Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 59. Ausgleichung eines Vierecks mit vollen Richtungssätzen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Gleichungen durch die Projektion der inneren Polygonkranz-Begrenzung auf ein beliebig angenommenes rechtwinkliges, sphäroidisches Coordinaten-System.

Diese Schreiber schen Methode des Polygonkranz-Anschlusses durch rechtwinklige Coordinaten ist mitgeteilt in dem Werke: „Die königlich preussische Landes-Triangulation: Hauptdreiecke. Erster Teil, Berlin 1870, S. 421 und Hauptdreiecke II. Teil, Berlin 1874, S. 605“.

Wir haben einen Bericht hierüber mit einem Beispiele gegeben in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen“, 1882, S. 81—85 und S. 103, und bemerken hiezu, dass die ersten Schreiber schen Formeln von 1870 („Hauptdreiecke I, S. 421“) sich rein sphärisch mit einem mittleren Krümmungs-Halbmesser entwickeln lassen, und so mit den bekannten Soldner schen Coordinaten-Formeln zusammenfallen, während die zweiten Schreiber schen Formeln von 1874 („Hauptdreiecke II, S. 605“) noch höhere Glieder hinzufügen, entsprechend der Gauss schen Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas“.

Es giebt noch eine Frage, betreffend die günstigste Form der Seitengleichung in einem Viereck, welche hier angeschlossen werden könnte, jedoch wollen wir dieses auf den Schluss dieses Kapitels verschieben, um den Übergang zu praktischen Ausgleichungsrechnungen nicht zu lange aufzuhalten.

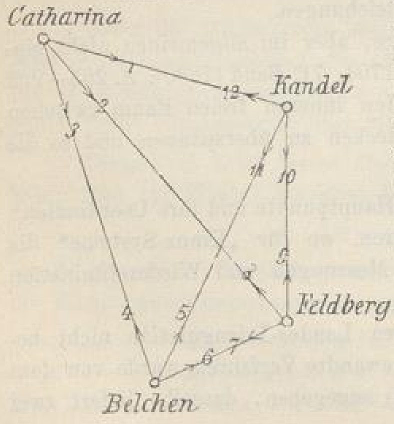
§ 59. Ausgleichung eines Vierecks mit 4 vollen Richtungssätzen.

Als erstes Beispiel zur rechnerischen Durchführung nehmen wir ein Viereck der badischen Triangulierung mit 4 vollen gleichgewichtigen Richtungssätzen.

Die Ergebnisse der Messungen, jeweils auf einen Anfangsstrahl als Nullrichtung bezogen, sollen sein:

Station Catharina.			Station Kandel.			
Kandel . . .	(1) =	0° 0′ 0,00″	Feldberg . .	(10) =	0° 0′ 0,00″	
Feldberg . .	(2) =	34 52 27,44	Belchen . .	(11) =	25 9 9,67	
Belchen . . .	(3) =	57 49 20,90	Catharina .	(12) =	102 43 24,53	(1)
Station Belchen			**Station Feldberg**			
Catharina . .	(4) =	0° 0′ 0,00″	Belchen . .	(7) =	0° 0′ 0.00″	
Kandel . . .	(5) =	44 36 27,07	Catharina . .	(8) =	72 58 55,84	
Feldberg . .	(6) =	84 04 12,94	Kandel . . .	(9) =	115 23 06,40	

Fig. 1.
Viereck mit vollen Richtungssätzen.
Maasstab 1 : 400000.



Hier ist jeweils eine beliebige Sicht als *Null*strahl mit 0° 0′ 0,00″ angenommen, doch ist das unwesentlich, und man soll sich sehr hüten, der so formell bevorzugten Richtung irgend eine sachlich besondere Bedeutung beizulegen. Namentlich darf man nicht glauben, man habe damit *Winkel* vor sich in dem Sinne, wie er in § 57. und § 58. im Gegensatz zu Richtungen aufgestellt wurde. Der Anfangswert 0° 0′ 0,00″ muss vielmehr gerade ebenso eine Ausgleichungsverbesserung erhalten, wie der zweite Richtungswert 34° 52′ 27,44″ u. s. w., und man ändert an der Sache gar nichts, wenn man alle Richtungen eines Satzes um ein beliebiges Maass verschiebt.

