Handbuch der Vermessungskunde

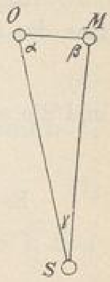
Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 11. Beobachtungs-Differenzen

In dem Dreieck Oggersheim—Mannheim—Speyer, welches in Fig. 2. dargestellt ist, hat man

Fig. 2.



	Gemessene Winkel	Gewichte
	$\alpha = 72^\circ\ 16'\ 44{,}86''$	$p\alpha = 27$
	$\beta = 90\ \ 1\ \ 56{,}46$	$p\beta = 42$
	$\gamma = 17\ \ 41\ \ 17{,}43$	$p\gamma = 65$
Summe:	$\alpha + \beta + \gamma = 179^\circ\ 59'\ 58{,}75''$	
soll	$180^\circ\ 0'\ 0{,}29''$	
Widerspruch:	$w = \quad -1{,}54''$	

Gewichts-Reciproken: $\dfrac{1}{p\alpha} = 0{,}037 \quad , \quad \dfrac{1}{p\beta} = 0{,}024 \quad , \quad \dfrac{1}{p\gamma} = 0{,}015$

$$\left[\frac{1}{p}\right] = 0{,}076$$

Winkelverbesserungen: $v_\alpha = \dfrac{0{,}037}{0{,}076}\,1{,}54'' = +0{,}75'' \qquad v_\beta = +0{,}49'' \qquad v_\gamma = +0{,}30''$

Gemessen	Verbesserungen	Ausgeglichen
72° 16′ 44,86″	+ 0,75″	72° 16′ 45,61″
90 1 56,46	+ 0,49	90 1 56,95
17 41 17,43	+ 0,30	17 41 17,73
179° 59′ 58,75″	+ 1,54″	180° 0′ 0,29″

Nach (19) bestimmt man den mittleren Fehler für die Gewichtseinheit:

$$m = \pm 5{,}59''$$

und nach (21) berechnet man die mittleren Fehler der ausgeglichenen Winkel, und hat damit das Schlussergebnis:

$$\alpha = 72^\circ\ 16'\ 45{,}61'' \pm 0{,}77''$$
$$\beta = 90^\circ\ 1'\ 56{,}95'' \pm 0{,}72''$$
$$\gamma = 17^\circ\ 41'\ 17{,}73'' \pm 0{,}61''$$

In ähnlicher Weise, wie hier mit der Aufgabe der Dreieckswinkelausgleichung geschehen ist, können noch manche andere Aufgaben, welche beim ersten Anblick eine Ausgleichung mit mehreren Unbekannten zu verlangen scheinen, auf die Bestimmung *einer* Unbekannten durch das arithmetische Mittel zurückgeführt werden, jedenfalls kann eine Ausgleichung mit *einer* Summenprobe für mehrere unmittelbar gemessene Grössen ganz nach dem vorhergehenden Muster einer Summenprobe für drei Elemente behandelt werden.

In ähnlicher Weise kann auch jede Ausgleichung mit *einer* streng zu erfüllenden Bedingungsgleichung, auf den Fall des arithmetischen Mittels zurückgeführt werden.

§ 11. Beobachtungs-Differenzen.

Wenn man eine Messung zweifach macht, z. B. eine Gerade hin und her misst, oder eine Nivellierung hin und her macht u. s. w., so kann man auf je zwei solcher Messungen die Sätze vom arithmetischen Mittel anwenden, wie wir schon in § 9. S. 29 gethan haben; und man kann immer, wenn von Beobachtungs-Differenzen die Rede ist, die beiden in Betracht kommenden Messungen selbständig vorführen; indessen gestatten die Beobachtungs-Differenzen auch eine sehr nützliche allgemeinere Betrachtung, zu deren Einleitung jedoch nochmals an das arithmetische Mittel angebunden werden soll:

Sind l_1 und l_2 beide Messungsergebnisse mit der Differenz $l_1 - l_2 = d$, so hat man das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

und die scheinbaren Fehler:

$$v_1 = x - l_1 = -\frac{d}{2} \quad \text{und} \quad v_2 = x - l_2 = +\frac{d}{2}$$

Es ist also der mittlere Fehler einer Messung nach (10) § 7. S. 21 mit $n = 2$:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4}} = \frac{d}{\sqrt{2}} \qquad (1)$$

und der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels nach (11) § 7. S. 22.

