Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 86. Ergänzungen zur Theorie der Stations-Ausgleichungen weiter behandelt werden; jedoch ist für die Frage der Bequemlichkeit der Elimination auch diese Reihenfolge nicht gleichgültig.

Wir wollen das kleine Beispiel (15)—(16) im Vorstehenden S. 311 nochmals vornehmen und nun die Bedingungsgleichungen so umstellen:

$$\begin{array}{l}
+v_1 \quad . \; . \quad . \; . \quad . \; . \quad . \; . \quad +v_6 \quad +v_7 \quad +v_8 \quad -3=0 \\
+v_1 \quad +v_2 \quad +v_3 \quad . \; . \quad . \; . \quad . \; . \quad . \; . \quad +v_8 \quad -1=0 \\
. \; . \quad . \; . \quad . \; . +v_4 \quad +v_5 \quad +v_6 \quad +v_7 \quad . \; . \quad -6=0 \\
+0{,}108\,v_1 - 2{,}525\,v_2 \; . \; . \; . \; . + 2{,}525\,v_5 - 0{,}108\,v_6 + 0{,}500\,v_7 - 0{,}500\,v_8 - 3{,}425 = 0
\end{array}$$

Die zugehörigen Normalgleichungen werden in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{r}
+\underline{4{,}000\,k_1} + 2{,}000\,k_2 + 2{,}000\,k_3 \quad . \; . \quad -3{,}000 = 0 \\
+\underline{4{,}000\,k_2} \quad . \; . \quad - \; 2{,}917\,k_4 - 1{,}000 = 0 \\
+\underline{4{,}000\,k_3} + \; 2{,}917\,k_4 - 6{,}000 = 0 \\
+\underline{13{,}275\,k_4} - 3{,}425 = 0
\end{array}\right\} \quad (34)$$

Dieses sind *dieselben* Gleichungen wie (16) S. 311, nur in anderer Ordnung, welche insofern etwas bequemer ist, als die frühere Ordnung, weil zu Anfang nur ganze Zahlen 4, 2 u. s. w. als Coefficienten vorkommen.

Die Elimination in dieser neuen Ordnung giebt:

$$k_1 = -0{,}2500 \quad , \quad k_2 = +0{,}3567 \quad , \quad k_3 = +1{,}6430 \quad , \quad k_4 = -0{,}0252$$

Dieses stimmt im Wesentlichen mit dem früheren k in (17) S. 311; das neue $k_4 = -0{,}0252$ entspricht dem früheren $k_1 = -0{,}0245$ und zwar ist nun 0,0252 etwas weniger genau, weil bei der Elimination in der neuen, bequemeren Ordnung am Ende zu wenig Wertstellen übrig geblieben sind. Es ist das ein Beispiel dafür, dass die Bequemlichkeit mit den ganzen Zahlen 4, 2, 2 ... am Anfange noch nicht allein ausschlaggebend ist. Man muss immer darnach trachten, die Quotienten der ersten Reduktionen, nämlich $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}, \frac{[a\,c]}{[a\,a]}$ u. s. w. möglichst *klein* zu haben, und namentlich ist zu vermeiden, dass ein solcher Quotient grösser als 1 werde, weil dadurch auch die Abrundungsunsicherheiten vergrössert übertragen würden. Zur Vergleichung von verschiedenen Eliminationsformen dieser Art können dienen das Hannoversche Fünfeck mit Normalgleichungen S. 193 und das frühere Lindener Sechseck in Handb. II. Band, 3. Aufl. 1893, S. 291.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1875“, S. 411 hat Koppe zu einer Auflösung von 34 Normalgleichungen seiner Gotthardtriangulierung zwei Tabellen, Beilage A und Beilage B gegeben, von denen die erste eine unbequeme Ordnung und die zweite eine günstigere und zwar solche Reihenfolge hat, dass die vollen Glieder möglichst zusammenstehen, in der Nähe der Diagonale der quadratischen Glieder zusammengedrängt.

Auch in der Triangulierungsausgleichung von Nagel (vgl. das Citat von S. 307) mit Auflösung von 159 Gleichungen sind die Normalgleichungen S. 579—604 so geordnet, dass in der Nähe der Diagonale der quadratischen Glieder die Glieder voll, und entfernt davon die Glieder leer sind.

§ 86. Ergänzungen zur Theorie der Stationsausgleichungen.

Zum Schluss des Kapitels über Ausgleichung von Triangulierungs-Netzen haben sich noch einige Bemerkungen ergeben, welche die Stationsausgleichungen von § 69. bis 71., 75. bis 77. und 82. zusammen betreffen.

