Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 112. Reihen-Entwicklungen und Fehlerkur[v]en

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Die Ausführung dieser Differentiierung giebt, mit Weglassung des konstanten Nenners $\sqrt{\pi^n}$:

$$0 = \frac{d\left(h^n e^{-h^2[\varepsilon^2]}\right)}{dh} = n\,h^{n-1} e^{-h^2[\varepsilon^2]} + h^n e^{-h^2[\varepsilon^2]}(-2\,h\,[\varepsilon^2])$$

$$0 = h^{n-1} e^{h^2[\varepsilon^2]}\left(n - 2\,h^2\,[\varepsilon^2]\right)$$

Dieses Produkt kann nur = Null werden, wenn der Faktor in der Klammer = Null wird, also:

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{1}{2\,h^2} \tag{16}$$

Der hier zum Vorschein kommende Mittelwert $\frac{[\varepsilon^2]}{n}$ ist nichts anderes, als das Quadrat des uns schon längst bekannten mittleren Fehlers m, es ist also:

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2 = \frac{1}{2\,h^2}$$

$$\text{also } m = \frac{1}{h\sqrt{2}} \text{ oder } h = \frac{1}{m\sqrt{2}} \tag{17}$$

Setzt man dieses in (13) ein, so erhält man

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{m\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\,m^2}} \tag{18}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε ist:

$$W(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\,d\,\varepsilon = \frac{1}{m\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\,m^2}}\,d\,\varepsilon \tag{19}$$

Nun wollen wir noch einführen:

$$\frac{\varepsilon}{m} = x \quad \text{und} \quad \frac{d\,\varepsilon}{m} = d\,x \tag{20}$$

d. h. wir zählen die Fehler als Verhältniszahlen $\varepsilon : m$ oder in Einheiten des mittleren Fehlers m; damit wird:

$$W(\varepsilon) = W(m\,x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,d\,x \tag{21}$$

$$\text{oder } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{22}$$

Es ist für die Übersicht und auch sachlich am besten, alle weiteren Entwicklungen und Berechnungen in dieser letzten Form mit $\frac{\varepsilon}{m} = x$ zu führen, wobei also x eine reine Zahl und auch $\varphi(x)$ eine reine Zahl ist; indessen haben wir in Folgendem diese Form nur teilweise angewendet und sonst ε selbst nebst h eingeführt, um den Anschluss unserer Berechnungen an die seit *Gauss* üblichen Formen nicht zu verlieren (und zum Teil wegen der typographischen Schwierigkeiten der Formen (18)—(21)).

§ 112. Reihen-Entwicklungen und Fehlerkurven.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist nach (13) § 111. S. 430:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\varepsilon^2} \tag{1}$$

Diese Funktion kann man für irgend welche Werte von h und von ε geradezu ausrechnen, und zwar logarithmisch, da $log\, e = log\, 2{,}71828\ldots = 0.4342945\ldots = \mu$ und $log\, \sqrt{\pi} = 0.2485749$ ist:

$$log\, \varphi(\varepsilon) = 9.7514251 + log\, h - \mu h^2 \varepsilon^2 \tag{2}$$

Hiernach sind folgende Zahlenwerte berechnet:

ε	$\varphi(\varepsilon)$ für $h = 1$	$\varphi(\varepsilon)$ für $h = 2$	ε	$\varphi(\varepsilon)$ für $h = 1$	$\varphi(\varepsilon)$ für $h = 2$
0,0	0,56419	1,12838	1,0	0,20755	0,02067
0,1	0,55858	0,08413	1,1	0,16824	0,00892
0,2	0,54207	0,96514	1,2	0,13367	0,00356
0,3	0,51563	0,78724	1,3	0,10410	0,00131
0,4	0,48077	0,59499	1,4	0,07947	0,00044
0,5	0,43939	0,41511	1,5	0,04946	0,00014
0,6	0,39362	0,26734	1,6	0,04361	0,00004
0,7	0,34564	0,15894	1,7	0,03136	0,00001
0,8	0,29749	0,08723	1,8	0,02210	0,000003
0,9	0,25098	0,04419	1,9	0,01526	0,0000006
1,0	0,20755	0,02067	2,0	0,01033	0,0000001
			3,0	0,00007	0,0 . . .
			∞	0	0

Man kann eine solche Funktion auch graphisch darstellen, indem man die Werte $\varphi(\varepsilon)$ als Ordinaten zu den Werten ε als Abscissen aufträgt. Die so erhaltene Curve für $h = 1$ ist in der nachfolgenden Fig. 1. am Schlusse dieses § S. 436 gegeben.