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{d}{2} \qquad (2)$$

Wir merken uns hievon insbesondere die Gleichung (1), nämlich $d = m\sqrt{2}$, d. h. die zu erwartende Differenz zweier Messungen ist gleich dem $\sqrt{2}$ fachen des mittleren Fehlers einer Messung.

Nach Klarstellung dieser sehr einfachen Verhältnisse gehen wir einen Schritt weiter, indem wir mehrere solcher Wiederholungsmessungen zusammen nehmen. Man habe z. B. verschiedene Linien, jede hin und her, oder verschiedene Nivellierungsstrecken, jede für sich hin und her, gemessen und in jedem dieser Fälle eine Differenz d erhalten. Wir wollen aber dabei zunächst annehmen, die verschiedenen Längen oder Nivellementsstrecken u. s. w. seien nahezu *gleich* lang, oder allgemeiner, die Differenzen d gehören zu Messungen von lauter gleichen Gewichten, dann kann man aus einer Anzahl r solcher Differenzen eine *mittlere Differenz* berechnen nach der Formel:

$$D^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots d_r^2}{r}$$

$$\text{oder} \quad D^2 = \frac{[d^2]}{r} \quad , \quad D = \sqrt{\frac{[d^2]}{r}} \qquad (3)$$

Der Nenner r ist hier streng richtig und nicht etwa durch $r - 1$ zu ersetzen, wie bei (10) § 7., denn die Differenzen d haben den Charakter *wahrer* Fehler und nicht bloss scheinbarer Fehler.

Aus (1), (2) und (3) zusammen folgt nun auch, indem man die mittlere Differenz D an Stelle der einzelnen Differenz d von (1) und (2) setzt:

Mittlerer Fehler einer Messung $\quad m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2r}} \qquad (4)$

Mittlerer Fehler einer Doppel-Messung $\quad M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[d^2]}{r}} \qquad (5)$

Wenn nun aber Differenzen $d_1\, d_2 \ldots d_3$ vorliegen, welche zu *ungleich*gewichtigen Messungen gehören, z. B. wenn d_1 zu einem Hin- und Her-Nivellement der Strecke s_1, dagegen d_2 zu s_2 u. s. w. gehört, allgemein wenn d_1 zu einer Doppelmessung vom Gewichte p_1, dagegen d_2 zu einer Doppelmessung vom Gewichte p_2

u. s. w. gehört, so darf man auch die mittlere Differenz D nicht mehr nach (3) berechnen, sondern man hat dann die mittlere Differenz D für das Gewicht 1 nach Analogie von (12) § 8. S. 27 zu berechnen, jedoch mit dem Nenner r wie in (3):

$$D^2 = \frac{p_1\, d_1{}^2 + p_2\, d_2{}^2 + \ldots p_n\, d_r{}^2}{r}$$

$$D^2 = \frac{[p\,d^2]}{r} \quad , \quad D = \sqrt{\frac{[p\,d^2]}{r}} \tag{6}$$

Also ist auch der mittlere Fehler m einer einzelnen Messung vom Gewichte 1:

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[p\,d^2]}{2\,r}} \tag{7}$$

und der mittlere Fehler m eines Mittels aus zwei Messungen vom Gewichte 1, oder der mittlere Fehler einer Doppelmessung vom Gewichte 1:

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[p\,d^2]}{r}} \tag{8}$$

Als eine der wichtigsten Anwendungen dieser letzteren Formeln wollen wir Wiederholungsmessungen von Längen, oder Hin- und Her-Nivellierungen nehmen. Alle diese Messungen haben mittlere Fehler, welche mit den Quadratwurzeln der Entfernungen s wachsen, folglich sind die Gewichte umgekehrt proportional den $(\sqrt{s})^2$, d. h. umgekehrt proportional den s zu setzen, und damit werden (6), (7) und (8):

$$D^2 = \frac{1}{r}\left(\frac{d_1{}^2}{s_1} + \frac{d_2{}^2}{s_2} + \ldots \frac{d_n{}^2}{s_n}\right) = \frac{1}{r}\left[\frac{d^2}{s}\right]$$

$$m = \sqrt{\frac{1}{2\,r}\left[\frac{d^2}{s}\right]} \tag{9}$$

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{d^2}{s}\right]} \tag{10}$$

Als Beispiel hiezu nehmen wir einen Teil eines Eisenbahn-Nivellements (das in unserm Band II. 1893, S. 442 näher beschrieben ist).

Punkt	Nivellierung I	Nivellierung II	I—II $= d$	d^2	Entfernung s	$\frac{d^2}{s}$
(1)						
(2)	$-0{,}1853^m$	$-0{,}1859^m$	$+0{,}6^{mm}$	0,36	$0{,}72^{km}$	0,50
(3)	$+1{,}6258$	$+1{,}6262$	$-0{,}4$	0,16	0,42	0,38
(4)	$+1{,}4329$	$+1{,}4323$	$+0{,}6$	0,36	0,47	0,77
(5)	$+0{,}5106$	$+0{,}5094$	$+1{,}2$	1,44	0,48	3,00
(6)	$-0{,}0073$	$-0{,}0049$	$-2{,}4$	5,76	0,51	11,30
$r = 5$	$+3{,}5693$	$+3{,}5679$	$+2{,}4$		2,60	15,95
	$-0{,}1926$	$-0{,}1908$	$-2{,}8$			
	$+3{,}3767$	$+3{,}3771$	$-0{,}4$			

Hieraus hat man den mittleren Fehler eines Doppelnivellements von 1 Kilometer:

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15{,}95}{5}} = \pm 1{,}79^{mm} \tag{11}$$

und den mittleren Fehler eines einfachen Nivellements von 1 Kilometer:

$$m = M\sqrt{2} = \pm 2{,}53^{mm} \tag{12}$$

Eine solche Genauigkeitsbestimmung ist mehr oder weniger zuverlässig, je nachdem man mehr oder weniger Vergleichsstrecken zur Verfügung hat, dagegen auf die Längen der Strecken kommt es dabei nicht an, sondern nur auf deren Anzahl. (Allerdings *ganz kleine* Strecken, z. B. unter 100^m, werden aus mancherlei Gründen nicht vollberechtigt mitzählen.)

Wir wollen die Formeln (9) und (10) auch noch auf eine Längenmessung anwenden und zwar auf das klassische Beispiel der Bessel schen Gradmessung in Ostpreussen, welches an sich schon interessant ist, uns auch noch Veranlassung zu einer Bemerkung über die Entstehung der Differenzenrechnung geben wird.

Bessel hat bei seiner Gradmessung in Ostpreussen eine Basis in zwei Teilen je zweifach gemessen, nämlich:

	1. Teil:	2. Teil:	Gesamtmittel	
1. Messung	441,1852^m	1381,1571^m	1822,3447^m	(13)
2. Messung	441,1839^m	1381,1632^m		
Differenzen	$d_1 = +1{,}3^{mm}$	$d_2 = -6{,}1^{mm}$		

