Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 90. Verschiedene Hilfsmittel zur Bestimmung der Richtungs-Coefficienten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

oder weil $\varrho = 206\,265$ für Sekunden alter Teilung ist:

$$-20{,}6265\, sin\, \varrho = \mathfrak{x} \qquad +20{,}6265\, cos\, \varphi = \mathfrak{y} \tag{20}$$

Versteht man dann unter S die Entfernung in Kilometern, also $S = s : 1000$, so wird:

$$\left.\begin{array}{c} a = \dfrac{\mathfrak{x}}{S} \qquad b = \dfrac{\mathfrak{y}}{S} \\ \text{für } dx \text{ und } dy \text{ in Decimetern , } S \text{ in Kilometern.} \end{array}\right\} \tag{21}$$

§ 90. Verschiedene Hilfsmittel zur Bestimmung der Richtungs-Coefficienten.

Die Richtungs-Coefficienten, welche man bei ausgedehnten Ausgleichungsrechnungen immer braucht, sind nach (18) des vorigen § 89. für $d\,x$ und $d\,y$ in *Decimetern:*

$$a = -\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s}\, sin\, \varphi \qquad b = +\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s}\, cos\, \varphi \tag{1}$$

oder

$$a = -\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s^2}\, \Delta y \qquad b = +\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s^2}\, \Delta x \tag{2}$$

oder mit Vorbereitung für die Entfernung S in Kilometern:

$$\text{für alte Teilung: } \mathfrak{x} = -20{,}6265\, sin\, \varphi \qquad \mathfrak{y} = +20{,}6265\, cos\, \varphi \tag{3}$$

$$\text{für neue Teilung: } \mathfrak{x} = -63{,}6620\, sin\, \varphi \qquad \mathfrak{y} = +63{,}6620\, cos\, \varphi \tag{4}$$

$$a = \frac{\mathfrak{x}}{S} \qquad b = \frac{\mathfrak{y}}{S} \qquad (S \text{ in Kilometern}) \tag{5}$$

Man kann diese a und b auf verschiedenen Wegen bestimmen, wie wir nun darlegen wollen:

I. Logarithmische Rechnung.

Das einfachste und nächstliegende Mittel, um diese Coefficienten zu bestimmen, ist die Ausrechnung mit 4—5 stelligen Logarithmen im Anschluss an die logarithmische Rechnung von φ und s selbst. Z. B.:

$$\left.\begin{array}{llll}
P & y = -2784{,}96^{m} & x = +\ 8326{,}92^{m} & \\
P_1 & y_1 = -1761{,}11 & x_1 = +10825{,}29 & \\
 & y - y_1 = -1023{,}85 & x - x_1 = -\ 2498{,}37 & \\
 & \quad = \Delta y & \quad = \Delta x & \\
log\, \Delta y & 3.010226_{n} & 3.010226 & 3.397657 \\
log\, \Delta x & 3.397657_{n} & 9.578860 & 9.966291 \\
log\, tang\, \varphi & 9.612569 & 3.431366 & log\, s \quad 3.431366 \\
 & & & log\, s^2 \quad 6.862732 \\
 & & s = 2700{,}12^{m} & \\
 & \varphi = 202^\circ\, 17'\, 1{,}3'' & S = 2{,}70^{km} &
\end{array}\right\} \tag{6}$$

Dieses ist die gewöhnliche Berechnung von φ und s, an welche sich nun die Berechnung von a und b mit 4 stelligen Logarithmen anschliesst, in aller Ausführlichkeit geschrieben:

$$\left.\begin{array}{rl|rl}
log - \dfrac{\varrho}{10} & 4.3144_{n} & log + \dfrac{\varrho}{10} & 4.3144 \\
log\,(1:s) & 6.5686 & log\,(1:s) & 6.5686 \\
log\, sin\, \varphi & 9.5789_{n} & log\, cos\, \varphi & 9.9663_{n} \\
log\, a & 0.4619 & log\, b & 0{,}8493_{n} \\
a = +\,2{,}897 & & b = -\,7{,}068 &
\end{array}\right\} \tag{7}$$