Wir wollen auch die Integralfunktion in Zahlenwerten und graphisch darstellen, nämlich nach (14) § 111. S. 430 die Funktion

$$W\binom{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{ah}^{bh} e^{-t^2}\, dt \tag{3}$$

Dieses ist die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen a und b, und man erhält daraus auch die Wahrscheinlichkeit für das Fallen zwischen die Grenzen $-a$ und $+a$:

$$W\binom{+a}{-a} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-ah}^{+ah} e^{-t^2}\, dt$$

Weil aber gleich grosse positive oder negative Fehler gleich wahrscheinlich sind, also die Wahrscheinlichkeiten zwischen $-a$ und Null einerseits, und Null und $+a$ andererseits, einander gleich sind, kann man hiefür setzen, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen von a:

$$W\binom{a}{0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{ah} e^{-t^2}\, dt \tag{4}$$

Um dieses Integral auszurechnen, müssen wir eine Reihenentwicklung anwenden. Hiezu dient die Exponentialreihe:

$$\overset{x}{e} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Diese giebt mit $x = -t^2$:

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \dots$$

$$\int e^{-t^2} d\,t = t - \frac{t^3}{3\,.\,1!} + \frac{t^5}{5\,.\,2!} - \frac{t^7}{7\,.\,3!} + \frac{t^9}{9\,.\,4!} - \dots$$

$$\int_0^T e^{-t^2} d\,t = T - \frac{T^3}{3\,.\,1!} + \frac{T^5}{5\,.\,2!} - \frac{T^7}{7\,.\,3!} + \frac{T^9}{9\,.\,4!} \qquad (5)$$

Diese Reihe (5) konvergiert für endliche Werte von T jedenfalls, denn es ist der Quotient q zweier auf einander folgender Glieder, wenn man bis $n!$ im Nenner fortgeht,:

$$q = \frac{(2\,n - 1)\,T^2}{(2\,n + 1)\,n}$$

Da die Reihe abwechselnd positive und negative Glieder hat, so genügt es für die Konvergenz, wenn von irgend welcher Stelle an immer $q < 1$ wird, dieses ist aber für jeden endlichen Wert von T der Fall, wenn man nur die Reihe lang genug fortsetzt.

Allerdings muss man für grössere Werte T sehr viele Glieder nehmen, um nur überhaupt an den Anfang der Konvergenz zu gelangen, doch genügt uns hier die theoretische Möglichkeit der Rechnung nach der Reihe (5).

(Im übrigen verweisen wir hiezu auf Brünnow, „Lehrbuch der sphärischen Astronomie,“ 3. Ausgabe S. 34 und Theorie der Beobachtungsfehler von Emanuel Czuber, Leipzig 1891, S. 115—120).

Aus (4) und (5) haben wir nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ liegt:

$$W\binom{a}{0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(a\,h - \frac{(a\,h)^3}{3\,.\,1!} + \frac{(a\,h)^5}{5\,.\,2!} - \frac{(a\,h)^7}{7\,.\,3!} + \frac{(a\,h)^9}{9\,.\,4!} - \dots\right) \qquad (6)$$

Z. B. mit $a\,h = 0{,}1$ erhält man damit:

$$\left(W_0^a\right) = 1{,}12838\,(0{,}100000 - 0{,}000333 + 0{,}000001) = 0{,}112\,463$$

Folgendes sind einige Zahlenwerte für die Funktion $W\binom{a}{0}$ nach der Gleichung (6):

$a\,h$	$W\binom{a}{0}$	$a\,h$	$W\binom{a}{0}$	$a\,h$	$W\binom{a}{0}$	$a\,h$	$W\binom{a}{0}$
0,0	0,00000	1,0	0,84270	2,0	0,99532	3,0	0,99997 79
0,1	0,11246	1,1	0,88020	2,1	0,99702	3,1	0,99998 84
0,2	0,22270	1,2	0,91031	2,2	0,99814	3,2	0,99999 40
0,3	0,32863	1,3	0,93401	2,3	0,99886	3,3	0,99999 69
0,4	0,42839	1,4	0,95229	2,4	0,99931	3,4	0,99999 85
0,47694	0,5						
0,5	0,52050	1,5	0,96611	2,5	0,99959	3,5	0,99999 26
0,6	0,60386	1,6	0,97635	2,6	0,99976	3,6	0,99999 96
0,7	0,67780	1,7	0,98379	2,7	0,99987	3,7	0,99999 98
0,8	0,74210	1,8	0,98909	2,8	0,99992	3,8	0,99999 99
0,9	0,79691	1,9	0,99279	2,9	0,99996	∞	1,0

Eine ausführlichere Tafel dieser Art gab *Encke* im „Berliner astron. Jahrbuch für 1834“, S. 305—308 und *Czuber*, „Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891“, S. 121 und S. 411—413 und *Ferrero*, espositione del metodo dei minimi quadrati, Firenze 1876“, S. 223—225.

In der vorstehenden kleinen Tafel haben wir einen Wert $a\,h = 0{,}47694$ besonders hervorgehoben, es ist derjenige, welcher zu $W\binom{a}{0} = \frac{1}{2}$ gehört. Mit diesem Werte 0,47694 oder genauer 0,4769363 … werden wir uns im nächsten § 113. ausführlicher beschäftigen; inzwischen ist von demselben nur so viel zu sagen, dass er in die Reihe (6) eingesetzt, wie jeder andere das zugehörige $W\binom{a}{0}$ zu berechnen gestattet, und zwar wird die Ausrechnung hiefür $W\binom{a}{0} = 0{,}50000$ geben.

Führt man im Vorstehenden statt der Genauigkeitszahl h den mittleren Fehler m ein, nämlich nach (17) § 111. S. 432.

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} \quad \text{also} \quad a\,h = \frac{a}{m\sqrt{2}}$$

so bekommt man:

$$W\binom{a}{0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)^3 \frac{1}{3\,.\,1!} + \left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)^5 \frac{1}{5\,.\,2!} - \left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)^7 \frac{1}{7\,.\,3!} + \ldots\right) \quad (7)$$

Dieses ist nur eine andere Form für (6); wenn man jedoch den Nenner $\sqrt{2}$ absondert und damit das Verhältnis $\frac{a}{m}$ als Veränderliche herstellt, so erhält man noch eine etwas andere Form:

$$W\binom{a}{0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\left(\frac{a}{m}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{m}\right)^3 + \frac{1}{40}\left(\frac{a}{m}\right)^5 - \frac{1}{336}\left(\frac{a}{m}\right)^7 + \frac{1}{3456}\left(\frac{a}{m}\right)^9 - \ldots\right) \quad (8)$$

Oder indem man das Verhältnis $\frac{a}{m} = n$ setzt, kann man dasselbe auch noch so schreiben:

$$W\binom{n\,m}{0} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n - \frac{n^3}{6} + \frac{n^5}{40} - \frac{n^7}{336} + \frac{n^9}{3456} - \ldots\right) \quad (9)$$

Oder es ist dieses die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen Null und den n fachen mittleren Fehler, als Funktion von n.

Hiernach ist unsere Tafel im Anhange S. [21] berechnet.

Graphische Darstellungen.

Die nachstehende Fig. 1. giebt Kurven für die Funktionen (1), (2) und (6), (8) nebst einer Kurve für $W^{n\,r}_{\;0}$, von welcher erst in § 113. beim wahrscheinlichen Fehler die Rede sein wird, in (6) S. 439.

Die mit $\varphi(\varepsilon)$ bezeichnete Kurve entspricht der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ und der zugehörigen Tabelle auf S. 433 mit $h = 1$.

Die Kurve W entspricht der Funktion (6) oder (8) mit der Tabelle auf S. 434, wobei wieder $h = 1$ angenommen ist.

Die graphische Darstellung führt weiter zu folgenden geometrischen Betrachtungen:

