Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 6. Zusammenwirkung unregelmässiger und regelmässiger Fehler

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

endlich nach der Regel von (13):

$$M = a \sqrt{cotg^2\, \alpha\, (\delta\alpha)^2 + cotg^2\, \gamma\, (\delta\gamma)^2} \tag{15}$$

Wenn beide Winkel α und γ gleich genau gemessen sind, so sei $\delta\alpha = \delta\gamma = \delta$, damit wird:

$$M = a\, \delta \sqrt{cotg^2\, \alpha + cotg^2\, \gamma}$$

Hiebei ist δ in analytischem Masse verstanden; wenn δ'' der Winkelfehler in Sekunden ist, so wird:

$$\frac{M}{a} = \frac{\delta''}{\varrho''} \sqrt{cotg^2\, \alpha + cotg^2\, \gamma}$$

Wir nehmen beispielshalber $\alpha = \gamma = 60^\circ$ und $\delta = 10''$, das giebt

$$\frac{M}{a} = \pm\, 0{,}0000\,396$$

oder es ist der Fehler M etwa $= 0{,}004\,\%$ von a.

Nehmen wir dabei $a = 1000^m$, so ist also $M = 0{,}04^m$.

Wenn etwa in dem Dreieck (Fig. 1.) der dritte Winkel bei B auch gemessen ist, dann lässt sich die Berechnung des mittleren Fehlers der Seite a nicht mehr in so einfacher Weise machen; wie dann zu verfahren ist, wird erst später bei der Theorie der bedingten Beobachtungen gezeigt werden.

§ 6. Zusammenwirkung unregelmässiger und regelmässiger Fehler.

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, dass keine konstanten oder einseitig wirkenden Fehler vorhanden sind, indessen gilt der Hauptsatz II. des vorigen § 5. über Fehlerfortpflanzung auch dann noch, wenn es sich um Kombination eines unregelmässigen mit einem regelmässigen oder mit einem konstanten Fehler handelt, denn der Mittelwert $\frac{[\varepsilon\, \varepsilon']}{n}$, auf welchen es bei dem Falle II. S. 16 hauptsächlich ankommt, konvergiert auch dann noch gegen Null, wenn nur ε *oder* ε' gleichwahrscheinlich positiv und negativ ist.

Als Beispiel hiefür nehmen wir wieder wie im vorigen § 5. S. 15 die Längenmessung mit Messlatten. Eine solche Messung ist nämlich nicht nur mit unregelmässigen Fehlern, sondern auch mit regelmässigen Fehlern behaftet. Solche regelmässige Fehler sind z. B. das Ausweichen aus der Geraden nach links oder rechts, nach oben oder unten. Diese Ausweichungen heben sich durchaus nicht gegenseitig auf, sondern sie geben lauter positive Fehler, d. h. Fehler, welche die Länge zu gross erscheinen lassen.

Bei n maliger Lattenanlage wird man die einseitig wirkenden Fehlerteile $= A\, n$ und die unregelmässig wirkenden Teile $= B \sqrt{n}$ annehmen können, dann ist der mittlere Gesamtfehler:

$$M = \sqrt{(A\, n)^2 + (B \sqrt{n})^2} = \sqrt{A^2\, n^2 + B^2\, n}.$$

Der Begriff des mittleren Fehlers ist also nicht an die Bedingung gleicher Wahrscheinlichkeit für positive und negative Einzelfehler gebunden; man kann den mittleren Fehler auch als Genauigkeitsmass für solche Messungen benützen, bei welchen einseitig wirkende Fehlerquellen vorhanden sind; doch darf natürlich ein mittlerer Fehler, welcher konstante Teile enthält, im allgemeinen nicht ebenso weiter behandelt werden, wie ein mittlerer Fehler, welcher solche Teile nicht enthält.

Es ist ein oft gehörter Einwurf gegen die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf gewisse Messungen, dass diese Messungen einseitige Fehler enthalten, und dass deswegen die Methode der kleinsten Quadrate in solchen Fällen überhaupt nicht anzuwenden sei.

Dem ist entgegenzuhalten, dass gerade die Methode der kleinsten Quadrate die feinsten Mittel darbietet, um einseitig wirkende oder unbekannte Fehler aufzufinden, und dann die Ausgleichung mit Rücksicht auf solche Fehlerquellen zu behandeln.

§ 7. Das einfache arithmetische Mittel.

Wenn eine Messung mehrfach gleichartig und unabhängig wiederholt worden ist mit den Ergebnissen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$, so nimmt man als bestanschliessenden Wert das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots l_n}{n} = \frac{[l]}{n} \tag{1}$$

Die Abweichungen der Einzelmessungen von dem Mittel x, d. h. die scheinbaren Fehler sind:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = x - l_1 \\ v_2 = x - l_2 \\ v_3 = x - l_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n = x - l_n \end{array}\right\} \tag{2}$$

deren Summe wegen (1) gleich Null ist, d. h.:

$$[v] = 0. \tag{3}$$

Durch Quadrierung der scheinbaren Fehler v findet man den mittleren Fehler einer Beobachtung zunächst näherungsweise durch die Formel:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}}\ (?) \tag{4}$$

Es handelt sich nun um Bestimmung des mittleren Fehlers M des arithmetischen Mittels selbst, wozu die Anleitung des Satzes über Fehlerfortpflanzung (10) und (11) § 5. S. 17 dient, denn vermöge (1) ist x eine lineare Funktion der beobachteten Grössen l, denen sämtlich der mittlere Fehler m zukommt, wie sich noch deutlicher zeigt, wenn man die Gleichung (1) auseinanderzieht und so schreibt:

$$x = \frac{1}{n}\,l_1 + \frac{1}{n}\,l_2 + \frac{1}{n}\,l_3 + \ldots \frac{1}{n}\,l_n \tag{5}$$

Dieses entspricht der Gleichung (9) § 5. S. 17, nämlich

$$x + a\,l + a'\,l' + a''\,l'' + \ldots \tag{5 a}$$

und dazu gehört die Anwendung (10) § 5. S. 17, nämlich

$$M = \sqrt{(a\,m)^2 + (a'\,m')^2 + (a''\,m'')^2 + \ldots} \tag{5 b}$$

Es treten also die $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$ von (5) an Stelle der früheren $l\ l'\ l'' \ldots$ in (5 a) und die dort mit $a\ a'\ a'' \ldots$ bezeichneten Coefficienten sind in unserem Falle (5) sämtlich $= \frac{1}{n}$; die mittleren Fehler $m\ m'\ m'' \ldots$ sind in unserem Fall alle einander gleich, nämlich alle $= m$, also giebt die Anwendung von (5 b) nun:

$$M = \sqrt{(a\,m)^2 + (a'\,m)^2 + (a''\,m)^2 + \ldots} = m\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}$$