Aus diesem Grunde macht man sich häufig

die Sache möglichst bequem für *spätere* Zwecke, indem man alle Richtungssätze schon von Anfang an in Form von genäherten trigonometrischen Richtungswinkeln aufstellt. (Katasterbezeichnung „Neigungen".) Die Orientierung für solche trigonometrische Richtungswinkel hat man stets aus genäherten Anschlussrechnungen.

Um die Vorteile solcher Orientierung sofort ins richtige Licht zu stellen, wollen wir gleich bei diesem unserem ersten Beispiel davon Gebrauch machen und die unter (1) mitgeteilten Richtungsmessungssätze nochmals schreiben in genäherter Orientierung (mit $+x$ nach Norden und Richtungswinkelzählung von Nord über Ost).

Catharina.	Kandel.	
(1) = 104° 33′ 24,00″	(10) = 181° 49′ 59,47″	
(2) = 139 25 51,44	(11) = 206 59 9,14	
(3) = 162 22 44,90	(12) = 284 33 24,00	(2)
Belchen.	**Feldberg.**	
(4) = 342° 22′ 40,13″	(7) = 246° 26′ 53,07″	
(5) = 126 59 7,20	(8) = 319 25 48,91	
(6) = 166 26 53,07	(9) = 1 49 59,47	

Die Richtung (1) stimmt mit der Gegenrichtung (12), ebenso stimmt (10) mit (9), (7) mit (6) überein, weil dieses bei der willkürlichen Festsetzung der Anfangsrichtungen so angenommen worden ist; dass die übrigen Richtungen, z. B. (5) und (11) nicht stimmen, hat seinen Grund teils in den Beobachtungsfehlern, teils aber auch in dem Umstand, dass die Dreiecke nicht eben, sondern sphärisch sind.

Zur Netzausgleichung braucht man zuerst die sphärischen Excesse, und hiezu *eine* Seite des Netzes. Z. B. Catharina—Belchen = 34433^m, $log = 4.53697$. Die geographische Breite ist ungefähr 48°, und der Logarithmus des Erdhalbmessers daher $log\, r = 6.80479$, womit man in bekannter Weise berechnet aus der Dreiecksfläche $\triangle$:

$$\text{Sphär. Excess } \varepsilon = \frac{\triangle}{r^2}\,\varrho \qquad \text{mit } log\frac{\varrho}{r^2} = 1.70485$$

Z. B. das erste Dreieck Catharina—Belchen—Kandel hat genähert:

Catharina	(1,3)	= 57° 49′	log sin 9.92755
Belchen	(4,5)	= 44 36′	„ „ 9.84643
Kandel	(11,12)	= 77 34′	„ „ 9.98969

womit unter Zugrundlegung von $log\, CB = 4.53697$ berechnet wird $log\, CK = 4.39371$ und dann $\triangle = \frac{1}{2}\, CB \,.\, CK \sin C$, $log \triangle = 8.55720$ und $\varepsilon = 1.828''$. Oder kurz, man berechnet mit vorläufigen Seiten und Winkeln die Excesse, wie sie in folgender alle 4 Summenproben enthaltenden Zusammenstellung angegeben sind:

C. (1,3) = 57° 49′ 20,90″	C. (2,3) = 22° 56′ 53,46″		
B. (4,5) = 44 36 27,07	F. (7,8) = 72 58 55,84		
K. (11,12) = 77 34 14,86	B. (4,6) = 84 4 12,94		
Summe 180° 0′ 2,83″	Summe 180° 0′ 2,24″		
soll 180 0 1,83	soll 180 0 1,22		
$w = +1{,}00''$	$w = +1{,}02''$		
B. (5,6) = 39° 27′ 45,87″	F. (8,9) = 42° 24′ 10,56″		(3)
F. (7,9) = 115 23 6,40	K. (10,12) = 102 43 24,53		
K. (10,11) = 25 9 9,67	C. (1,2) = 34 52 27,44		
Summe 180° 0′ 1,94″	Summe 180° 0′ 2,53″		
soll 180 0 0,67	soll 180 0 1,28		
$w = +1{,}27''$	$w = +1{,}25''$		