I. Ausrechnung der einzelnen z und v.

In der Näherungsausgleichung von § 69. S. 228 wird darauf ausgegangen, die Richtungsverbesserungen v sowohl nach Sätzen als auch nach Sichten geordnet (nach Linien und nach Spalten auf S. 228 geordnet) auf die Summen Null zu bringen, und wir wollen mit der Theorie von § 71. zeigen, dass dieses streng der Fall sein muss, d. h. dass nach der Stationsausgleichung in jedem einzelnen Satze $[v_s] = 0$ und für jede Sicht $[v^s] = 0$ sein muss.

Hiezu haben wir aus den Gleichungen (8) S. 235 durch Summierung der 3 ersten und dann der 3 letzten Gleichungen:

$$[p_1] z_1 + \qquad [p_2] z_2 + \qquad [p_3] z_3 + [p'] x' + [p''] x'' + [p'''] x''' - [l] = 0$$
$$([p_1] - p_1{}^\circ) z_1 + ([p_2] - p_2{}^\circ) z_2 + ([p_3] - p_3{}^\circ) z_3 + [p'] x' + [p''] x'' + [p'''] x''' - ([l] - [l^\circ]) = 0$$

Diese beiden Gleichungen zusammen geben:

$$p_1{}^\circ z_1 + p_2{}^\circ z_2 + p_3{}^\circ z_3 + [l^\circ] = 0 \tag{1}$$

Wenn man alle Sätze *einzeln* zählt, so sind die p° alle $= 1$, und man kann dann kurz so schreiben:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots = -[l^\circ] \tag{2}$$

wobei die l° die Beobachtungswerte der ersten Richtung z. B. Kalleninken auf S. 238, sind. Diese l° kann man aber bekanntlich alle gleich Null machen, indem man jeden Satz mit $0^\circ\ 0'\ 0''$ in der fraglichen Richtung beginnen lässt, und dann stellt sich (2) noch kürzer so dar:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots = 0 \quad \text{oder} \quad [z] = 0 \tag{3}$$

Dann ist nach S. (234) in der ersten Kolumne von (4):

$$[v^\circ] = [z] - [l^\circ] = 0 \tag{4}$$

und in der zweiten Kolumne von (4) S. 234 hat man:

$$[v'] = p_1' z_1 + p_2' z_2 + p_3' z_3 + \ldots + [p'] x' - [l'] \tag{5}$$

dieses ist aber gleich Null wegen der 4. Gleichung in (8) S. 235, und ebenso ist es auch mit $[v'']$, $[v''']$ u. s. w., d. h. wir haben nun gezeigt, dass die v nach Kolumnen addiert in allen Richtungen die Summen Null geben müssen.

Aber auch die Summierung nach Linien giebt dasselbe, z. B. die erste Linie in (4) S. 234 giebt:

$$[v_1] = [p_1] z_1 + p_1' x' + p_1'' x'' + p_1''' x''' + \ldots - [l_1]$$

dieses ist gleich Null wegen der ersten Gleichung von (8) S. 235. Wir haben also nun beispielshalber bei 3 Sätzen mit 4 Zielpunkten:

$$\left.\begin{array}{cccc|c}
v_1{}^\circ & v_1' & v_1'' & v_1''' & [v_1] = 0 \\
v_2{}^\circ & v_2' & v_2'' & v_2''' & [v_2] = 0 \\
v_3{}^\circ & v_3' & v_3'' & v_3''' & [v_3] = 0 \\
\hline
[v^\circ] = 0 & [v'] = 0 & [v''] = 0 & [v'''] = 0 & [v\ ] = 0
\end{array}\right\} \tag{6}$$

Allerdings haben wir hier zunächst angenommen, dass alle $l^\circ = 0$ seien, allein wenn dieses auch nicht der Fall sein sollte, so braucht man nur $l' - l^\circ$ an Stelle von l' u. s. w. zu setzen, und alles bleibt dann wie im Vorstehenden.

Wir wissen also nun aus (6) ganz allgemein, dass die Fehlersummierung $[v] = 0$ nach Linien und nach Kolumnen, welche bei vollen Sätzen, in IV. S. 225 selbstverständlich war, auch bei beliebig verteilten lückenhaften Sätzen nach der Ausgleichung immer stattfinden muss, und dass also auch eine Näherungsausgleichung nach S. 228

als abgeschlossen und mit der strengen Ausgleichung hinreichend übereinstimmend zu betrachten ist, sobald jene Summen $[v] = 0$ nach Linien und Kolumnen genügend stimmen.