oder nach den Formeln (2) S. 330:

$$\left.\begin{array}{r|l@{\qquad}r|l}
\log -\frac{\varrho}{10} & 4.3144_n & \log +\frac{\varrho}{10} & 4.3144 \\
\log(1:s^2) & 3.1373 & \log(1:s^2) & 3.1373 \\
\log \Delta y & 3.0102_n & \log \Delta x & 3.3977_n \\
\hline
\log a & 0.4619 & \log b & 0.8494_n \\
\multicolumn{2}{c}{a = +2{,}897} & \multicolumn{2}{c}{b = -7{,}068}
\end{array}\right\} \qquad (8)$$

In Hinsicht auf die Vorzeichen merkt man sich ein für allemal, dass a das entgegengesetzte Vorzeichen von Δy und b dasselbe Vorzeichen mit Δx hat. (Für *Vorwärts*-Einschneiden Fig. 3. § 89. S. 328.)

Für erste Einführung in die trigonometrischen Einschneid-Ausgleichungen wird man diese logarithmische Rechnung der Coefficienten a und b immer nehmen, und erst wenn im übrigen eine gewisse Rechengewandtheit erlangt ist, lohnt es sich, auch die anderen Verfahren, die wir nachher unter II—VI beschreiben, auch kennen zu lernen und kritisch zu vergleichen.

II. Als zweites Hilfsmittel haben wir Hilfstafeln der Funktionen (3) und (4) berechnet und in unserem Anhange Seite [8]—[17] zusammengestellt. Z. B. für $\varphi = 202° 17'$ haben wir auf Seite [9] des Anhangs zunächst ganz roh (nur 202°):

$$\mathfrak{x} = +7{,}7 \qquad \mathfrak{y} = -19{,}2$$

oder etwas schärfer auf Seite [10] für rund 202° 20′ statt 202° 17′:

$$\mathfrak{x} = +7{,}8 \qquad \mathfrak{y} = -19{,}1$$

oder mit Interpolation mit 202° 17′:

$$\mathfrak{x} = +7{,}82 \qquad \mathfrak{y} = -19{,}09$$

dann für $S = 2{,}70^{km}$ mit dem Rechenschieber dividiert:

$$a = +\frac{7{,}82}{2{,}70} = +2{,}90 \qquad b = -\frac{19{,}09}{2{,}70} = -7{,}07 \qquad (9)$$

Ähnlich auch für *neue* Teilung:

$$202° 17' = 224^g 76^c \qquad S = 2{,}70^{km}$$

nach S. [16]: $\mathfrak{x} = +24{,}14 \qquad \mathfrak{y} = -58{,}91$

$$a = +\frac{24{,}14}{2{,}70} = +8{,}9 \qquad b = -\frac{58{,}91}{2{,}70} = -21{,}8 \qquad (10)$$

Diese letzteren a und b entstehen auch aus (9) durch Multiplikation mit 3,09 oder Division mit 0,324, weil 1″ alte Teilung = $3{,}09^{cc}$ neue Teilung oder $1^{cc} = 0{,}324''$. Die Divisionen mit $S = 2{,}70$ bei (9) und (10) macht man mit dem Rechenschieber.

Was die hiebei nötigen Entfernungen s (oder S in Kilom.) betrifft, so nehmen wir dieselben gewöhnlich kurzer Hand aus dem Netzbilde der Triangulierung, welches für Stadttriangulierung in 1 : 10000 aufgetragen, hiezu vollauf genügt, aber auch in kleinerem Massstabe noch ausreicht. Auch rechnen wir die s nebenher 4 stellig logarithmisch, was immer noch erheblich weniger Mühe macht, als die a und b selbst logarithmisch auszurechnen.

