Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 110. Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Man denke sich hiezu zwei Urnen mit a und a' schwarzen, nebst b und b' anderen Kugeln; bei diesen Urnen sind die Wahrscheinlichkeiten für Schwarz:

$$w = \frac{a}{a+b} \text{ bezw. } w' = \frac{a'}{a'+b'}$$

Nun fragt man nach der Wahrscheinlichkeit, dass bei zwei Zügen aus beiden Urnen, beidemal schwarz erscheint. Hier sind $a\,a'$ Fälle günstig, weil zu jeder Kugel a eine Kugel a' kommen kann, und möglich sind $(a+b)(a'+b')$ Fälle, es ist also: Die Wahrscheinlichkeit für Schwarz und Schwarz:

$$W = \frac{a\,a'}{(a+b)(a'+b')} \text{ oder } = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a'}{a'+b'} = w \,.\, w'$$

Damit ist die oben geschriebene Gleichung (2) nachgewiesen für die dem Urnenbeispiel entsprechenden Wahrscheinlichkeiten; und ebenso wie für 2 Ereignisse gilt das Produkt auch für die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von mehr als 2 Ereignissen, z. B. in der Fehlertheorie werden wir nachher eine Anwendung von folgender Form haben: Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε sei w, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε' sei w', ferner ε'' mit w'' u. s. w. Dann ist die Wahrscheinlichkeit bei 3 Beobachtungen gerade die Fehler ε, ε', ε'' und keine anderen zu erhalten, oder allgemeiner, die Wahrscheinlichkeit bei einer Beobachtungsreihe die Fehler ε, ε', ε'' u. s. w. zu erhalten, ausgedrückt durch das Produkt:

$$W = w \,.\, w' \,.\, w'' \ldots \tag{4}$$

Das Gesetz der grossen Zahlen. Wenn man eine Wahrscheinlichkeit aus den Ursachen a priori nicht berechnen kann, so giebt es einen Schluss aus der Häufigkeit des Vorkommens rückwärts auf die Wahrscheinlichkeit.

Wenn z. B. von 1000 geborenen Knaben nur 250 das 50ste Lebensjahr erreichen, so schliesst man daraus, dass für irgend ein heute geborenes männliches Kind die Wahrscheinlichkeit $= \frac{250}{1000}$ oder $= \frac{1}{4}$ besteht, das 50ste Lebensjahr zu erreichen.

Oder wenn bei einem Doppelnivellement unter 491 Vergleichungen 209 Vergleichung die Differenz 1^{mm} gegeben haben, und wenn andere Differenzen als 0^{mm}, 1^{mm}, 2^{mm} überhaupt nicht vorkommen können, so ist die Wahrscheinlichkeit für die Differenz 1^{mm}, der Bruch $\frac{209}{491} = 0{,}43$.

Wahrscheinlichkeitsrechnung als Hilfswissenschaft der Methode der kleinsten Quadrate giebt *Hagen* „Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung." 2. Aufl. Berlin 1867.

§ 110. Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler.

Um die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Beobachtungsfehler anzuwenden, muss man voraussetzen, dass die Beobachtungsfehler zufällige Ereignisse in dem Sinne sind, wie am Anfang des vorigen § 109. auseinandergesetzt wurde. (Grobe Fehler sollen ausgeschlossen sein, vgl. S. 11.)

Wir wollen weiter annehmen, man habe sich eine längere Reihe von Beobachtungsfehlern verschafft. Es ist allerdings oft schwer, wahre Beobachtungsfehler kennen zu lernen, indessen giebt es doch manche Wahrnehmungen, welche zwar nicht reine Fehler sind, aber doch völlig deren Charakter haben, z. B. die Dreieckswidersprüche von Triangulierungen (vgl. S. 12) oder die Differenzen von Doppelmessungen u. s. w.

oder man begnügt sich, statt wahrer Fehler mit scheinbaren Fehlern, z. B. den Differenzen einer grossen Zahl gleichartiger Messungen einer Grösse und deren arithmetischem Mittel (vgl. S. 23).

Wir wollen dabei annehmen, die Beobachtungen seien von einseitigen Fehlerwirkungen frei, und deswegen sei die Verteilung der Fehler nach der positiven und negativen Seite nahezu gleich.

Wenn man nun solche Fehler nach ihrer *Grösse* ordnet, so macht man die Erfahrung, dass die Verteilung derselben einem gewissen Gesetz folgt, dessen Erforschung nun unsere Aufgabe ist. Man findet, dass kleine Fehler häufiger sind als grosse, und dass namentlich um den Wert Null sich die Fehler häufen, während grössere Fehler, welche das zwei- bis dreifache des mittleren Fehlers übersteigen, sehr selten vorkommen.

Schon die geringe Zahl von 18 Beobachtungen, welche wir früher in § 7. S. 23 behandelt haben, zeigt dieses; man hat nämlich 10 positive und 8 negative Fehler; und wenn man ohne Rücksicht auf das Vorzeichen nach der Grösse ordnet, so erhält man folgende Reihe:

$$\left.\begin{matrix} 0{,}10'' & 0{,}12'' & 0{,}12'' & 0{,}13'' & 0{,}30'' & 0{,}38'' & 0{,}62'' & 0{,}83'' & 1{,}12'' \\ 1{,}13 & 1{,}17 & 1{,}27 & 1{,}38 & 1{,}63 & 1{,}71 & 2{,}09 & 2{,}63 & 4{,}62 \end{matrix}\right\} \quad (1)$$

Die Verteilung nach der Grösse giebt

zwischen	0″	und	1″	...	8	Fehler
„	1″	„	2″	...	7	„
„	2″	„	3″	...	2	„
„	3″	„	4″	...	0	„
„	4″	„	5″	...	1	„
			Summe		18	Fehler.

Es ist ganz augenscheinlich, dass kleine Fehler häufiger sind als grosse, denn z. B. zwischen 0″ und 1″ haben wir 8 Fälle, dagegen zwischen 4″ und 5″ nur 1 Fall.

Da ähnliche Erfahrungen bei allen längeren Beobachtungsreihen gemacht wurden, hat man allgemein geschlossen, dass die Häufigkeit des Vorkommens oder die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von der Grösse des Fehlers abhängig sei.

In der vorstehenden kleinen Reihe haben wir z. B. 8 Fehler zwischen 0″ und 1″, und da im Ganzen 18 Fehler vorliegen, können wir sagen, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen 0″ und 1″ sei = 8 : 18, oder indem wir alle Fehler zwischen 0″ und 1″ mit ihrem Mittelwerte 0,5″ in Rechnung nehmen, können wir näherungsweise auch sagen:

$$W\,(0{,}5'') = \frac{8}{18} = 0{,}444\ldots$$

d. h. in diesem Falle ist die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler von ungefähr 0,5″ zu begehen = 0,44 . . .

Diese Wahrscheinlichkeit ist aber offenbar nicht bloss abhängig von der Grösse des Fehlers, (in diesem Falle 0,5″), sondern auch von dem *Intervall* innerhalb dessen der Mittelwert 0,5″ gelten soll; dieses Intervall war im vorigen Falle 1″, und würde man dieses Intervall enger genommen haben, etwa halb so gross, so dass 0,5″ nur zwischen 0,25 und 0,75 gerechnet würde, so würde man nur noch 3 Fälle gefunden haben und die Wahrscheinlichkeit würde $W\,(0{,}5'') = 3 : 18$. Bei einer grossen Zahl von Fehlern und engen Intervallen wird man wohl annehmen dürfen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers *proportional* der Grösse des Intervalls ist, innerhalb dessen er gerechnet wird.

Indem wir nun das Ergebnis dieser Betrachtungen in die Formen der Analysis bringen wollen, bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε durch $W(\varepsilon)$ und da diese Wahrscheinlichkeit abhängig sein soll von der Grösse von ε, was analytisch durch eine Funktion von ε etwa $\varphi(\varepsilon)$ ausgedrückt sei, und da ferner die Wahrscheinlichkeit proportional dem Intervall sein muss, das mit $d\varepsilon$ bezeichnet sein soll, müssen wir setzen:

$$\text{Wahrscheinlichkeitsfunktion:} \quad \varphi(\varepsilon) \tag{2}$$

$$\text{Wahrscheinlichkeit:} \quad W(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{3}$$

Dieses ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε mit dem Intervall $d\varepsilon$, also z. B. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler ε liege zwischen den Grenzen

$$\varepsilon - \frac{d\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \varepsilon + \frac{d\varepsilon}{2}$$

oder auch $\varepsilon - d\varepsilon$ und ε

" " ε und $\varepsilon + d\varepsilon$.

Je enger man die Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ zusammenzieht, um so kleiner wird $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ und nimmt man $d\varepsilon$ unendlich klein, so wird auch $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ d. h. die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Fehler ε zu begehen, unendlich klein. Wir machen die Annahme, es sei $d\varepsilon$ unendlich klein, im Sinne der Differentialrechnung und damit können wir die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen irgend welchen Grenzen nach dem Satz von der Summe der Wahrscheinlichkeiten § 109. S. 424 bestimmen.

Ist nämlich die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε gegeben durch $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ und für einen Fehler ε' durch $\varphi(\varepsilon')\, d\varepsilon$, ebenso für ε'' durch $(\varphi\, \varepsilon'')\, d\varepsilon$ und denkt man sich die Fehler ε, ε', ε'' ... je mit dem Intervall $d\varepsilon$ an einander gereiht, so ist die Wahrscheinlichkeit irgend *einen* Fehler aus dieser Reihe zu treffen, gleich der Wahrscheinlichkeit, entweder den Fehler ε *oder* den Fehler ε' *oder* den Fehler ε'' u. s. f. zu treffen, d. h. nach dem Satze (2) S. 424 ist es die Summe aller dieser Einzelwahrscheinlichkeiten und endlich wenn $d\varepsilon$ unendlich klein ist, tritt an die Stelle der Summe das bestimmte Integral, und wir können daher nun sagen, die Wahrscheinlichkeit einen Fehler zwischen gegebenen Grenzen a und b zu begehen, ist:

$$W\binom{b}{a} = \int_a^b \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{5}$$

§ 111. Fehler-Wahrscheinlichkeits-Funktion.

Um zur Bestimmung der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ zu gelangen, betrachten wir zuerst die Grenzwerte von ε.

Wie schon bei der Beobachtungsreihe (1) § 110. S. 426 angegeben wurde, hat die Erfahrung gezeigt, dass kleine Fehler wahrscheinlicher sind als grössere, woraus wir schliessen, dass die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ mit $\varepsilon = 0$ ihr Maximum haben muss, d. h.:

$$\varphi(0) = \text{Maximum} \tag{1}$$