Die einzelnen Satzverschiebungen z hat man aus (9) S. 235:

$$z_1 = \frac{[l_1]}{[p_1]} - \frac{p_1{}' x' + p_1{}'' x'' + p_1{}''' x'''}{[p_1]} = L_1 - x_1$$

$$z_2 = \frac{[l_2]}{[p_2]} - \frac{p_2{}' x' + p_2{}'' x'' + p_2{}''' x'''}{[p_2]} = L_2 - x_2$$

$$z_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots L_3 - x_3$$

Die hier mit L und x abgesondert bezeichneten Teile sind erstens die Satzmittel L und zweitens die auf die betreffenden Sätze entfallenden Beträge x von den x', x'', x''' ...

Das Zahlenbeispiel Nidden S. 238 mit $x' = +2{,}205''$ und $x'' = +3{,}085''$ giebt für die 12 ersten Sätze:

$$x_1 = x_2 = \ldots x_{12} = \frac{x''}{2} = +1{,}542'',$$

für die folgenden Sätze:

$$x_{13} = x_{14} = \ldots x_{31} = \frac{x'}{2} = +1{,}102''$$

und

$$x_{32} = x_{33} = \ldots x_{43} = \frac{x' + x''}{3} = +1{,}763''$$

Die Ausrechnung der z selbst wird nach S. 238 so:

Num.	l^0	l'	l''	$[l]$	L	$-x$	$L - x = z$
1	0,00	..	5,00	5,00	2,500	— 1,542	+0,958
2	0,00	..	5,75	5,75	2,875	— 1,542	+1,333
3	0,00	..	5,50	5,50	2,750	— 1,542	+1,208
4	0,00	..	7,00	7,00	3,500	— 1,542	+1,958
5	0,00	..	2,00	2,00	1,000	— 1,542	—0,542
..	..	..	..	..	..	..	..
12	..	..	..	..	..	..	..
Summen	..	..	37,25	37,25	18,625	—18,504	+0,121
1	0,00	4,25	..	4,25	2,125	— 1,102	+1,023
2	0,00	3,00	..	3,00	1,500	— 1,102	+0,398
..	..	..	..	..	..	..	..
19	..	..	..	..	..	..	..
Summen	0,00	48,50	..	48,50	24,250	—20,938	+3,312
1	0,00	0,00	2,75	2,75	0,917	— 1,763	—0,846
2	0,00	3,50	2,75	6,25	2,083	— 1,763	+0,320
..	..	..	..	..	..	..	..
12	..	..	..	..	..	..	..
Summen	0,00	19,75	33,50	53,25	17,750	—21,156	—3,406

Die Summe aller z ist $+0,121+3,312-3,406=+0,027$, was in diesem Falle hinreichend mit Null stimmt. Diese so berechneten z bringt man als Satzverschiebungen an allen Richtungsbeobachtungen an, worauf die Vergleichung mit den ausgeglichenen x' x'' auch alsbald alle v geben muss. Wir wollen dieses nur noch kurz andeuten:

Verschobene Sätze			$v = x - (l - z)$			$v^{\circ 2}$	v'^2	v''^2	
$l^\circ - z$	$l' - z$	$l'' - z$	v°	v'	v''				
$-0,958$	. .	$+4,042$	$+0,958$	. .	$-0,957$	0,92	. .	0,92	
$-1,333$	. .	$+4,417$	$+1,333$	. .	$-1,332$	1,78	. .	1,78	
$-1,208$	. .	$+4,292$	$+1,208$	. .	$-1,207$	1,46	. .	1,46	
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	
			Summe der ersten Gruppe			12,45	. .	12,45	
			" " zweiten "			11,81	11,81	. .	$[v\,v]$
			" " dritten "			6,43	8,65	6,46	=
						30,69	20,46	18,91	70,06

Die Gesamtsumme $[v\,v]=70,06$ stimmt hinreichend mit 70,18 oder rund 70,2 von S. 237 und S. 239. (Vgl. hiezu S. 239 im Kleingedruckten.)

Der mittlere Fehler einer Richtungsmessung ist auf S. 239 bereits berechnet mit dem Nenner 98—45, wo $98=[p^\circ]+[p']+[p'']$ ist, und der Abzug 45 sich aus den 43 einzelnen z nebst x' und x'' erklärt. Um auch für jede der 3 *einzelnen* Sichten einen solchen mittleren Fehler zu berechnen, wollen wir die Verteilung der Abzüge so machen: die Abzüge für die z in den einzelnen Richtungen entsprechen den Abzügen bei (aa), (bb) in (11) S. 236:

$$\left.\begin{aligned}
[p^\circ]-\ldots &= 43-\frac{12}{2}-\frac{19}{2}-\frac{12}{3}=43-19,5=23,5\\
[p']-\ldots &= 31-\,.\,.\;\;\frac{19}{2}-\frac{12}{3}=31-13,5=17,5\\
[p'']-\ldots &= 24-\frac{12}{2}\;\;.\,.-\frac{12}{3}=24-10,0=14,0
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

