Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 115. Beziehung zwischen dem mittleren, wahrscheinlichen und durchschnittlichen Fehler

Hier ist das allgemeine Integral:

$$\int t\, e^{-t^2} d\, t = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \tag{3}$$

und mit Einführung der Grenzen 0 und ∞ wird das bestimmte Integral, (ebenso wie früher bei (10) § 111. S. 430):

$$\int_0^\infty t\, e^{-t^2} d\, t = +\frac{1}{2} \tag{4}$$

dieses giebt nach (2):

$$t = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

Es ist aber nach (17) § 111. S. 432:

$$\frac{1}{h} = m\sqrt{2}$$

also:

$$t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, m = 0{,}79788\, m \tag{5}$$

und

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, t = 1{,}2533\, t \tag{6}$$

Damit haben wir gefunden, dass der durchschnittliche Fehler t und der mittlere Fehler m in einem konstanten Verhältnis stehen, dass man also stets den einen aus dem andern berechnen kann.

Man kann davon insofern praktischen Gebrauch machen, als der durchschnittliche Fehler t bei gegebenen Elementen ε bequemer zu berechnen ist, als der mittlere Fehler m, indem man bei t das Quadrieren der ε erspart, hat man also den Durchschnittswert t berechnet, so braucht man ihn nur mit 1,2533 zu multiplizieren um auch m zu haben.

Diese Berechnung von m auf dem Umweg über t ist jedoch weniger zuverlässig, als die unmittelbare Berechnung von m aus den ε^2, und da die Quadrierung der ε bzw. der v einer Ausgleichung keine grosse Mühe ist, so hat die besprochene Berechnung von t und $m = 1{,}2533\, t$ fast nur bei flüchtigen und Überschlags-Genauigkeitsrechnungen praktische Bedeutung. Weiteres hierüber wird in § 124. verhandelt werden.

§ 115. Beziehungen zwischen dem mittleren, wahrscheinlichen und durchschnittlichen Fehler.

Nachdem im Bisherigen der wahrscheinliche und der mittlere Fehler, und dann der wahrscheinliche und der durchschnittliche Fehler zu einander in Beziehung gesetzt sind, können wir die gegenseitigen Beziehungen aller dieser 3 Fehler unter sich bilden.

Es gelten die Bezeichnungen:

Mittlerer Fehler $= m$
Wahrscheinlicher Fehler $= r$
Durchschnittlicher Fehler $= t$.

Wenn man n wahre Fehler ε hat, so ist:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} \qquad t = \frac{[\pm\,\varepsilon]}{n} \tag{1}$$

Zur gegenseitigen Verwandlung von m, r und t hat man die Zahlenwerte:

$$\left.\begin{array}{ll}
\varrho = 0{,}476\,9363 & log = 9.678\,4603.8 \\
r = \varrho\sqrt{2}\,m = 0{,}684\,4898\,m & log = 9.828\,9753{\cdot}8 \\
r = \varrho\sqrt{\pi}\,t = 0{,}845\,3476\,t & log = 9.927\,0353{\cdot}1 \\
m = \dfrac{1}{\varrho\sqrt{2}}\,r = 1{,}482\,6021\,r & log = 0.171\,0246{\cdot}2 \\
m = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,t = 1{,}253\,3141\,t & log = 0.098\,0599{\cdot}4 \\
t = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,m = 0{,}797\,8846\,m & log = 9{,}901\,9400{\cdot}6 \\
t = \dfrac{1}{\varrho\sqrt{\pi}}\,r = 1{,}182\,9372\,r & log = 0.072\,9616{\cdot}9
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Dabei ist $\varrho = 0{,}476\,9363$ zu Grunde gelegt nach Gauss' „Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen" Art. 1 (s. o. § 113. S. 439).

Hat man statt der wahren Fehler ε nur scheinbare Fehler v zur Verfügung, so rechnet man bei *einer* Unbekannten nach § 7. S. 21 oder § 11. S. 39:

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n-1} \quad (3)$$

und deswegen:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \quad (4)$$

Um auch in der Berechnung von t die scheinbaren Fehler einzuführen, dient folgende Betrachtung:

Indem man nun annimmt, dass die v demselben Fehlergesetz folgen wie die ε, kann man schliessen, dass die einzelnen ε^2 durchschnittlich im Verhältnis $n:(n-1)$ grösser sind als die entsprechenden v^2, oder dass die einzelnen ε durchschnittlich grösser sind als die entsprechenden v im Verhältnis $\sqrt{n}:\sqrt{n-1}$, folglich kann man weiter schliessen:

$$[\pm\varepsilon]:[\pm v] = \sqrt{n}:\sqrt{n-1} \quad (5)$$

Also der durchschnittliche Fehler:

$$t = \frac{[\pm\varepsilon]}{n} = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n(n-1)}} \quad (6)$$

und der mittlere Fehler nach (2):

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,t = 1{,}2533\,\frac{[\pm v]}{\sqrt{n(n-1)}} \quad (7)$$

Dieses ist die Formel von *Peters.*

Bei mehr als *einer* Unbekannten, wir nehmen an bei u Unbekannten, und n Fehlergleichungen, wird nach (19) § 28. S. 87:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-u}} \quad (8)$$

und um eine entsprechende Formel auch für t zu erlangen, machen wir (ähnlich wie bei (5)) die Annahme zu (8):

$$\varepsilon : v = \sqrt{n} : \sqrt{n-u}$$

$$[\pm\varepsilon]:[\pm v] = \sqrt{n}:\sqrt{n-u}$$

also

$$t = \frac{[\pm \varepsilon]}{n} = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-u)}} \tag{9}$$

und der mittlere Fehler:

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; t = 1{,}2533\, \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-u)}} \tag{10}$$

Diese Formel ist von *Lüroth.*

Bei bedingten Beobachtungen mit r Bedingungsgleichungen ist $n - u = r$ zu setzen, also nach (8) § 38. S. 116:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} \tag{11}$$

und entsprechend für (10):

$$m = 1{,}25331\, \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,r}} \tag{12}$$

Die Formeln (7), (9) und (12) sind die gebräuchlichsten zur Berechnung mit den ersten Potenzen v scheinbarer Fehler statt der Quadrate v^2.

