Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 21. Ungleiche Gewichte

Addiert man diese Beträge algebraisch zu den darüberstehenden Coefficienten $[b\,b] = +229{,}87$ u. s. w., so erhält man:

$$[b\,b\,.\,1] = +45{,}45 \qquad [b\,l\,.\,1] = -3{,}17 \qquad [b\,s\,.\,1] = -42{,}29$$
$$[l\,l\,.\,1] = +1{,}68 \qquad [l\,s\,.\,1] = +1{,}49$$

Zu diesem erstmals reduzierten System gehört nun der zweite Zettel b.

Verfährt man mit diesem ebenso wie vorher mit dem Zettel $a.$, so ist die Elimination vollendet, und auf dem Zettel $b.$ selbst hat man:

$$log \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} = log\, y \text{ (abgesehen vom Vorzeichen).}$$

Um auch x zu erhalten, kann man zwar in gewöhnlicher Weise das erhaltene y in eine der Normalgleichungen

$$\begin{aligned} +\ 9{,}00\,x - 40{,}74\,y + 4{,}88 &= 0 \\ -40{,}74\,x + 229{,}87\,y - 25{,}26 &= 0 \end{aligned}$$

einsetzen, und erhält damit $x = -0{,}226$. Wenn man aber auch das Gewicht von x haben will, so stellt man die ganze Elimination um, so dass y die erste und x die zweite Unbekannte wird, wie schon auf S. 63 angegeben ist. Auf diese Weise erhält man:

$$\left.\begin{array}{lll} x = -0{,}226 & [l\,l\,.\,2] = 1{,}46 & y = +0{,}06975 \\ [a\,a\,.\,1] = +1{,}78 & & [b\,b\,.\,1] = +45{,}45 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

$[l\,l\,.\,2] = 1{,}46$ stimmt genügend mit dem schon früher (am Schluss von § 14. (13) S. 51) berechneten $[v\,v] = 1{,}4695$, man hat also jetzt den mittleren Gewichtseinheitsfehler

$$m = \sqrt{\frac{1{,}47}{9-2}} = \pm 0{,}46^{mm} \qquad (6)$$

und damit auch die mittleren Fehler von x und y:

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{1{,}78}} = \pm 0{,}34^{mm} \qquad m_y = \frac{m}{\sqrt{45{,}45}} = \pm 0{,}06797$$
$$x = -0{,}23^{mm} \pm 0{,}34^{mm} \qquad y = +0{,}06975 \pm 0{,}06797$$

Dieses ist also das Ergebnis der reinen Elimination; die Weiterverwertung der gewonnenen y und x ist dann ebenso wie schon am Schluss des vorigen § 19. S. 64—65 gezeigt worden ist.

§ 21. Ungleiche Gewichte.

Bisher wurde angenommen, dass alle Beobachtungen l von vornherein gleich genau seien. Wenn dieses nicht der Fall ist, haben die einzelnen l verschiedene Gewichte. Wir wollen annehmen:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{Beobachtungen} & l_1 & l_2 & l_3 \ldots l_n \\ \text{mit Gewichten} & p_1 & p_2 & p_3 \ldots p_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Die Fehlergleichungen seien dieselben wie früher:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + l_1 & \text{Gewicht} = p_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + l_2 & = p_2 \\ v_3 = a_3\,x + b_3\,y + l_3 & = p_3 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ v_n = a_n\,x + b_n\,y + l_n & = p_n \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Dann hat man nicht mehr $[v\,v]$ zu einem Minimum zu machen, sondern:

$$[p\,v\,v] = \text{Minimum} \qquad (3)$$

Dieses giebt die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}[p\,a\,a]\,x + [p\,a\,b]\,y + [p\,a\,l] = 0 \\ [p\,a\,b]\,x + [p\,b\,b]\,y + [p\,b\,l] = 0\end{array}\right\} \qquad (4)$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von (3) § 13. S. 45 nur dadurch, dass in jeder Klammer p zugesetzt ist; eine weitere Änderung gegen früher tritt nicht ein. Auch bei der Elimination tritt z. B. $[p\,b\,b\,.\,1]$ an die Stelle von $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wird:

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{n-2}} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{[p\,l\,l\,.\,2]}{n-2}} \qquad (5)$$

Dieser Fehler m gehört im allgemeinen zu keiner wirklichen Beobachtung, sondern zu einer fingierten Beobachtung, welche das Gewicht $p = 1$ hat.

