Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 4. Der mittlere Fehler

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = n\,x - (l_1 + l_2 + l_3 + \ldots)$$

$$[v] = n\,x - [l] = 0 \text{ wegen (2) oder (3)}$$

$$[v] = 0 \tag{4}$$

Diese Gleichung (4) kann als Rechenprobe dienen.

Diese scheinbaren Fehler v behandelt man näherungsweise wie wahre Beobachtungsfehler ε, d. h. man berechnet nach Anleitung der Gleichung (1) den durchschnittlichen Fehler:

$$t = \frac{[\pm v]}{n}$$

Beispiel. Ein Winkel ist 5mal unabhängig gemessen worden:

Beobachtungen l	Differenzen v	Probe
35° 26′ 16″	+ 2,8″	
20″	− 1,2	
18″	+ 0,8	$[+v] = +7{,}4$
25″	− 6,2	$[-v] = -7{,}4$
15″	+ 3,8	$[v] = \quad 0$
Summen: 94″	14,8″	

Mittel $x = 35°\,26'\,18{,}8''$ $\qquad t = \frac{14{,}8}{5} = 2{,}96''$.

Damit hat man ein Mass für die mutmassliche Genauigkeit einer einzelnen Beobachtung. Nun wäre es weiter von Wichtigkeit, zu wissen, wie sich die Genauigkeit einer einzelnen Beobachtung zur Genauigkeit des arithmetischen Mittels verhält, allein diese und andere hier sich anschliessende Fragen lassen sich auf Grundlage des durchschnittlichen Fehlers und der vorstehenden einfachen Betrachtungen *nicht* lösen.

Aus diesem Grunde lassen wir jetzt den durchschnittlichen Fehler fallen und gehen zu einem anderen Genauigkeitsmass, dem *mittleren* Fehler über.

§ 4. Der mittlere Fehler.

Nachdem der durchschnittliche Fehler sich als ungeeignet zur Behandlung weiterer Aufgaben der Ausgleichungsrechnung erwiesen hat, machen wir einen Versuch mit einem anderen Mittelwert der Fehler. Wenn eine Anzahl n wahrer Beobachtungsfehler $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ vorliegt, so bilden wir daraus einen Mittelwert m nach der Gleichung:

$$m = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \ldots \varepsilon_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} \tag{1}$$

Man nennt diesen Mittelwert den „mittleren Fehler“ oder „mittleren zu fürchtenden Fehler“. (error medius metuendus).

Der mittlere Fehler bietet gegenüber dem durchschnittlichen Fehler den Vorteil, dass bei der Summierung $[\varepsilon^2]$, da alle Quadrate positiv sind, keine Unterscheidung der Vorzeichen nötig ist, sowie dass das Vorzeichen der Quadratwurzel unbestimmt $\pm$ aus der Rechnung hervorgeht. Abgesehen von diesen äusserlichen Unterschieden ist aber der mittlere Fehler ein besseres Genauigkeitsmass als der durchschnittliche Fehler, weil in den Quadraten die grossen Fehler mehr ins Gewicht fallen.

Der mittlere Fehler ist im allgemeinen grösser als der durchschnittliche Fehler und nur, wenn alle Einzelfehler ε gleich sind, so werden auch der durchschnittliche und der mittlere Fehler einander gleich; dieses lässt sich zunächst für zwei Elemente leicht einsehen; hat man nämlich zwei wahre Fehler ε_1 und ε_2, so ist:

der durchschnittliche Fehler $\qquad$ der mittlere Fehler

$$t = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \qquad m = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2}}$$

$$t^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{4} \qquad m^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2} = \frac{2\,\varepsilon_1^2 + 2\,\varepsilon_2^2}{4}$$

Um zu untersuchen, welches von beiden der grössere Wert ist, behandeln wir die Differenz beider:

$$m^2 - t^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{4} \text{ also} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4} \qquad (2)$$

Als Quadrat ist dieses stets positiv, es ist also stets m^2 grösser als t^2 (ausgenommen den besonderen Fall $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, in welchem m und t gleich werden).

Dieser Beweis (2) lässt sich leicht auch auf beliebig viele Elemente $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ ausdehnen.

Zur weiteren Vergleichung zwischen dem durchschnittlichen Fehler und dem mittleren Fehler betrachten wir folgende zwei Fehler-Reihen:

											Summe	Quadratsumme
I.	5	6	2	7	3	8	10	9	3	5	58	402
II.	14	3	0	0	6	20	2	2	1	10	58	750

Der durchschnittliche Fehler wird in beiden Fällen gleich, nämlich = 5,8, der mittlere Fehler dagegen wird:

$$m_{\text{I}} = \sqrt{\frac{402}{10}} = \pm 6{,}34, \qquad m_{\text{II}} = \sqrt{\frac{750}{10}} = \pm 8{,}66$$

Der mittlere Fehler lässt die erste Reihe besser erscheinen als die zweite Reihe, und in der That ist eine ziemlich gleiche Fehlerverteilung bis zur Grenze 10 günstiger als das zweimalige Überschreiten dieser Grenze mit 14 und sogar 20, bei II, was durch das zweimalige Vorkommen von 0 nicht aufgewogen wird.