Bezeichnet man die Richtungs-Verbesserungen mit $v_1\ v_2\ .\ .\ .\ v_{12}$, so folgen aus diesen Probesummen folgende 4 Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} v_3 - v_1 + v_5 - v_4 + v_{12} - v_{11} + 1{,}00'' = 0 \\ v_3 - v_2 + v_8 - v_7 + v_6 - v_4 + 1{,}02'' = 0 \\ v_6 - v_5 + v_9 - v_7 + v_{11} - v_{10} + 1{,}27'' = 0 \\ v_9 - v_8 + v_{12} - v_{10} + v_2 - v_1 + 1{,}25'' = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

In jeder dieser Gleichungen ist die Summe der Coefficienten = Null, wie sich aus der Entstehung dieser Gleichungen unmittelbar ergiebt (vgl. die Anmerkung am Schluss von § 57. und S. 176—177.

Wenn irgend welche 3 von diesen 4 Bedingungsgleichungen (4) erfüllt sind, so ist die 4te von selbst erfüllt, man hat daher nur 3 von den Gleichungen (4) in die Ausgleichung einzuführen.

Es besteht ferner eine Seitenbedingungsgleichung (Centralpunkt Feldberg):

$$\text{Es soll sein } \frac{\sin(1{,}2)\,\sin(4{,}6)\,\sin(10{,}11)}{\sin(2{,}3)\,\sin(5{,}6)\,\sin(10{,}12)} = 1 \quad (5)$$

Diese Gleichung ist allerdings zunächst dem *ebenen* Viereck entsprechend, ebenso wie in § 57. S. 165 gelehrt wurde, allein die Gleichung (5) gilt ebenso auch für ein *sphärisches* Viereck, weil der Sinussatz, insofern er die *Winkel* eines Dreiecks betrifft, für ein ebenes und für ein sphärisches Dreieck gleichlautend ist (und die Sinus der Centriwinkel am Erdmittelpunkt für die Dreiecksseiten hier nicht auftreten, ev. durch die „Additamentenmethode" der sphärischen Dreiecksberechnung berücksichtigt würden; vgl. unseren III. Band, 1890, § 42).

Der Seitengleichung (5) entspricht folgende logarithmisch-trigonometrische Ausrechnung mit 7stelligen Logarithmen:

			Diff. für 10″	
(1,2) = 34° 52′ 27,44″	*log sin* (1,2)	9.757 2273	+ 302	(6)
(4,6) = 84 4 12,94	*log sin* (4,6)	9.997 6699	+ 22	
(10,11) = 25 9 9,67	*log sin* (10,11)	9.628 4216	+ 449	
		9.383 3188		
(2,3) = 22° 56′ 53,46″	*log sin* (2,3)	9.590 9515	+ 498	
(5,6) = 39 27 45,87	*log sin* (5,6)	9.803 1677	+ 256	
(10,12) = 102 43 24,53	*log sin* (10,12)	9.989 2025	— 48	
		9.383 3217		

Widerspruch 9.383 3188 — 9.383 3217 = — 0.000 0029 = w

Um für diese sehr wichtige logarithmisch-trigonometrische Berechnung des Fehlergliedes w eine Probe zu erlangen, kann man sich der sphärischen Excesse bedienen, welche in (3) bereits angegeben sind, indem man nach dem Legendre schen Satze rechnend, jeden Dreieckswinkel um ein Drittel des sphärischen Excesses vermindert. So erhält man aus (3):

C. (1,3) = 57° 49′ 20,29″	C. (2,3) = 22° 56′ 53,05″	(7)
B. (4,5) = 44 36 26,46	F. (7,8) = 72 58 55,43	
K. (11,12) = 77 34 14,25	B. (4,6) = 84 4 12,53	
+ 1,00	+ 1,01	
B. (5,6) = 39° 27′ 45,65″	F. (8,9) = 42° 24′ 10,13″	
F. (7,9) = 115 23 6,18	K. (10,12) = 102 43 24,10	
K. (10,11) = 25 9 9,45	C. (1,2) = 34 52 27,01	
+ 1,28	+ 1,24	

