Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 18. Coefficienten-Berechnung und Summenproben

$$D = [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b] \tag{20}$$

Dieser Coefficienten-Determinante D entspricht auch eine Gewichts-Coefficienten-Determinante:

$$\varDelta = [\alpha\,\alpha]\,[\beta\,\beta] - [\alpha\,\beta]\,[\alpha\,\beta] \tag{21}$$

und es besteht zwischen beiden die Beziehung:

$$D\,\varDelta = 1 \tag{22}$$

Wir wiederholen hiezu aber die Bemerkung, dass man all das letzte, von (13) bis (22) für die nächsten Aufgaben *nicht* braucht.

§ 18. Coefficienten-Berechnung und Summen-Proben.

Obgleich durch die vorhergehenden § 13.—17. die Ausgleichung mit zwei Unbekannten x und y vollständig klargelegt ist, wollen wir doch vor Beginn eines Zahlenbeispiels noch einige Bemerkungen machen über die Ausrechnung und Versicherung der Quadratsummen und Produktsummen $[a\,a]$, $[a\,b]$ u. s. w.

Die Ausrechnung der Quadrate $a\,a$ und der Produkte $a\,b$ u. s. w. kann, je nachdem die Zahlen einfach oder mit vielen Stellen angegeben sind, verschieden geschehen. Es sind hiezu die mechanischen Rechenhilfsmittel zu erwähnen, welche wir in unserem II. Bande, 4. Aufl., S. 118—134 beschrieben haben: Rechenschieber, Rechenscheibe, Rechenmaschinen u. s. w.

Die Quadrate bildet man jedenfalls mit einer Quadrattafel, wie eine solche z. B. auf S. [2]—[6] unseres Anhangs mit 3stelligem Argument gegeben ist. Für grössere Genauigkeit (welche aber bei guter Vorbereitung der Rechenform selten nötig ist) hat man ausführlichere Quadrattafeln als Beigaben zahlreicher Logarithmentafeln und anderer Tabellenwerke.

Die Produkte $a\,b$ u. s. w. kann man direkt ausmultiplizieren, wie in den Beispielen S. 48 und S. 50 mit $[b\,l]$ geschehen ist. Bei mehrstelligen Zahlen kann man sich einer Produktentafel bedienen, deren zur Zeit zwei vorhanden sind, nämlich:

Dr. *A. L. Crelle*s Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, mit einem Vorworte von Bremiker. 5. Ausgabe, Berlin 1880.

Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte, entworfen und bearbeitet von Dr. *H. Zimmermann*, Regierungsrat. Berlin 1889.

Crelle giebt alle Produkte von 3- und 3stelligen Faktoren, Zimmermann giebt die Produkte aus 3- und 2stelligen Faktoren.

Es giebt aber auch ein sehr gutes Verfahren, die Produkte mit der Quadrattafel zu bestimmen. Es ist nämlich:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b \quad \text{oder} \quad a\,b = \frac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{2}$$

woraus man findet:

$$[a\,b] = \frac{[(a+b)^2] - ([a\,a] + [b\,b])}{2} \tag{1}$$

und da man $[a\,a]$ sowie $[b\,b]$ ohnehin braucht, so ist nur noch $[(a+b)^2]$ d. h. die Summe der Quadrate $(a+b)^2$ auszurechnen.

Statt $(a+b)^2$ kann man auch $(a-b)^2$ benützen in dieser Weise:

$$[a\,b] = \frac{[(a-b)^2] + [a\,a] + [b\,b]}{2} \tag{2}$$

Wir wollen dieses Verfahren an einem Beispiele zeigen, welches zu § 14. und § 19. gehört:

b	l	$b\,l$		b^2	l^2	$(b+l)$	$(b+l)^2$
1,20	0,45	+ 0,54		1,44	0,20	1,65	2,72
2,25	0,22	0,50		5,06	0,05	2,47	6,10
2,71	0,16	0,43		7,34	0,03	2,87	8,24
3,48	0,75	2,61		12,11	0,56	4,23	17,89
4,07	— 0,07		— 0,28	16,56	0,00	4,00	16,00
4,92	1,37	6,74		24,21	1,88	6,29	39,56
7,08	0,45	3,19		50,13	0,20	7,53	56,70
7,34	1,10	8,07		53,88	1,21	8,44	71,23
7,69	0,45	3,46		59,14	0,20	8,14	66,26
40,74	4,88	+25,54	— 0,28	229,87	4,33	45,62	284,70
45,62		+ 25,26		$= [b\,b]$	$= [l\,l]$		— 234,20
		$= [b\,l]$		$[b\,b]+[l\,l] = 234,20$			$2\,[b\,l] = +\,50,50$
							$[b\,l] = +\,25,25$

Wir haben also $[b\,l]$ unmittelbar $= +\,25,26$ und auf dem Wege über $(b+l)^2$ und $[b\,b]$ und $[l\,l]$ mittelbar $[b\,l] = +\,25,25$ gefunden, was hinreichend zusammen stimmt. Damit ist nicht nur $[b\,l]$ selbst, sondern es sind auch $[b\,b]$ und $[l\,l]$ versichert.

