Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 108. Netzeinschaltung mit Coordinaten-Ausgleichung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

übrigen ungefähr 80 Punkte sind auf S. 411 nur noch ohne Richtungsverbindungen eingezeichnet.

All dieses (d. h. mit Ausscheidung des Stadt-Hannover schen Teiles 11) und 12)) ist von Herrn Messner in *einem* Sommer 1891 gemessen und im darauffolgenden Winter berechnet worden. Die Messung geschah mit dem Bamberg schen 14cm-Theodolit, welcher in unserem II. Bande, 4. Aufl. 1893, S. 183 abgebildet und beschrieben ist. Dasselbe hat auch einen Höhenkreis von 12cm Durchmesser, welcher nach dem Beispiele von Band II, § 138. und § 140. benützt wurde, indem in der angegebenen Zeit auch alle trigonometrischen Höhen mit gemessen und berechnet wurden.

Die Horizontalwinkelmessungen erfolgten in nur *drei* Sätzen; folgendes ist ein von Herrn Messner auf dem Lindener Wasserturm am 21. August 1891 gemessenes Beispiel:

Zielpunkt	Satz 1.	Satz 2.	Satz 3.	Mittel
Aegidius . . .	0° 0′ 0,0″	0,0″	0,0″	0° 0′ 0,0″
Ricklingen . .	66 15 14,5	12,0	14,0	66 15 13,5
Hemmingen .	77 41 29,5	26,0	28,5	77 41 28,0
Wettbergen .	125 43 4,5	4,5	5,5	125 43 4,8
Badenstedt . .	194 17 36,5	42,5	37,5	194 17 38,8

Man berechnet daraus nach dem Verfahren von S. 225 einen mittleren Fehler einer Richtung von $\pm 1,8''$.

Die Ausgleichungen der hier beschriebenen Messungen erfolgen seit 1876 nach vermittelnden Beobachtungen (vgl. S. 389) unter Reduktion aller Richtungen und Entfernungen von der wirklichen Erdoberfläche auf das ebene System rechtwinkliger konformer Coordinaten (vgl. § 63.). Es sind deswegen zu allen in Frage kommenden Richtungen stets die Reduktionen $t - T$ nach den Formeln (5) oder (6) S. 201 erforderlich, wie z. B. auf S. 375 unten eingesetzt ist. Diese $t - T$ werden mit 4stelligen Logarithmen in vorgedrucktem Schema berechnet, ebenso wie auch die Coefficienten a und b der Fehlergleichungen nach den Formeln (14)—(16) S. 329.

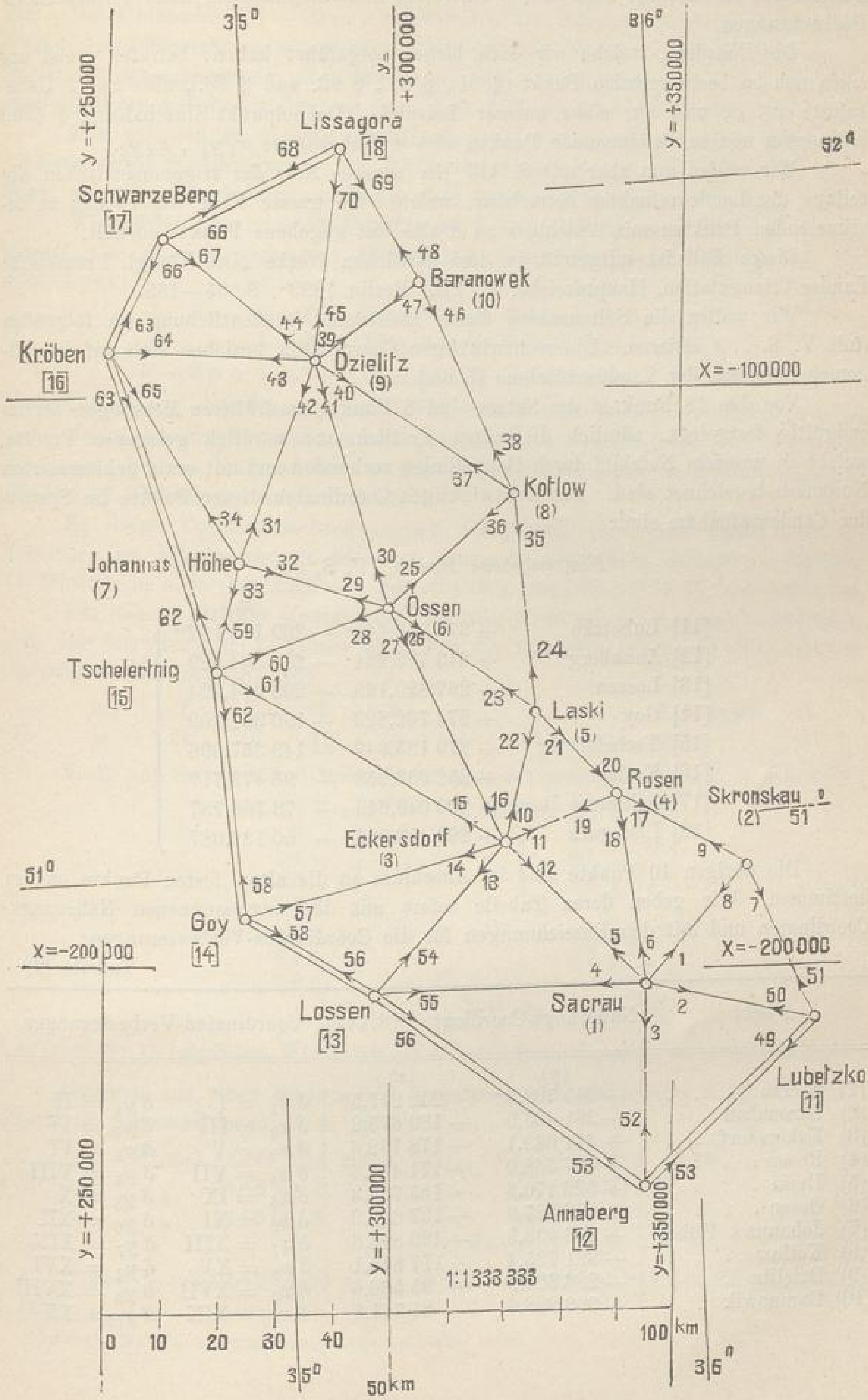
Bei einem Satze innerer Richtungen wird die Orientierungs-Unbekannte z nach der Schreiber schen Regel 3. S. 391 durch eine Summengleichung mit negativem Gewichte eliminiert. Beim Zusammenwirken von äusseren und inneren Richtungen wird nach den Schreiber schen Regeln (S. 390) den äusseren Richtungen halbes Gewicht gegeben. Mittlere Fehler werden nicht berechnet, was mit den auf S. 6—7 citierten Worten zusammenzuhängen scheint.

