UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 35. Determinantenformeln für drei Elemente

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Visual Library

in den herausgegriffenen Gleichungen zu einer Determinante zusammenstellt. Ist von diesen letzteren Determinanten auch nur eine von Null verschieden, so ist die Determinante der Coefficienten der Unbekannten in den Normalgleichungen ebenfalls von Null verschieden.

Das System der Normalgleichungen hat daher jedesmal dann eine und nur eine Lösung, wenn sich aus den Fehlergleichungen auch nur eine einzige Gruppe von Gleichnngen absondern lässt, welche eben so viele Gleichungen enthält, als Unbekannte vorhanden sind, und die Eigenschaft hat, eine und nur eine Lösung zu besitzen.

§ 35. Determinantenformeln für 3 Elemente.

(Ohne Zusammenhang mit unserem allgemeinen Entwicklungsgang.)

Man kann bei 3 Elementen $x\ y\ z$ immer noch die Auflösungsformeln für $x\ y\ z$ und die Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. in einigermassen geschlossener Form angeben, ähnlich wie bei 2 Unbekannten, namentlich wenn man *Determinanten* anwendet, welche selbst ja auch bei 3 Elementen noch übersichtliche Ausrechnung gestatten.

Praktische Bedeutung haben die nachfolgenden Formeln kaum, denn die numerische Auswertung der Unbekannten und ihrer Gewichte geschieht immer am besten auf dem Wege der allmählichen Elimination.

Wenn folgende Fehlergleichungen vorliegen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + l_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ v_n = a_n\,x + b_n\,y + c_n\,z + l_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

so sind die zugehörigen Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Durch allmähliche Elimination findet man hieraus:

$$\left.\begin{array}{r} [b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] = 0 \\ [b\,c\,.\,1]\,y + [c\,c\,.\,1]\,z + [c\,l\,.\,1] = 0 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

$$[c\,c\,.\,2]\,z + [c\,l\,.\,2] = 0 \qquad (4)$$

Andererseits kann man die Determinantentheorie anwenden:

$$D = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,c] \\ [a\,b] & [b\,b] & [b\,c] \\ [a\,c] & [b\,c] & [c\,c] \end{vmatrix} = \left.\begin{array}{l} +\,[a\,a]\,[b\,b]\,[c\,c] - [a\,c]\,[b\,b]\,[a\,c] \\ +\,[a\,b]\,[b\,c]\,[a\,c] - [a\,a]\,[b\,c]\,[b\,c] \\ +\,[a\,c]\,[a\,b]\,[b\,c] - [a\,b]\,[a\,b]\,[c\,c] \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Analog sei:

$$\left.D_x = \begin{vmatrix} [a\,l] & [a\,b] & [a\,c] \\ [b\,l] & [b\,b] & [b\,c] \\ [c\,l] & [b\,c] & [c\,c] \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,l] & [a\,c] \\ [a\,b] & [b\,l] & [b\,c] \\ [a\,c] & [c\,l] & [c\,c] \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,l] \\ [a\,b] & [b\,b] & [b\,l] \\ [a\,c] & [b\,c] & [c\,l] \end{vmatrix}\right\} \qquad (6)$$

Dann werden $x\ y$ und z so bestimmt:

$$x = -\frac{D_x}{D} \qquad y = -\frac{D_y}{D} \qquad z = -\frac{D_z}{D} \qquad (7)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zwischen (4) und (5) und (6) bestehen einfache Beziehungen, es ist nämlich:

$$[c\,c\,.\,2] = \frac{D}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \qquad [c\,l\,.\,2] = \frac{D_z}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \tag{8}$$

wo der Nenner $[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]$ die schon früher in § 17. benützte Coefficienten-Determinante zweiter Ordnung ist.

$[c\,c\,.\,2]$ ist zugleich die Reciproke des Gewichts-Coefficienten $[\gamma\,\gamma]$. Alle Gewichts-Coefficienten lassen sich ähnlich darstellen:

$$\left.\begin{array}{lll}
[\alpha\alpha] = \dfrac{[bb]\,[cc] - [bc]\,[bc]}{D} & [\alpha\beta] = -\dfrac{[ab]\,[cc] - [ac]\,[bc]}{D} & [\alpha\gamma] = -\dfrac{[ac]\,[bb] - [ab]\,[bc]}{D} \\
 & [\beta\beta] = \dfrac{[aa]\,[cc] - [ac]\,[ac]}{D} & [\beta\gamma] = -\dfrac{[bc]\,[aa] - [ab]\,[ac]}{D} \\
 & & [\gamma\gamma] = \dfrac{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]}{D}
\end{array}\right\} \tag{9}$$

Auch die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler, $[l\,l\,.\,2]$, kann man dreifach durch Determinanten darstellen:

$$[l\,l\,.\,2] = \frac{\begin{vmatrix} [l\,l] & [l\,b] & [l\,c] \\ [l\,b] & [b\,b] & [b\,c] \\ [l\,c] & [b\,c] & [c\,c] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [b\,b] & [b\,c] \\ [b\,c] & [c\,c] \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,l] & [a\,c] \\ [a\,l] & [l\,l] & [l\,c] \\ [a\,c] & [l\,c] & [c\,c] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,c] \\ [a\,c] & [c\,c] \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,l] \\ [a\,b] & [b\,b] & [b\,l] \\ [a\,l] & [b\,l] & [l\,l] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] \\ [a\,b] & [b\,b] \end{vmatrix}} \tag{10}$$

Die Richtigkeit aller vorstehenden Formeln kann man sofort einsehen, wenn man die Determinanten zweiten und dritten Grades in bekannter Weise entwickelt. Über die Gültigkeit analoger Formeln für mehr als 3 Elemente verweisen wir auf *Vogler*, Lehrbuch der praktischen Geometrie, 1. Teil S. 253 u. ff., und entnehmen von dort auch noch, dass die Coefficienten-Determinante D ausser der ursprünglichen Form (5) noch folgende andere leicht zu begründende Formen hat:

$$D = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,c] \\ 0 & [b\,b\,.\,1] & [b\,c\,.\,1] \\ 0 & [b\,c\,.\,1] & [c\,c\,.\,1] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,c] \\ 0 & [b\,b\,.\,1] & [b\,c\,.\,1] \\ 0 & 0 & [c\,c\,.\,2] \end{vmatrix} = [a\,a]\,.\,[b\,b\,.\,1]\,.\,[c\,c\,.\,2]$$

Auch für die Gewichts-Coefficienten bestehen noch manche andere Formen:

$$[\gamma\,\gamma] = \frac{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & 0 \\ [a\,b] & [b\,b] & 0 \\ [a\,c] & [b\,c] & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & 0 \\ 0 & [b\,b\,.\,1] & 0 \\ 0 & [b\,c\,.\,1] & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{[a\,a] \begin{vmatrix} [b\,b\,.\,1] & 0 \\ [b\,c\,.\,1] & 1 \end{vmatrix}}{D}$$

Die erste dieser 3 Formen giebt aufgelöst daselbe wie (9).

Man kann solche Formeln vielleicht gelegentlich als Rechenproben benützen.

Die Determinanten sind symbolische Bezeichnungen, ähnlich wie unsere $[bb\,.\,1]$ $[c\,c\,.\,2]$ u. s. w., und so lange diese besonders der Methode der kleinsten Quadrate angepasste Symbolik ausreicht, ist kein Grund vorhanden, eine andere, für numerische Berechnung weniger geeignete Symbolik anzuwenden.

Die Benützung allgemeiner Determinantensätze zu Betrachtungen von solcher Art wie am Schluss von § 34. ist dagegen sehr nützlich.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN