Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 97. Innere und äussere Richtungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

während in (31) das Schlussglied, ausführlich geschrieben, ist:

$$[l\,l\,.\,1] = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - \frac{1}{r}(l_4 + l_5)^2 = [l\,l\,.\,1] \qquad (m_1) \quad (36)$$

Es ist also $[l\,l\,.\,1]$ grösser als $[l'\,l']$, und zwar um den Betrag $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$, welcher nach Analogie von (27) gleich $(s-1)\,m^2$ zu achten ist. Es wird also nun für die beiden Fälle von (35) und (36):

$$m_1^2 = \frac{[l\,l\,.\,1]}{s' + s - u} \qquad m_2^2 = \frac{[l'\,l']}{s' - (u-1)} \qquad (37)$$

weil im ersten Fall die Zahl der Unbekannten δx, δy, $\delta x'$, $\delta y'$ nebst z, $= 5$, allgemein $= u$, und im zweiten Fall die Zahl der Unbekannten δx, δy, $\delta x'$, $\delta y'$, ohne z, $= 4$, allgemein $= u - 1$ ist.

Zur besseren Vergleichung kann man schreiben:

$$m_1^2 = \frac{[l\,l\,.\,1]}{s' + s - u} \qquad m_2^2 = \frac{[l\,l\,.\,1] - (s-1)\,m^2}{s' + s - u - (s-1)} \qquad (38)$$

Die Formeln für m_1^2 und m_2^2 sind hiernach insofern gleichberechtigt, als nicht gesagt werden kann, dass im allgemeinen m_1 grösser oder kleiner als m_2 würde. Es ist aber m_1^2 die schärfere Formel, weil sie *alle* Proben, auch $l_1\ l_2\ l_3$, mit enthält, während m_2 nur l_4 und l_5 enthält.

Wenn man zum Schluss auch noch z selbst bestimmen will, so hat man dazu die erste Normalgleichung (29), d. h. $[v] = 0$, oder:

$$0 = [v] = r\,z + a\,\delta x + b\,\delta y + a'\,\delta x' + b'\,\delta y' + [l]$$

Hiebei ist nach (28):

$$v_4 - z = a\,\delta x + b\,\delta y + l_4$$
$$v_5 - z = a'\,\delta x' + b'\,\delta y' + l_5$$
$$[l] = l_4 + l_5$$

also $0 = r\,z + (v_4 - z) + (v_5 - z)$.

Nach (28) und (32) kann man hiefür schreiben:

$$0 = r\,z + v'_4 + v'_5$$

also $z = -\dfrac{v'_4 + v'_5}{r}$ allgemein $= -\dfrac{[v']}{r}$ (39)

Dabei ist $[v']$ die Summe der v' für alle freien Strahlen, und $r = s + s'$ die Anzahl aller Strahlen.

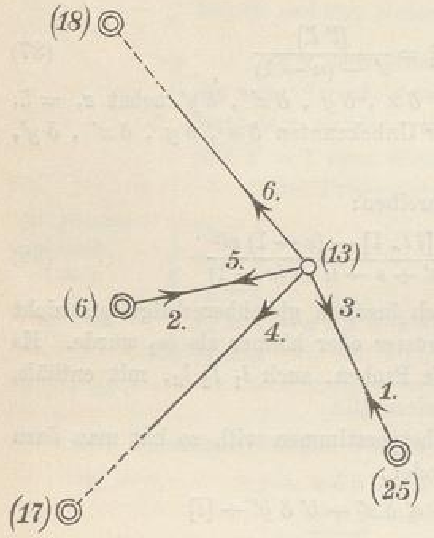
Wir wiederholen, dass diese Betrachtungen von (19)—(39) nicht für die laufende Praxis bestimmt sind, dass sie aber zur klaren Begriffsbestimmung bei Unterscheidung zwischen mehr oder weniger strenger oder genäherter Behandlung von Ausgleichungsaufgaben dienen.

§ 97. Innere und äussere Richtungen.