Ausser diesen, aus der allgemein verfügbaren Litteratur und aus den dankenswerten Mitteilungen bei unserer Teilnahme von 1891 erlangten Darstellung ist hier auch noch ein neueres Citat beizufügen aus Anweisung IX. vom 25. Okt. 1881, zweite Ausgabe 1894, S. 152—154: Allgemeine Erläuterungen zu den Veröffentlichungen der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme.

§ 108. Netz-Einschaltung mit Coordinaten-Ausgleichung.

Unter Coordinaten-Ausgleichung verstehen wir hier, wie in dem ganzen vorstehenden Kapitel III von S. 325 an, die Ausgleichungs-Aufgabe, bei welcher gemessene

Fig. 1.
*Das Schlesisch-Posen*sche *Dreiecksnetz.*



Winkel oder Richtungen als Beobachtungen und die Coordinaten trigonometrischer Punkte als unabhängige Unbekannte auftreten, mit Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen.

Die Beispiele, welche wir dazu bisher vorgeführt haben, betrafen meist nur *einen* neu zu bestimmenden Punkt (§ 91., § 92., § 93. und § 98.), also nur 2 Unbekannte x, y, und nur *eines* unserer Beispiele (Doppelpunkt-Einschaltung § 100.) hatte zwei neu zu bestimmende Punkte, also 4 Unbekannte $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$.

Wir wollen nun aber mit S. 415 ein neueres Netz der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme betrachten, welches die grosse Zahl von 10 neu zu bestimmenden Punkten mit Anschluss an 8 alte fest gegebene Punkte enthält.

Dieser Fall ist mitgeteilt in dem amtlichen Werke „Die Königl. Preussische Landes-Triangulation, Hauptdreieke, V. Teil, Berlin 1893“, S. 95—165.

Wir wollen die Seitenzahlen dieser amtlichen Veröffentlichung im folgenden (mit V. S. ...) citieren. Die rechtwinkligen Coordinaten beziehen sich auf das allgemeine System der Landesaufnahme (§ 63.).

Von den 18 Punkten des Netzes sind 8 Punkte aus früheren Messungen bereits endgültig festgelegt, nämlich diejenigen westlich und nördlich gelegenen Punkte, welche in unserem Netzbild durch Doppellinien verbunden und mit eckig geklammerten Nummern bezeichnet sind. Die rechtwinkligen Coordinaten dieser Punkte im System der Landesaufnahme sind:

Fest gegebene Punkte (*V.* S. 96)

	y	x	
[11] Lubetzko	+ 375 385,440ᵐ	— 209 143,102ᵐ	(1)
[12] Annaberg	+ 343 473,234	— 238 364,429	
[13] Lossen	+ 297 880,169	— 203 614,224	
[14] Goy	+ 274 702,823	— 190 391,109	
[15] Tschelertnig	+ 270 135,349	— 149 357,096	
[16] Kröben	+ 252 033,953	— 96 473,717	
[17] Schwarze Berg	+ 260 049,649	— 73 766,737	
[18] Lissagora	+ 290 483,939	— 60 132,087	

