Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 24. Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen x un y

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Man kann nun diese nach dem logarithmischen Gesetz gemachte Ausgleichung mit der früheren, nach linearem Gesetz gemachten Ausgleichung vergleichen. Nach (15) § 14. S. 51 gab die frühere Ausgleichung die Quadratsumme der übrig bleibenden scheinbaren Fehler $[v\,v] = 1{,}4695$, also etwas *kleiner* als die neue Ausgleichung mit 1,6386.

Die übrig bleibende Summe $[v\,v]$ betrachtet man in solchen Fällen als Kriterium der Güte der angewendeten Funktion, und in diesem Falle erscheint also die lineare Funktion *besser* als die theoretische logarithmische Funktion, was jedenfalls nicht der Fall ist, und nur durch Zufall erklärt werden kann.

Als sachliches Resultat heben wir hervor: Der auf den Meeresspiegel reduzierte mittlere Barometerstand in Württemberg ist:

$$B_0 = 762{,}7^{mm} \pm 0{,}4^{mm}.$$

Eine weitergehende Interpolations-Ausgleichung dieser Art wurde von uns in der Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie 1880, S. 162—167 veröffentlicht.

26 badische und württembergische Stationen zwischen 111^m und 1009^m Höhe gaben die Formel:

$$h = 18517 \log \frac{762{,}56}{B} (1 + 0{,}003665\, t)$$

wo t die mittlere Jahrestemperatur ist. Hiebei ist:

$$B_0 = 762{,}56^{mm} \pm 0{,}10^{mm}.$$

§ 24. Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen x und y.

Schon am Schlusse von § 17. S. 58, als von den Gewichten und mittleren Fehlern der ausgeglichenen x und y die Rede war, mit den Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ und $[\beta\,\beta]$, haben wir die Bemerkung gemacht, dass es auch noch einen ähnlichen Coefficienten $[\alpha\,\beta]$ giebt, welcher dann gebraucht wird, wenn es sich um eine *Funktion* der ausgeglichenen x und y handelt.

Indem wir dem Leser anheimgeben, mit dieser nicht dringlichen Sache sofort sich bekannt zu machen, müssen wir doch der Vollständigkeit wegen das Funktions-Gewicht für 2 Elemente auch noch hier erledigen, ehe wir zu beliebig vielen Unbekannten übergehen.

Jedenfalls wollen wir schon vor Beginn der Formel-Entwicklung vor einem Irrtum warnen, der leicht vorkommen kann, nämlich die mittleren Fehler m_x und m_y, welche nach § 17. berechnet wurden, als *unabhängig* weiter zu behandeln, was nicht zulässig ist.

Oft hat es weniger Interesse, die Genauigkeit der Unbekannten x und y selbst zu kennen, als die Genauigkeit einer Funktion derselben; wir nehmen die lineare Funktion:

$$F = f_1\, x + f_2\, y \tag{1}$$

Es könnte auf den ersten Blick erscheinen, als ob man den mittleren Fehler von F kurzweg aus den mittleren Fehlern von x und y berechnen könnte nach der Formel (10) § 5. S. 17:

$$M^2 = (f_1\, m_x)^2 + (f_2\, m_y)^2 \quad (?) \tag{2}$$

Allein dieses ist nicht richtig, weil die x und y durchaus *nicht* unabhängige Beobachtungen mit den ebenfalls unabhängigen mittleren Fehlern m_x und m_y sind, vielmehr hängen x und y von *denselben* Messungen $l_1\, l_2 \ldots l_n$ ab. Wenn z. B. zufällig die Fehler aller l positiv wären, so würden nach (1) und (2) § 17. S. 56 auch die Fehler von x *und* von y beide positiv.

Setzen wir zunächst bestimmte Fehler Δl_1 Δl_2 . . . der l voraus, so folgen daraus die bestimmten Fehler Δ_x und Δ_y nach (1) und (2) § 17. S. 56:

$$\Delta x = \alpha_1 \Delta l_1 + \alpha_2 \Delta l_2 + \alpha_3 \Delta l_3 + \ldots \tag{3}$$

$$\Delta y = \beta_1 \Delta l_1 + \beta_2 \Delta l_2 + \beta_3 \Delta l_3 + \ldots \tag{4}$$

und daraus folgt ferner der bestimmte Fehler von F nach (1):

$$\Delta F = f_1 \Delta x + f_2 \Delta y \tag{5}$$

Wenn man dieses quadriert und die Mittelwerte der Quadrate bildet, so wird, wenn n malige Wiederholung angenommen wird:

$$\frac{[\Delta F \Delta F]}{n} = f_1^2 \frac{[\Delta x \Delta x]}{n} + f_2^2 \frac{[\Delta y \Delta y]}{n} + 2 f_1 f_2 \frac{[\Delta x \Delta y]}{n} \tag{6}$$

und hier ist der Mittelwert $\frac{[\Delta x \Delta y]}{n}$ nicht gleich Null, denn es ist nach (3) und (4):

$$\left.\begin{aligned} \Delta x \Delta y = \alpha_1 \beta_1 (\Delta l_1)^2 + \alpha_2 \beta_2 (\Delta l_2)^2 + \alpha_3 \beta_3 (\Delta l_3)^2 + \ldots \\ + \alpha_1 \beta_2 \Delta l_1 \Delta l_2 + \alpha_2 \beta_1 \Delta l_2 \Delta l_1 + \alpha_1 \beta_3 \Delta l_1 \Delta l_3 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Hier werden die Mittelwerte der in der *zweiten* Linie stehenden Produkte allerdings = Null, weil die *verschiedenen* (mit ungleichen Nummern $_1$ und $_2$ u. s. w. bezeichneten) Δl unter sich unabhängig sind. Es bleibt also nur die erste Linie von (7) weiter zu betrachten, und diese giebt den Mittelwert:

$$\frac{[\Delta x \Delta y]}{n} = [\alpha \beta] m^2 \tag{8}$$

Die übrigen in (6) auftretenden, quadratischen Mittelwerte haben bereits bekannte Bedeutungen, nämlich:

$$\frac{[\Delta x \Delta x]}{n} = m_x^2 = [\alpha \alpha] m^2 \quad \text{und} \quad \frac{[\Delta y \Delta y]}{n} = m_y^2 = [\beta \beta] m^2$$

