Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 15. Gauss sche Elimination, und Fehlerquadratsumme, für zwei Unbekannte

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

§ 15. *Gauss* sche Elimination und Fehlerquadratsumme für zwei Unbekannte.

Statt der unmittelbaren Auflösung der Normalgleichungen, welche in (4) § 13. S. 46 angegeben ist, empfiehlt sich in den meisten Fällen die von *Gauss* angegebene allmähliche Eliminierung mit einer eigentümlichen übersichtlichen Bezeichnungsart.

Wir nehmen die Normalgleichungen (3) § 13. S. 45 nochmals vor:

$$[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = 0 \qquad (1)$$

$$[a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,l] = 0 \qquad (2)$$

Wir multiplizieren die erste Normalgleichung (1) mit $-\dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}$ und addieren sie zur zweiten, wodurch x wegfällt, und folgende Gleichung übrig bleibt:

$$\left([b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]\right) y + \left([b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]\right) = 0 \qquad (3)$$

Dieses giebt Veranlassung, abgekürzte Bezeichnungen einzuführen, nämlich:

$$[b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] = [b\,b\,.\,1] \qquad [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] = [b\,l\,.\,1] \qquad (4)$$

damit wird (3):

$$[b\,b\,.\,1]\,y + [b\,l\,.\,1] = 0 \qquad y = -\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} \qquad (5)$$

Macht man die Elimination in umgekehrter Folge, so hat man:

$$[a\,a] - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}[a\,b] = [a\,a\,.\,1] \qquad [a\,l] - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}[b\,l] = [a\,l\,.\,1] \qquad (6)$$

$$[a\,a\,.\,1]\,x + [a\,l\,.\,1] = 0 \qquad x = -\frac{[a\,l\,.\,1]}{[a\,a\,.\,1]} \qquad (7)$$

Die Klammern $[b\,b\,.\,1]$, $[b\,l\,.\,1]$ u. s. w. sind symbolische Bezeichnungen von ähnlicher Art, wie auch z. B. die Determinanten-Bezeichnung.

Um sich den Bau unserer Klammer-Coefficienten einzuprägen, merke man sich zunächst, dass jeder solche Wert = Null wird, sobald man die symbolische Bezeichnung algebraisch auffasst, z. B.

$$[b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] = b\,b - \frac{a\,b}{a\,a}\,a\,b = b\,b - \frac{b}{a}\,a\,b = b\,b - b\,b = 0 \qquad (8)$$

Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler.

Auch die Quadratsumme $[v\,v]$ der übrig bleibenden (scheinbaren) Fehler v kann man durch einen ähnlichen gebauten Ausdruck darstellen wie $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w.

Nach (2) § 13. S. 45 ist diese Summe zunächst:

$$\left.\begin{aligned}[v\,v] = [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,l]\,x \\ + [b\,b]\,y^2 + 2\,[b\,l]\,y \\ + [l\,l]\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Hiemit lässt sich die Normalgleichung (1) in innige Beziehung bringen, es ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned}([a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l])^2 = [a\,a]^2\,x^2 + 2\,[a\,a]\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,a]\,[a\,l]\,x \\ + \quad [a\,b]^2\,y^2 \qquad + 2\,[a\,b]\,[a\,l]\,y \\ + \quad [a\,l]^2\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

und wenn man allerseits mit $[a\,a]$ dividiert:

$$\left.\begin{aligned}\frac{([a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,l])^2}{[a\,a]}=[a\,a]\,x^2+2\,[a\,b]\,x\,y\quad&+2\,[a\,l]\,x\\ +\frac{[a\,b]\,[a\,b]}{[a\,a]}\,y^2&+2\,\frac{[a\,b]\,[a\,l]}{[a\,a]}\,y\\ &+\frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,[a\,l]\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

Wenn man dieses von (9) abzieht, so erhält man:

$$\begin{aligned}[v\,v]-\frac{([a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,l])^2}{[a\,a]}=\left([b\,b]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b]\right)y^2+2\left([b\,l]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l]\right)y\\ +\left([l\,l]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l]\right)\end{aligned}$$

In der neuen Schreibweise mit $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. giebt dieses:

$$\left.\begin{aligned}[v\,v]-\frac{([a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,l])^2}{[a\,a]}=[b\,b\,.\,1]\,y^2+2\,[b\,l\,.\,1]\,y\\ +[l\,l\,.\,1]\end{aligned}\right|\tag{12}$$

Eine Umformung von gleicher Art kann man nochmals machen, nämlich wegen (5)

$$\begin{aligned}([b\,b\,.\,1]\,y+[b\,l\,.\,1])^2=[b\,b\,.\,1]^2y^2+2\,[b\,b\,.\,1]\,[b\,l\,.\,1]\,y\\ +[b\,l\,.\,1]^2\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{([b\,b\,.\,1]\,y+[b\,l\,.\,1])^2}{[b\,b\,.\,1]}=[b\,b\,.\,1]\,y^2+2\,[b\,l\,.\,1]\,y\\ +\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

Dieses (13) wieder gliederweise von (12) abgezogen giebt:

$$[v\,v]-\frac{([a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,l])^2}{[a\,a]}-\frac{([b\,b\,.\,1]\,y+[b\,l\,.\,1])^2}{[b\,b\,.\,1]}=[l\,l\,.\,1]-\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]\tag{14}$$

Schreibt man vollends $[l\,l\,.\,2]$ für die letzten Teile von (14), so ist nun das ursprüngliche $[v\,v]$ von (9) auf folgende Form gebracht:

$$[v\,v]=\frac{([a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,l])^2}{[a\,a]}+\frac{([b\,b\,.\,1]\,y+[b\,l\,.\,1])^2}{[b\,b\,.\,1]}+[l\,l\,.\,2]\tag{15}$$

Nach (1) und (5) sind aber die beiden quadratischen Glieder = Null, es bleibt also übrig:

$$[v\,v]=[l\,l\,.\,2]\tag{16}$$

Die neu eingeführten Glieder $[l\,l\,.\,1]$ und $[l\,l\,.\,2]$, welche zur Elimination selbst nicht nötig waren, berechnet man im Anschluss an die Elimination.