Die übrigen 10 Punkte sind im Anschluss an die alten festen Punkte neu zu bestimmen. Wir geben deren Tabelle sofort mit den angenommenen Näherungs-Coordinaten und mit den Bezeichnungen für die Coordinaten-Verbesserungen:

Tabelle (2)

Punkt	Näherungs-Coordinat. (*V.* S. 141)		Coordinaten-Verbesserungen	
	(y)	(x)		
(1) Sacrau . . .	+ 345 508,3ᵐ	— 202 211,5ᵐ	$\delta x_1 = \mathrm{I}$	$\delta y_1 = \mathrm{II}$
(2) Skronskau . .	+ 361 465,0	— 180 675,2	$\delta x_2 = \mathrm{III}$	$\delta y_2 = \mathrm{IV}$
(3) Eckersdorf . .	+ 311 632,1	— 178 192,6	$\delta x_3 = \mathrm{V}$	$\delta y_3 = \mathrm{VI}$
(4) Rosen	+ 337 588,0	— 171 408,6	$\delta x_4 = \mathrm{VII}$	$\delta y_4 = \mathrm{VIII}$
(5) Laski	+ 326 170,3	— 155 739,3	$\delta x_5 = \mathrm{IX}$	$\delta y_5 = \mathrm{X}$
(6) Ossen	+ 298 827,9	— 137 625,2	$\delta x_6 = \mathrm{XI}$	$\delta y_6 = \mathrm{XII}$
(7) Johannas Höhe	+ 273 033,9	— 129 893,6	$\delta x_7 = \mathrm{XIII}$	$\delta y_7 = \mathrm{XIV}$
(8) Kotlow . . .	+ 321 735,4	— 117 815,1	$\delta x_8 = \mathrm{XV}$	$\delta y_8 = \mathrm{XVI}$
(9) Dzielitz . . .	+ 286 627,9	— 95 566,6	$\delta x_9 = \mathrm{XVII}$	$\delta y_9 = \mathrm{XVIII}$
(10) Baranowik . .	+ 303 288,6	— 81 761,8	$\delta x_{10} = \mathrm{XIX}$	$\delta y_{10} = \mathrm{XX}$

Diese 10 Punkte werden bestimmt durch 76 Richtungen, welche in dem Netzbild S. 415 mit 1, 2, 3, ... 70 numeriert sind, während 76 Sichten wirklich gemessen sind. Der Unterschied 76 — 70 = 6 rührt davon her, dass auf den Festpunkten mit je 2 alten Anschlussrichtungen (auf [12]—[17]) für jeden der 2 Anschlüsse doch nur je *eine* Richtungsverbesserung eingeführt wird, was zusammenhängt mit den Stationsausgleichungen auf diesen Punkten (vgl. § 78. und Anschluss *Peer* S. 292 und S. 294).

Ehe wir nun zu unserer Coordinaten-Ausgleichung selbst gehen, welche bei 10 Neupunkten 20 Unbekannte und 20 Normalgleichungen bietet, wollen wir überlegen, wie viele Gleichungen man nach dem Correlaten-Verfahren bekommen *würde?*

Wir zählen dazu $p = 18$ Punkte und $l = 38$ Linien, beide hin und her gemessen, also $R = 76$ gemessene Richtungen. Nach den Regeln von (17) S. 176 giebt dieses:

$$l - 2p + 3 = 38 - 36 + 3 = 5 \text{ Seitengleichungen,}$$
$$l - p + 1 = 38 - 18 + 1 = 21 \text{ Dreiecksgleichungen,}$$
$$R - 3p + 4 = 76 - 54 + 4 = 26 \text{ Gleichungen im Ganzen.}$$

Dieses gilt aber für das *freie* Netz, und für die Zwangs-Anschlüsse würden noch 6 Seitengleichungen hinzukommen, so dass man im Ganzen 26 + 6 = 32 Normalgleichungen bekäme, während die Coordinaten-Ausgleichung nur 20 Gleichungen hat, also mit 12 Gleichungen im Vorteil ist.

Zu dieser Coordinaten-Ausgleichung übergehend haben wir zuerst über die Messungen im Allgemeinen zu berichten, dass dieselben nach Schreibers Methode mit Winkeln in allen Combinationen gemacht sind, wie früher in § 79. angegeben ist.

Um nahezu gleiches Gewicht für alle ausgeglichenen Richtungen zu erlangen, stellt das Schreibersche Verfahren fest, dass die Winkelmessungen in sich selbst zu wiederholen sind (nach S. 269):

bei	2	3	4	5	6	7	8 Richtungen
je	24	16	12	10	8	8	6 mal

Z. B. auf Sacrau mit 6 freien Richtungen ist gemessen (nach *V.* S. 99—100):

Winkel 1,2 8 mal	Winkel 2,3 8 mal
„ 1,3 „ „	„ 2,4 „ „
„ 1,4 „ „	„ 2,5 „ „
„ 1,5 „ „	„ 2,6 „ „
„ 1,6 „ „	
Winkel 3,4 8 mal	Winkel 4,5 8 mal
„ 3,5 „ „	„ 4,6 „ „
„ 3,6 „ „	
	Winkel 5,6 8 mal

d. h. jeder der 15 möglichen Winkel zwischen den 6 freien Strahlen ist 8 mal gemessen.