Die Summen $+1,00$ u. s. w. sollen den entsprechenden w in (3) gleich sein, und wenn das nicht völlig der Fall ist, so rührt es nur von der Abrundung bei der Bildung der Drittel-Excesse her. Nun macht man mit den Winkeln (7) abermals eine logarithmisch-trigonometrische Ausrechnung von der Form (6):

			Diff. für 10″	
$(1,2) = 34^\circ\, 52'\, 27{,}01''$	*log sin* (1,2)	9.757 2260	+ 302	
$(4,6) = 84\;\; 4\;\; 12{,}53$	*log sin* (4,6)	9.997 6699	+ 22	
$(10,11) = 25\;\; 9\;\; 9{,}45$	*log sin* (10,11)	9.628 4206	+ 449	
		9.383 3165		(8)
$(2,3) = 22^\circ\, 56'\, 53{,}05''$	*log sin* (2,3)	9 590 9495	+ 498	
$(5,6) = 39\;\; 27\;\; 45{,}65$	*log sin* (5,6)	9.803 1672	+ 256	
$(10,12) = 102\;\; 43\;\; 24{,}10$	*log sin* (10,12)	9.989 2027	− 48	
		9.383 3194		

Widerspruch 9.383 3165 — 9.383 3194 = — 0.000 0029 = w

Nun bekommt man aus (6) und (8) übereinstimmend die lineare Seitengleichung in Einheiten der 7ten Logarithmendecimale:

$$\left.\begin{aligned} &+30{,}2\,(v_2-v_1)+\;\;2{,}2\,(v_6-v_4)+44{,}9\,(v_{11}-v_{10}) \\ &-49{,}8\,(v_3-v_2)-25{,}6\,(v_6-v_5)+\;\;4{,}8\,(v_{12}-v_{11})-29=0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Diese Gleichung kann man so weiter benützen, aber im Vergleich mit den Winkelsummengleichungen (4) hat die Gleichung (9) zu grosse Coefficienten, was formell störend für die weitere Rechnung ist, und wir wollen deshalb lieber die Gleichung (9) durchaus mit 10 dividieren, d. h. in Einheiten der 6ten Logarithmendecimale rechnen:

$$\left.\begin{aligned} &+3{,}02\,(v_2-v_1)+0{,}22\,(v_6-v_4)+4{,}49\,(v_{11}-v_{10}) \\ &-4{,}98\,(v_3-v_2)-2{,}56\,(v_6-v_5)+0{,}48\,(v_{12}-v_{11})-2{,}9=0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Man kann eine solche Bedingungsgleichung (9) oder (10) mit jeder beliebigen Zahl multiplizieren oder dividieren, ohne ihre Bedeutung für die Ausgleichung zu ändern, (während man *Fehler*gleichungen nicht multiplizieren darf, ohne die Gewichtsverhältnisse zu ändern, vgl. (6) § 21. S. 68. Am besten ist es, wenn die Coefficienten der linearen Seitengleichungen im Mittel ungefähr den Wert 1 haben, weil auch die Winkelsummengleichungen (4) alle die Coefficienten 1 haben; man könnte daher daran denken, die Gleichung (10) nochmals mit 2 oder 3 zu dividieren, indessen mit der bequemen Rechnung in Einheiten der 6ten Stelle nach (10) kommt man gewöhnlich gut durch, und wir bleiben daher bei (10) stehen, und finden daraus durch Ordnen nach v_1, v_2, v_3 . . .:

$$\begin{aligned} -3{,}02\,v_1+8{,}00\,v_2-4{,}98\,v_3-0{,}22\,v_4+2{,}56\,v_5-2{,}34\,v_6-4{,}97\,v_{10} \\ +4{,}49\,v_{11}+0{,}48\,v_{12}-2{,}9=0 \end{aligned} \tag{11}$$

Die Coefficienten-Summe $-3{,}02+8{,}00\ldots+0{,}48$ ist auch wieder $=0$, wie bei den Gleichungen (4).