Setzt man dieses nebst (8) in (6) ein, so wird:

$$\frac{[\Delta F \Delta F]}{n} = M^2 = m^2 \left\{ f_1^2 [\alpha \alpha] + f_2^2 [\beta \beta] + 2 f_1 f_2 [\alpha \beta] \right\} \tag{9}$$

oder auch: $$M^2 = (f_1 m_x)^2 + (f_2 m_y)^2 + 2 f_1 f_2 [\alpha \beta] m^2 \tag{10}$$

Würde man also die unrichtige Formel (2) angewendet haben, so würde das Glied $2 f_1 f_2 [\alpha \beta] m^2$ in (10), welches die Zusammenwirkung der beiden Fehler m_x und m_y ausdrückt, verloren gegangen sein.

Statt (9) kann man auch schreiben (wegen (18) § 17. S. 58):

$$M^2 = m^2 \left\{ \frac{f_1^2}{[a a . 1]} + 2 \frac{f_1 f_2}{[a b . 1]} + \frac{f_2^2}{[b b . 1]} \right\} \tag{11}$$

Die Gleichung (9) kann man ausserdem noch in eine andere Gestalt bringen mit Benützung der Beziehungen, welche am Schluss von § 17. S. 58 zusammengestellt sind, nämlich:

$$[\alpha \alpha] = \frac{[b b]}{D} \qquad [\beta \beta] = \frac{[a a]}{D} \qquad [\alpha \beta] = \frac{-[a b]}{D}$$

damit wird (9): $$\frac{M^2}{m^2} = \frac{1}{P} = \frac{1}{D} \left\{ f_1^2 [b b] + f_2^2 [a a] - 2 f_1 f_2 [a b] \right\} \tag{12}$$

und dieses kann auch noch so umgeformt werden:

$$\frac{1}{P} = \frac{f_1^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2 \,.\, 1]^2}{[b\,b \,.\, 1]} \tag{13}$$

wobei
$$[f_2 \,.\, 1] = f_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]} f_1. \tag{14}$$

Beispiel eines Funktions-Gewichtes.

Um auch eine Anwendung der vorstehenden Formeln zu haben, müssen wir vor allem den Coefficienten $[a\,b \,.\, 1] = \frac{1}{[\alpha\,\beta]}$ berechnen, wozu die Formel (16) § 17. S. 58 dient:

$$[a\,b \,.\, 1] = [a\,b] - \frac{[a\,a]}{[a\,b]}[b\,b] \qquad \text{oder} \qquad = [a\,b] - \frac{[b\,b]}{[a\,b]}[a\,a]$$

Wir haben dieses zweifach geschrieben, weil diese beiden Formen sich den Eliminationen von x und von y anschliessen.

Um dieses deutlich zu zeigen, setzen wir die Anfänge jener Eliminationen von § 19. S. 62 und S. 63 nochmals her, und fügen die Berechnung von $[a\,b \,.\, 1]$ beidemale bei:

	a]	b]	l]			b]	a]	l]
[a	+ 9,0	— 40,7	+ 4,9		[b	+ 229,9	— 40,7	— 25,3
[b	— 40,7	+ 229,9	— 25,3		[a	— 40,7	+ 9,0	+ 4,9
	+ 50,8	— 184,4	+ 22,1			+ 50,8	— 7,2	— 4,5
	+ 10,1	+ 45,5	— 3,2			+ 10,1	+ 1,8	+ 0,4
	= [a b . 1]	[b b . 1]				= [b a . 1]	[a a . 1]	

Es soll nun für die Höhe $h = 1000^{m}$ der mittlere Barometerstand B und dessen mittlerer Fehler, bzw. Gewicht, berechnet werden. Es handelt sich also um die Funktion:

$$B = 761{,}77 - 0{,}08695\,h \qquad \text{oder} \qquad = 761{,}77 - 8{,}695 \left(\frac{h}{100}\right)$$

mit $h = 1000$:

$$B = 761{,}77 - 10 \times 8{,}695 = X - 10\;Y = 674{,}82 \tag{15}$$

Dieses entspricht der Funktion (1):

$$F = f_1\,x + f_2\,y \qquad \text{d. h.} \qquad f_1 = 1 \qquad f_2 = -10.$$

Zur Berechnung des mittleren Fehlers M der Funktion (1) haben wir oben die Formel (11) gefunden, welche mit Einsetzung aller Zahlenwerte giebt:

$$M^2 = 0{,}46^2 \left\{\frac{1}{1{,}8} - \frac{20}{10{,}1} + \frac{100}{45{,}5}\right\} = 0{,}46^2 \times 0{,}77$$

$$M = \pm\, 0{,}40^{mm}$$

also
$$B_{1000} = 674{,}82^{mm} \pm 0{,}40^{mm}$$

Das heisst also: In der Höhe 1000^{m} über dem Meere wird, nach der Beobachtungsweise (1) § 23. S. 72, ein Jahres-Mittel-Barometerstand $= 674{,}82^{mm}$ zu erwarten sein, und zwar kann man das aus den vorhandenen Beobachtungen schliessen mit einem mittleren zu fürchtenden Fehler von $\pm\, 0{,}40^{mm}$.