Wenn die Gewichtswurzeln $\sqrt{p}$ bequeme Zahlen sind, so ist es oft nützlich, statt geradezu $[p\,a\,a]$, $[p\,a\,b]$ u. s. w. auszurechnen, so zu verfahren:

Man multipliziert alle Coefficienten a, b und die Absolutglieder l der Fehlergleichungen mit $\sqrt{p}$, und denkt sich die Fehlergleichungen (2) nun so geschrieben:

$$\left.\begin{array}{l} v_1\sqrt{p_1} = a_1\sqrt{p_1} + b_1\sqrt{p_1} + l_1\sqrt{p_1} \\ v_2\sqrt{p_2} = a_2\sqrt{p_2} + b_2\sqrt{p_2} + l_2\sqrt{p_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (6)$$

dann giebt die Quadrierung von selbst die Summe $[p\,v\,v]$ nach (3) und die Normalgleichungen (4).

Man kann diese Sache auch so auffassen: Mögen die Summen direkt nach (4) oder nach (6) entstanden sein; man kann immer dem *Zeichen* $[a\,a]$ die Bedeutung unterlegen:

$$p_1\,a_1^2 + p_2\,a_2^2 + p_3\,a_3^2 + \ldots \qquad = [a\,a] \qquad \text{u. s. w.} \qquad (7)$$

und damit gelten alle bisherigen Formeln auch für ungleiche Gewichte.

Die Coefficienten α, β in § 17. erhalten hiebei auch veränderte Bedeutungen, nämlich entsprechend (1) S. 56 haben wir nun:

$$x = \frac{\alpha_1}{\sqrt{p_1}}(l_1\sqrt{p_1}) + \frac{\alpha_2}{\sqrt{p_2}}(l_2\sqrt{p_2}) + \cdots \qquad (8)$$

$$\frac{1}{p_x} = \left[\frac{\alpha\,\alpha}{p}\right] \quad , \quad \frac{1}{p_y} = \left[\frac{\beta\,\beta}{p}\right] \qquad (9)$$

Die Weiterrechnung nach § 17. führt aber abermals auf die Formel:

$$p_y = [p\,b\,b\,.\,1], \qquad (10)$$

so dass man also überall sich nicht weiter um die Gewichte zu kümmern hat, sobald die Summen-Coefficienten entweder nach (4) unmittelbar oder nach (6) berechnet vorliegen.

Damit ist bereits alles zur Ausgleichung mit ungleichen Gewichten Erforderliche behandelt, wir wollen aber noch einige Bemerkungen zufügen (welche zunächst auch übergangen werden können).

Mittlere Fehler a priori angenommen.

Wenn die Genauigkeitsverhältnisse der Beobachtungen und der Fehlergleichungen geradezu durch mittlere Fehler (nach Schätzung a priori oder sonst wie) angenommen sind, so sind die Gewichte p den Quadraten dieser mittleren Fehler umgekehrt proportional zu nehmen, und die Rechnung ist nach den Formeln (1) bis (5), oder (6) bis (10) zu führen; indessen kann man die Formeln auch so schreiben, dass nicht von Gewichten p, sondern nur von mittleren Fehlern m die Rede ist, und diese mehr anschauliche Form empfiehlt sich in vielen Fällen. Wir haben so:

Fehlergleichungen: — Mittlere Fehler der l *vor* der Ausgleichung:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 & \pm m_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 & \pm m_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ v_n = a_n x + b_n y + l_n & \pm m_n \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Ausgleichungsprinzip:

$$\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right] = \left(\frac{v_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{m_2}\right)^2 + \ldots \left(\frac{v_n}{m_n}\right)^2 = \text{Minimum} \qquad (12)$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{a\,a}{m\,m}\right] x + \left[\frac{a\,b}{m\,m}\right] y + \left[\frac{a\,l}{m\,m}\right] = 0 \\ \left[\frac{a\,b}{m\,m}\right] x + \left[\frac{b\,b}{m\,m}\right] y + \left[\frac{b\,l}{m\,m}\right] = 0 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Mittlerer Gewichtseinheitsfehler *nach* der Ausgleichung:

$$m = \sqrt{\frac{1}{n-2}\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right]} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{1}{n-2}\left[\frac{l\,l}{m\,m}\,.\,2\right]} \qquad (14)$$

Die mittleren Fehler der Werte von l *nach* der Ausgleichung sind bzw.:

$$m_1' = \frac{m}{1} m_1 \;,\; m_2' = \frac{m}{1} m_2 \ldots m_n' = \frac{m}{1} m_n \qquad (15)$$

Wenn die $m_1\ m_2 \ldots m_n$ schon *vor* der Ausgleichung richtig bemessen waren, so wird $\quad m = 1$ und $m_1' = m_1 \quad m_2' = m_2$ u. s. w.

