Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 54. Vermittelnde Beobachtungen mit partiellen Bedingungsgleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

so an, wie wenn zu den Bedingungsgleichungen mit den Coefficienten $A\ B \ldots$ noch eine weitere Gleichung mit den Coefficienten $f_1\ f_2\ f_3 \ldots$ getreten wäre, und an die Reihe der Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B} \ldots$ schliessen sich noch die q so an:

$$\left.\begin{array}{ccccc} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 & \ldots \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}_3 & \mathfrak{B}_4 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \ldots \end{array}\right\} \tag{10}$$

Für die $[\mathrm{I}\,\varphi]$, $[\mathrm{II}\,\varphi]$ u. s. w. gewinnt man hiebei auch je *zwei* Formeln, ebenso wie die nichtquadratischen $[\mathrm{I\,II}]$, $[\mathrm{I\,III}] \ldots$ nach (15) § 51. S. 151 auch doppelt ausdrückbar waren. Die Ergebnisse sind:

$$\left.\begin{array}{lll} [\mathrm{I}\ \ \varphi] = [\mathfrak{A} f] & \text{oder} & = [A\,q] \\ [\mathrm{II}\ \varphi] = [\mathfrak{B} f] & \text{oder} & = [B\,q] \\ [\mathrm{III}\ \varphi] = [\mathfrak{C} f] & \text{oder} & = [C\,q] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \tag{11}$$

Diese Glieder hängt man an die Elimination der Normalgleichungen an, und rechnet dann genau so weiter, wie es schon in § 42. gelehrt wurde.

§ 54. Vermittelnde Beobachtungen mit partiellen Bedingungsgleichungen.

Wenn die Fehlergleichungen Unbekannte enthalten, welche in den Bedingungsgleichungen nicht vorkommen, so lassen sich die im Vorstehenden entwickelten Formeln doch anwenden, denn man kann dann annehmen, dass die betreffenden Coefficienten der Bedingungsgleichungen gleich Null sind.

Hiernach wäre es überhaupt nicht nötig, diesen Fall besonders zu behandeln; allein man kann den fraglichen Umstand schon in dem ersten Teil der Ausgleichung vorteilhaft ausnützen, indem man die in den Bedingungsgleichungen nicht auftretenden Unbekannten schon in den Normalgleichungen des ersten Teils eliminiert.

Da bei Triangulierungsausgleichungen dieser Fall von Wichtigkeit ist, gehen wir hier näher darauf ein, und nehmen zugleich Veranlassung, die Anwendung der allgemeinen Theorie auf Triangulierungsausgleichung auch sonst noch vorzubereiten.

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{\begin{array}{l} v_1' = \underbrace{h_1(x) + i_1(y)}_{} + \underbrace{a_1'\,x + b_1'\,y + c_1'\,z + l_1'}_{} \\ v_2' = h_2(x) + i_2(y) + a_2'\,x + b_2'\,y + c_2'\,z + l_2' \\ v_3' = h_3(x) + i_3(y) + a_3'\,x + b_3'\,y + c_3'\,z + l_3' \\ v_4' = h_4(x) + i_4(y) + a_4'\,x + b_4'\,y + c_4'\,z + l_4' \\ v_5' \quad \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{\text{Anzahl} = s}\ \underbrace{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{\text{Anzahl} = u}\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \tag{1}$$

$$\text{Gesamt-Anzahl} = s + u$$

Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{\begin{array}{l} A_0 + A_1\,x + A_2\,y + A_3\,z = 0 \\ B_0 + \underbrace{B_1\,x + B_2\,y + B_3\,z}_{\text{Anzahl} = u.} = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Die s Unbekannten (x) (y) (die Nullpunkts-Korrektionen der einzelnen Sätze) kommen nur in den Fehlergleichungen (1), nicht aber in den Bedingungsgleichungen (2) vor. Das hat auf den Beginn der ersten Ausgleichung keinen Einfluss; man stellt unbekümmert darum die zu (1) gehörigen Normalgleichungen auf, und beginnt damit, (x) und (y) zu eliminieren.

Nachdem (x) und (y) eliminiert sind, bleibt ein System übrig, welches in unseren bisherigen Bezeichnungen so geschrieben werden muss:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[a'a'.2]\,x} + [a'b'.2]\,y + [a'c'.2]\,z + [a'l'.2] &= 0 \\ \underline{[b'b'.2]\,y} + [b'c'.2]\,z + [b'l'.2] &= 0 \\ \underline{[c'c'.2]\,z} + [c'l'.2] &= 0 \\ \underline{[l'l'.2]} &= [v_0 v_0] \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Nach den früheren Betrachtungen über reduzierte Fehlergleichungen § 26. haben die hier auftretenden Coefficienten $[a'a'.2]$ u. s. w. wieder die Bedeutungen von Summen und Produkten, wir setzen daher wieder $[a'a'.2] = [a\,a]$ u. s. w. und haben statt (3):

$$\left.\begin{aligned} \underline{[a\,a]\,x} + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] &= 0 \\ \underline{[b\,b]\,y} + [b\,c]\,z + [b\,l] &= 0 \\ \underline{[c\,c]\,z} + [c\,l] &= 0 \\ \underline{[l\,l]} &= [v_0 v_0] \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Mit diesen Coefficienten $[a\,a]$ $[a\,b]$ ... rechnet man nun gerade so weiter, wie mit den früheren, ebenfalls mit $[a\,a]$ $[a\,b]$ ... bezeichneten Coefficienten des ersten Teils der Ausgleichung.