Es besteht noch ein Grund zur Bevorzugung dieses Verfahrens II, nämlich die Einführung der *Entfernungen* s in das Ausgleichungsformular (§ 92. und § 93.). Diese Entfernungen s sind nämlich, auch abgesehen von ihrer Verwendung zur Ermittlung der Coefficienten a und b, auch deswegen in dem Ausgleichungsformular erwünscht, weil sie zur Aufklärung und Beurteilung der Fehlerverteilung dienen. Wird z. B. der eine oder andere übrig bleibende Fehler v besonders gross, so wird man sich alsbald beruhigen, wenn er zu einem kleinen s gehört. Ein einziger Blick auf die Columne der s genügt oft zur Charakterisierung des ganzen Falles, z. B. alle Entfernungen s kleiner als 1 Kilometer ist ein Fall niederster Ordnung, in welchem erhebliche v viel eher zu dulden sind als in einer Ausgleichung mit s zwischen 1^{km} und 5^{km} u. s. w.

Kurz aus allen diesen Gründen ziehen wir eine Berechnungsart der a und b vor, welche von selbst auch die Entfernungen s in das Ausgleichungsformular hinein bringt.

III. Logarithmische Differenzen führen auch zu den Coefficienten a und b, wie folgendes Beispiel im Anschluss an (6) zeigen mag:

			logarithm. Tafel-Differenzen
$\Delta y = -1023{,}85$	$log\, \Delta y$	3.010226_n	$b)$ 43· für $0{,}1^m$
$\Delta x = -2498{,}37$	$log\, \Delta x$	3.397657_n	$a)$ 17· „ $0{,}1^m$
	$log\, tang\, \varphi$	9.612569	6·0 für 1″

$$\varphi = 202^\circ\, 17'\, 1''$$

Nun sieht man sofort, ohne alle Theorie, dass eine Änderung $d\,y$ von $0{,}1^m$ sich logarithmisch durch $0{,}000043 = 43\cdot$ und eine Änderung $d\,\varphi = 1''$ sich durch 6·0 ausdrückt, dass also $d\,y = 0{,}1^m$ den Wert $d\,\varphi = \frac{43}{6{,}0} = 7{,}1''$ und eine Änderung $d\,x = 0{,}1^m$ den Wert $\frac{17}{6{,}0} = 2{,}8$ bringen muss. Dieses sind aber gerade die gesuchten b und a, zunächst ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, und dann nach der Vorzeichenregel, welche bei (8) angegeben wurde:

$$a = +\frac{17}{6{,}0} = +2{,}8 \qquad b = -\frac{43}{6{,}0} = -7{,}2 \tag{11}$$

Diese Divisionen macht man mit dem Rechenschieber.

Diese Werte (11) stimmen mit (9) so nahe überein, als es möglich ist, wenn die Hauptrechnung für φ und s mit 6stelligen Logarithmen geführt wird. Würde man die Hauptrechnung 7stellig machen, so würden auch die Coefficienten a und b um eine Stelle genauer werden.

In Formeln drückt sich dieses Verfahren so aus:

$$a = -\frac{d\, log\, \Delta x}{d\, log\, tang\, \varphi} \qquad b = +\frac{d\, log\, \Delta y}{d\, log\, tang\, \varphi} \tag{12}$$

wobei die Tafeldifferenzen mit $d\, log \ldots$ bezeichnet sind, wo aber die Vorzeichen wohl zu beachten sind, z. B. oben $\Delta y = -1023{,}85$ giebt $d\, log\, \Delta y = -43\cdot$ u. s. w. Am besten rechnet man übrigens bei diesem Verfahren zunächst ohne Rücksicht auf die Vorzeichen und setzt letztere erst nachher nach der Regel an, welche oben bei (8) angegeben wurde.