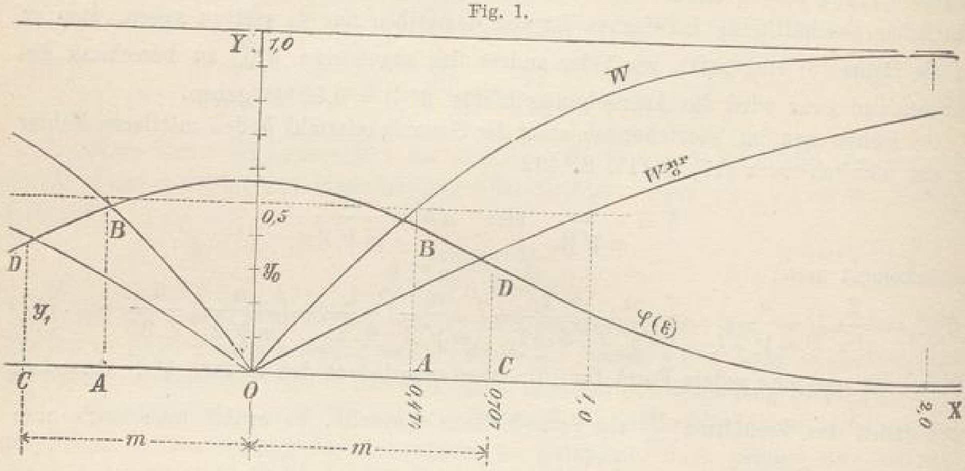
Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε, oder genauer, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\,\varepsilon$ liegt, ist:

$$W = \varphi(\varepsilon)\,d\,\varepsilon$$

und die geometrische Darstellung hievon ist ein schmales, unendlich kleines Rechteck, dessen Höhe gleich der Ordinate $= \varphi(\varepsilon)$ der ersten Kurve, und dessen Breite $= d\,\varepsilon$ in der Richtung OX gemessen ist. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen a und b liegt:

$$W\binom{b}{a} = \int_a^b \varphi(\varepsilon)\, d\,\varepsilon \tag{10}$$

Fig. 1.



Dieses ist geometrisch dargestellt durch eine Fläche, welche begrenzt ist durch die Abscissenaxe, durch die Kurve $\varphi(\varepsilon)$ selbst und durch die zwei Ordinaten, welche zu den Abscissen $\varepsilon = a$ und $\varepsilon = b$ gehören. Z. B. ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $\varepsilon = 0{,}477$ und $\varepsilon = 0{,}707$ liegt, in Fig. 1. dargestellt durch die Fläche $A\,C\,D\,B$.

Die Gesamtfläche zwischen der Abscissenaxe (Asymptote) und der Kurve $\varphi(\varepsilon)$ ist $= 1$, was der Gleichung (3) § 111. S. 428 entspricht, nämlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\,\varepsilon \quad \text{oder} \quad 2\int^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\,\varepsilon = 1 \tag{11}$$

Wendepunkt der Kurve $\varphi(\varepsilon)$.

Noch eine merkwürdige Beziehung besteht zwischen dem Wendepunkt der Kurve $\varphi(\varepsilon)$ und dem mittleren Fehler m, es ist nämlich die Abscisse dieses Wendepunktes gleich dem mittleren Fehler.

Im Wendepunkt einer Kurve ist bekanntlich der zweite Differentialquotient $=$ Null. Man hat also:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{12}$$

$$\frac{d\,\varphi(\varepsilon)}{d\,\varepsilon} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} \left(-2\,h^2\,\varepsilon\right) = -\frac{2\,h^3}{\sqrt{\pi}}\,\varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2}$$

$$\frac{d^2\,\varphi(\varepsilon)}{d\,\varepsilon^2} = -\frac{2\,h^3}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-h^2\varepsilon^2} - \varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2} . \, 2\,h^2\,\varepsilon \right\}$$

Dieses kann nur dadurch Null werden, dass die Klammer = Null gesetzt wird, woraus folgt:

$$1 - 2\,h^2\,\varepsilon^2 = 0$$

$$\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}} \tag{13}$$

Nach (17) § 111. S. 432 ist dieses $= m$; es ist also derjenige besondere Wert von ε, welcher die zweite Ableitung der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ zum Verschwinden bringt, gleich dem mittleren Fehler m. Oder in Fig. 1. ist $O\,C = m$ für den Wendepunkt D, und insbesondere mit $h = 1$ wird $O\,C = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ldots$, wie in Fig. 1. eingeschrieben ist.

Fehlerfunktion für $m = 1$.