Die Quadratsumme $[v_0 v_0]$ in (3) und (4) reduziert sich allmählich vollends auf $[v'v']$ in folgender Weise:

$$[v'v'] = [v_0 v_0] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l.1]^2}{[b\,b.1]} - \frac{[c\,l.2]^2}{[c\,c.2]} - \ldots \quad (5)$$

Das mittlere Fehlerquadrat der ersten Ausgleichung wird:

$$m_1^2 = \frac{[v'v']}{n-(s+u)} \quad (6)$$

Wir wollen nun auch noch einen anderen Umstand hervorheben, der sich bei Triangulierungsausgleichungen von selbst einstellt, ohne die Allgemeingültigkeit der bisherigen Entwicklungen zu beeinflussen, nämlich das Zerfallen der Fehlergleichungen (1) und der Normalgleichungen (4) in verschiedene ganz unabhängige Gruppen. Diese Gleichungen gehören nämlich zu dem Inbegriff *aller* Stationsausgleichungen.

Wir wollen dieses in allgemeinen Formeln andeuten, und annehmen, es handle sich um 3 Unbekannte mit folgenden in 2 Systeme zerfallenden Fehlergleichungen, in welchen etwa gewisse andere Unbekannte (x) (z) ... bereits eliminiert sein mögen:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1\,x + b_1\,y \ldots + l_1 \\ v_2 &= a_2\,x + b_2\,y \ldots + l_2 \\ v_3 &= a_3\,x + b_3\,y \ldots + l_3 \\ v_4 &= \ldots \qquad \ldots c_4\,z + l_4 \\ v_5 &= \ldots \qquad \ldots c_5\,z + l_5 \end{aligned}$$

Bildet man hiezu die Normalgleichungen, so werden sie:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[a\,a]\,x} + [a\,b]\,y \ldots + [a\,l] &= 0 \\ \underline{[b\,b]\,y} \ldots + [b\,l] &= 0 \\ \underline{[c\,c]\,z} + [c\,l] &= 0 \\ \underline{[l\,l]} &= (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) + (l_4^2 + l_5^2) \\ &= [v_0 v_0]_1 \qquad + [v_0 v_0]_2 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Diese in 2 Systeme zerfallende Form (7) ist in der allgemeinen Form (4) inbegriffen, und der Umstand, dass ein Teil der Coefficienten in (7) gleich Null ist, macht sich in der Weiterrechnung von selbst angenehm geltend.

Auch die Formel (5) zerfällt dann von selbst in einzelne getrennte Teile:

$$[v'\,v']_1 = [v_0\,v_0]_1 - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}$$

$$[v'\,v']_2 = [v_0\,v_0]_2 + \cdots\cdots\cdots - \frac{[c\,l]^2}{[c\,c]}$$

Wegen des Ausfallens von $[a\,c]$ und $[b\,c]$ in (7) ist nämlich $[c\,l\,.\,2] = [c\,l]$ und $[c\,c\,.\,2] = [c\,c]$. Dann ist:

$$[v'\,v']_1 + [v'\,v']_2 = [v'\,v']$$

$[v'\,v']_1$ entspricht einer ersten Station, $[v'\,v']_2$ einer zweiten Station u. s. w.

Die Formel (6) kann man nun sowohl für jede einzelne Station, als auch für den Inbegriff aller Stationen anschreiben.

§ 55. Formel-Zusammenstellung für vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

Wir stellen alle Gebrauchsformeln für die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen im Folgenden zusammen, mit den bisher in diesem Buche gebrauchten Bezeichnungen. Zur Vergleichung stellen wir rechts daneben die entsprechenden Formeln der „Rechnungsvorschriften" von S. 1—24 des Werkes: „Die Königlich preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. Erster Teil, zweite verbesserte Auflage, herausgegeben vom Bureau der Landes-Triangulation, Berlin 1870." und zwar beziehen sich die römischen Nummern XVI, XVII u. s. w. auf die dort angewendete Numerierung I. bis XXIX.

Die Bezugnahme auf die Landesaufnahme ist hier deswegen sehr nützlich, weil eine andere Anwendung der vorliegenden allgemeinen Aufgabe als auf jene Triangulierungen der Landesaufnahme nach 1870, kaum noch vorkommt, und das Zurechtfinden in der Formelmenge ohne einen solchen Leitfaden nicht leicht ist.

Wir beginnen mit den reduzierten Stations-Normalgleichungen, wobei sich die Bezeichnung „reduziert" darauf bezieht, dass die Stations-Unbekannten, welche wir in § 54. mit (x), (y) bezeichnet haben ($x\;x_{,}\;x_{,,}\;x_{,,,}$ der Rechnungsvorschriften S. 2), in den Stations-Normalgleichungen bereits eliminiert seien.

Formeln unseres Buches § 50—54.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1—24.

Reduzierte Stations-Normalgleichungen:

$\underline{[a\,a]\,x_0} + [a\,b]\,y_0 + [a\,c]\,z_0 + [a\,l] = 0$	$\underline{(a\,a)\,A} - (a\,b)\,B - (a\,c)\,C - (a\,n) = 0$
$\underline{[b\,b]\,y_0} + [b\,c]\,z_0 + [b\,l] = 0$	$+\,\underline{(b\,b)\,B} - (b\,c)\,C - (b\,n) = 0$
$\underline{[c\,c]\,z_0} + [c\,l] = 0$	$+\,\underline{(c\,c)\,C} - (c\,n) = 0$
$\underline{[l\,l]} = [v_0\,v_0]$	$(V_0\,V_0)$
	III. und VIII_c.