Indem man nun die Differenzen d in Millimetern, die Entfernungen in Kilometern zählt, also $s_1 = 0{,}441$ und $s_2 = 1{,}381$, wobei $r = 2$ ist, hat man nach (9) das mittlere Fehlerquadrat einer Messung der Längeneinheit:

$$m^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2}\right) \tag{14}$$

$$m^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1{,}3^2}{0{,}441} + \frac{6{,}1^2}{1{,}381}\right) = 7{,}70 \qquad m = \pm 2{,}78^{mm} \text{ für 1 Kilom.} \tag{14a}$$

Dieses ist der mittlere Fehler *einer* Messung der Längeneinheit von 1 Kilometer. Der mittlere Fehler eines Mittels aus je *zwei* zusammengehörigen (Hin- und Her)-Messungen einer Länge von 1 Kilometer d. h. der mittlere Fehler einer Doppelmessung von 1^{km} wird nach (10):

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{2{,}78}{\sqrt{2}} = \pm 1{,}96^{mm} \text{ (für 1 Kilom.)} \tag{15}$$

Endlich kann man aber auch den mittleren Fehler des Gesamtmittels $s_1 + s_2 =$ 1822,3447^m rechnen; es ist nämlich dessen Quadrat:

$$\left.\begin{aligned} M'^2 &= M^2(s_1+s_2) = \frac{1}{8}\left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2}\right)(s_1+s_2) \\ \text{oder } M' &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{s_1+s_2}{s_1}d_1^2 + \frac{s_1+s_2}{s_2}d_2^2} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

während in der Gradmessung in Ostpreussen S. 55 statt dessen angegeben ist:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_1+s_2}{s_1}d_1^2 + \frac{s_1+s_2}{s_2}d_2^2} \tag{15a}$$

(Vergleiche hiezu die kleingedruckten Anmerkungen im Nachfolgenden S. 40.)

Die Ausrechnung nach (15) giebt:

$$M' = M\sqrt{s_1+s_2} = 1{,}96\sqrt{1{,}822} = \pm 2{,}65^{mm} \tag{15b}$$

Man wird also nun aus (13) und (15b) das Schlussergebnis bilden:

$$\text{Basislänge} = 1822{,}3447^m \pm 0{,}0027^m \tag{16}$$

Endlich bietet die Differenzentheorie noch die Möglichkeit eines zweiten sehr anschaulichen Beweises des Satzes, dass man bei der Genauigkeitsberechnung aus dem arithmetischen Mittel die Quadratsumme $[v^2]$ nicht durch n, sondern durch $n-1$ dividieren muss, d. h. des Satzes (10) §. 7. S. 21.

Wenn eine Unbekannte n mal beobachtet ist, so kann man zur Gewinnung eines Urteils über die Genauigkeit der einzelnen Beobachtung die einzelnen Ergebnisse *unter sich* vergleichen, und zwar kann man die n Beobachtungen zu $n\frac{n-1}{2}$ verschiedenen Differenzen kombinieren. Bedeuten l_1 und l_2 die zwei ersten Beobachtungen, so ist deren Differenz $d = l_2 - l_1$, oder wenn man die scheinbaren Fehler $v_1 = x - l_1$ und $v_2 = x - l_2$ vorführt, so ist auch $d = (x - v_2) - (x - v_1) = v_1 - v_2$.

Die sämtlichen so zu bildenden $n\frac{n-1}{2}$ Differenzen sind folgende:

$$\begin{array}{llll}
v_1 - v_2 & & & \\
v_1 - v_3 & v_2 - v_3 & & \\
v_1 - v_4 & v_2 - v_4 & v_3 - v_4 & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
v_1 - v_n & v_2 - v_n & v_3 - v_n\ \ldots\ldots & v_{n-1} - v_n
\end{array}$$

Diese Differenzen sind nun allerdings nicht unabhängig, und man hat deswegen nicht das Recht, sie wie unabhängige Beobachtungsfehler zu behandeln, allein sie sind wenigstens gleichartig und gestatten deswegen die Bildung eines Mittelwertes. Ihre Quadratsumme wird, da jedes einzelne v^2 sich $(n-1)$ mal findet:

$$[d^2] = (n-1)\,[v^2] - 2\,[v_i\,v_k] \tag{17}$$

wenn $[v_i\,v_k]$ die Summe aller bei der Quadrierung der Differenzen auftretenden Produkte bedeutet.