IV. Hilfstafel für $\varrho\, sin\, \varphi\, cos\, \varphi$. Diese Funktion ist der Gegenstand von „Logarithmische Hilfstafel zur Berechnung der Fehlergleichungs-Coefficienten beim Einschneiden nach der M. d. kl. Q. von *O. Seiffert*, Halle 1892“ (Zeitschr. f. Verm. 1893, S. 221). Es wird hier gesetzt:

$$a = -\frac{sin\, \varphi\, cos\, \varphi}{\Delta x}\, \varrho \qquad b = +\frac{sin\, \varphi\, cos\, \varphi}{\Delta y}\, \varrho$$

was offenbar mit dem früheren (1) oder (2) gleichbedeutend ist (vorbehältlich des Faktors 0,1), und nun wird die Funktion herausgehoben:

$$\varrho \sin \varphi \cos = Z \tag{13}$$

also dann

$$a = -\frac{Z}{\Delta x} \qquad b = -\frac{Z}{\Delta y} \tag{14}$$

Aus Seifferts Tafel, welche von 1′ zu 1′ und teilweise noch enger geht, haben wir einen kurzen Auszug gebildet und auf Seite [18] des Anhangs zusammengestellt mit Zufügung einer weiteren Funktion B, nämlich:

$$A = \frac{\varrho}{10} \sin \varphi \cos \varphi \text{ und } B = \frac{\varrho^2}{100} \sin \varphi \cos \varphi \tag{15}$$

indem $\log A$ und $\log B$ von 1° zu 1° bis 360° durchlaufend dargestellt ist. Man hat also dann:

$$a = -\frac{A}{\Delta x} \qquad b = +\frac{A}{\Delta y} \quad , \quad a\,b = -\frac{B}{s^2}$$

Z. B. für unser vorstehendes Beispiel mit $\varphi = 202°$ rund haben wir (zunächst ohne Rücksicht auf das Vorzeichen):

Tafel *S.* [18]	$\log A$	3.8552	$\log A$	3.8552	$\log B$	8.1696
	$\log \Delta x$	3.3977	$\log \Delta y$	3.0102	$\log s^2$	6.8627
	$\log a$	0.4575	$\log b$	0.8450	$\log a\,b$	1.3069
	$a = 2{,}9$		$b = 7{,}0$		$a\,b = 20{,}3$	

Die Vorzeichen von a und b bestimmt man nach der bei (8) angegebenen Regel, und zu $a\,b$ merkt man sich, dass es für φ im 1. und 3. Quadranten negativ, im 2. und 4. Quadranten positiv ist. Darnach wird:

$$a = +\,2{,}9 \qquad b = -\,7{,}0 \qquad a\,b = -\,20{,}3$$

Wir haben dieses Verfahren zuweilen zur Kontrolle *neben* anderen Verfahren angewendet, namentlich z. B. die $a\,b$ hiernach besonders berechnet, nachdem bereits die a und die b für sich schon anderwärts ermittelt waren und $a\,b$ als Produkt aus a und b bereits vorlag, so dass also durch ab auch nochmals a und b selbst kontrolliert werden.

V. Massstäbe zur Bestimmung der Faktoren a—d für die Normalgleichungen bei trigonometrischen Ausgleichungsrechnungen u. s. w., entworfen durch den Kgl. Landmesser *Seyfert*, Abteilungsvorsteher im geodät. technischen Bureau der K. Generalkommission für Schlesien zu Breslau. Diese Massstäbe bestehen aus verschiedenen Strahlenbüscheln mit Querlinien, aus welchen nach Art der „Isoplethen" die Richtungs-Coefficienten a und b entnommen werden. Über die Theorie giebt ein Bericht in der „Zeitschr. f. Verm. 1893", S. 219—221, Auskunft.

VI. Graphische Tafel von *Franke*, mitgeteilt in dessen Schrift: „Coordinaten-Ausgleichung nach Näherungsmethoden, München 1884, S. 133—135 mit lithographierter Tafel im Anhang. Diese Tafel giebt in Isoplethenform die Funktionen $\frac{\varrho \sin \varphi}{10\,S}$ und $-\frac{\varrho \cos \varphi}{10\,S}$, wobei mit φ im Richtungswinkel und mit S in der Strahlenlänge eines Radial-Systems eingegangen und die Funktionen als rechtwinklige Coordinaten abgenommen werden.

VII. Rechenschieber von Voigt. Auf Veranlassung und Erfindung von W. Voigt in Flatow ist von Dennert und Pape eine besondere Teilung an der Rückseite der

„Zunge“ des gewöhnlichen Rechenschieberstabes angebracht worden, mit deren Hilfe die Funktionen a und b entsprechend den Gleichungen (13) und (14) abgeschoben werden können. Weiteres hierüber, Gebrauchsanweisung und Genauigkeit, giebt Voigt in der „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 183—188.

