Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 17. Mittlerer Fehler der ausgeglichenen x und y

Dieses ist die richtige Formel statt der zweifelhaften Formel (1). Die Formel (9) erinnert in ihrem Bau an die frühere Formel (10) § 7. S. 21 für das arithmetische Mittel. Ebenso wie für *eine* Unbekannte beim arithmetischen Mittel der Nenner n in $n-1$ überging, muss nun bei *zwei* Unbekannten x und y der Nenner $n-2$ werden.

Man kann wohl vermuten, dass das nun so weiter gehen wird, dass bei 3 Unbekannten x, y, z der Nenner $n-3$ und allgemein bei u Unbekannten der Nenner $n-n$ entstehen wird; aber ehe wir dieses bewiesen haben werden, ist es noch nicht gültig.

Die Unterscheidung wahrer Fehler ε und scheinbarer Fehler v bei der Berechnung des mittleren Fehlers ist eine der feinsten Betrachtungen der M. d. kl. Q., eine echte Blüte des Gaussschen Ingeniums, während manch Anderer als Gauss sich wohl dabei beruhigt hätte, dass die v immerhin Näherungswerte der ε sind. Der allgemeine Satz, dessen besonderen Fall für zwei Unbekannte wir soeben behandelt haben, wurde zuerst von Gauss in art. 38 der „theoria combinationis" (vom Jahre 1823) entwickelt. In einem Lehrbuche diese Sache anschaulich vorzutragen und zu beweisen ist nicht leicht. Schon Gerling begnügte sich in seiner „Ausgleichungs-Rechnung der praktischen Geometrie", Hamburg 1843, S. 39 und S. 132 mit einer allgemeinen Plausibelmachung. Neuere Verfasser von Lehrbüchern haben häufig den Satz wenigstens für $n-1$ bewiesen, und haben dann nach Analogie summarisch weiter geschlossen, dass für zwei Unbekannte $n-2$, für drei Unbekannte $n-3$ u. s. w. zu setzen sei. — Ganz unzulässig aber ist es, wie in neuester Zeit geschehen, den Satz $m^2 = \frac{[v\,v]}{n-u}$ als „nicht streng zu beweisender *Grundsatz*" an die Spitzen der Betrachtungen zu stellen. Mit demselben Rechte könnte man den Pythagoräischen Fehlerfortpflanzungssatz (6) S. 16 als unbewiesenen Grundsatz an die Spitze stellen, und durch solches Verfahren der M. d. kl. Q. den mathematischen Boden entziehen. —

§ 17. Mittlerer Fehler der ausgeglichenen x und y.

Mit dem, was wir in § 13.—16. gelehrt haben, kann man bereits kleine Ausgleichungen machen, und in vielen Fällen geschieht nichts weiteres, (und im Sinne allmählicher Erlernung der ganzen Theorie möchte es sich auch empfehlen, unn sofort das Zahlenbeispiel von § 14. nochmals vorzunehmen, und entsprechend § 15. und § 16. weiter zu führen).

Indessen ebenso wie beim arithmetischen Mittel der mittlere Fehler des Mittels selbst, d. h. des ausgeglichenen x bestimmt werden musste, verlangt nun auch die Weiterführung unserer Ausgleichung mit zwei Unbekannten noch die Berechnung der mittleren Fehler der ausgeglichenen x und y.

Um dazu zu gelangen, nehmen wir wieder unser allgemeines Fehlerfortpflanzungsgesetz (10) § 5. S. 17 vor, und nehmen an, es hängen x und y mit gemessenen Grössen l durch folgende lineare Gleichungen zusammen:

$$x = \alpha_1\, l_1 + \alpha_2\, l_2 + \alpha_3\, l_3 + \ldots \quad + \alpha_n\, l_n \tag{1}$$

$$y = \beta_1\, l_1 + \beta_2\, l_2 + \beta_3\, l_3 + \ldots \quad + \beta_n\, l_n \tag{2}$$

Wenn dabei m der mittlere Fehler eines einzelnen l ist, so sind nach dem citierten Fehlerfortpflanzungsgesetze die mittleren Fehlerquadrate von x und y:

$$m_x^2 = \alpha_1^2\, m^2 + \alpha_2^2\, m^2 + \ldots \quad = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots)\, m^2 = [\alpha\,\alpha]\, m^2 \tag{3}$$

$$m_y^2 = \beta_1^2\, m^2 + \beta_2^2\, m^2 + \ldots \quad = (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots)\, m^2 = [\beta\,\beta]\, m^2 \tag{4}$$

oder in Gewichtsform, wenn zu dem mittleren Fehler m das Gewicht 1 gehört:

$$p_x = \frac{1}{[\alpha\,\alpha]} \qquad\qquad p_y = \frac{1}{[\beta\,\beta]} \tag{5}$$