Dagegen auf einer Station mit 2 festen Anschlussstrahlen, z. B. auf [13] Lossen, ist gemessen (nach *V.* S. 129):

Winkel 54,55 16 mal	Winkel 55,56 *A* 8 mal
„ 54,56 *A* 8 „	„ 55,56 *G* 8 „
„ 54,56 *G* 8 „	
	Winkel 56 *A*, 56 *G* 0 mal

d. h. die zwei festen Strahlen 56 *A* und 56 *G* zählen wie *ein* freier Strahl (vgl. § 78. S. 267).

Die Ausgleichung wird auf einer Station mit lauter freien Strahlen in gewöhnlicher Weise gemacht (§ 77.) und auf einer Station mit 2 festen Anschlussstrahlen so, dass der Winkel zwischen diesen beiden den durch die Coordinaten bereits festgelegten Wert erhält (§ 78.). Die Festhaltung dieses Winkels bei der nachfolgenden Netzausgleichung wird einfach dadurch erzielt, dass den beiden festen Strahlen *dieselbe* Richtungsverbesserung zugeteilt wird, im Falle des vorigen Beispiels $56\,A = 56\,G$.

Die Aufstellung der Fehlergleichungen erfolgt nun im Wesentlichen gar nicht anders, als bei unserer schon in § 99. behandelten Doppelpunkt-Einschaltung, welche ja auch in dem allgemeinen Landesaufnahme-Coordinatensystem gemacht ist.

Die Coefficienten der Fehlergleichungen sind für δx und δy in Metermass, bekanntlich nach (14) S. 329, indem der Richtungswinkel statt früher φ, hier t heisst:

$$a = -\frac{\varrho}{s} \sin t \qquad b = +\frac{\varrho}{s} \cos t \tag{3}$$

und die Richtungswinkel sind nach den Formeln für $t - T$, (5) S. 201, auf die Ebene zu reduzieren. Wir wollen dieses an dem Beispiele der Richtung Sacrau-Skronskau zeigen, unter Benützung der schon oben unter (2) angegebenen Näherungs-Coordinaten dieser zwei Punkte:

	(y)	(x)
(2) Skronskau	+ 361 465,0	— 180 675,2
(1) Sacrau	+ 345 508,3	— 202 211,5
	+ 15 956,7	+ 21 536,3

log 15956,7	4.202 9430·8		4.33317
log 21536,3	4.333 1710·9	*log cos* t_1	9.90498
log tang (t_1)	9.869 7719·9	*log* s	4.42819

$$(t_1) = 36^\circ\, 32'\, 7{,}904'' \qquad s = 26803^{m} \tag{4}$$

log ϱ	5.31443		0.88624_n		0.88624
log s	4.42819	*sin* t . .	9.77474	*cos* t . .	9.90498
log $(\varrho : s)$	0.88624	a . .	0.66098_n	b . .	0.79122

$$a = -4{,}581 \qquad b = +6{,}183 \tag{5}$$

	nach (5) S. 201			
$y_2 = +361465$				
$y_2 = +361465$	$x_2 - x_1$	4.33317	$x_1 - x_2$	4.33317_n
$y_1 = +345508$	$2\,y_1 + y_2$	6.02222	$2\,y_2 + y_1$	6.02875
$y_1 = +345508$	$\varrho : 6\,r^2$	0.92622	$\varrho : 6\,r^2$	0.92622
$2\,y_1 + y_2 = 1052481$		1.28161		1.28814_n
$2\,y_2 + y_1 = 1068438$		$T_1 - t_1 = +19{,}125''$		$T_2 - t_2 = -19{,}415''$ (6)

Diese so berechneten Reduktionen $T - t$ sind etwa auf 0,01″ genau, was meist ausreicht; will man aber 0,01″ noch scharf haben, so kommt noch ein Glied 3ter Ordnung hinzu, nämlich nach einer Mitteilung von Oberst-Lieutenant von Schmidt in der „Zeitschr. f. Verm. 1894", S. 400 ist die genauere Reduktion, welche dort $U_1 - t_1$ genannt ist:

$$U_1 - t_1 = \frac{\varrho}{4\,A^2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) - \frac{\varrho}{12\,A^2}(y_2 - y_1)\,(x_2 - x_1)$$
$$- \frac{\varrho}{48\,A^4}(y_1 + y_2)^3\,(x_2 - x_1)$$

Die zwei ersten Glieder dieser Formel sind mit unserer Formel für $T_1 - t_1$ in (5) S. 201 algebraisch identisch, und das dritte Glied giebt den Coefficienten:

$$log \frac{Q}{48\,A^4} = 6.41307$$

und damit berechnet man in dem Falle unseres Beispieles Sacrau-Skronskau den Betrag $-0{,}0197''$ also zusammen auf 4 Stellen:

$$\begin{array}{rl} T_1 - t_1 = & +19{,}1248'' \\ & -\;\;0{,}0197 \\ \hline T_1 - t_1 = & +19{,}1051'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} T_2 - t_2 = & -19{,}4149'' \\ & +\;\;0{,}0197 \\ \hline T_2 - t_2 = & -19{,}3952'' \end{array}$$

Dieses $T_1 - t_1$ werden wir nachher abgerundet $= 19{,}11''$ wieder finden.