Wir wollen den geschlossenen Ausdruck $[l\,l\,.\,2]$ auch nochmals auseinander ziehen, nämlich:

$$[l\,l\,.\,2]=[l\,l\,.\,1]-\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]$$

und $$[l\,l\,.\,1]=[l\,l]\quad-\quad\frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,[a\,l]$$

Dann wird (16):

$$[v\,v]=[l\,l]-\frac{[a\,l]^2}{[a\,a]}\quad-\quad\frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}\tag{17}$$

Die abgekürzten Bezeichnungen $[b\,b\,.\,1]$, $[b\,c\,.\,1]$, $[l\,l\,.\,1]$ u. s. w. mit der entsprechenden Elimination, sind zuerst von Gauss eingeführt worden im Jahre 1810 durch die Abhandlung „*Dis-*

quisitio de elementis ellipticis Palladis etc." Die Zeichen sind daselbst geschrieben $[b\,b\,,1]$ $[b\,c\,,1]$ u. s. w., während jetzt gewöhnlich $[b\,b\,.\,1]$ geschrieben wird, von manchen auch $[b\,b_{,1}]$. Abgesehen von diesen kleinen Abänderungen haben sich diese classischen Bezeichnungen seit 80 Jahren in allen namhaften Schriften über Methode der kleinsten Quadrate eingebürgert und werden als sozusagen geheiligte Bezeichnungen festgehalten. Der Versuch, diese glücklicherweise nun feststehenden Zeichen durch andere zu ersetzen, wäre als unglücklich und auf die Dauer nicht haltbar zu bezeichnen.

§ 16. Mittlerer Gewichts-Einheits-Fehler bei zwei Unbekannten.

Aus der Fehlerquadratsumme $[v\,v]$, mit welcher wir uns soeben beschäftigt haben, kann man auch den mittleren Fehler einer Beobachtung berechnen (bzw. den mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewichten = 1). In erster Näherung kann man schreiben:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}}\ (?) \tag{1}$$

Indessen ist diese Formel deswegen nicht genügend, weil die v nicht wahre Fehler, sondern nur scheinbare Fehler sind, wie schon am Schluss von § 14. S. 51 betrachtet worden ist.

Wir müssen die Formel (1) in ähnlicher Weise abändern, wie schon beim arithmetischen Mittel bei (10) § 7. S. 21 geschehen ist, wo der Nenner n in $n-1$ (für *eine* Unbekannte x) umgewandelt wurde.

Wir werden wieder zu unterscheiden haben:

Ausgleichungs-Ergebnisse	$x\ y$,	Wahre Unbekannte	$X\ Y$
scheinbare Fehler	$v_1\,v_2\,v_3 \ldots$.	Wahre Fehler	$\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3 \ldots$

Dann bestehen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v &= a\,x + b\,y + l \\ \varepsilon &= a\,X + b\,Y + l \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\text{Also Differenz:}\quad v - \varepsilon = a\,(x - X) + b\,(y - Y)$$

$$\text{oder}\quad v = a\,(x - X) + b\,(y - Y) + \varepsilon \tag{3}$$

Dieses hat wieder dieselbe Form wie die früheren Fehlergleichungen $v = a\,x + b\,y + l$, und wegen $[a\,v] = 0$ und $[b\,v] = 0$ kann man daraus auch eine Art von Normalgleichungen bilden, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} [a\,v] &= [a\,a]\,(x - X) + [a\,b]\,(y - Y) + [a\,\varepsilon] = 0 \\ [b\,v] &= [a\,b]\,(x - X) + [b\,b]\,(y - Y) + [b\,\varepsilon] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Auch die Summe $[v\,v]$ kann man in ähnlicher Form wie früher bilden, nämlich:

$$\begin{aligned} [v\,v] = [a\,a]\,(x - X)^2 &+ 2\,[a\,b]\,(x - X)\,(y - Y) + 2\,[a\,\varepsilon]\,(x - X) \\ &+ [b\,b]\,(y - Y)^2 \qquad\quad + 2\,[b\,\varepsilon]\,(y - Y) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + [\varepsilon\,\varepsilon] \end{aligned}$$

und damit lässt sich auch dieselbe Umformung machen wie bei dem früheren $[v\,v]$ in (17) § 15. S. 53, nämlich:

$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} \tag{5}$$

Man sieht hieraus, dass $[v\,v]$ kleiner als $[\varepsilon\,\varepsilon]$ ist, und es handelt sich darum, die Differenz zwischen $[v\,v]$ und $[\varepsilon\,\varepsilon]$, d. h. die zwei Schlussglieder von (5), so genau zu bestimmen, als es bei der Unbekanntheit der wahren Fehler ε möglich ist, d. h.