{1}{2h} \quad " \quad = m^2 \tag{14}$$

$$\frac{[\varepsilon^4]}{n} = \nu^4 = \frac{3}{4h^4} \quad " \quad = 3\,m^4 \tag{15}$$

In gleicher Weise kann man alle Potenzsummen auswerten, denn eine allmähliche Rekursion wie bei (11) führt bei geraden Potenzen auf das Integral (6) und bei ungeraden Potenzen auf das leicht anzugebende Integral (4) § 114. S. 442; man kann also alle beliebigen Potenzsummen allmählich auf $[\varepsilon^2]$ oder $[\pm\varepsilon]$ zurückführen.

Die allgemeine Rekursionsformel ist:

$$\frac{[\varepsilon^{p+2}]}{n} = \frac{p+1}{2h^2}\frac{[\varepsilon^p]}{n} \quad \text{oder} = (p+1)\, m^2 \frac{[\varepsilon^p]}{n}$$

Der allgemeine Ausdruck für die p^{ten} Potenzen wird:

wenn p ungerade:

$$\frac{[\pm\varepsilon^p]}{n} = \frac{1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}}{h^p}\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{[\pm\varepsilon^p]}{n} = \frac{(m\sqrt{2})^p}{\sqrt{\pi}}\,1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}$$

wenn p gerade:

$$\frac{[\varepsilon^p]}{n} = \frac{1.3.5\ldots(p-1)}{(h\sqrt{2})^p} \tag{16}$$

$$\frac{[\varepsilon^p]}{n} = m^p\,1.3.5\ldots(p-1) \tag{17}$$

Die allgemeinen Formeln (16), (17) enthalten die besonderen Fälle (13)—(15) in sich, und geben noch weiter angewendet das Folgende:

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{[\pm\varepsilon]}{n} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,m & \dfrac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2 \\
\dfrac{[\pm\varepsilon^3]}{n} = 2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,m^3 & \dfrac{[\varepsilon^4]}{n} = 3\,m^4 \\
\dfrac{[\pm\varepsilon^5]}{n} = 8\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,m^5 & \dfrac{[\varepsilon^6]}{n} = 15\,m^6 \\
\dfrac{[\pm\varepsilon^7]}{n} = 48\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,m^7 & \dfrac{[\varepsilon^8]}{n} = 105\,m^8 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}\right\} \tag{18}$$

Umgekehrt können diese Formeln dazu dienen, um auf dem Umwege aus irgend welchen Potenzsummen den mittleren Fehler zu berechnen, was z. B. für die 4^{ten} Potenzen geben würde:

$$m = \sqrt[4]{\frac{[\varepsilon^4]}{3n}} \tag{19}$$

Indessen zur praktischen Anwendung für irgend welche Fehlerberechnungen sind nur die ersten und die zweiten Potenzen (ε und ε^2) geeignet.

§ 117. Mittlerer Fehler des mittleren Fehlers.

Das mittlere Fehlerquadrat m^2 ist nach der im Anfang § 4. S. 13 gegebenen Definition ein Mittelwert aus einer Anzahl von wahren Einzelfehlerquadraten ε^2, und es ist für die Zuverlässigkeit einer solchen Ausrechnung von ε^2 durchaus nicht gleichgültig, ob mehr oder weniger einzelne ε^2 zur Verfügung stehen, sondern ein m^2 aus nur zwei oder drei einzelnen ε^2 wird zweifellos viel unsicherer sein als eine Mittelbildung aus hunderten von ε^2, gerade so wie ja auch das arithmetische Mittel x aus mehreren Messungen l weniger oder mehr zuverlässig ist, je nachdem wenige oder viele Messungen l vorhanden sind (vgl. § 7. Gleichung (6) S. 21 und die Kurve S. 23).

Dazu kommt noch eine zweite Frage, betreffend die Art und Weise der Bestimmung des mittleren Fehlers. Wir haben nämlich in § 114. gesehen, dass man den mittleren Fehler m auch auf dem bequemen Wege über den durchschnittlichen Fehler t berechnen kann, nach der Formel (6) S. 442 $m = \varrho \sqrt{\pi}\, t = 1{,}2533\, t$, ja wir haben am Schlusse von § 116. S. 447 sogar gesehen, dass man den mittleren Fehler m auch auf dem Umweg über die 3ten, 4ten u. s. w. Potenzen wahrer Fehler ε berechnen könnte, und es entsteht daher die Frage nach der Zuverlässigkeit dieser verschiedenen Arten der Bestimmung von m.

Indem wir dieser Frage näher treten, bleiben wir zunächst bei der Annahme stehen, man sei im Besitze einer gewissen Anzahl n von *wahren* Fehlern ε, indem der Übergang zu scheinbaren Fehlern v erst später in § 118. vorgenommen werden soll.