Für Winkelausgleichung kommt nun noch -2 wegen x' und x'' hinzu, und man hat dann den Abzug $43+2$, wie auf S. 239. Wenn wir aber nach Richtungen abtrennen wollen, so gelten 3 Richtungen als Unbekannte, aber dafür wieder *ein* z als willkürlich, und daraus folgen die Nenner:

$$\left.\begin{aligned}
N^\circ &= 43-1-19,5+0,333=22,833\\
N' &= 31-1-13,5+0,333=16,833\\
N'' &= 24-1-10,0+0,333=13,333\\
&\text{Summe}\quad 52,999=53
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Wenn man mit diesen Nennern und den im Vorhergehenden ausgerechneten v^2 die mittleren Fehler für die 3 einzelnen Sichten ausrechnet, so erhält man (vgl. S. 238):

$$\left.\begin{array}{ccc}
\text{Kalleninken} & \text{Gilge} & \text{Lattenwalde}\\
m^\circ=\sqrt{\dfrac{30,69}{22,833}} & m'=\sqrt{\dfrac{20,46}{16,833}} & m''=\sqrt{\dfrac{18,91}{13,333}}\\
=\pm 1,16'' & =\pm 1,10'' & =\pm 1,19''
\end{array}\right\}\tag{9}$$

Für alle 3 Sichten zusammen ist (wie schon auf S. 239 angegeben ist):

$$m = \sqrt{\frac{70{,}06}{53}} = \pm 1{,}15'' \tag{10}$$

Man kann auch m^2 aus den Einzelwerten $m^{\circ 2}$, m'^2 und m''^2 so zusammgesetzt denken (wie immer in solchen Fällen):

$$m^2 = \frac{N^\circ\, m^{\circ 2} + N'\, m'^2 + N''\, m''^2}{N^\circ + N' + N''}$$

Die in (9) gemachte Zerlegung des mittleren Fehlers in die Teilfehler für die einzelnen Richtungen kann von praktischem Werte sein zur Untersuchung, ob infolge verschiedener Zielschärfe, verschiedene Arten der Signalisierung, Beleuchtung u. s. w. den einzelnen Richtungen verschiedene Gewichte zuzuteilen wären, abgesehen von der Verknüpfung der Sätze unter sich. (Weiteres hiezu s. S. 322—323.)

II. Stations-Ausgleichung in Richtungsform.

Um die Bessel sche Stationsausgleichung von § 71., welche bei s Strahlen $s-1$ *Winkel* als Unbekannte hat, auf s *Richtungen* zu reduzieren, kann man nach der allgemeinen Theorie von § 81. die Summen der Normalgleichungs-Coefficienten bilden, wie in (7)—(9) S. 278 an einem Beispiele gezeigt ist.

Um dieses auf § 71. anzuwenden, wollen wir zuerst für die Coefficienten $(a\,a)$. $(a\,b)$ u. s. w. auf S. 236 noch besondere Teilbezeichnungen einführen:

$$\left.\begin{array}{lll} (a\,a) = [p'] - [g'] \;, & (a\,b) = -[h'_{,,}] \;, & (a\,c) = -[h'_{,,,}] \\ & (b\,b) = [p''] - [g''] \;, & (b\,c) = -[h''_{,,,}] \\ & & (c\,c) = [p'''] - [g'''] \end{array}\right\} \tag{11}$$

Dabei sind mit g und h gewisse, aus den Gruppierungen der Sätze folgende Zahlen bezeichnet, deren Bildungsgesetze aus S. 236 und S. 237 leicht zu erkennen sind.

Wenn ein Normalgleichungs-System (10) S. 235 vorliegt mit 3 Winkeln x', x'', x''', so kann man nach § 81. daraus ein System für 4 Richtungen $x^\circ\, x'\, x''\, x'''$ bilden in dieser Weise:

$$\left.\begin{array}{r} \underline{(A\,A)\,x^\circ} + (A\,a)\,x' + (A\,b)\,x'' + (A\,c)\,x''' + (A\,l) = 0 \\ \underline{(a\;a)\,x'} + (a\;b)\,x'' + (a\;c)\,x''' + (a\;l) = 0 \\ \underline{(b\;b)\,x''} + (b\;c)\,x''' + (b\;l) = 0 \\ \underline{(c\;c)\,x'''} + (c\;l) = 0 \end{array}\right\} \tag{12}$$