Obgleich man auf diese oder ähnliche Art die Einführung des „mittleren Fehlers" wohl als zweckmässig darstellen kann, gelingt es doch nicht, diese Wahl eines Genauigkeitsmasses als *notwendig* nachzuweisen. Die beste Rechtfertigung des „mittleren Fehlers" liegt aber darin, dass sich auf ihn eine allseitig befriedigende und nun schon seit nahezu 100 Jahren anerkannte Fehlertheorie gründen lässt.

Indem wir hiernach die Definition des mittleren Fehlers nach der Gleichung (1) festhalten, wenden wir diese Gleichung auf das frühere kleine Beispiel § 3. S. 13 an, zunächst mit der Annahme, als ob die scheinbaren Fehler v wie wahre Beobachtungsfehler ε behandelt werden dürften.

	Beobachtungen	v	v^2
	35° 26′ 16″	+ 2,8″	7,84
	20	− 1,2	1,44
	18	+ 0,8	0,64
	25	− 6,2	38,44
	15	+ 3,8	14,44
Summe	94	$[v] = 0{,}0$	$[v] = 62{,}80$
Mittel	35° 26′ 18,8″		

$$m = \sqrt{\frac{62{,}80}{5}} = \pm\, 3{,}54'' \quad (?) \tag{3}$$

Dieser Berechnung (3) haben wir ein Fragezeichen (?) zugesetzt, weil es fraglich ist, ob die zunächst gemachte Annahme der v als wahrer Fehler zulässig ist? Die Antwort hierauf wird in unserem spätern § 7. gegeben werden. Inzwischen müssen wir uns einer anderen Betrachtung zuwenden.

Der *mittlere Fehler* nach der im Vorstehenden gegebenen Definition ist der Grundbegriff der Genauigkeitsuntersuchungen; neben diesem mittleren Fehler hat der durchschnittliche Fehler, der sich zuerst in § 3. dargeboten hat, eine nur sehr untergeordnete Bedeutung.

Es bestehen noch zwei andere Fehlermasse, welche wir hier vorläufig erwähnen wollen, nämlich der *wahrscheinliche Fehler* und der *Grenzfehler*.

Diese beiden Fehler werden jedoch erst in einem späteren Kapitel zu behandeln sein.

§ 5. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz.

Es handelt sich um die Frage, in welcher Weise sich die mittleren Fehler gemessener Grössen auf die hieraus durch Rechnung abgeleiteten Grössen übertragen. Diese wichtige Frage muss erledigt sein, ehe weitere Aufgaben der Ausgleichungsrechnung gelöst werden können. Wir behandeln zuerst einzelne besondere Fälle dieser Frage, nämlich Multiplikation und Addition gemessener Grössen.

I. Multiplikation. Eine gemessene Grösse l wird mit einer gegebenen Zahl a multipliziert, man hat also ein Produkt

$$x = a\, l \tag{1}$$

Hier ist a als gegebene Zahl fehlerfrei, dagegen l als gemessene Grösse soll mit einem mittleren Fehler m behaftet sein, und es fragt sich, welches der mittlere Fehler M des Produktes x wird?

Durch die Multiplikation a werden auch die der Grösse l anhaftenden Fehler betroffen, man kann also rasch überblicken, dass das Ergebnis sein wird:

$$M = a\, m \tag{2}$$

Zur Veranschaulichung mag das Messen einer Geraden mit unsicheren Latten dienen. Wenn eine Messlatte l an sich um den Betrag $\pm\, m$ unsicher ist, d. h. wenn sie ungenau mit dem Normalmass verglichen ist und wenn die Handhabung der Messung selbst ganz fehlerfrei ist (d. h. wenn von den Messungsfehlern selbst hier gar nicht die Rede sein soll), so wird bei a maligem Anlegen der fehlerhaften Latte offenbar ein Fehler $M = a\, m$ erzeugt, und zwar $\pm\, M$, wenn $\pm\, m$ im Vorzeichen unbestimmt ist.

II. Addition. Es werden zwei Grössen l und l' unabhängig von einander gemessen und dann addiert, man hat also eine Summe:

$$x = l + l' \tag{3}$$

die l und l' seien mit mittleren Fehlern $\pm\, m$ und $\pm\, m'$ behaftet und es fragt sich nun, was der mittlere Fehler M der Summe x ist?

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob einfach zu setzen wäre:

$$M = m + m' \quad (?), \tag{3 a}$$

allein sobald man die Sache näher betrachtet, so bemerkt man, dass dieses nur dem äussersten Fall der *Häufung* der Fehler m und m' entspricht, während bei unregelmässigen Vorzeichen $\pm\, m$ und $\pm\, m'$ auch der Fall der gegenseitigen *Tilgung* $m - m'$