Um diese unbekannte Summe $[v_i\,v_k]$ wieder zu eliminieren, benützt man die identische Gleichung:

$$(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots v_n)^2 = [v]^2 = [v^2] + 2\,[v_i\,v_k]. \tag{18}$$

(17) und (18) geben zusammen:

$$[d^2] = (n-1)\,[v^2] + [v^2] - [v]^2$$

Die scheinbaren Fehler v geben aber die algebraische Summe $[v] = 0$

$$\text{also} \qquad [d^2] = n\,[v^2] \tag{19}$$

Die Anzahl der Differenzen d ist $= \frac{n-1}{2}$, also die mittlere Differenz D (je zweier Messungen):

$$D = \sqrt{\frac{2\,[d^2]}{n\,(n-1)}} = \sqrt{\frac{2\,[v^2]}{n-1}} \tag{20}$$

und der mittlere Fehler einer Messung:

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \tag{21}$$

dieses ist in Übereinstimmung mit (10) § 7. S. 21.

Über die Entstehung der Rechnung mit Beobachtungs-Differenzen schreibt *Czuber* in „Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891", S. 174: „Der Gedanke, zur Beurteilung der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe statt der Abweichungen der einzelnen Beobachtungen vom arithmetischen Mittel, ihre Abweichungen unter einander, mit anderen Worten, statt der scheinbaren Fehler die Beobachtungs-*Differenzen* zu verwenden, ist von *Jordan* 1869 ausgegangen, und von *Andrae* und *Helmert* weiter ausgebildet worden. Wohl unabhängig von Jordan hat *Bréger* 1881 die Anwendung der Beobachtungs-Differenzen zur Bestimmung der Präcision einer Beobachtungsreihe vorgeschlagen, (Comptes rendus 93, 1881, S. 1119—1121, sur les différences successives des observations) und die Richtigkeit der Grundgleichung (4) (s. oben S. 36) auch experimentell geprüft."

Zu diesem Berichte von Czuber wollen wir noch einige Erläuterungen aus eigenen Erfahrungen geben: Die Differenzenrechnung entstand als Vorbereitung der längeren Erörterungen, welche in den zwei ersten Bänden der „Zeitschrift für Vermessungswesen, 1872—1873" geführt worden sind. Es handelte sich um Berechnung mittlerer Längenmessungsfehler aus Reihen von Doppelmessungen. Es ist nämlich die Bestimmung des mittleren Fehlers einer Messung der Längeneinheit aus den Differenzen einer Anzahl von Doppelmessungen verschiedener Längen früher grossenteils nicht richtig ausgeführt worden, und es hatte zuerst *Dienger* in „Grunerts Archiv 31. Teil, 1858", S. 225, auf den allgemein hier begangenen Fehler aufmerksam gemacht (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1872", S. 19).

Auf eine Unrichtigkeit, welche sogar *Bessel* in der „Gradmessung in Ostpreussen", S. 54—55 bei der Berechnung des mittleren Fehlers seiner Basismessung dadurch beging, dass er die Quadratsumme zweier Differenzen nicht mit 2, sondern mit $2-1=1$ dividierte, war ich 1869 aufmerksam geworden und legte mir die Sache am besten zurecht durch Einführung der Beobachtungs-*Differenzen* als selbständiger Fehler-Elemente, was dann weiter ausgeführt wurde in einer Abhandlung „Über die Genauigkeit mehrfach wiederholter Beobachtungen einer Unbekannten" in „Astr. Nachr., 74. Band 1869", S. 209—226, wo auf S. 226 der erwähnte Fehler, $2-1$ statt 2, in der Gradmessung in Ostpreussen S. 54 betrachtet und richtig gestellt wird. Bessel rechnet nämlich nicht so wie wir im vorstehenden (14) — (16) S. 38 richtig angaben, sondern er rechnet $m^2=\frac{1}{2}\left(\frac{d_1{}^2}{s_1}+\frac{d_2{}^2}{s_2}\right)$ u. s. w., wodurch m und alles folgende zu gross erhalten wird, nämlich $\sqrt{2}$ mal so gross, als der richtige Wert, wie wir schon oben bei (15) und (15 a) S. 38 bemerkt haben.