Die Peters sche Formel (7) hat aber den Übelstand, dass sie für den einfachen Fall zweier Beobachtungen, also $n = 2$ mit der strengen Formel (4) nicht übereinstimmt, denn wenn man 2 Beobachtungen mit der Differenz d annimmt, dann ist nach (4) mit $n = 2$:

$$m_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}{2-1}} = \frac{d}{\sqrt{2}} = 0{,}70711\, d \tag{13}$$

dagegen nach (7):

$$m_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{\frac{d}{2} + \frac{d}{2}}{\sqrt{2\,.\,1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{d}{\sqrt{2}} = 0{,}88623\, d \tag{14}$$

Man kann nun auf den Gedanken kommen, die Formeln (7) und (4) dadurch auf den Fall $n = 2$ zum Stimmen zu bringen, dass man in dem Nenner von (7) statt $n - 1$ einen vorerst unbestimmt gelassenen Wert $n - x$ setzt, und nachher x so bestimmt, dass für $n = 2$ beide Formeln (7) und (4) zusammen fallen. Man nimmt also zunächst nach (7):

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-x)}} \tag{15}$$

und speziell für $n = 2$:

$$m_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{\frac{d}{2} + \frac{d}{2}}{\sqrt{2\,(2-x)}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{d}{\sqrt{2\,(2-x)}}$$

und dieses der strengen Formel (13) gleichgesetzt giebt:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\,(2-x)}} = 1$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst giebt:

$$x = \frac{4-\pi}{2}$$

Setzt man dann noch näherungsweise $\pi = 3$, so wird $x = \frac{1}{2}$ und damit wird (15):

$$m = \sqrt{\pi}\,\frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(2\,n-1)}} = 1{,}77245\,\frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(2\,n-1)}} \tag{16}$$

Fechner sche Formel.

Was im Vorstehenden von (5) bis (16) mitgeteilt ist, enthält meist keine strengen Entwicklungen, sondern nur Plausibelmachung der betreffenden Formeln. Folgendes sind die näheren Quellenangaben dazu:

Die Formel (7) oder (6), $t = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-1)}}$ wurde zuerst von Peters im 44. Band der „Astr. Nachrichten" S. 29 (1856) aufgestellt.

Die erweiterte Formel (9), $t = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-u)}}$ wurde von Lüroth im 73. Bd. (1869) S. 187 der „Astr. Nachrichten" gegeben.

Helmert hat diese Sache genauer behandelt in „Astr. Nachr." 85. Band (1875) S. 353—366 und 88. Band (1876) S. 113—132, und hat dabei gefunden, dass nur die Peters sche Formel (7) für *eine* Unbekannte streng richtig ist, während die Formel (10) für u Unbekannte, mit dem Nenner $\sqrt{n\,(n-u)}$ nur etwa als eine Näherungsformel zu betrachten ist.

Hier sind noch zwei Abhandlungen von Helmert zu zitieren in Schlömilchs „Zeitschr. f. M. u. Ph." 1875 S. 300—303: „Über die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Zahl wahrer Beobachtungsfehler" und 1876 S. 192 bis 218: „Über die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen."

Was endlish die Fechner sche Formel (16) betrifft, so ist dieselbe von Fechner entwickelt in Poggendorff's „Annalen der Physik", Jubelband, 1874, S. 66 bis 81, und eine kritische Untersuchung dieser Formel ist von Helmert im 88. Band der Astr. Nachrichten (1876) S. 120—127, gegeben worden. Hiernach ist die Fechner sche Formel die beste derjenigen Formeln, welche den wahrscheinlichen oder mittleren Fehler statt aus der Quadratsumme $[v^2]$, aus der absoluten Summe $[\pm v]$ der übrigbleibenden Fehler v berechnen.

Alle Formeln mit $[\pm v]$ sind von der Annahme über das Fehlerwahrscheinlichkeitsgesetz abhängig und auch abgesehen davon weniger genau als die Formeln mit den Quadraten, nämlich Formel (3) und (8), letzteres wird allerdings erst später in § 117 bewiesen werden, mag aber jetzt schon (zusammen mit der Frage der Abhängigkeit vom Fehlergesetz) zu der Bemerkung führen, dass alle die Formeln mit $[\pm v]$ nur insofern Interesse verdienen, als man damit das Ausrechnen der Quadrate v^2, d. h. eine verhältnismässig geringe Arbeit, sparen kann. —

§ 116. Verschiedene Fehler-Potenzsummen.

Dieselbe Überlegung, welche am Anfang von § 114. zu der Formel (1) S. 441 mit der Summe $[\pm \varepsilon]$ der ersten Potenzen wahrer Fehler ε geführt hat, kann auch angewendet werden auf andere Potenzen und giebt weiter auf 2te, 4te u. s. w. Potenzen angewendet:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \tag{1}$$

$$\frac{[\varepsilon^4]}{n} = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^4 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \tag{2}$$

allgemein

$$\frac{[\varepsilon^p]}{n} = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^p e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \tag{3}$$