Um zu einer weiteren Betrachtung in Bezug auf Gewichte zu gelangen, gehen wir von dem einfachen Fall aus, dass eine Fehlergleichung das Gewicht 2 und alle anderen das Gewicht 1 haben, also etwa:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 & p = 1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 & p = 1 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 & p = 2 \end{array}\right\} \qquad (16)$$

dann ist die erste Normalgleichung:

$$(a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2)\, x + (a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2\, a_3 b_3)\, y + (a_1 l_1 + a_2 l_2 + 2\, a_3 l_3) = 0$$

Dasselbe würde man auch erhalten, wenn man die dritte Fehlergleichung doppelt einsetzte, und dann mit folgendem System weiter rechnete:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 & p = 1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 & p = 1 \\ \left\{\begin{array}{l} v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 \\ v_4 = a_3 x + b_3 y + l_3 \end{array}\right. & \begin{array}{l} p = 1 \\ p = 1 \end{array} \end{array}\right\} \qquad (17)$$

Aus beiden Systemen (16) und (17) erhält man dieselben Unbekannten $x\ y$ mit denselben Gewichten und derselben Summe $[l\,l\,.\,2] = [v\,v]$.

Wenn man aber die mittleren Fehler berechnet, so darf man bei (17) *nicht* 4 Gleichungen in Rechnung bringen, sondern nur 3, d. h. es ist:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{3-2} \text{ und } \textit{nicht} = \frac{[v\,v]}{4-2} \tag{17 a}$$

Wenn umgekehrt die Gleichungen (17) den Beobachtungen entsprechen, so darf man zwar zur Ausgleichung selbst statt (17) ein System von der Form (16) anwenden, bei der Fehlerberechnung ist aber die ursprüngliche Zahl der Fehlergleichungen, d. h. der Beobachtungen, massgebend.

Wenn 2 Fehlergleichungen mit gleichen Coefficienten $a, b \ldots$, aber mit ungleichen Absolutgliedern l, und mit ungleichen Gewichten vorliegen:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + l_1 & \text{Gewicht} = p_1 \\ v_2 = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + l_2 & \phantom{\text{Gewicht}}\text{"} \;\; = p_2 \end{array}\right\} \tag{18}$$

so geben diese nach gewöhnlichem Verfahren folgende Beiträge zu den Coefficienten der Normalgleichungen:

$$p_1 a^2 + p_2 a^2 = (p_1 + p_2) a^2 \;,\; (p_1 + p_2)\,a\,b \ldots p_1\,a\,l_1 + p_2\,a\,l_2 = a(p_1\,l_1 + p_2\,l_2) \tag{19}$$

Beitrag zu dem Fehlerquadrat-Gliede:

$$(p_1\,l_1^2 + p_2\,l_2^2) \tag{20}$$

Wir wollen nun statt der *zwei* Gleichungen (18) die *eine* folgende schreiben:

$$v' = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + \frac{p_1\,l_1 + p_2\,l_2}{p_1 + p_2}, \quad \text{Gewicht} = p_1 + p_2 \tag{18'}$$

Diese *eine* Gleichung giebt zu den Normalgleichungen folgende Beiträge:

$$(p_1 + p_2)\,a^2 \quad , \quad (p_1 + p_2)\,a\,b \ldots \quad a\,(p_1\,l_1 + p_2\,l_2) \tag{19'}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{(p_1\,l_1 + p_2\,l_2)^2}{p_1 + p_2} \tag{20'}$$

Die Coefficienten (19) und (19′) sind identisch, dagegen die Beiträge zur Quadratsumme $[p\,l\,l]$ sind in (20) und in (20′) nicht identisch, und nur wenn $l_1 = l_2$ ist, geht (20′) in (20) über.

Dieses Resultat heisst in Worten: Man kann zwei Fehlergleichungen von der Form (18), d. h. mit gleichen Coefficienten aber ungleichen Absolutgliedern, durch *eine* Gleichung (18′) ersetzen, soweit es sich nur um die Unbekannten $x\,y\,z \ldots$ selbst und um deren Gewichte handelt, dagegen für die Berechnung mittlerer Fehler giebt die Gleichung (18′) keinen richtigen Ersatz der zwei ursprünglichen Gleichungen, sondern nur eine etwa näherungsweise zulässige Genauigkeitsbestimmung. In dem Nenner des mittleren Fehlerquadrats muss aber jedenfalls die Gleichung (18′) als *zwei* Gleichungen zählen.

§ 22. Nicht lineare Funktionen.

Wenn die Beziehungen zwischen den Beobachtungen und den Unbekannten nicht durch lineare Gleichungen dargestellt sind, so kann man dennoch die Ausgleichung auf lineare Fehlergleichungen zurückführen in folgender Weise:

Man habe die Beobachtungen

$$L_1 \quad L_2 \quad L_3 \ldots L_n$$

welche mit den Unbekannten X und Y in folgenden Beziehungen stehen:

Es *soll* sein:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(X, Y) - L_1 = 0 \\ F_2(X, Y) - L_2 = 0 \\ F_3(X, Y) - L_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ F_n(X, Y) - L_n = 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$