Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 1. Einleitung. Überblick über die Geschichte der Methode der kleinsten Quadrate

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

§ 1. Einleitung*). Überblick über die Geschichte der Methode der kleinsten Quadrate.

Es ist jetzt nahezu ein Jahrhundert verflossen seit der Begründung einer Theorie, welche sich mit den Fehlern der Beobachtungen und Messungen beschäftigt, und daher die Feld- und Landmessung sehr nahe berührt, nämlich der sogenannten „Methode der kleinsten Quadrate“.

Im Jahre 1795 wurde diese Theorie von dem damals erst 18jährigen Mathematiker *Gauss* gefunden, und bald darauf durch die Anwendung auf die Ausgleichung des Planeten Ceres bewährt.

Nahezu gleichzeitig hat auch der Franzose *Legendre* das Princip der kleinsten Quadratsumme aufgefunden und in einer kleinen Abhandlung im Jahre 1806 veröffentlicht, während die erste öffentliche Abhandlung von Gauss über die Methode der kleinsten Quadrate erst aus dem Jahre 1809 stammt, so dass also die Priorität der *Veröffentlichung* Legendre hat.

Allein die Priorität der *Entdeckung* gebührt Gauss zweifellos, wie aus den nachher zu berechnenden Einzelheiten zu ersehen ist; und die ganze Behandlungsweise von Gauss unterscheidet sich so sehr durch Tiefe und mathematische Schärfe von der flüchtigen Behandlung Legendres, und Gauss allein hat bis zum Jahre 1826 in sechs classischen Abhandlungen alles wesentliche von dem geschaffen, was heute Methode der kleinsten Quadrate heisst, so dass unbestritten *Gauss* der Vater der Methode der kleinsten Quadrate ist.

Wenn hiebei auch die Nationalitäten der beiden Erfinder in ihrer weiteren Teilnahme an der Sache verglichen werden, so finden wir in Frankreich ein Erlöschen der Ausgleichungstheorie nach dem schwachen Anfang Legendres von 1806, während in Deutschland der von Gauss gepflanzte Baum kräftig Wurzel schlug und Früchte trug, welche dann erst in den letzten Jahrzehnten, als die deutschen Triangulierungs-Ausgleichungen sich als unübertrefflich und durch andere Verfahren nicht ersetzbar bewährt hatten, wie nach anderen Ländern so auch nach Frankreich als neu eingeführt wurden.

Als Vorläufer der heutigen Methode der kleinsten Quadrate sind zu betrachten die Theorien von *Euler*, *Tob. Mayer*, *Boscowich*, *Lagrange*, *Laplace*. Es handelt sich stets darum, aus einer Anzahl von Gleichungen, die grösser ist als die Zahl der Unbekannten, ein möglichst anschliessendes System der Unbekannten zu bestimmen, ohne einzelne Gleichungen ungerecht zu bevorzugen oder zu vernachlässigen. Euler verfuhr 1748 in der Abhandlung „Sur les inégalités du mouvement de

*) Diese Einleitung entstand im wesentlichen aus zwei öffentlichen Vorträgen des Verfassers, nämlich erstens Antrittsrede als Professor am Polytechnikum in Karlsruhe im April 1868 und zweitens Vortrag auf der 17. Hauptversammlung des deutschen Geometer-Vereins am 2. Juni 1891 in Berlin (Zeitschr. f. Verm. 1892, S. 321—329).

Saturne et de Jupiter", so, dass er durch zweckmässig scheinende Verbindung aller Unbekannten für jede Unbekannte eine Art Normalgleichung zu bilden suchte. Ähnlich verfuhr auch *Tob. Mayer* in seiner Abhandlung „Über die Umwälzung des Mondes"; aber auch bei ihm musste noch feiner Takt die fehlende sichere Methode ersetzen. Etwa 1770 stellte *Boscowich* das Princip auf, man müsse im Falle von überschüssigen Gleichungen die Unbekannten so bestimmen, dass die absolute Summe der übrig bleibenden Fehler ein Minimum werde. (Vorstehendes giebt *Wolf*, Handbuch der Astronomie 1891, S. 133.)