Indem man in gleicher Weise auch alle anderen $T - t$ für die Station Sacrau berechnet, bekommt man folgenden Abriss der gemessenen genähert orientierten, und dann auf die Ebene reduzierten Richtungen, nach *V.* S. 101:

Station 1. Sacrau. Tabelle (7)

Zielpunkt	Beobachtet und genähert orientiert T'	Reduktion $t - T$ $= t' - T'$	Beobachtet und auf die Ebene reduziert t'
1. Skronskau . . .	36° 32′ 28,78″	$-19{,}11''$	36° 32′ 9,67″
2. Lubetzko . . .	103 3 44,68	$+\;\;6{,}23$	103 3 50,91
3. Annaberg . . .	183 12 49,69	$+31{,}54$	183 13 21,23
4. Lossen	268 18 41,99	$+\;\;1{,}18$	268 18 43,17
5. Eckersdorf . .	305 20 30,57	$-20{,}30$	305 20 10,27
6. Rosen	345 34 17,13	$+33{,}29$	345 34 50,42
	Summen 212,84	$+32{,}83$	185,67

Diese t spielen nun die Rolle von Beobachtungen ganz von derselben Art wie z. B. die gemessenen Richtungen α in der Rückwärts-Einschneide-Ausgleichung S. 351, und indem der aus genäherten Coordinaten berechnete Richtungswinkel aus dem vorhergehenden (4) mit $(t_1) = 36°\,32'\,7{,}90''$ hinzugenommen wird, in der Bedeutung des ersten (φ) auf S. 351, haben wir auch das Absolutglied der ersten Fehlergleichung, nämlich $(t_1) - t_1 = 36°\,32'\,7{,}90'' - 36°\,32'\,9{,}67'' = -1{,}77''$. Die Coefficienten $a = -4{,}581$ und $b = +6{,}183$ dieser Fehlergleichung hat man aus dem vorhergehenden (5), man wird also nach dem Anblick des Netzbildes S. 415 diese erste Fehlergleichung alsbald so anschreiben:

$$v_1 = z - 4{,}581\,(\delta\,x_2 - \delta\,x_1) + 6{,}183\,(\delta\,y_2 - \delta\,y_1) + 1{,}77''$$

Die Orientierungs-Unbekannte z kann man natürlich auch in negativer Form, d. h. $-z$, schreiben und damit finden wir die vorstehende Fehlergleichung wieder als erste der folgenden Gruppe (nach *V.* S. 101):

Fehlergleichungen der Station Sacrau. Tabelle (8)

	z	I δx_1	III δx_2	IV δx_3	VII δx_4	II δy_1	IV δy_2	VI δy_3	VIII δy_4	l
(1)	-1	$+4{,}580$	$-4{,}580$	.	. .	$-6{,}183$	$+6{,}183$	. .	. .	$-1{,}76$
(2)	-1	$+6{,}551$	. .	. .	. .	$+1{,}520$	. .	. .	. .	$-8{,}63$
(3)	-1	$-0{,}320$	. .	. .	. .	$+5{,}686$	. .	. .	. .	$-2{,}72$
(4)	-1	$-4{,}327$	. .	. .	. .	$+0{,}127$	. .	. .	. .	$+3{,}76$
(5)	-1	$-4{,}051$	. .	$+4{,}051$	. .	$-2{,}873$	. .	$+2{,}873$	. .	$+4{,}36$
(6)	-1	$-1{,}615$	. .	. .	$+1{,}615$	$-6{,}281$	. .	. .	$+6{,}281$	$-2{,}40$
Summe	-6	$+0{,}818$	$-4{,}580$	$+4{,}051$	$+1{,}615$	$-8{,}004$	$+6{,}183$	$+2{,}873$	$+6{,}281$	$-7{,}39$

Hier hat man $4{,}580^2 + 6{,}551^2 + 0{,}320^2 + \ldots = +101{,}7361$

$+4{,}580\,(-4{,}580) = \ldots \quad -\;\;20{,}9764$

. . . .

$6{,}183^2 + 1{,}520^2 + 5{,}686^2 + \ldots = +120{,}5917$

. . . . u. s. w.