Man kann solche Proben in den verschiedensten Verbindungen machen; man kann z. B. $[a\,a]$ und $[b\,b]$ nebst $[a\,b]$ durch $[(a+b)^2]$ kontrollieren und dann noch die Produktsumme der $(a+b)\,l$ bilden, wodurch auch noch $[a\,l]$ und $[b\,l]$ versichert sind.

Man kann auch noch in anderer Weise ein Produkt durch Quadrate bestimmen, nach der Gleichung

$$a\,b = \frac{1}{4}\,(a+b)^2 + \frac{1}{4}\,(a-b)^2$$

Hiernach ist berechnet: Tafel der Viertel-Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 bis 200 000 u. s. w. von *Joseph Plater*, Wien 1887, besprochen von Hammer in der Zeitschr. f. Verm. 1888, S. 485—486. Für Multiplikation vielstelliger Zahlen kann diese Tafel von Nutzen sein (nachdem man sich in der Anordnung mit den 3 *letzten* Stellen als Überschrift zurecht gefunden hat), für Produkte kleiner Faktoren, wie sie in der M. d. kl. Q. meist vorkommen, lohnt sich die Tafel der Viertelquadrate kaum.

Summenproben. Man kann die Berechnung der Coefficienten $[a\,a]$, $[a\,b]$ u. s. w. auch durch Summen kontrollieren, welche immer über die ganze Reihe a, b, l sich erstrecken.

Bei nur *zwei* Elementen x, y, bzw. a, b tritt der grosse Vorteil solcher Summenproben noch nicht so deutlich hervor, wie bei vielen Unbekannten, wo die Probesummen durch die ganze Rechnung, namentlich auch in der Elimination von Linie zu Linie wirksam, ausgezeichnete Dienste leisten. Indessen müssen wir, um das Verfahren allmählich einzuüben, auch schon bei zwei Unbekannten den ganzen Probesummenapparat kennen lernen. Dabei ist es bequem, nicht die Summen selbst sondern die *negativen* Summen in Rechnung zu nehmen, so dass immer alles auf Null ausgehen muss, d. h. wir setzen:

$$a_1 + b_1 + l_1 + s_1 = 0$$
$$a_2 + b_2 + l_2 + s_2 = 0 \text{ u. s. w.}$$

dann ist auch:

$$
\begin{aligned}
[a\,a] + [a\,b] + [a\,l] + [a\,s] &= 0\\
[a\,b] + [b\,b] + [b\,l] + [b\,s] &= 0\\
[a\,l] + [b\,l] + [l\,l] + [l\,s] &= 0\\
[a\,s] + [b\,s] + [l\,s] + [s\,s] &= 0
\end{aligned}
$$

Dieses wollen wir durch Linien in folgender Weise andeuten:

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
[a\,a] & [a\,b] & [a\,l] & [a\,s]\\
\cline{1-4}
 & [b\,b] & [b\,l] & [b\,s]\\
\cline{2-4}
 & & [l\,l] & [l\,s]\\
\cline{3-4}
 & & & [s\,s]
\end{array}
$$

Man bekommt also ein Coefficienten-System, wie wenn statt 2 Unbekannten deren 3 vorhanden wären. Dem entsprechend rechnet man auch weiter nicht nur $[b\,b\,.\,1]$, $[b\,l\,.\,1]$, sondern auch $[b\,s\,.\,1]$, $[l\,s\,.\,1]$ u. s. w, d. h.:

$$
[b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] \quad\Big|\quad [b\,l\,.\,1] = [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] \quad\Big|\quad [b\,s\,.\,1] = [b\,s] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,s]
$$

$$
[l\,l\,.\,1] = [l\,l] - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,l] \quad\Big|\quad [l\,s\,.\,1] = [l\,s] - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,s]
$$

$$
[s\,s\,.\,1] = [s\,s] - \frac{[a\,s]}{[a\,a]}[a\,s]
$$

Hiemit hat man wieder Proben, nämlich:

$$
\begin{array}{c|c|c}
[b\,b\,.\,1] & [b\,l\,.\,1] & [b\,s\,.\,1]\\
\cline{1-3}
 & [l\,l\,.\,1] & [l\,s\,.\,1]\\
\cline{2-3}
 & & [s\,s\,.\,1]
\end{array}
$$