Eine erste auf Wahrscheinlichkeitsrechnung gegründete theoretische Untersuchung der Beobachtungsfehler ist im Jahr 1770 von Lagrange angestellt worden (vgl. Encke, Berl. astr. Jahrb. für 1853, S. 310—351), doch ist diese Theorie wieder in Vergessenheit geraten. Der Auffindung unserer heutigen Methode der kleinsten Quadrate ging unmittelbar voraus ein Versuch einer Ausgleichungstheorie von Laplace, welcher zum Zweck der Bestimmung der Erddimensionen aus mehr als zwei Gradmessungen, aus mehreren Gleichungen die unbekannten Elemente bestimmte mittelst der zwei Bedingungen, 1) dass die algebraische Summe der übrig bleibenden Fehler gleich Null werde, und 2) dass die absolute Summe der Fehler ein Minimum werde. Diese Theorie ist entwickelt in „Traité de mécanique céleste, tome second, an VII, (1802) première partie, livre III art. 40. S. 143.

Weiteres über die Entstehungsgeschichte der Methode der kleinsten Quadrate giebt auch *Czuber*, Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891, S. 11 u. ff.

Der Name „*Methode der kleinsten Quadrate*" rührt von Legendre her (vgl. das Folgende) und dieser Name unserer Wissenschaft hat sich auch festgesetzt. Czuber sagt in Theorie der Beobachtungsfehler, 1891, S. 234: die treffendere Bezeichnung „Methode der kleinsten Quadrat*summen*" ist schon 1841 von Hülsen gebraucht worden, und citiert auch Jordan, „Handb. d. Verm., 2. Aufl. 1877, I. S. 7", wo das „*Princip* der kleinsten Quadratsumme" genannt ist. Ich wollte aber damit nicht, wie Czuber meint, diese Bezeichnung an Stelle der längst feststehenden wieder einführen, sondern ich habe daselbst (Inhaltsübersicht S. VII—VIII) das „Princip der kleinsten Quadratsumme" als eine Unterabteilung der gesamten Theorie der Beobachtungsfehler aufgefasst. Der Name „Methode der kleinsten Quadrate" ist nun seit nahe 100 Jahren so fest eingewurzelt, dass es verkehrt wäre, obgleich dieser Name nicht ganz bezeichnend ist, daran rütteln zu wollen.

Wie schon im Eingange kurz angegeben ist, wurde die heute allgemein anerkannte Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate zuerst öffentlich behandelt von Legendre im Jahr 1806 in einer kleinen Abhandlung am Schlusse des Werkes „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes", appendice S. 72—80 „sur la méthode des moindres carrés". (Eine zweite Veröffentlichung hievon gab Legendre in den Mémoires de la classe des Sciences mathém. et phys. de l'institut de France, 1810, seconde partie S. 149 u. ff.) Legendre begründete seine Methode nur durch die Allgemeinheit und Leichtigkeit der Anwendung (Nouvelles méthodes etc. S. 72: „De toutes les principes, qu'on peut proposer pour cet objet, je pense qu'il n'en est pas de plus général, de plus exacte, ni d'une application plus facile que celui" etc.) Als Beispiel der Anwendung giebt Legendre die Bestimmung der Erddimensionen aus 5 in Frankreich gemessenen Polhöhen und den dazwischen liegenden 4 geodätischen Meridianbögen.

Unabhängig von Legendre hatte schon Gauss die Methode der kleinsten Quadrate gefunden im Jahre 1795 als Studierender der Mathematik auf der Universität Göttingen, veröffentlichte sie aber erst in wesentlich erweiterter und vervollkommneter Behandlung im Jahr 1809 in dem Werke: „theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium." (Liber II, Sectio III S. 205—224.)

Gauss sagt über die Prioritätsfrage hier in Art. 186, S. 220: „Ceterum principium nostrum, quo jam inde ab anno 1795 usi sumus, nuper etiam a clar. Legendere in opere „nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, Paris 1806 prolatum est" (Gesamtausgabe von Gauss' Werken, Band VI. S. 56 u. 59).