Die zugehörigen Normalgleichungen sind (in abgekürzter Schreibweise nach (3) S. 80):

Tabelle (9)

z	δx_1	δx_2	δx_3	δx_4	δy_1	δy_2	δy_3	δy_4	l
+ 6,000	− 0,818	+ 4,580	− 4,051	− 1,615	+ 8,004	− 6,183	− 2,873	− 6,281	+ 7,390
	+ 101,736	− 20,976	− 16,411	− 2,608	+ 1,053	+ 28,318	− 11,638	− 10,144	− 93,781
		+ 20,976	. .	. .	+ 28,318	− 28,318	. .	. .	+ 8,061
			+ 16,411	. .	− 11,638	. .	+ 11,638	. .	+ 17,662
				+ 2,608	− 10,144	. .	. .	+ 10,144	− 3,876
					+ 120,592	− 38,230	− 8,254	− 39,451	− 14,676
						+ 38,230	. .	. .	− 10,882
							+ 8,254	. .	+ 12,526
								+ 39,451	− 15,074
									+ 123,880

Zur Elimination von z wird einmal reduziert, wodurch man erhält (vgl. *V.* S. 101—102):

Tabelle (10)

I δx_1	III δx_2	V δx_3	VII δx_4	II δy_1	IV δy_2	VI δy_3	VIII δy_4	l
+ 101,63	− 20,36	− 16,96	− 2,83	+ 2,14	+ 27,48	− 12,03	− 11,00	− 92,77
	+ 17,47	+ 3,09	+ 1,23	+ 22,21	− 23,60	+ 2,19	+ 4,80	+ 2,42
		+ 13,67	− 1,09	− 6,24	− 4,17	+ 9,70	− 4,24	+ 22,65
			+ 2,17	− 7,99	− 1,66	− 0,77	+ 8,45	− 1,89
				+ 109,91	− 29,98	− 4,42	− 31,07	− 24,54
					+ 31,86	− 2,96	− 6,47	− 3,26
						+ 6,87	− 3,01	+ 16,06
							+ 32,87	− 7,33
								+ 114,78

Ein solches System von Stations-Normalgleichungen bzw. reduzierten Normalgleichungen, indem jeweils z eliminiert ist, bringt jede Station, und es müssen schliesslich alle diese „Beiträge zu den Normalgleichungen des Systems" gliedweise addiert werden.

Wenn wir dieses beispielshalber für die 4 ersten Unbekannten $\delta x_1 = \mathrm{I}$, $\delta x_2 = \mathrm{III}$, $\delta y_1 = \mathrm{II}$, $\delta y_2 = \mathrm{IV}$ durchführen wollen, so zeigt uns das Netzbild S. 415, dass wir dazu die Beiträge folgender Stationen brauchen: (1) = Sacrau, (2) = Skronskau, (3) = Eckerndorf, (4) = Rosen, (11) = Lubetzko, (12) = Annaberg, (13) = Lossen, d. h. wir haben:

	$\delta x_1 = \mathrm{I}$	$\delta x_2 = \mathrm{III}$	$\delta y_1 = \mathrm{II}$	$\delta y_2 = \mathrm{IV}$	
1. Sacrau (*V.* S. 101—102) . .	+ 101,63	− 20,36 + 17,47	+ 2,14 + 22,21 + 109,91	+ 27,48 − 23,60 − 29,98 + 31,86	I III II IV
2. Skronskau (*V.* S. 103) . .	+ 13,99	− 6,89 + 57,14	− 18,88 + 9,30 + 25,49	+ 14,40 + 38,32 − 19,44 + 53,21	I III II IV
3. Eckerndorf (*V.* S. 106—107)	+ 12,31		+ 8,73 + 6,19		I II
4. Rosen (*V.* S. 109)	+ 1,96	− 3,04 + 42,28	+ 7,60 − 11,79 + 29.59	− 1,18 + 16,40 − 4 57 + 6,37	I III II IV
11. Lubetzko (*V.* S. 127) . . .	+ 28,61	− 6,24 + 5,45	+ 6,64 − 1,45 + 1,54	− 12,77 + 11,15 − 2,96 + 22,80	I III II IV
12. Annaberg (*V.* S. 129) . . .	+ 0,05		− 0,91 + 16,17		I II
13. Lossen (*V.* S. 131)	+ 12,48		− 0,87 + 0,01		I II
Summe . . . . (*V.* S. 141—142)	+ 171,03	− 36,53 + 122,34	+ 4,95 + 18,27 + 188,90	+ 27,93 + 42,27 − 56,95 + 114,24	I III II IV

Die Normalgleichungen müssen daher in abgekürzter Schreibweise (nach (3) S. 80) so beginnen:

$$
\begin{array}{rrrrl}
+\underline{\underline{171,03}}\ \mathrm{I} & -\ 36,53\ \mathrm{III} & +\ \ 4,95\ \mathrm{II} & +\ 27,93\ \mathrm{IV} & +\ldots=0\\
 & +\underline{\underline{122,34}}\ \mathrm{III} & +\ 18,27\ \mathrm{II} & +\ 42,27\ \mathrm{IV} & +\ldots=0\\
 & & +\underline{\underline{188,90}}\ \mathrm{II} & -\ 56,95\ \mathrm{IV} & +\ldots=0\\
 & & & +\underline{\underline{114,24}}\ \mathrm{IV} & +\ldots=0\\
 & & & & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Diese Ordnung I, III, II, IV entspricht der Bedeutung $\mathrm{I}=\delta x_1$, $\mathrm{III}=\delta x_2$, $\mathrm{II}=\delta y_1$, $\mathrm{IV}=\delta y_2\ldots$; wenn man dagegen die Aufeinanderfolge I, II, III, IV... herstellen will, so hat man die vorstehenden Normalgleichungen so zu schreiben:

$$
\begin{array}{rrrrl}
+\underline{\underline{171,03}}\ \mathrm{I} & +\ \ 4,95\ \mathrm{II} & -\ 36,53\ \mathrm{III} & +\ 27,93\ \mathrm{IV} & +\ldots=0\\
 & +\underline{\underline{188,90}}\ \mathrm{II} & +\ 18,27\ \mathrm{III} & -\ 56,95\ \mathrm{IV} & +\ldots=0\\
 & & +\underline{\underline{122,34}}\ \mathrm{III} & +\ 42,27\ \mathrm{IV} & +\ldots=0\\
 & & & +\underline{\underline{114,24}}\ \mathrm{IV} & +\ldots=0\\
 & & & & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Dieses ist der Anfang der Normalgleichungen auf *V.* S. 141—142, deren Auflösung die 20 Unbekannten giebt (*V.* S. 143):

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\mathrm{I}=\delta x_1=+1{,}145^{\mathrm{m}} & & \mathrm{II}=\delta y_1=+0{,}710^{\mathrm{m}}\\
\mathrm{III}=\delta x_2=+1{,}997 & & \mathrm{IV}=\delta y_2=+1{,}665\\
\mathrm{V}=\delta x_3=+0{,}609 & & \mathrm{VI}=\delta y_3=+0{,}306\\
\mathrm{VII}=\delta x_4=+2{,}863 & & \mathrm{VIII}=\delta y_4=+0{,}759\\
\mathrm{IX}=\delta x_5=+0{,}828 & & \mathrm{X}=\delta y_5=+0{,}065\\
\mathrm{XI}=\delta x_6=+0{,}232 & & \mathrm{XII}=\delta y_6=-0{,}485\\
\mathrm{XIII}=\delta x_7=-0{,}291 & & \mathrm{XIV}=\delta y_7=-0{,}247\\
\mathrm{XV}=\delta x_8=+0{,}520 & & \mathrm{XVI}=\delta y_8=+0{,}421\\
\mathrm{XVII}=\delta x_9=-0{,}542 & & \mathrm{XVIII}=\delta y_9=+0{,}648\\
\mathrm{XIX}=\delta x_{10}=+0{,}097 & & \mathrm{XX}=\delta y_{10}=+0{,}852
\end{array}
\right\}\quad(11)
$$

Durch Zufügung dieser Verbesserungen zu den früher in der Tabelle (2) gegebenen Näherungswerten bekommt man folgende Tabelle der endgültigen Coordinaten:

	y	x	
1. Sacrau	+ 345 509,010ᵐ	— 202 210,355ᵐ	
2. Skronskau	+ 361 466,665	— 180 673,203	
3. Eckersdorf	+ 311 632,406	— 178 191,991	
4. Rosen	+ 337 588,759	— 171 405,737	
5. Laski	+ 326 170,365	— 155 738,472	(12)
6. Ossen	+ 298 827,415	— 137 624,968	
7. Johanna s Höhe	+ 273 033,653	— 129 893,891	
8. Kotlow	+ 321 735,821	— 117 814,580	
9. Dzielitz	+ 286 628,548	— 95 567,142	
10. Baranowek	+ 303 289,452	— 81 761,703	

Damit ist die Ausgleichung in der Hauptsache vollendet; man kann aber auch noch die ausgeglichenen Abrisse herstellen, ähnlich wie bei den einfachen Vorwärts- und Rückwärts-Einschneide-Ausgleichungen, unten auf S. 343 und 351. Wir wollen beispielshalber den ausgeglichenen Richtungswinkel (1,2) = Sacrau-Skronskau ausrechnen mit den vorstehenden endgültigen Coordinaten:

Skronskau	$+$ 361 466,665	$-$ 180 673,203
Sacrau	$+$ 345 509,010	$-$ 202 210,355
	$+$ 15 957,655	$+$ 21 537,152

log 15957,655	4.202 9690·7
log 21537,152	4.333 1882·7
log tang t	9.869 7808·0

$$t_1 = 36^\circ\ 32'\ 9{,}906'' \tag{13}$$

Dieses entspricht dem früheren beobachteten $t' = 36^\circ\,32'\,9{,}67''$ in (7) S. 419.

Wenn man alle diese ausgeglichenen t ausrechnet, so bekommt man für jede Station eine Vergleichung wie beispielshalber im Nachfolgenden für die erste Station Sacrau:

Station Sacrau:

Zielpunkt	Beobachtet nach (7) S. 419 t'	Ausgeglichen t	$t - t'$ $= V$	$V - z$ $= v$
1. Skronskau .	36° 32′ 9,67″	36° 32′ 9,91″	$+$ 0,24″	$-$ 0,05″
2. Lubetzko . .	103 3 50,91	103 3 50,86	$-$ 0,05	$-$ 0,34
3. Annaberg .	183 13 21,23	183 13 22,18	$+$ 0,95	$+$ 0,66
4. Lossen. . .	268 18 43,17	268 17 42,06	$-$ 1,11	$-$ 1,40
5. Eckersdorf .	305 20 10,27	305 20 11,32	$+$ 1,05	$+$ 0,76
6. Rosen . . .	345 34 50,42	345 34 51,10	$+$ 0,68	$+$ 0,39
	Summen 185,67	187,43	$+$ 1,76	$+$ 0,02
	Mittel		$z = +$ 0,29	

dieses entspricht der ersten Gruppe von *V.* S. 144.