Gleich darauf kam Andrae auf S. 283—284 der „Astr. Nachrichten" 74. Band mit einer kurzen dänisch geschriebenen Entgegnung auf meine Formeln von S. 209—226, darauf bezüglich, dass die einfache Beziehung zwischen der Quadratsumme $[d^2]$ aller Differenzen und der Quadratsumme $[v^2]$ der scheinbaren Fehler, nämlich $[d^2]=n\,[v^2]$ mir entgangen war, d. h. die Andrae sche dänische Entwicklung giebt das, was wir im vorstehenden in (17)—(21) S. 39 mitgeteilt haben. Weiter folgte in dieser Sache „Astr. Nachr., 79. Band, 1872", S. 219—222 und S. 257—272.

Im Anschluss an das Vorhergehende wurden auch noch veröffentlicht in den Astr. Nachr., 80. Band (1872), S. 67—70, Zachariae, 80. Band, S. 189—190 Jordan, dann 81. Band, 1873, S. 49—52 Helmert, S. 51—56 Jordan, S. 225—267 Zachariae und 88. Band 1876, S. 127—131; Helmert.

Da es den Fernerstehenden schwer ist, aus all' jenen Controversen den wirklichen Gang heute noch herauszufinden, wollen wir jenen Gang kurz so angeben: Meine erste Abhandlung von 1869 hatte nur den Mangel, dass die einfache Beziehung $[d^2]=n\,[v^2]$ nicht gefunden war, was alsbald Andrae verbessernd nachholte. Dann brachte aber Zachariae 1872 eine *andere* Streitfrage herein, indem er („Astr. Nachr., 80. Band", S. 68) nach der dänischen Gradmessung den Differenzen bei Längenmessungen verschiedene Gewichte bei der Fehlerberechnung zuteilte, je nachdem die Differenzen zu langen oder kurzen Strecken s gehören, d. h. nicht bloss insofern die $\frac{d^2}{s}$ auf die Einheit s zu reducieren sind, sondern er giebt einen $\frac{d^2}{s}$ selbst wieder nachher das Gewicht s von der Annahme ausgehend, dass eine Differenz d aus langen Strecken mehr zur Genauigkeitsermittlung beitrage als ein d aus kurzen Strecken; das mittlere Differenzquadrat für die Längeneinheit wäre hiernach:

$$D^2=\frac{s_1\frac{d_1{}^2}{s_1}+s_2\frac{d_2{}^2}{s_2}}{s_1+s_2}=\frac{d_1{}^2+d_2{}^2}{s_1+s_2}$$

Diese Anschauung hat etwas Verführerisches, allein sie ist doch nicht die richtige, wie Helmert in „Astr. Nachr., 81. Band", S. 49—52 zuerst scharf bewiesen hat. (Darauf bezieht sich die Bemerkung, welche wir oben bei (12) S. 38 über die Längen der Nivellierstrecken gemacht haben.)

Wenn also nun heute jeder Landmesser oder Wasser-Nivelleur seine Nivellements nach der Formel (10) S. 37, nämlich $M=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{d^2}{s}\right]}$, in Hinsicht auf mittlere Fehler berechnet, so wird er dieselbe wohl als selbstverständlich hinnehmen, während doch diese Formel den langen und polemischen Weg von 1869—1873 durchlaufen musste, welchen wir in den vorstehenden Citaten geschildert haben. —