Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 40. Ungleiche Gewicht

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Diese Gleichungen heissen Normalgleichungen, ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der Bedingungsgleichungen.

Gang der Rechnung. Nachdem die Coefficienten $a\ b\ c$ und die Absolutglieder w der Bedingungsgleichungen (4) bestimmt sind, berechnet man die Coefficienten $[a\,a]$, $[a\,b]$ u. s. w. der Normalgleichungen (10), löst diese nach $k_1\ k_2\ k_3$ auf, und berechnet dann die Verbesserungen v nach (9).

Die Zufügung der v zu den Beobachtungen l giebt dann endlich die wahrscheinlichsten Werte x der Unbekannten.

Nachdem alle einzelnen v ausgerechnet sind, findet man auch deren Quadratsumme und den *mittleren Fehler einer Beobachtung* (nach (8) § 37. S. 116):

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}} \tag{11}$$

wo r die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist. (In den obigen Formeln ist überall $r=3$).

§ 40. Ungleiche Gewichte.

Wenn die Beobachtungen ungleiche Gewichte $p_1\ p_2\ p_3\ p_4$ haben, so tritt an Stelle von $[v\,v]$ = Minimum die neue Bedingung:

$$[p\,v\,v] = p_1\,v_1^2 + p_2\,v_2^2 + p_3\,v_3^2 + p_4\,v_4^2 = \text{Minimum} \tag{1}$$

und wenn man damit die Rechnung weiter führt, so sieht man bald, dass überall an Stelle von $a\ b\ c$ die Werte $\frac{a}{p}\ \frac{b}{p}\ \frac{c}{p}$ treten, und die wichtigsten Systeme (10) und (9) des vorigen § 39. gehen dann über in:

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{a\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{a\,c}{p}\right] k_3 + w_1 &= 0 \\
\left[\frac{a\,b}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] k_3 + w_2 &= 0 \\
\left[\frac{a\,c}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] k_2 + \left[\frac{c\,c}{p}\right] k_3 + w_3 &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Korrektionsformeln:

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 + \frac{c_1}{p_1} k_3 \\
v_2 &= \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 + \frac{c_2}{p_2} k_3 \\
v_3 &= \frac{a_3}{p_3} k_1 + \frac{b_3}{p_3} k_2 + \frac{c_3}{p_3} k_3 \\
v_4 &= \frac{a_4}{p_4} k_1 + \frac{b_4}{p_4} k_2 + \frac{c_4}{p_4} k_3
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Wenn man die Gewichte p nicht überall mitführen will, so kann man alle Coefficienten $a\ b\ c$ von Anfang an bzw. durch $\sqrt{p}$ dividieren, und dann weiter rechnen wie wenn alle Gewichte = 1 wären.

Die erste Bedingungsgleichung heisst dann so:

$$\frac{a_1}{\sqrt{p_1}} v_1 \sqrt{p_1} + \frac{a_2}{\sqrt{p_2}} v_2 \sqrt{p_2} + \frac{a_3}{\sqrt{p_3}} v_3 \sqrt{p_3} + \frac{a_4}{\sqrt{p_4}} v_4 \sqrt{p_4} + w_1 = 0$$

oder

$$a_1'\,v_1' + a_2'\,v_2' + a_3'\,v_3' + a_4'\,v_4' + w_1 = 0$$

Die erste Normalgleichung:

$$[a'\,a']\,k_1 + [a'\,b']\,k_2 + [a'\,c']\,k_3 + w_1 = 0$$

Die erste Korrektionsgleichung:

$$v_1' = v_1 \sqrt{p_1} = a_1'\,k_1 + b_1'\,k_2 + c_1'\,k_3$$

hieraus
$$v_1 = \frac{v_1'}{\sqrt{p_1}}$$

$[p\,v\,v]$ giebt sich unmittelbar durch Quadrierung der v', nämlich:

$$[p\,v\,v] = [(\sqrt{p}\,v)^2] = [v'\,v'] \qquad (4)$$

Ungleiche Gewichte durch mittlere Fehler a priori.

Wenn die mittleren Fehler $m_1\ m_2\ m_3\ m_4$ a priori geschätzt sind, was oft vorkommt, so kann man die Gewichte geradezu annehmen:

$$p_1 = \frac{1}{m_1^2} \qquad p_2 = \frac{1}{m_2^2} \qquad p_3 = \frac{1}{m_3^2} \text{ u. s. w.} \qquad (5)$$

und damit nehmen die vorstehenden Formeln folgende Formen an:

$$\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right] = \left(\frac{v_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{m_2}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{m_3}\right)^2 + \ldots = \text{Minimum} \qquad (6)$$

Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_1\,v_1 + a_2\,v_2 + a_3\,v_3 + \ldots + w_1 = 0 \\ b_1\,v_1 + b_2\,v_2 + b_3\,v_3 + \ldots + w_2 = 0 \\ c_1\,v_1 + c_2\,v_2 + c_3\,v_3 + \ldots + w_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Mittlere Fehler: $m_1 \qquad m_2 \qquad m_3 \qquad \ldots$ (8)