Zur Bezeichnung mittlerer Fehler wollen wir das Zeichen m wie ein Funktionszeichen anwenden, d. h. es soll z. B. der mittlere Fehler irgend eine Grösse x mit $m(x)$ bezeichnet werden, ähnlich wie $f(x)$ eine Funktion von x bedeutet also

$$m(x) = \text{mittlerer Fehler von } x \tag{1}$$

Nach diesen Vorbemerkungen beginnen wir mit der Rechnungsart der ersten Potenzen ε.

Der durchschnittliche Fehler wird berechnet aus der Gleichung:

$$t = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots \varepsilon_n}{n} = \frac{[\pm\,\varepsilon]}{n} \tag{2}$$

Wenn wir nach dem mittleren Fehler dieses t fragen, so handelt es sich um die Abweichung des t von demjenigen theoretischen Werte t_0, den man erhalten würde, wenn nicht bloss n Zufallswerte $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$, sondern unendlich viele Werte ε vorhanden wären. Einen solchen Wert t_0 wollen wir den wahren Wert nennen, also $t_0 - \varepsilon_1$, $t_0 - \varepsilon_2$ u. s. w. die wahren Fehler der zufällig beobachteten $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ und dann ist das mittlere Fehlerquadrat eines einzelnen ε:

$$(m(\varepsilon))^2 = \frac{(t_0 - \varepsilon_1)^2 + (t_0 - \varepsilon_2)^2 + \ldots (t_0 - \varepsilon_n)^2}{n} \tag{3}$$

also das mittlere Fehlerquadrat von t, insofern t ein arithmetisches Mittel aus n einzelnen ε ist, nach (6) § 7. S. 21:

$$(m(t))^2 = \frac{(m(\varepsilon))^2}{n} = \frac{(t_0 - \varepsilon_1)^2 + (t_0 - \varepsilon_2)^2 + \ldots (t_0 - \varepsilon_n)^2}{n^2} \tag{4}$$

Die Ausrechnung der Quadrate im Zähler, wobei alle ε nur absolut (z. B. alle ε positiv) gezählt werden, giebt:

$$(m(t))^2 = \frac{n\,t_0^2 - 2\,t_0\,[\pm\,\varepsilon] + [\varepsilon^2]}{n^2} = \frac{t_0^2}{n}\left(1 - 2\,\frac{[\pm\,\varepsilon]}{n}\,\frac{1}{t_0} + \frac{[\varepsilon^2]}{n}\,\frac{1}{t_0^2}\right)$$

Hier ist $\dfrac{[\pm\,\varepsilon]}{n} = t$ und $\dfrac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2$ also:

$$(m(t))^2 = \frac{t_0^2}{n}\left(1 - 2\,\frac{t}{t_0} + \frac{m^2}{t_0^2}\right) \tag{5}$$

Da aber nicht bekannt ist, ob t_0 grösser oder kleiner als t ist, darf man hier $t = t_0$ nehmen und da ferner nach (6) § 114. S. 442, $\frac{m^2}{t_0^2} = \frac{m^2}{t^2} = \frac{\pi}{2}$, hat man aus (5):

$$(m\,(t))^2 = \frac{t^2}{n}\left(1 - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{t^2}{n}\left(\frac{\pi - 2}{2}\right)$$

daraus die Wurzel gezogen:

$$m\,(t) = \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1} \tag{6}$$

Dieses ist der mittlere Fehler der Bestimmung von t aus dem Mittel aller $\pm\,\varepsilon$, wir können also schreiben:

$$t = \frac{[\pm\,\varepsilon]}{n} \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}$$

oder

$$t = \frac{[\pm\,\varepsilon]}{n}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}\right) \tag{7}$$

Wenn man von dem durchschnittlichen Fehler zum mittleren Fehler übergeht, nach (6) § 114. S. 442 mit $m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, t$, so erhält man aus (7):

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{[\pm\,\varepsilon]}{n}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}\right) \tag{8}$$

oder

$$m = 1{,}2533 \frac{[\pm\,\varepsilon]}{n}\left(1 \pm \frac{0{,}7555}{\sqrt{n}}\right) \tag{9}$$

In gleicher Weise, wie wir hier den mittleren Fehler des durchschnittlichen Fehlers bestimmt haben, kann man auch den mittleren Fehler des mittleren Fehlers selbst bestimmen, wozu wir haben:

$$m^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots \varepsilon_n^2}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n}$$

Der wahre Wert von m^2 d. h. derjenige, welchen man bei unendlich vielen ε ($n = \infty$) erhalten würde, sei m_0^2, dann wird der mittlere Fehler $m\,(\varepsilon^2)$ eines einzelnen ε^2 bestimmt durch:

$$(m\,(\varepsilon^2))^2 = \frac{(m_0^2 - \varepsilon_1^2)^2 + (m_0^2 - \varepsilon_2^2)^2 + \ldots (m_0^2 - \varepsilon_n^2)^2}{n}$$

$$(m\,(\varepsilon^2))^2 = \frac{n\, m_0^4 - 2\, m_0^2\, [\varepsilon^2] + [\varepsilon^4]}{n} = m_0^4\left(1 - \frac{2\,[\varepsilon^2]}{n\, m_0^2} + \frac{[\varepsilon^4]}{n\, m_0^4}\right) \tag{10}$$