Wenn ein neuer Punkt gegen andere fest gegebene Punkte durch Einschneiden bestimmt werden soll, so hat man, nach dem bisherigen, zwei Arten von Messungen zu unterscheiden, erstens solche, welche auf den gegebenen Punkten als Standpunkten, Sichtstrahlen nach dem neuen Punkte geben, und zweitens solche Messungen, welche auf dem neuen Punkte als Standpunkt gemacht, Sichtstrahlen von dem neuen Punkte nach den alten Punkten liefern. Diesen beiden Arten von Messungen entsprechend unterscheidet man *„äussere Richtungen"* und *„innere Richtungen"*.

Z. B. in Fig. 1. haben wir:

Fig. 1.
1 : 30 000.



(18) , (6) , (17) , (25) alte fest gegebene Punkte, (13) ein neuer durch Einschneiden zu bestimmender Punkt. Folglich sind:

1. und 2. äussere Richtungen,
3. 4. 5. 6. innere Richtungen.

Die äussere Richtung 1. kann z. B. dadurch bestimmt sein, dass mit der Verbindung (25) (17) der Winkel (17) (25) (13) gemessen wurde, ähnlich wie β_1 , β_2 , oder β_3 in Fig. 1. S. 335, oder die Richtung 2. kann erhalten worden sein durch Anschluss an die *zwei* festen Richtungen (6) , (18) und (6) , (17).

In welcher Weise die zwei äusseren Richtungen 1. und 2. erhalten worden sind, ist aus Fig. 1. nicht zu ersehen, es ist absichtlich nur angedeutet, dass 1. und 2. äussere Richtungen sind, über deren Herkunft nichts weiter gesagt wird.

Nach all den Betrachtungen von § 96. wissen wir, dass die äusseren Richtungen im Allgemeinen *verschiedene Gewichte* haben, ganz unabhängig von der Messungs-Genauigkeit selbst, nämlich verschiedene Gewichte nach Massgabe des mehr oder weniger innigen Anschlusses an vorhandene alte feste Strahlen, und im Allgemeinen muss man annehmen, dass eine äussere Richtung ein *kleineres* Gewicht hat als eine völlig freie innere Richtung.

Ohne die mathematische Hilfe (nach § 96.) kann man dieses durch reine Anschauung verständlich machen: In Fig. 1. sei der Winkel (17) (25) (13) gemessen, oder es seien die zwei Richtungen (25) (17) und (25) (13) eingeschnitten, welche beide mit Fehlern etwa $\pm m$ und $\pm m$ behaftet sind; wenn aber (25) (17) als fehlerfreier Anschluss behandelt wird, so werden eben dadurch die beiden Fehler $\pm m$ und $\pm m$ auf die *eine* Richtung (25) (13) geworfen, welche deshalb den Fehler $\pm m \pm m = m\sqrt{2}$ oder das Gewicht $= \frac{1}{2}$ erhält.

Dieses stimmt auch mit der Theorie (15) S. 361 des vorigen § 96. und wenn wir auch noch die dort in (18) S. 361 behandelte Nebenfrage der Anschlussstrahlenfehler selbst hinzunehmen, welche bei 2 gegebenen Strahlen ebenfalls das Gewicht $\frac{1}{2}$ für den neuen Strahl liefert, wollen wir nun als Näherungs-Regel für die laufende Praxis annehmen:

$$\text{Gewicht einer äusseren Richtung, } p = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

wobei das Gewicht einer inneren Richtung $= 1$ gesetzt ist.

Wenn diese Regel (1) auch etwas grob erscheinen sollte, so ist doch kaum etwas anderes möglich, und jedenfalls ist die Regel $p = \frac{1}{2}$ besser als ein anderes vorkommendes rundes Verfahren, wornach die äusseren und inneren Richtungen alle *gleiches* Gewicht $= 1$ erhalten sollen.