Die lineare Seitengleichung (11), nebst *dreien* von den 4 Winkelgleichungen der Gruppe (4) bilden das vollständige System der Bedingungsgleichungen. Mit Ausscheidung der dritten Gleichung der Gruppe (4) bilden wir die Tabelle der Coefficienten der Bedingungsgleichungen:

Coefficienten der Bedingungsgleichungen:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	w
$k_1\ a$	− 3,02	+ 8,00	− 4,98	− 0,22	+ 2,56	− 2,34	..	..	..	− 4,97	+ 4,49	+ 0,48	− 2,90
$k_2\ b$	− 1	...	+ 1	− 1	+ 1	...	..	..	..	...	− 1	+ 1	+ 1,00
$k_3\ c$	...	− 1	+ 1	− 1	...	+ 1	− 1	+ 1	..	...	...	...	+ 1,02
$k_4\ d$	− 1	+ 1	...	...	...	...	..	− 1	+ 1	− 1	...	+ 1	+ 1,25

(12)

Die Bildung der Summen-Coefficienten ist sehr einfach, es ist z. B.:

$$[a\,a] = 3{,}02^2 + 8{,}00^2 + 4{,}98^2 + \ldots\ldots + 0{,}48^2 = 155{,}09$$
$$[a\,b] = +\,3{,}02 - 4{,}98 + 0{,}22 + 2{,}56 - 4{,}49 + 0{,}48 = -\,3{,}19 \text{ u. s. w.}$$
$$[a\,c] = -\,8{,}00 + 4{,}98 + 0{,}22 - 2{,}34 = -\,15{,}10$$
$$[a\,d] = +\,3{,}02 + 8{,}00 + 4{,}97 + 0{,}48 = +\,16{,}47$$
$$[b\,b] = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 6$$
$$[b\,c] = +\,1 + 1 = +\,2$$
$$[b\,d] = +\,1 + 1 = +\,2$$
$$[c\,c] = 1^2 + \ldots \qquad = 6$$
$$[c\,d] = +\,1 + 1 \qquad = 2$$
$$[d\,d] = 1^2 + \ldots \qquad = 6$$

Die Normalgleichungen sind also in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{llllll}
 & a] & b] & c] & d] & w \\
[a & \underline{155{,}09\,k_1} & -\,3{,}19\,k_2 & -\,15{,}10\,k_3 & +\,16{,}47\,k_4 & -\,2{,}90 = 0 \\
 & [b & \underline{6{,}00\,k_2} & +\,2{,}00\,k_3 & +\,2{,}00\,k_4 & +\,1{,}00 = 0 \\
 & & [c & \underline{6{,}00\,k_3} & -\,2{,}00\,k_4 & +\,1{,}02 = 0 \\
 & & & [d & \underline{6{,}00\,k_4} & +\,1{,}25 = 0
\end{array}\right\} \quad (13)$$

Die Elimination und Auflösung giebt:

$$k_1 = +\,0{,}044 \qquad k_2 = +\,0{,}078 \qquad k_3 = -\,0{,}232 \qquad k_4 = -\,0{,}431 \qquad (14)$$

Nach Anleitung der Tabelle der Bedingungsgleichungen (12) macht man folgende tabellarische Berechnung der Verbesserungen v:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
+0,044	−0,132	+0,352	−0,218	−0,010	+0,112	−0,103	...	...	...	−0,217	+0,197	+0,021
+0,078	−0,078	...	+0,078	−0,078	+0,078	...	...	...	...	...	−0,078	+0,078
−0,232	...	+0,232	−0,232	+0,232	...	−0,232	+0,232	−0,232	...	...	...	...
−0,431	+0,431	−0,431	...	...	...	...	...	+0,431	−0,431	+0,431	...	−0,431
v	+0,221	+0,153	−0,372	+0,144	+0,190	−0,335	+0,232	+0,199	−0,431	+0,214	+0,119	−0,332
Summe		− 0,002			− 0,001			0,000			+ 0,001	

(15)

Diese Werte v geben stationsweise je die Summe 0,000″, abgesehen von kleinen Abrundungsunsicherheiten 0,002″ u. s. w.