Dabei muss sein:

$$\left.\begin{array}{l} (A\,A) + (A\,a) + (A\,b) + (A\,c) = 0 \\ (A\;a) + (a\;a) + (a\;b) + (a\;c) = 0 \\ (A\;b) + (a\;b) + (b\;b) + (b\;c) = 0 \\ (A\;c) + (a\;c) + (b\;c) + (c\;c) = 0 \end{array}\right\} \tag{13}$$

Diese Beziehungen sind durch § 81. bewiesen; man kann sie aber auch unmittelbar aus (11) nachweisen. Die $(A\,A)$ u. s. w. werden nach demselben Gesetze gebildet wie die $(a\,a)$ u. s. w., z. B. ist:

$$(A\,A) = [p^\circ] - [g^\circ] \;,\quad (A\,a) = -[h^\circ_{,}] \;,\quad (A\,b) = -[h^\circ_{,,}] \text{ u. s. w.}$$

Wenn man dann die Bedeutungen der g und h verfolgt, so findet man bald:

$$\left.\begin{array}{l} [g^\circ] + [h^\circ_{,}] + [h^\circ_{,,}] + [h^\circ_{,,,}] = [p^\circ] \\ [g'] + [h'_{\circ}] + [h'_{,,}] + [h'_{,,,}] = [p'] \\ [g''] + [h''_{\circ}] + [h''_{,}] + [h''_{,,,}] = [p''] \end{array}\right\} \tag{14}$$

Auch im Übrigen braucht man nur eine Art Abzählung, ohne weitere Theorie, um die Gültigkeit der Gleichungen (13) und (12) unmittelbar einzusehen.

Praktischen Wert haben die Gleichungen (12) insofern zunächst nicht, als sie keine eindeutige Auflösung zulassen, man könnte sie zur Auflösung nach x°, x', x'', x''', etwa durch fortgesetztes Probieren benützen, wie schon Gerling mit solchen Gleichungen gethan hat.

Insofern die Summen $[g]$ und $[h]$ im Allgemeinen *kleiner* sind, als die $[p]$, kann man daran denken, die $(A\,A)$, $(a\,a)$, $(b\,b)$ u. s. w. als genäherte *Richtungsgewichte* in dem Sinne von § 82. anzunehmen, also z. B.:

$$\text{Richtungsgewicht}\quad P^\circ = (A\,A) = [p^\circ] - [g^\circ]$$

$$\text{S. 238:}\quad P^\circ = 43 - \frac{12}{2} - \frac{19}{2} - \frac{12}{3} = 23{,}5$$

Dabei ist $[p^\circ] = 43$ die auf S. 258 erwähnte „Anschnittszahl", und wenn man die $(A\,A)$, $(a\,a)$ u. s. w. als genäherte Richtungsgewichte nehmen wollte, so wäre damit ausgesprochen, dass die Richtungsgewichte im Allgemeinen *kleiner* als die Anschnittszahlen sein müssen, was nicht behauptet werden kann, denn nach S. 258 u. 259 sind die richtigen Richtungsgewichte teils kleiner, teils grösser als die Anschnittszahlen, ja die richtigen Richtungsgewichte können sogar unendlich werden, wie auf S. 259 gezeigt wurde und nachher noch besonders behandelt werden soll.

Auch manche andere Überlegungen mehr theoretischer Art führen dazu, dass die $(A\,A)$, $(a\,a)$ u. s. w., welche sich aus einer Gruppe von Sätzen stets rasch abzählen lassen würden, als genäherte Richtungsgewichte im Allgemeinen nicht eignen, und als erste rohe Näherungen für Richtungsgewichte bleiben also die Anschnittszahlen.

Wir haben das Beispiel von S. 228 mit 4 Sichten, welches dort in 3 Stufen genähert ausgeglichen ist, auch noch streng ausgeglichen, und dann die mittleren Richtungsfehler nach dem Verfahren von (7)—(9) getrennt behandelt und mit den Anschnittszahlen als theoretischen Gewichten zusammengenommen, worauf eine Vergleichung zwischen solcher Näherungsrechnung und strenger Rechnung möglich wird.

Was zunächst die strenge Ausgleichung von S. 228 betrifft, so zeigt sich, wie zu erwarten war, sehr nahe Übereinstimmung mit der Stufe III. von S. 229, und ausserdem die Gewichts-Coefficienten:

$$\begin{array}{lll} [\alpha\,\alpha] = 0{,}299 & [\alpha\,\beta] = 0{,}098 & [\alpha\,\gamma] = 0{,}081 \\ & [\beta\,\beta] = 0{,}263 & [\beta\,\gamma] = 0{,}092 \\ & & [\gamma\,\gamma] = 0{,}348 \end{array}$$