Wenn man auch die $T - t$ von S. 419 wieder zufügt, so bekommt man den endgültigen Abriss:

Station Sacrau:

Zielpunkt	Beobachtet $t' + (T - t) + z$ $= T'$	Ausgeglichen $t + (T - t)$ $= T$	$T - T'$ $= v$
1. Skronskau .	36° 32′ 29,07″	36° 32′ 29,02″	$-$ 0,05″
2. Lubetzko . .	103 3 44,97	103 3 44,63	$-$ 0,34
3. Annaberg . .	183 12 49,98	183 12 50,64	$+$ 0,66
4. Lossen. . .	268 18 42,28	268 18 40,88	$-$ 1,40
5. Eckersdorf .	305 20 30,86	305 20 31,62	$+$ 0,76
6. Rosen . . .	345 34 17,42	345 34 17,81	$+$ 0,39
	214,58	214,60	$+$ 0,02

Dieses entspricht dem Abrisse der Station Sacrau in *V.* S. 147, wo auch noch die Meridianconvergenz $- 3^\circ\,48'\,1{,}30''$ und *log S* hinzugefügt sind.

(Bei Rosen haben wir 345° 34′, während in *V.* S. 147, wie es scheint, infolge Druckfehlers, 345° 35′ steht.)

In gleicher Weise, wie für die Station Sacrau giebt das amtliche Werk „Königl.

Preuss. Landestriangulation, V. Teil, Berlin 1893", aus welchem wir in S. 95—165 das Vorstehende entlehnt haben, auch für alle anderen Stationen die Abrisse auf S. 147 u. ff. Dieses Schlesisch-Posensche Dreiecksnetz ist eines der elegantesten Beispiele für Netzeinschaltung mit Coordinaten-Ausgleichung, welche von General Schreiber etwa seit 1876 bei der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme eingeführt worden ist.

Wenn man solche mehrpunktige Coordinaten-Ausgleichung auch in einem Soldnerschen Coordinatensystem, etwa in einem der 40 preussischen Kataster-Systeme ausführen will, so bleibt im Wesentlichen die Anordnung bestehen, nur sind die Reduktionen $t - T$ im Soldnerschen System umständlicher zu bestimmen als im conformen System (vgl. S. 206); beschränkt man sich aber auf geringe Ausdehnung, III. Ordnung (etwa wie in § 99. S. 374), so würden in mässigem Abstand von der Haupt-Achse des Systems die $t - T$ verschwindend klein und damit die Coordinaten-Ausgleichung sehr bequem, nämlich mit der im vorstehenden § 108. vorgetragenen übereinstimmend, wenn man nur alle $t - T$ gleich Null setzt.

Kapitel IV.

Theorie der Fehlerwahrscheinlichkeit.

§ 109. Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit zufälligen Ereignissen, d. h. mit Ereignissen, deren Ursachen im einzelnen Falle unbekannt sind. Solche Ereignisse sind z. B. das Ziehen aus einer Urne, das Fallen eines Würfels, bei Versicherungsanstalten das Eintreten eines Brandfalles oder eines Todesfalles, in der Methode der kleinsten Quadrate das Vorkommen eines Beobachtungsfehlers.

Wenn die Ursachen solcher Ereignisse auch nicht gänzlich unbekannt sind, so wird diesen Ursachen doch im einzelnen Falle nicht weiter nachgeforscht, wenn es sich um Wahrscheinlichkeitsrechnung handelt.

Mathematische Wahrscheinlichkeit.

Die *Wahrscheinlichkeit* w eines Ereignisses ist das Verhältnis der Anzahl der dem Ereignis günstigen Fälle zu der Anzahl der überhaupt möglichen Fälle.

Z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit einem gewöhnlichen Würfel die Zahl 6 zu werfen, ist $= 1 : 6$, weil 1 Fall günstig und 6 Fälle möglich sind.

Die mathematische Wahrscheinlichkeit ist immer ein echter Bruch, mit den Grenzen *Null* für Unmöglichkeit, und *Eins* für Gewissheit.

Wenn man im Stande ist, die möglichen und die günstigen Fälle abzuzählen, so kann man hiernach immer die mathematische Wahrscheinlichkeit angeben. Wir fragen z. B. nach der Wahrscheinlichkeit, mit 2 gewöhnlichen Würfeln die Augensumme $= 7$ zu werfen; dazu überlegen wir, dass 36 Fälle überhaupt möglich sind, weil zu jedem Fall des einen Würfels 6 Fälle des anderen Würfels hinzukommen