In der Tabelle S. 433 und in der zugehörigen Kurve Fig. 1. S. 436 ist die zuerst sich darbietende einfache Annahme gemacht $h = 1$ oder $h = 2$, indessen ist das zwar mathematisch einfach, aber im Sinne der Fehler-Anschaulichkeit nicht nützlich; in letzterem Sinne ist es besser, alles auf den mittleren Fehler $m = 1$ zu reduzieren, wie wir schon am Schlusse von § 111. S. 432 angedeutet haben mit der Bezeichnung:

$$\frac{\varepsilon}{m} = x \tag{14}$$

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{15}$$

$$x = 0 \text{ giebt} \qquad \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}39894 \tag{16}$$

$$x = 1, \text{ oder } \varepsilon = m \text{ giebt } \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\,e\,\pi}} = 0{,}24197 \tag{17}$$

und die übrige Ausrechnung giebt:

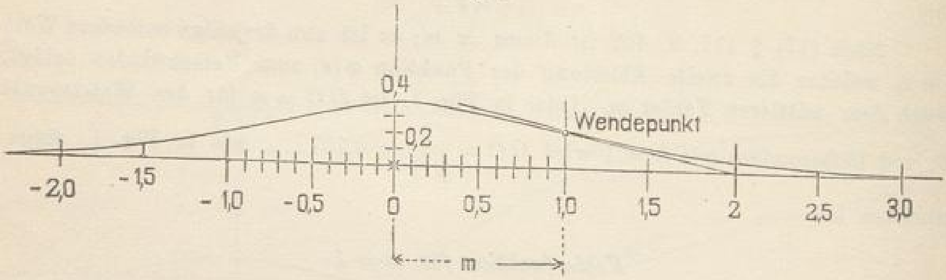
$$\log\,y = 9{,}6009106 - 0{,}21714724\,x^2$$

wonach folgende Tabelle berechnet wurde:

$\frac{\varepsilon}{m} = x$	$\varphi(x)$	$\frac{\varepsilon}{m} = x$	$\varphi(x)$
0,0	0,39894	0,7	0,31225
0,1	0,39695	0,8	0,28969
0,2	0,39104	0,9	0,26609
0,3	0,38139	1,0	0,24197
0,4	0,36827	1,5	0,12951
0,5	0,35206	2,0	0,05399
0,6	0,33322	3,0	0,00443
0,7	0,31225	∞	0,00000

Hiernach ist die folgende Fig. 2. aufgetragen, welche im Vergleich mit der früheren verzerrten Fig. 1. S. 436 nun die Fehlerfunktion sozusagen in natürlichen Verhältnissen darstellt. (Die Wendepunkts-Tangente ist leider im Holzschnitt schlecht ausgefallen.)

Fig. 2.



§ 113. Der wahrscheinliche Fehler.

Der besondere Wert $W\binom{a}{0} = 0{,}5$, welcher im vorigen § 112. bei der Tabelle von S. 434 betrachtet wurde, führt zur Einführung eines neuen Begriffs, nämlich des wahrscheinlichen Fehlers.

Wenn nämlich die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen 0 und a den Wert 0,5 hat, so muss die Wahrscheinlichkeit für das Fallen zwischen die Grenzen a und ∞ ebenfalls $= 0{,}5$ sein, weil für das Fallen zwischen die äussersten Grenzen 0 und ∞ die Gesamtwahrscheinlichkeit $= 1$ ist. Bezeichnen wir also den besonderen Wert von a, für welchen dieses stattfindet, mit r, so haben wir:

$$W\binom{r}{0} = \frac{1}{2} = W\binom{\infty}{r}$$

Der dadurch bestimmte Wert r heisst der „*wahrscheinliche Fehler*". Derselbe stellt die Grenze vor, unter welcher ebenso viele kleinere Fehler zu erwarten sind, als grössere über ihr.

Der wahrscheinliche Fehler r wird mit Hilfe der Reihe (6) § 112. S. 434 dadurch bestimmt, dass jene Reihe den Wert $= \frac{1}{2}$ geben muss, wenn $a = r$ wird, d. h.:

$$W\binom{r}{0} = \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(r\,h - \frac{(r\,h)^3}{3\,.\,1!} + \frac{(r\,h)^5}{5\,.\,2!} - \frac{(r\,h)^7}{7\,.\,3!} + \frac{(r\,h)^9}{9\,.\,4!} - \cdots\right) \tag{1}$$

da r hier immer zusammen mit h vorkommt, wird das Produkt $r\,h$ besonders bezeichnet, nämlich:

$$r\,h = \varrho \tag{2}$$

und damit giebt vorstehende Gleichung folgende Bestimmung für ϱ:

$$\varrho - \frac{\varrho^3}{3} + \frac{\varrho^5}{10} - \frac{\varrho^7}{42} + \frac{\varrho^9}{216} - \cdots = \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0{,}443113\ldots$$

Um diese Gleichung nach ϱ aufzulösen, hat man in erster Näherung:

$$\varrho = \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0{,}443113\ldots \quad = p$$