Man setzt nun wieder (ähnlich wie bei (5)):

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m_0^2 \text{ und nach (15) § 116. S. 447 } \frac{[\varepsilon^4]}{n} = 3\, m^4$$

also, indem die Unterscheidung zwischen m_0 und m nicht mehr nötig ist, aus (10):

$$(m\,(\varepsilon^2))^2 = m^4\,(1 - 2 + 3) = 2\, m^4 \tag{11}$$

oder

$$m\,(\varepsilon^2) = m^2 \sqrt{2}$$

Dieses ist der mittere Fehler eines einzelnen ε^2, und da m^2 als arithmetisches Mittel aus n solcher ε^2 erhalten wird, muss man nach der Regel (6) § 7. S. 21 des arithmetischen Mittels den mittleren Fehler von m^2 so berechnen:

$$m\,(m^2) = \frac{m\,(\varepsilon^2)}{\sqrt{n}} = m^2 \sqrt{\frac{2}{n}} \tag{12}$$

Dieses ist der mittlere Fehler der Bestimmung von m^2 aus der Quadratsumme aller ε^2, also:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} \pm m^2 \sqrt{\frac{2}{n}} = \frac{[\varepsilon^2]}{n}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n}}\right)$$

Um zu m selbst überzugehen, betrachten wir den mittleren Fehler stets als verhältnismässig klein, und nehmen daher:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{2}{n}}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,n}}\right) \tag{13}$$

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}\left(1 \pm \frac{0,70710}{\sqrt{n}}\right) \tag{14}$$

Vergleicht man dieses mit (8) oder (9), so findet man, dass die Berechnung von m aus den Quadraten ε^2 günstiger ist als die Berechnung aus den ε selbst und zwar im Verhältnis 0,7555 : 0,7071.

Die Fortsetzung dieser Untersuchungen auf höhere Potenzen, welche keine praktische Bedeutung mehr haben, giebt folgende Reihe, in welche wir des Zusammenhangs wegen auch die beiden Werte (9) und (14) für erste und zweite Potenzen nochmals aufnehmen:

$$\left.\begin{array}{ll}
1) & m = 1,2533\,\dfrac{[\pm\,\varepsilon]}{n}\left(1 \pm \dfrac{0,7555}{\sqrt{n}}\right) \\
2) & m = \sqrt{\dfrac{[\varepsilon^2]}{n}}\left(1 \pm \dfrac{0,7071}{\sqrt{n}}\right) \\
3) & m = 0,8557\sqrt{\dfrac{[\pm\,\varepsilon^3]}{n}}\left(1 \pm \dfrac{0,7371}{\sqrt{n}}\right) \\
4) & m = 0,7598\sqrt{\dfrac{[\varepsilon^4]}{n}}\left(1 \pm \dfrac{0,8165}{\sqrt{n}}\right) \\
 & \dots\dots\dots\dots \\
9) & m = 0,5293\sqrt{\dfrac{[\pm\,\varepsilon^9]}{n}}\left(1 \pm \dfrac{2,1408}{\sqrt{n}}\right) \\
10) & m = 0,5040\sqrt{\dfrac{[\varepsilon^{10}]}{n}}\left(1 \pm \dfrac{2,7058}{\sqrt{n}}\right)
\end{array}\right\} \tag{15}$$

Die günstigste Bestimmung von m ist die Bestimmung aus den Quadraten ε^2, denn diese Bestimmung 2) hat den kleinsten mittleren Fehler, nämlich 0,7071 m. Die Bestimmung aus den 10ten Potenzen der ε hat nach 10) den nahezu 4mal grösseren Fehler 2,7058 m.

Hiezu gehört das Citat der Quellenschrift von Gauss, Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen (s. unsere Einleitung S. 3 unten), auch Encke, „Berl. Astr. Jahrb. für 1834", S. 289 bis 293, wobei aber ja nicht zu übersehen ist, dass Gauss und Encke durchaus mit *wahrscheinlichen* Fehlern rechnen, sowohl bei den Potenzmitteln, als auch bei deren Unsicherheiten, sie geben also stets den wahrscheinlichen Fehler mit seinem wahrscheinlichen Fehler, während unsere Rechnung im Vorstehenden sich stets auf *mittlere* Fehler und mittlere Fehler der mittleren Fehler beziehen; es sind daher alle unsere Coefficienten im Verhältnis $1 : \varrho\sqrt{2}$ oder 1 : 0,6745 grösser als die Coefficienten nach Gauss-Encke.