Mit Zuziehung des Gewichtseinheitsfehlers $m = \sqrt{\dfrac{17{,}97}{15}} = 1{,}09''$ oder rund $= 1{,}1''$ wurden damit die mittleren Fehler der 6 ausgeglichenen *Winkel* (nach den Formeln (1) S. 284 mit $[\alpha\,\alpha] = Q_{22}$, $[\alpha\,\beta] = Q_{23}$ u. s. w.) berechnet:

$$\left.\begin{array}{lll} \pm 0{,}60'' & \pm 0{,}56'' & \pm 0{,}65'' \\ & \pm 0{,}66'' & \pm 0{,}76'' \\ & & \pm 0{,}72'' \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Die Behandlung nach dem Verfahren von (7)—(9) hat ergeben:

$$m^\circ = \sqrt{\frac{4{,}75}{5{,}50}} = \pm 0{,}93'' \qquad m' = \sqrt{\frac{4{,}35}{3{,}17}} = \pm 1{,}17'' \qquad m'' = \sqrt{\frac{5{,}98}{3{,}83}} = \pm 1{,}25'' \qquad m''' = \sqrt{\frac{2{,}89}{2{,}50}} = \pm 1{,}08''$$

Dazu im Ganzen $\qquad m = \sqrt{\dfrac{17{,}97}{15}} = \pm 1{,}09''$

(Dieses entspricht dem damit gleichen 1,09″ unten auf S. 229.)

Indem man dann noch die Anschnittszahlen von S. 228 als Richtungsgewichte nimmt, bekommt man die Richtungsfehler:

$$M^\circ = \frac{0{,}93}{\sqrt{10}} \qquad M' = \frac{1{,}17}{\sqrt{6}} \qquad M'' = \frac{1{,}25}{\sqrt{7}} \qquad M''' = \frac{1{,}08}{\sqrt{5}}$$
$$= \pm 0{,}29'' \qquad = \pm 0{,}48'' \qquad = \pm 0{,}47'' \qquad = \pm 0{,}48''$$

Endlich zur Vergleichung mit (15) die Winkelfehler, nämlich:

$$\sqrt{0{,}29^2 + 0{,}48^2} = \pm 0{,}56'' \text{ u. s. w., im Ganzen:}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \pm 0{,}56'' & \pm 0{,}55'' & \pm 0{,}56'' \\ & \pm 0{,}67'' & \pm 0{,}68'' \\ & & \pm 0{,}67'' \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Dieses (16) stimmt mit dem strengen (15) ziemlich überein, doch kann natürlich kein allgemeiner Schluss aus einem solchen Zahlenbeispiel gezogen werden, welches nur andeuten soll, wie man etwa in erster Näherung (ohne Kenntnis der $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$ u. s. w.) rechnen könnte, wenn man zugleich die Verschiedenheit der Zielschärfen in den einzelnen Sichten mit berücksichtigen wollte. (Weiteres hiezu s. S. 322—323).

III. *Vierter Fall strenger Richtungsgewichte.*

Ausser den 3 Fällen strenger Richtungsgewichte, welche auf S. 282 als Anfang von § 82. aufgeführt sind, zu welchen auch noch die unten auf S. 266 (im Kleingedruckten) erwähnten Fälle symmetrischer Richtungssatz-Anordnungen als Erweiterungen des 3ten Falles gehören, giebt es auch noch einen 4ten Fall, der als hierher gehörig schon in § 76. S. 259 kurz erwähnt worden ist, nämlich den Fall von Winkelmessungen, welche alle *einen* Strahl gemeinsam haben, z. B. so:

$$\left.\begin{array}{lcccc} & p_1^\circ & p_1' & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ & p_2^\circ & \cdot\ \cdot & p_2'' & \cdot\ \cdot \\ & p_3^\circ & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & p_3''' \\ \hline \text{Anschnittszahlen} & [p^\circ] & p_1' & p_2'' & p_3''' \\ \text{Richtungsgewichte} & \infty & \frac{p_1'}{2} & \frac{p_2''}{2} & \frac{p_3'''}{2} \end{array}\right\} \qquad (17)$$

Wie man sofort einsieht, kann man all diesen Messungen einen Richtungssatz substituieren mit dem Anfangsgewichte $= \infty$ und den halben Anschnittszahlen als Gewichten der übrigen Richtungen, denn es ist dann z. B. das erste Winkelgewicht P' bestimmt durch

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{\infty} + \frac{2}{p_1'} = 0 + \frac{2}{p_1'}$$

also $P' = \frac{p_1'}{2}$ wie es sein soll.

Man kann auch sagen (wie schon S. 259), dass der Fall (17) nur gezwungen sich der Richtungsform fügt, und dass man gerade so gut die Winkel selbst in die weitere Ausgleichung einführen könnte.