Fügt man die so erhaltenen v zu den beobachteten Richtungen (2) hinzu, wobei wir auf 0,01″ abrunden, so erhält man folgendes:

Beobachtet	v	Ausgeglichen	v^2	
(1) = 104° 33′ 24,00″	+ 0,22″	[1] = 104° 33′ 24,22″	0,0484	
(2) = 139 25 51,44	+ 0,15	[2] = 139 25 51,59	0,0225	
(3) = 162 22 44,90	— 0,37	[3] = 162 22 44,53	0,1369	
(4) = 342° 22′ 40,13″	+ 0,14″	[4] = 342° 22′ 40,27″	0,0196	
(5) = 26 59 7,20	+ 0,19	[5] = 26 59 7,39	0,0361	
(6) = 66 26 53,07	— 0,33	[6] = 66 26 52,74	0,1089	
(7) = 246° 26′ 53,07″	+ 0,23″	[7] = 246° 26′ 53,30″	0,0529	(16)
(8) = 319 25 48,91	+ 0,20	[8] = 319 25 49,11	0,0400	
(9) = 1 49 59,47	— 0,43	[9] = 1 49 59,04	0,1849	
(10) = 181° 49′ 59,47″	+ 0,21″	[10] = 181° 49′ 59,68″	0,0441	
(11) = 206 59 9,14	+ 0,12	[11] = 206 59 9,26	0,0144	
(12) = 284 33 24,00	— 0,33	[12] = 284 33 23,67	0,1089	
			$[v\,v]$ = 0,8176	

Durch Subtraktionen dieser ausgeglichenen Richtungen bildet man die ausgeglichenen Winkel und stellt dieselben abermals wie früher bei (3) in Dreiecken zusammen. Zur Unterscheidung von den gemessenen Winkeln, welche mit (1,3), (4,5) ... bezeichnet waren, bezeichnen wir die ausgeglichenen Winkel mit [1,3], [4,5] ...:

C. [1,3] = 57° 49′ 20,31″	C. [2,3] = 22° 56′ 52,94″		
B. [4,5] = 44 36 27,12	F. [7,8] = 72 58 55,81		
K. [11,12] = 77 34 14,41	B. [4,6] = 84 4 12,47		
Summe 180° 0′ 1,84″	Summe 180° 0′ 1,22″		
soll 1,83	soll 1,22		(17)
B. [5,6] = 39° 27′ 45,35″	F. [8,9] = 42° 24′ 9,93″		
F. [7,9] = 115 23 5,74	K. [10,12] = 102 43 23,99		
K. [10,11] = 25 9 9,58	C. [1,2] = 34 52 27,37		
Summe 180° 0′ 0,67″	Summe 180° 0′ 1,29″		
soll 0,67	soll 1,28		

Zur Untersuchung, ob die Seitengleichung stimmt, macht man statt der früheren logarithmischen Rechnung (6) die folgende neue logarithmische Rechnung:

[1,2] = 34° 52′ 27,37″	*log sin* [1,2]	9.757 2271	
[4,6] = 84 4 12,47	*log sin* [4,6]	9.997 6699	
[10,11] = 25 9 9,58	*log sin* [10,11]	9.628 4212	
		9.383 3181	(18)
[2,3] = 22° 56′ 52,94″	*log sin* [2,3]	9.590 9490	
[5,6] = 39 27 45,35	*log sin* [5,6]	9.803 1664	
[10,12] = 102 43 23,99	*log sin* [10,12]	9.989 2028	
		9.383 3182	

Mit den ausgeglichenen Richtungen berechnet man alle Dreiecksseiten auf allen Wegen übereinstimmend. Als Basis nehmen wir hiezu die Seite Catharina—Belchen nach Angabe der badischen Landestriangulierung:

$$\text{Catharina—Belchen} = 34\,432{,}57^{\text{m}} \qquad (19)$$

Unter Annahme dieser Länge wurden mit den ausgeglichenen Winkeln und Sinuslogarithmen (18) nach der Additamentenmethode folgende Entfernungen widerspruchsfrei berechnet:

Catharina—Belchen . .	$= 34\,432{,}57^m$	$log = 4.536\,9695$	
Catharina—Feldberg . .	$= 35\,816{,}62$	$4.554\,0846$	
Catharina—Kandel . . .	$= 24\,760{,}43$	$4.393\,7582$	(20)
Belchen—Feldberg . . .	$= 14\,039{,}83$	$4.147\,3617$	
Belchen—Kandel . . .	$= 29\,843{,}17$	$4.474\,8450$	
Feldberg—Kandel . . .	$= 20\,994{,}59$	$4.322\,1074$	

Man kann auch entsprechend (7) und (8) nach dem Legendre schen Satze rechnen, was dieselben Werte geben muss wie (20).

In Bezug auf Genauigkeitsbestimmung hat man zuerst die Summe $[v\,v] = 0{,}8176$ nach (16) ins Auge zu fassen. Eine Probe dafür bekommt man durch die Formel $[v\,v] = -[w\,k]$, nach (4) § 41. S. 122. Die Ausrechnung hiezu ist:

$$
\begin{array}{llll}
w_1 = -2{,}90 & k_1 = +0{,}044 & -w_1\,k_1 = +0{,}1276 & \\
w_2 = +1{,}00 & k_2 = +0{,}078 & -w_2\,k_2 & -0{,}0780 \\
w_3 = +1{,}02 & k_3 = -0{,}232 & -w_3\,k_3 = +0{,}2366 & \\
w_4 = +1{,}25 & k_4 = -0{,}431 & -w_4\,k_4 = +0{,}5388 & \\
 & & \underbrace{+0.9030 - 0{,}0780} & \\
 & & -[w\,k] = +0{,}8250 & \quad (21)
\end{array}
$$

Man kann auch noch die Formel (5) § 41. S. 122 zuziehen, was wir aber hier unterlassen, da wir auch die Elimination (13)—(14) nicht im Einzelnen vorgeführt haben, und weil die Probe (21) neben der unmittelbaren Ausrechnung der einzelnen v^2 in (16) vollauf genügt.

Wir nehmen im Mittel $[v\,v] = 0{,}82$, und haben damit den mittleren Fehler einer beobachteten Richtung:

$$m = \sqrt{\frac{0{,}82}{4}} = \pm\,0{,}45'' \tag{22}$$

und den mittleren Fehler eines Winkels vor der Ausgleichung:

$$= m\sqrt{2} = \pm\,0{,}64'' \tag{23}$$

Damit ist die Ausgleichung vollendet, und mit den Dreiecksseiten (20) nebst den Winkeln (18) kann man nun auch die Coordinaten der Viereckspunkte in jedem System berechnen, das in Frage kommt.

Die Coordinaten der 4 Punkte im badischen System sind in der „Zeitschr. f. Verm. 1878," S. 33—34 mitgeteilt. Ebendaselbst S. 20—25 sind auch die Originalmessungen mitgeteilt, welche zu dieser Netzausgleichung geführt haben. Es sind viele einzelne nach dem Repetitionsverfahren gemessene Winkel, welche wir zuerst stationsweise ausgeglichen und dann wie volle Richtungssätze weiter behandelt haben.

Die Messung voller gleichgewichtiger Richtungssätze auf allen 4 Punkten, welche wir am Anfang in (1) oder (2) S. 179 angenommen haben, hat also thatsächlich *nicht* stattgefunden, und wir haben deshalb unsere vorstehende Vierecksausgleichung entweder als ein Schulbeispiel mit fingierten Richtungsmessungen aufzufassen, oder wir haben ein praktisches Beispiel vor uns für ein zwar nicht formell strenges aber sehr nützliches, schon von Gauss in dem „supplementum theoriae combinationis, 1826" erstmals angewendetes Näherungsverfahren, darin bestehend, dass man Winkelmessungen oder auch unvollständige Satzrichtungsmessungen, zuerst stationsweise irgendwie (vielleicht nur näherungsweise) ausgleicht und dann die Stationsergebnisse wie volle Richtungssätze in die Netzausgleichung einführt.