Man bildet aus (7) und (8) die neuen Coefficienten:

$$\left.\begin{matrix} m_1\,a_1 = a_1' & m_2\,a_2 = a_2' & m_3\,a_3 = a_3' \\ m_1\,b_1 = b_1' & m_2\,b_2 = b_2' & m_3\,b_3 = b_3' \\ m_1\,c_1 = c_1' & m_2\,c_2 = c_2' & m_3\,c_3 = c_3' \end{matrix}\right\} \qquad (9)$$

dann werden die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{matrix} [m^2aa]\,k_1 + [m^2ab]\,k_2 + [m^2ac]\,k_3 + w_1 = 0 & & [a'a']\,k_1 + [a'b']\,k_2 + [a'c']\,k_3 + w_1 = 0 \\ [m^2a\,b]\,k_1 + [m^2b\,b]\,k_2 + [m^2b\,c]\,k_3 + w_2 = 0 & \text{oder:} & [a'\,b']\,k_1 + [b'b']\,k_2 + [b'c']\,k_3 + w_2 = 0 \\ [m^2a\,c]\,k_1 + [m^2b\,c]\,k_2 + [m^2c\,c]\,k_3 + w_3 = 0 & & [a'c']\,k_1 + [b'\,c']\,k_2 + [c'\,c']\,k_3 + w_3 = 0 \end{matrix}\right\} (10)$$

Korrektionsformeln:

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= \frac{v_1}{m_1} = a_1'\,k_1 + b_1'\,k_1 + c_1'\,k_3 \\ v_2' &= \frac{v_2}{m_2} = a_2'\,k_1 + b_2'\,k_2 + c_2'\,k_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_1 &= v_1'\,m_1 \qquad v_2 = v_2'\,m_2 \qquad v_3 = v_3'\,m_3 \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Mittlerer Gewichtseinheitsfehler nach der Ausgleichung:

$$m = \sqrt{\frac{[v'\,v']}{r}} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right]} \qquad (12$$

Wenn die mittleren Fehler $m_1\ m_2\ m_3$ [s. o. bei (8)] *vor* der Ausgleichung richtig bemessen waren, so muss *nach* der Ausgleichung vermöge (12), $m = 1$ werden.

Die Werte $v_1'\ v_2'\ v_3' \ldots$ sind reine Verhältniszahlen, deren mehr oder minder bedeutende Abweichung von 1 einen bequemen Einblick in die Fehlerverteilung und in die Brauchbarkeit der a priori geschätzten $m_1\ m_2\ m_3 \ldots$ giebt.

Wenn die Ausgleichung nicht das erwartete $m = 1$ giebt, sondern wenn aus der Formel (12) etwa $m = M$ hervorgeht, so ist es angezeigt, alle a priori geschätzten mittleren Fehler im Verhältnis $M : m$ zu ändern.

§ 41. Fehlerquadratsumme $[v\,v]$.

Die Berechnung des mittleren Gewichtseinheitsfehlers geschieht nach (8) § 37. S. 116, nämlich:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}} \text{ bzw. } \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{r}} \tag{1}$$

Wir werden für die Folge in der Regel nur von der Summe $[v\,v]$ reden, weil im Falle ungleicher Gewichte die Summe $[p\,v\,v]$ nach § 40. leicht an die Stelle von $[v\,v]$ gesetzt werden kann.

Nach Vollendung der Ausgleichung kann man die einzelnen v quadrieren und addieren, und hat damit unmittelbar $[v\,v]$.

Statt $[v\,v]$ aus den einzelnen v zu bilden, kann man, wie auch früher bei vermittelnden Beobachtungen, noch andere Wege einschlagen.

Hiezu nehmen wir vor Allem die Ausdrücke für die einzelnen v nach (9) § 39. S. 119 nochmals vor:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \\ v_2 &= a_2\,k_1 + b_2\,k_2 + c_2\,k_3 \\ v_3 &= a_3\,k_1 + b_3\,k_2 + c_3\,k_3 \\ v_4 &= a_4\,k_1 + b_4\,k_2 + c_4\,k_3 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hieraus findet man:

$$\left.\begin{aligned} [v\,v] = [a\,a]\,k_1\,k_1 + 2\,[a\,b]\,k_1\,k_2 &+ 2\,[a\,c]\,k_1\,k_3 \\ + \quad [b\,b]\,k_2\,k_2 &+ 2\,[b\,c]\,k_2\,k_3 \\ &+ \quad [c\,c]\,k_3\,k_3 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

und vergleicht man dieses mit den Normalgleichungen (10) § 39. S. 119, so hat man sofort:

$$[v\,v] = -k_1\,w_1 - k_2\,w_2 - k_3\,w_3 = -[w\,k] \tag{4}$$

Ausserdem kann man die allgemeine Umformung (20) am Schluss von § 27. S. 87 anwenden, welche für (3) ergiebt:

$$[v\,v] = \frac{([a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3)^2}{[a\,a]} + \frac{([b\,b\,.\,1]\,k_2 + [b\,c\,.\,1]\,k_3)^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{([c\,c\,.\,2]\,k_3)^2}{[c\,c\,.\,2]}$$

d. h. mit Einsetzung der w nach (10) § 39. S. 119 und entsprechend $[w_2\,.\,1]$ u. s. w.:

$$[v\,v] = \frac{w_1^2}{[a\,a]} + \frac{[w_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[w_3\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{5}$$

Diese Berechnung kann man ebenso an die Elimination der Normalgleichungen anhängen, wie dieses mit $[v\,v] = [l\,l\,.\,u]$ bei den vermittelnden Beobachtungen ge-