Versuchen wir alle diese Verfahrungsarten zur Bestimmung der Richtungs-Coefficienten a und b zu vergleichen, so gebührt der unmittelbaren Ausrechnung mit 4—5stelligen Logarithmen der Vorzug bei allen wichtigen Fällen, z. B. I.—II. Ordnung, und auch im ersten Unterricht ist nichts anderes zu raten.

Dagegen bei glattem Betriebe zahlreicher Ausgleichungen III.—IV. Ordnung ist die logarithmische Ausrechnung der vielen a und b zu mühsam; hier haben wir mit den Hilfstafeln S. [8]—[17] die besten Erfahrungen gemacht, wobei die s aus dem Netzbilde der Triangulierung entnommen und die $\mathfrak{x} : s$ und $\mathfrak{y} : s$ mit dem Rechenschieber abgeschoben werden.

Die Methode der logarithmischen Differenzen (III im vorstehenden) wird viel gerühmt, aber sie hat für uns den Übelstand, dass man die logarithmischen Differenzen für $\varDelta x$ und $\varDelta y$ nicht kurzer Hand aus der Logarithmentafel herausschreiben kann, sondern jedesmal die *Stellung des Kommas* besonders überlegen muss. Auch ist man bei der scharfen Ausrechnung der Näherungen (φ) durch die Nebenrücksicht auf die a und b unangenehm gehindert. Im Vergleich mit der glatten Rechnung mit den Diff. für 10″, welche wir auf S. 180 bei Triangulierungsnetzen kennen gelernt haben, ist die Rechnung mit den log. Diff. bei Einschneideausgleichungen viel weniger nützlich.

Die *Seiffert*sche und ähnliche Hilfstafeln (Verfahren IV im vorstehenden) haben wir zu Kontrollrechnungen nützlich gefunden.

Die verschiedenen graphischen Hilfsmittel, und der Voigtsche Rechenschieber, werden zur Abwechslung in dem tötenden Einerlei der Rechenarbeit empfohlen.

Dass das Bedürfnis solcher Hilfsmittel besteht, wird durch die zahlreichen Erfindungen und Vorschläge auf diesem Gebiete bewiesen; die richtige Auswahl unter denselben zu treffen, wird den Erfahrungen und dem Gutdünken des einzelnen Rechners überlassen bleiben.

§ 91. Vorwärtseinschneiden mit drei Winkeln.

Als einfachsten Fall des Vorwärtseinschneidens mit Ausgleichung betrachten wir im Anschluss an Fig. 1. S. 335 Folgendes:

Es sind 3 Punkte P_1, P_2, P_3 durch ihre rechtwinkligen Coordinaten fest gegeben und ein neuer Punkt P soll durch Winkelmessungen auf P_1, P_2 und P_3 bestimmt werden, z. B. durch Messung des Winkels $A\,P_1\,P_2 = \beta_1$, dann $P_1\,P_2\,B = \beta_2$ und $P_2\,P_3\,C = \beta_3$.

Wenn nur *zwei* von diesen Winkeln β gemessen wären, so wäre der neue Punkt P eindeutig bestimmt, und seine Coordinaten könnten nach bekannten einfachen Regeln sofort endgültig berechnet werden.

Wenn dagegen noch ein dritter Winkel β gemessen ist, so liegt eine Ausgleichungsaufgabe vor, welche wir nun durchführen werden.

Durch die 3 gemessenen Brechungswinkel β sind im Anschluss an die festen Linien $P_1\,P_2$ und $P_2\,P_3$ nach dem neuen Punkte P 3 Strahlen $P_1\,A$, $P_2\,B$ und $P_3\,C$ bestimmt, welche sich aber wegen der Beobachtungsfehler nicht in *einem* Punkte P schneiden, sondern ein fehlerzeigendes Dreieck $A\,B\,C$ bilden werden.