In früherer Zeit, als man Repetitionswinkel mass, war der Fall (17) mit Auswahl *eines* gut beleuchteten Zielpunktes für p° sehr oft vorkommend.

Noch allgemeiner kann man sagen: Wenn bei s Strahlen nicht mehr als $s-1$ Winkel gemessen sind (also ohne Ausgleichung), so kann man dafür jedenfalls s Richtungen mit bestimmten Richtungs-Gewichten substituieren.

IV. Schärfere Trennung der Fehler nach Richtungen.

Die Fehlertrennung, welche wir in den Gleichungen (7)—(9) S. 318 ohne Theorie angegeben haben, ist für den angegebenen Zweck hinreichend, aber nicht streng richtig, und kann nur auf umständlichem Wege, mit Zuziehung der Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. genauer gemacht werden. Obgleich zunächst kein dringliches Bedürfnis dazu vorliegt, wollen wir doch aus theoretischem Interesse dieses auch noch kurz behandeln:

Es handelt sich um Formeln von der Art (19) S. 87, wobei aber die Gesamtsumme $[v\,v]$ in verschiedene Gruppen $[v^\circ v^\circ]$, $[v'\,v']$, $[v''\,v'']\ldots$ zerfällt werden soll und auch die entsprechenden Nenner gesucht werden sollen, bzw. die Abzüge u°, u', $u\ldots$ in folgenden Formeln (für n Sätze mit s Richtungen):

$$\left.\begin{array}{ll} & m^{\circ 2} = \dfrac{[v^\circ v^\circ]}{[p^\circ]-u^\circ}\ ,\quad m'^2 = \dfrac{[v'\,v']}{[p']-u'}\ ,\quad m''^2 = \dfrac{[v''\,v'']}{[p'']-u''}\ \text{ u. s. w.} \\ \text{wobei} & [v^\circ v^\circ] + [v'\,v'] + [v''\,v''] + \ldots = [v\,v] \\ & [p^\circ] + [p'] + [p''] + \ldots = [p] \\ \text{und} & u^\circ + u' + u'' + \ldots = u = n + s - 1 \text{ (vgl. (15) S. 236)} \end{array}\right\} \quad (18)$$

Der Weg, auf dem die Hauptformel (19) auf S. 86—87 gefunden wurde, ist nicht geeignet für die Trennung der u, dagegen kann man durch die Gewichts-Coefficienten von § 28. und die reduzierten Fehlergleichungen § 26. den Zweck erreichen. Man kann die Differenz $[\varepsilon\,\varepsilon] - [v\,v]$ von S. 86 auffassen als Summe der mittleren Fehlerquadrate der v als Funktionen von x, y, z, woraus sich alsbald ergiebt:

$$[\varepsilon\,\varepsilon] - [v\,v] = m^2\Big([a\,a][\alpha\,\alpha] + 2[a\,b][\alpha\,\beta] + 2[a\,c][\alpha\,\gamma] + \ldots + [b\,b][\beta\,\beta] + \ldots\Big) \quad (19)$$

Wegen (20) S. 90 ist die hier als Coefficient von m^2 erscheinende Klammer $= 1 + 1 + 1$ für 3 Unbekannte x, y, z, allgemein ist die Klammer $= u$ für u Unbekannte, und daraus ergiebt sich dann alsbald die Gleichung (19) S. 87. was als zweite Begründung dieser wichtigen Gleichung auftritt.

Um nun zur Trennung der u überzugehen, wollen wir die reduzierten Fehlergleichungen von § 26. betrachten. Wenn nämlich bei 3 Unbekannten x, y, z eine erste Unbekannte x eliminiert ist, und ein System von Gleichungen (5) S. 83 übrig geblieben ist, so entspricht diesen auch ein System (7) S. 83 mit nur noch 2 Elementen, welchem auch in (20) S. 90 nur 2 Elemente und dann ein Wert $u = 1 + 1 = 2$ zukommen, so dass im Ganzen doch wieder $n - 1 - 2 = n - 3$ herauskommt. In ähnlicher Weise wollen wir nun auch die Trennung der u bei unserer Stationsausgleichung vornehmen.

Was zuerst die z betrifft, so kann man deren Einfluss am besten bestimmen, indem man die x vorläufig als fehlerfrei annimmt, denn dann ist nach (9) S. 235 das z eines Satzes gleich dem Mittel aus allen Werten l dieses Satzes, also das mittlere Fehlerquadrat dieses z gleich $m^2 g$ (mit g nach (11) S. 319), und die zu dem vorhergehenden (19) analoge Theorie giebt dann alsbald die Abzüge $[g^\circ]$, $[g']$, $[g'']\cdots$ für die Nenner zur Berechnung des mittleren Fehlerquadrates in den Richtungen P°, P', $P''\ldots$; d. h. wir haben damit dieselbe Berechnung, welche für die z ohne strenge Begründung bereits in (7) S. 318, mit $-19{,}5$, $-13{,}5$, $-10{,}0$ gegeben ist.