Dieses gilt zunächst für beliebige Werte α und β; wir wollen nun aber unter y die Unbekannte verstehen, welche aus der Auflösung unserer Normalgleichungen hervorgeht, nämlich nach (5) § 15. S. 52:

$$y = -\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} \tag{6}$$

Um diese Gleichung (6) mit (2) in Übereinstimmung zu bringen, müssen wir den Zähler von (6) so auflösen, bis alle darin vorkommenden $l_1\, l_2 \ldots$ einzeln dastehen; wir entwickeln daher:

$$\begin{aligned}[b\,l\,.\,1] &= [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] \\ &= (b_1\,l_1 + b_2\,l_2 \ldots) - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}(a_1\,l_1 + a_2\,l_2 + \ldots) \\ &= \left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\right) l_1 + \left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2\right) l_2 + \ldots\end{aligned}$$

Dieses in (6) berücksichtigt giebt:

$$y = -\frac{b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1}{[b\,b\,.\,1]}\,l_1 - \frac{b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2}{[b\,b\,.\,1]}\,l_2 - \ldots$$

Die Vergleichung mit (2) zeigt, dass die β folgende Bedeutungen haben:

$$\beta_1 = -\frac{b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1}{[b\,b\,.\,1]}\;,\quad \beta_2 = -\frac{b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2}{[b\,b\,.\,1]} \ldots \tag{7}$$

also: $$\beta_1{}^2 = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}\left(b_1{}^2 - 2\frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\,b_1 + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}a_1{}^2\right)$$

ebenso auch: $$\beta_2{}^2 = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}\left(b_2{}^2 - 2\frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\,b_2 + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}a_2{}^2\right)$$

. . . .

Summe $$[\beta^2] = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}\left([b^2] - 2\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}[a^2]\right)$$

oder mit $[b^2] = [b\,b]$, $[a^2] = [a\,a]$ u. s. w.:

$$[\beta\beta] = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}\left([b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]\right) = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}[b\,b\,.\,1]$$

also $$[\beta\beta] = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]} \text{ oder } p_y = [b\,b\,.\,1] \tag{8}$$

Dieses gilt für die Unbekannte y und entsprechend hat man für x, indem man nur überall b und a vertauscht:

$$[\alpha\,\alpha] = \frac{1}{[a\,a\,.\,1]} \qquad p_x = [a\,a\,.\,1] \tag{9}$$

Die Quadratsummen $[\alpha\,\alpha]$ und $[\beta\,\beta]$ nennt man Gewichts-Coefficienten. Damit hat man auch die mittleren Fehler von y und von x, für den Gewichtseinheitsfehler m:

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \frac{m}{\sqrt{[b\,b\,.\,1]}} \tag{10}$$

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \frac{m}{\sqrt{[a\,a\,.\,1]}} \tag{11}$$

m selbst wird hiezu nach (9) § 16. S. 75 und (16) § 15. S. 53 bestimmt, nämlich:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-2}} = \sqrt{\frac{[l\,l\,.\,2]}{n-2}} \tag{12}$$

Coefficienten-Determinante. Wenn man die Determinante der Normalgleichungs-Coefficienten $[a\,a]$ $[a\,b]$ u. s. w. einführt, nämlich:

$$[a\,a]\;[b\,b] - [a\,b]\;[a\,b] = D \tag{13}$$

so kann man, wie sich durch Auflösen sofort zeigt, auch folgende Formen herstellen:

$$[b\,b\,.\,1] = \frac{D}{[a\,a]} \quad , \quad [a\,a\,.\,1] = \frac{D}{[b\,b]} \tag{14}$$

Damit ist alles zur Fehlerbestimmung von x und y selbst nötige gefunden. Wir werden aber später finden, dass es auch noch eine Aufgabe giebt, welche im bisherigen nicht inbegriffen ist, nämlich Bestimmung des mittleren Fehlers einer Funktion der ausgeglichenen x und y.

Es ist nicht rätlich, sich damit zu beschäftigen, ehe die mittleren Fehler von x und y selbst nach den vorstehenden Formeln (9) und (10) völlig verstanden und auch durch Zahlenbeispiele eingeübt sind, jedoch des Zusammenhangs wegen wollen wir doch noch die Formeln für $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. angeben. Man braucht nämlich später (in § 24.) nicht nur die Quadratsummen $[\alpha\,\alpha]$ und $[\beta\,\beta]$, sondern auch die Produktsumme $[\alpha\,\beta]$ der Coefficienten α und β von (1) und (2).

Ein einzelner Wert β_1 oder α_1 giebt sich nach (7), mit Anwendung von D nach (14):

$$\beta_1 = -\frac{[a\,a]}{D}\left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_1\right) \qquad \alpha_1 = -\frac{[b\,b]}{D}\left(a_1 - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}\,b_1\right)$$

$$\alpha_1\,\beta_1 = +\frac{1}{D^2}\left([a\,a]\,b_1 - [a\,b]\,a_1\right)\left([b\,b]\,a_1 - [a\,b]\,b_1\right)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left([a\,a]\,[b\,b]\,a_1\,b_1 - [a\,a]\,[a\,b]\,b_1\,b_1 - [a\,b]\,[b\,b]\,a_1\,a_1 + [a\,b]\,[a\,b]\,a_1\,b_1\right)$$

dann die Summe aller solcher Produkte:

$$[\alpha\,\beta] = \frac{1}{D^2}\left([a\,a]\,[b\,b]\,[a\,b] - [a\,a]\,[a\,b]\,[b\,b] - [a\,b]\,[b\,b]\,[a\,a] + [a\,b]\,[a\,b]\,[a\,b]\right)$$