Ein Hauptgrund aber für die Regel $p = \frac{1}{2}$ liegt uns noch in der Anwendung auf den allereinfachsten Fall des Vorwärts- und Rückwärts-Einschneidens, nämlich in der Bestimmung eines Punktes aus *einem* geschlossenen Dreiecke, etwa $A\,B\,P$, wo $A\,B$ die Basis und P der neue Punkt ist. Wenn hier alle drei Winkel, welche α, β, γ heissen sollen, gemessen sind, so besteht (nach S. 31 oder S. 128) die einfachste Ausgleichung darin, dass man den Widerspruch $\alpha + \beta + \gamma - 180°$ auf die drei Winkel zu *gleichen* Beträgen umlegt und dann mit den so ausgeglichenen Winkeln den Punkt P berechnet.

Wenn man andererseits nach Fehlergleichungen mit Einschneiden ausgleicht und den äusseren Richtungen *halbes* Gewicht giebt, so erhält man denselben Punkt P, wie nach dem vorigen Verfahren, würde man aber den äusseren Richtungen ganzes Gewicht geben, so erhielte man den ersten Punkt *nicht*.

Dieser (in unserer vorigen Auflage S. 179 ausgesprochene) Satz ist zwar nach dem vorhergehenden an sich klar, kann aber (wegen erhobener Bedenken) auch leicht direkt bewiesen werden. — Wir wollen ein Zahlenbeispiel dafür ansetzen:

In unserem II. Bande, 4. Aufl. 1893, S. 251 ist ein Dreieck $A\,B\,P$ berechnet aus den Coordinaten der Basispunkte A und B und den 3 Winkeln α, β, γ, deren Summe $= 180°\ 0'\ 12''$, also um $12''$ zu gross ist. Legt man diese $12''$ auf die 3 Winkel zu gleichen Beträgen um, so erhält man Coordinaten von P, welche wir nun als Näherungswerte für eine Einschneideausgleichung annehmen wollen. Es entstehen folgende Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll}\text{Äussere Richtung} & A\,P\,, & v_1 = \quad\; - 5\,\delta x + 8\,\delta y + 4 \\ \quad\text{"}\qquad\text{"} & B\,P\,, & v_2 = \quad\; + 9\,\delta x + 11\,\delta y - 4 \\ \text{Innere Richtung} & P\,B\,, & v_3 = z + 9\,\delta x + 11\,\delta y - 0 \\ \quad\text{"}\qquad\text{"} & P\,A\,, & v_4 = z - 5\,\delta x + 8\,\delta y - 4 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Wenn man in üblicher Weise z durch Mittelbildung eliminiert, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} V_3 = + 7\,\delta x + 1{,}5\,\delta y + 2 \\ V_4 = - 7\,\delta x - 1{,}5\,\delta y - 2 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Wenn man diese 2 Gleichungen mit den Gleichungen für v_1 und v_2 so zusammen nimmt, dass v_1 und v_2 die Gewichte $= \frac{1}{2}$ und V_3 und V_4 die Gewichte $= 1$ erhalten, so werden die beiden Absolutglieder:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,l] = -\frac{20}{2} - \frac{36}{2} + 14 + 14 = 0 \\[2ex] [b\,l] = +\frac{32}{2} - \frac{44}{2} + 3{,}0 + 3{,}0 = 0 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

und damit werden auch notwendig $\delta x = 0$ und $\delta y = 0$, d. h. die Winkelausgleichung von Band II, 1893, S. 251 giebt solche Coordinaten, welche als Näherungs-Coordinaten einer Einschneide-Ausgleichung mit $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ und $p_3 = p_4 = 1$ keine weiteren Änderungen mehr erleiden. Was hier an einem Zahlenbeispiele gezeigt wurde, kann ohne neuen Gedanken, auch in algebraischen Formeln geschrieben werden.

Bei einem Näherungsverfahren für allgemeine schwierige Fälle ist es immer ein wichtiges Kriterium, ob in einem besonderen leicht lösbaren Falle das allgemeine Verfahren mit der besonderen Lösung sich deckt; dieses findet hier statt; die allgemeine Regel des halben Gewichtes für äussere Strahlen deckt sich mit der üblichen Winkelfehlerverteilung in einem einzelnen Dreiecke, wie es sein muss.