Schwieriger ist der Einfluss der x zu bestimmen. Nach Elimination der z vermittelst (9) S. 235 nehmen die v von (4) S. 234 folgende Formen an, wobei g und h die bereits oben in (11) auf S. 319 eingeführten Bedeutungen haben sollen:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{für die Richtung } P^\circ: & v^\circ = - h_,^\circ x' - & h_{,,}^\circ x'' - & h_{,,,}^\circ x''' + \ldots \\ \text{„ „ „ } P': & v' = (1-g')x' - & h_{,,}' x'' - & h_{,,,}' x''' + \ldots \\ \text{„ „ „ } P'': & v'' = - h_,'' x' + & (1-g'')x'' - & h_{,,}''' x''' + \ldots \\ \text{„ „ „ } P''': & v''' = - h_,''' x' - & h_{,,}''' x'' + & (1-g''')x''' + \ldots \end{array}\right\} (20)$$

Dabei sind die Absolutglieder, welche wir hier nicht brauchen, weggelassen (durch . . . angedeutet). Zur Bedeutung der schon früher eingeführten h und g sei auch nochmals erwähnt, dass es lediglich die zu S. 236 erforderlichen Verhältniszahlen sind, und dass z. B. $h_,''' = h_{,,,}''$ u. s. w.

Die Gleichungen (20) sind nun reduzierte Fehlergleichungen in dem Sinne von § 26., nämlich Fehlergleichungen für die v nach Elimination der z. Deswegen muss auch z. B. sein:

$$\left.\begin{array}{l} [h_,^{\circ 2}] + [(1-g')^2] + [h_,''^2] + [h_,'''^2] = (a\,a) \text{ von (11) S. 236} \\ + [h_,^\circ h_{,,}^\circ] - [(1-g')h_{,,}'] - [h_,''(1-g'')] + [h_,''' h_{,,}'''] = (a\,b) \text{ S. 236} \\ \text{u. s. w. . . . .} \end{array}\right\} (21)$$

Man kann dieses aus der Einzelbedeutung der g und h durch Vergleichung mit (11) S. 236 leicht nachweisen.

All dieses haben wir auf das Zahlenbeispiel von S. 228 angewendet und gefunden:

0,757	+ 0,396	+ 0,174	0,868	+ 0,284	0,646
2,590	− 0,854	− 0,410	0,396	+ 0,062	0,174
0,396	− 0,854	+ 0,062	3,035	− 0,632	0,285
0,174	+ 0,062	− 0,410	0,285	− 0,632	2,146
3,917	− 1,250	− 0,584	4,584	− 0,918	3,251
$= (a\,a)$	$= (a\,b)$	$= (a\,c)$	$= (b\,b)$	$= (b\,c)$	$= (c\,c)$

Dazu wurde auch bestimmt (vgl. S. 320):

0,299	0,195	0,162	0,263	0,183	0,348
$= [\alpha\,\alpha]$	$= 2\,[\alpha\,\beta]$	$= 2\,[\alpha\,\gamma]$	$= [\beta\,\beta]$	$= 2\,[\beta\,\gamma]$	$= [\gamma\,\gamma]$

Damit berechnet sich der Abzug für den Nenner des Fehlerquadrats der ersten Richtung (für x°):

$$0{,}577\,[\alpha\,\alpha] + 0{,}396\,(2\,[\alpha\,\beta]) + 0{,}174\,(2\,[\alpha\,\gamma]) + \ldots = 0{,}837$$

und entsprechend die 3 anderen: 0,718 , 0,743 , 0,704.

Damit bekommt man die richtigen Nenner zur Berechnung der mittleren Fehlerquadrate der 4 einzelnen Richtungen von S. 228:

	P°	P'	P''	P'''	Quersumme
Anschnittszahlen	10	6	7	5	28
Abzüge für die z:	− 3,75	− 2,08	− 2,42	− 1,75	− 10,00
Abzüge für die x:	− 0,84	− 0,72	− 0,74	− 0,70	− 3,00
Nenner	5,41	3,20	3,84	2,55	15,00
Die Näherungswerte von S. 320 unten waren:					
Näherungen	5,50	3,17	3,83	2,50	

Jene Näherungen waren also genügend richtig. Obgleich die praktische Anwendung des Vorstehenden zunächst von geringer Bedeutung ist, schien uns doch die Theorie soweit wichtig, dass ihre, wenn auch nur sehr gedrängte Mitteilung am Platze war.