Die 2 ersten Glieder heben sich auf, und wenn man wieder die Bedeutung von D berücksichtigt, so erhält man:

$$[\alpha\,\beta] = \frac{-[a\,b]}{D} = \frac{-[a\,b]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \tag{15}$$

und wegen der Analogie mit $[b\,b\,.\,1]$ wollen wir noch einführen:

$$[a\,b] - \frac{[a\,a]}{[a\,b]}\,[b\,b] = [a\,b\,.\,1] \tag{16}$$

wodurch wird:

$$[\alpha\,\beta] = \frac{1}{[a\,b\,.\,1]} \tag{17}$$

Zusammenfassung:

$$\left.\begin{aligned} [\alpha\,\alpha] &= \frac{1}{[a\,a\,.\,1]} = \frac{[b\,b]}{D} = \frac{1}{p_x} \qquad & [\alpha\,\beta] &= \frac{1}{[a\,b\,.\,1]} = \frac{-[a\,b]}{D} \\ & & [\beta\,\beta] &= \frac{1}{[b\,b\,.\,1]} = \frac{[a\,a]}{D} = \frac{1}{p_y} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$(m_x)^2 = \frac{m^2}{p_x} = [\alpha\,\alpha]\,m^2 = \frac{[b\,b]}{D}\,m^2 \qquad (m_y)^2 = \frac{m^2}{p_y} = [\beta\,\beta]\,m^2 = \frac{[a\,a]}{D}\,m^2 \tag{19}$$

$$D = [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b] \tag{20}$$

Dieser Coefficienten-Determinante D entspricht auch eine Gewichts-Coefficienten-Determinante:

$$\varDelta = [\alpha\,\alpha]\,[\beta\,\beta] - [\alpha\,\beta]\,[\alpha\,\beta] \tag{21}$$

und es besteht zwischen beiden die Beziehung:

$$D\,\varDelta = 1 \tag{22}$$

Wir wiederholen hiezu aber die Bemerkung, dass man all das letzte, von (13) bis (22) für die nächsten Aufgaben *nicht* braucht.

§ 18. Coefficienten-Berechnung und Summen-Proben.

Obgleich durch die vorhergehenden § 13.—17. die Ausgleichung mit zwei Unbekannten x und y vollständig klargelegt ist, wollen wir doch vor Beginn eines Zahlenbeispiels noch einige Bemerkungen machen über die Ausrechnung und Versicherung der Quadratsummen und Produktsummen $[a\,a]$, $[a\,b]$ u. s. w.

Die Ausrechnung der Quadrate $a\,a$ und der Produkte $a\,b$ u. s. w. kann, je nachdem die Zahlen einfach oder mit vielen Stellen angegeben sind, verschieden geschehen. Es sind hiezu die mechanischen Rechenhilfsmittel zu erwähnen, welche wir in unserem II. Bande, 4. Aufl., S. 118—134 beschrieben haben: Rechenschieber, Rechenscheibe, Rechenmaschinen u. s. w.

Die Quadrate bildet man jedenfalls mit einer Quadrattafel, wie eine solche z. B. auf S. [2]—[6] unseres Anhangs mit 3stelligem Argument gegeben ist. Für grössere Genauigkeit (welche aber bei guter Vorbereitung der Rechenform selten nötig ist) hat man ausführlichere Quadrattafeln als Beigaben zahlreicher Logarithmentafeln und anderer Tabellenwerke.

Die Produkte $a\,b$ u. s. w. kann man direkt ausmultiplizieren, wie in den Beispielen S. 48 und S. 50 mit $[b\,l]$ geschehen ist. Bei mehrstelligen Zahlen kann man sich einer Produktentafel bedienen, deren zur Zeit zwei vorhanden sind, nämlich:

Dr. *A. L. Crelle*s Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, mit einem Vorworte von Bremiker. 5. Ausgabe, Berlin 1880.

Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte, entworfen und bearbeitet von Dr. *H. Zimmermann*, Regierungsrat. Berlin 1889.

Crelle giebt alle Produkte von 3- und 3stelligen Faktoren, Zimmermann giebt die Produkte aus 3- und 2stelligen Faktoren.

Es giebt aber auch ein sehr gutes Verfahren, die Produkte mit der Quadrattafel zu bestimmen. Es ist nämlich:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b \quad \text{oder} \quad a\,b = \frac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{2}$$

woraus man findet:

$$[a\,b] = \frac{[(a+b)^2] - ([a\,a] + [b\,b])}{2} \tag{1}$$

und da man $[a\,a]$ sowie $[b\,b]$ ohnehin braucht, so ist nur noch $[(a+b)^2]$ d. h. die Summe der Quadrate $(a+b)^2$ auszurechnen.

Statt $(a+b)^2$ kann man auch $(a-b)^2$ benützen in dieser Weise:

$$[a\,b] = \frac{[(a-b)^2] + [a\,a] + [b\,b]}{2} \tag{2}$$