Für die Gewichtsbemessung der äusseren Richtungen mit $p = \frac{1}{2}$ ist auch eine Autorität anzuführen, welche 1876 zuerst solche Ausgleichungen amtlich in grossem Massstabe ausführen liess, nämlich General *Schreiber*, damals Chef der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme. Die Schreiber schen Regeln, welche erstmals veröffentlicht wurden in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen 1882", S. 157—160, und die auch in unserem späteren § 103. berichtet werden werden, enthalten Gewichtsbestimmungen, welche auf den einfachen Fall des Vorwärts- und Rückwärts-Einschneidens von *einem* Punkte gegen beliebig viele Festpunkte angewendet, gar nichts anderes sagen als in anderer Form: die äusseren Richtungen sollen *halbes* Gewicht erhalten im Vergleich mit den inneren Richtungen.

Nachdem so über äussere Richtungen das Nötige gesagt ist, wollen wir über innere Richtungen auch zusammenfassend das bemerken, was nach § 93.—94. hierher gehört:

Die inneren Richtungen haben die Eigentümlichkeit, dass ihre Fehlergleichungen immer eine Orientierungs-Unbekannte z enthalten, welche jedoch eliminiert werden kann, ehe die Zusammenwirkung mit äusseren Richtungen stattfindet. Wenn die inneren Richtungen nicht alle in *einem* Satze zusammen gemessen, sondern in mehr als einen Satz zerlegt sind, so müsste man eigentlich streng genommen für jeden Satz ein besonderes z einführen, was zu vielen Weitläufigkeiten führen würde. (Vgl. S. 187 zusammengeschobene Sätze.) In der Praxis der Triangulierung III.—IV. Ordnung wird man mehrere solche Sätze einfach zusammenschieben und wie einen Satz mit einem z weiter behandeln.

Gegenseitige Richtungen.

Hat man zwei Gegen-Richtungen gemessen, wie in Fig. 2. angedeutet ist, so bestehen zwei Fehlergleichungen, deren Coefficienten a, b einander gleich, deren Absolutglieder l aber verschieden sind.

Nach § 89. haben wir für einen Richtungswinkel φ und eine Entfernung s:

Fig. 2.

$$d\varphi = -\left(\frac{\sin\varphi}{s}\varrho\right)\delta x + \left(\frac{\cos\varphi}{s}\varrho\right)\delta y$$

oder mit $\varphi = \varphi_1$:

$$d\varphi_1 = -\left(\frac{\sin\varphi_1}{s}\varrho\right)\delta x + \left(\frac{\cos\varphi_1}{s}\varrho\right)\delta y \qquad (5)$$

dabei sind δx und δy die Verschiebungen an dem Punkte, welcher in Fig. 2. mit $x\,y$ bezeichnet ist, und für φ_1 als Zielpunkt gilt.

Wenn man umgekehrt $x\,y$ als Standpunkt gelten lässt, so giebt Fig. 2.:

$$d\varphi_2 = +\left(\frac{\sin\varphi_2}{s}\varrho\right)\delta x - \left(\frac{\cos\varphi_2}{s}\varrho\right)\delta y \qquad (6)$$

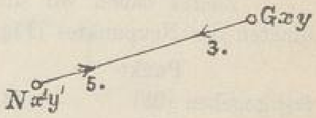
da nun $\varphi_1 = \varphi_2 \pm 180°$, also $\sin\varphi_1 = -\sin\varphi_2$ und auch $\cos\varphi_1 = -\cos\varphi_1$ ist, so sind die Coefficienten der Gleichungen (5) und (6) einander gleich, und die Fehlergleichungen für die beiden Richtungen 1. und 2. in Fig. 2. haben folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= z_1 + a\,\delta x + b\,\delta y + l_1 \\ v_2 &= z_2 + a\,\delta x + b\,\delta y + l_2 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Folgendes ist ein Zahlenbeispiel hiezu mit Fig. 3. Die Punkte N und G haben folgende Näherungs-Coordinaten:

N $(y) = +134\,119{,}50^m$ $(x) = +137\,285{,}40^m$
G $(y') = +141\,871{,}60$ $(x') = +144\,754{,}40$

Fig. 3.