Die Richtigkeit der hierdurch angedeuteten Probegleichungen lässt sich leicht einsehen, z. B.:

$$
\begin{aligned}
[b\,b\,.\,1] &= [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]\\
[b\,l\,.\,1] &= [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]\\
0 &= [a\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,a]\\
\hline
[b\,b\,.\,1] + [b\,l\,.\,1] &= -[b\,s] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}(-[a\,s]) = -[b\,s\,.\,1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& [b\,b\,.\,1] + [b\,l\,.\,1] + [b\,s\,.\,1] = 0\\
\text{und ebenso:}\quad & [b\,l\,.\,1] + [l\,l\,.\,1] + [l\,s\,.\,1] = 0\\
\text{„}\quad\text{„}\quad & [b\,s\,.\,1] + [l\,s\,.\,1] + [s\,s\,.\,1] = 0
\end{aligned}
$$

So geht es auch noch weiter:

$$
[l\,l\,.\,2] = [l\,l\,.\,1] - \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1] \quad\Big|\quad [l\,s\,.\,2] = [l\,s\,.\,1] - \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,s\,.\,1]
$$

$$
[s\,s\,.\,2] = [s\,s\,.\,1] - \frac{[b\,s\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,s\,.\,1]
$$

Die hiebei giltigen Proben sind angedeutet durch:

$$
\begin{array}{c|c}
[l\,l\,.\,2] & [l\,s\,.\,2]\\
\cline{1-2}
 & [s\,s\,.\,2]
\end{array}
$$

d. h. diese 3 letzten Glieder müssen einander gleich werden, wie sich in ähnlicher Weise, wie oben bei den Coefficienten $[\ldots 1]$, leicht nachweisen lässt.

Nun kommt noch die wichtige Probe, dass $[l\,l\,.\,2] = [v\,v]$ werden muss, indem $[v\,v]$ durch Quadrieren der einzelnen auszurechnenden v bestimmt wird.

Die mitgeteilten sehr zahlreichen Proben sind bei einiger Übung, wenn nur 2 Unbekannte vorhanden sind, teilweise überflüssig, und man kann sich hier, so weit die Elimination in Frage kommt, wohl mit der Probe begnügen, dass $[l\,l\,.\,2]$, dessen Bestimmung bei y *und* bei x vorkommt, hiebei übereinstimmend erhalten werden muss. Oft wird man die *quadratischen* Schlussglieder $[s\,s]$, $[s\,s\,.\,1]$, $[s\,s\,.\,2]$ weglassen können; wir haben diese letzten Probeglieder mehr der Symmetrie der Formeln wegen als wegen des praktischen Bedürfnisses aufgenommen.

Andererseits kann wohl auch ein Rechner, der seiner Sache sonst sicher ist, sich mit der *einen* Probe begnügen:

$$\begin{aligned}[s\,s] = [a\,a] + 2\,[a\,b] + 2\,[a\,l] \quad & \text{oder} \quad = [a\,a] + [a\,b] + [a\,l] \\ +\; [b\,b] + 2\,[b\,l] \quad & \qquad\quad + [a\,b] + [b\,b] + [b\,l] \\ +\; [l\,l] \quad & \qquad\quad + [a\,l] + [b\,l] + [l\,l]\end{aligned}$$

Wenn alle diese Proben stimmen, so kann man mit einer an absolute Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit die Fehlerlosigkeit der Rechnung behaupten.

Unsere Zahlenbeispiele von § 13. und § 14. hatten die Eigentümlichkeit, dass alle Coefficienten $a = 1$ sind. Dieser Fall kommt häufig vor und erleichtert die Ausrechnung der Summen-Coefficienten sehr, denn es ist dann, bei n Beobachtungen,

$$[a\,a] = n \qquad [a\,b] = [b] \qquad [a\,l] = [l]$$

und nur $[b\,b]$, $[b\,l]$ und $[l\,l]$ müssen besonders berechnet werden, wozu dann kaum Summenglieder s zu nehmen sind, während die Elimination wohl mit Summengliedern gemacht werden kann.

§ 19. Eliminations-Beispiel mit 2 Unbekannten.

Wir nehmen das Beispiel von § 14., welches wir dort nach gewöhnlichen algebraischen Methoden behandelt haben, nochmals vor.

Das Coefficienten-System von S. 50 nebst Summengliedern ist:

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & l & s \\ a & +9{,}00 & -\;40{,}74 & +\;4{,}88 & +\;26{,}86 \\ b & & +229{,}87 & -25{,}26 & -163{,}87 \\ l & & & +\;4{,}33 & +\;16{,}05 \end{array} \qquad (1)$$

Indem wir vorerst unentschieden lassen, ob man die Werte $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$, $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]$ u. s. w. unmittelbar oder mit dem Rechenschieber oder mit Logarithmen oder sonst wie ausrechnen will, erhalten wir die folgende Anordnung, wobei man vorerst annehmen mag, dass die *klein gedruckten Zahlen* nötigenfalls auf einem Nebenblatt berechnet worden sind.