Hieraus die genäherten Richtungswinkel (φ), in *ebener* Rechnung:

$(NG) = (\varphi_5) = 42°\ 6'\ 50{,}78''$ $(GN) = (\varphi_3) = 221°\ 6'\ 50{,}78''$
Gemessen: $\alpha_5 = 42\ \ 6\ \ 29{,}30$ $\alpha_3 = 222\ \ 6\ \ 31{,}17$
also: $l_5 = +21{,}48''$ $l_3 = +19{,}61$

Die Entfernung ist $NG = 10{,}069^{km}$ ($log\ NG = 4.0029694$ in Metern).

Die Coefficienten a und b werden für δx und δy in Metern:

$$a = -13{,}73 \qquad b = +15{,}20$$

Beide Punkte N und G sollen Verschiebungen erleiden, nämlich $\delta x'$, $\delta y'$ für N und δx, δy für G, und daraus folgen die Fehlergleichungen:

$$v_5 = z_n - 13{,}73\,(\delta x - \delta x') + 15{,}20\,(\delta y - \delta y') + 21{,}48''$$
$$v_3 = z_g + 13{,}73\,(\delta x' - \delta x) - 15{,}20\,(\delta y' - \delta y) + 19{,}61''$$

oder

$$v_3 = z_g - 13{,}73\,(\delta x - \delta x') + 15{,}20\,(\delta y - \delta y') + 19{,}61''$$

Die gleichnamigen Coefficienten in v_5 und v_3 sind gleich.

Wir wollen hieran auch noch eine, für nächste Zwecke nicht erforderliche, Betrachtung anstellen, von ähnlicher Art, wie im zweiten Teile von § 96.

Die Unbekannten z_1 und z_2 in (7) kann man jedenfalls eliminieren, und sei es, dass dabei Gewichtsänderungen auftreten, oder auch, wenn die obigen Gleichungen ursprünglich schon verschiedene Gewichte haben sollten, kommen wir nun zu der Betrachtung zweier Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= a x + b y + l_1 \qquad \text{Gewicht} = p_1 \\ V_2 &= a x + b y + l_2 \qquad\quad\ \text{„} \quad\ = p_2 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Diese beiden Gleichungen können je nach ihrem Zusammenhang mit anderen Ausgleichungs-Elementen verschieden weiter behandelt werden.

Die zu (8) gehörigen Normalgleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} \underline{(p_1+p_2)\,a^2\,x} + (p_1+p_2)\,a\,b\,y + (p_1\,a\,l_1 + p_2\,a\,l_2) &= 0 \\ \underline{(p_1+p_2)\,b^2\,y} + (p_1\,b\,l_1 + p_2\,b\,l_2) &= 0 \\ + \underline{\underline{(p_1\,l_1^2 + p_2\,l_2^2)}} & \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Denkt man sich andererseits *eine* Fehlergleichung:

$$V = a\,x + b\,y + \frac{p_1\,l_1 + p_2\,l_2}{p_1 + p_2} \text{ mit dem Gewicht} = p_1 + p_2, \qquad (10)$$

so erhält man dieselben Coefficienten wie in (9), das Fehlerquadratglied wird aber nach (10) anders, nämlich:

$$\frac{(p_1\,l_1 + p_2\,l_2)^2}{p_1 + p_2} \qquad (11)$$

Die Rechnung mit dem Schlussglied von (9) ist schärfer als die Rechnung mit der Summe (11), weil es immer besser ist, die Fehler einzeln zu benützen, statt sie zusammenzufassen. Die Zusammenfassung der zwei Gleichungen (8) in eine Gleichug (10) bietet auch wenig rechnerische Vorteile, dagegen den Nachteil, dass die Stationsgruppen gestört werden. Wir ziehen daher die Einzelbehandlung zweier Gleichungen von der Form (7) oder (8) im allgemeinen der Zusammenfassung (10) vor.

§ 98. Combiniertes Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden.

Nachdem wir in § 91. bis § 92. das Vorwärts-Einschneiden und in § 93. das Rückwärts-Einschneiden je für sich kennen gelernt haben, und nachdem im vorigen § 97. auch die dazu erforderlichen Gewichts-Verhältnisse erörtert worden sind, wird