Sartorius v. Waltershausen berichtet in seiner Biographie von Gauss (Gauss zum Gedächtnis 1856, S. 21) über diesen Gegenstand: „Ein so ausserordentlicher Ideenreichtum quoll damals Tag und Nacht aus der Seele dieses jugendlichen Genies hervor, dass eine Entdeckung gleichsam die andere überstürzte, dass sich kaum Zeit und Musse fand, auch nur die äusseren Umrisse derselben zu Papier zu bringen. So haben denn die grössten Entdeckungen meist über ein Jahrzehnt, selbst über ein halbes Jahrhundert gelegen, ohne dass sie zu einer weiteren Kenntnis des wissenschaftlichen Publikums gelangt sind.“ Und S. 23: „Wie tief auch die Entdeckungen von Gauss damals auf dem Felde der reinen Mathematik gewesen sind, blieben sie doch, wie dies die Natur der Sache mit sich bringt, für längere Zeit, selbst bis auf den heutigen Tag, auf einen sehr engen Kreis von Denkern beschränkt, und es musste noch eine andere Entdeckung aus der Astronomie hinzukommen, die Gauss' Namen auch im grossen Publikum zu einem der gefeiertsten in Europa gemacht hat.“

Mit dieser Entdeckung hatte es folgende Bewandtnis: Am 1. Januar 1801 entdeckte Joseph Piazzi in Palermo den Planeten Ceres (ersten kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter), beobachtete ihn während 41 Tagen, und teilte seine Entdeckung mehreren Astronomen mit. Da jedoch dieselben die Nachricht Piazzis erst mehrere Monate nach der ersten Entdeckung erhielten, zu einer Zeit, in welcher die Beobachtung des Planeten wegen seiner ungünstigen Stellung zur Sonne nicht mehr möglich war, so blieben die 41tägigen Beobachtungen Piazzis das einzige Material, um die Bahnelemente zu berechnen und den Planeten im nächsten Jahr wieder zu finden. Mit dieser Aufgabe beschäftigten sich sofort die Astronomen.

Gauss war es vorbehalten, mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate eine Ephemeride des neuen Planeten zu berechnen, welche den sämtlichen Einzelbeobachtungen, die sich nur auf 9° der ganzen Bahn erstreckten, möglichst gerecht werdend, von der Wahrheit so wenig abwich, dass der erste Wiederentdecker des Planeten, Zach, sich dahin äusserte, die Ellipse des Dr. Gauss stimme „zur Bewunderung genau“ mit der Stellung des Planeten überein.

Obgleich durch die Berechnung der Bahnelemente der Ceres das Ausgleichungsverfahren von Gauss einen vollständigen Triumph errungen hatte, so fühlte Gauss sich doch noch nicht veranlasst, dieselbe der Öffentlichkeit zu übergeben. Zur Erklärung dieser Verzögerung dient folgende Stelle der Vorrede der „theoria motus“ (praefatio pag. IX): „Es wünschten mehrere Astronomen, unmittelbar nach der Wiederauffindung der Ceres, ich möchte die dabei angewendeten Rechnungsmethoden veröffentlichen; indessen verhinderten mich mehrere Ursachen, den Bitten der Freunde zu willfahren, erstens andere Arbeiten, ferner der Wunsch, die Sache später ausführlicher zu behandeln, hauptsächlich aber die Hoffnung, dass fortgesetzte Beschäftigung mit diesem Gegenstand verschiedenen Teilen der Auflösung in Beziehung auf Allgemeinheit, Einfachheit und Eleganz zum Vorteil gereichen werde. Und da mich diese Hoffnung nicht getäuscht hat, so glaube ich, die Verzögerung nicht bedauern zu müssen.“

Die Gauss schen Werke über die Methode der kleinsten Quadrate sind:

1809 Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. Auctore Carolo Friderico Gauss. Hamburgi 1809, Liber II. sectio III.

1810 Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809. Auctore Carolo Friderico Gauss, societati regiae tradita Nov. 25. 1810. (Commentationes societatis regiae scientiarum Goettingensis recentiores Vol. I. 1808—1811.)

1816 „Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen.“ Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von Lindenau u. Bohnenberger. Tübingen 1816. Bd. I. S. 185—196.

1821 Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior, societati regiae exhibita Febr. 15. 1821. (Commentationes societatis regiae scientiarum Goettingensis recentiores, Vol. V. ad a. 1819—1822. S. 33—62).

1823 Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars posterior, societati regiae exhibita Febr. 2. 1823. (Commentationes societatis regiae scientiarum Goettingensis recentiores Vol. V. S. 63—90.)

1826 Supplementum theoriae combinationis erroribus minimis obnoxiae, societati regiae exhibita Sept. 16. 1826. (Commentationes societatis regiae scientiarum Goettingensis recentiores. Vol. VI. 1823—27 S. 57—98.)

In der Gesamtausgabe von Gauss' Werken (Carl Friedrich Gauss' Werke, herausgegeben von der Königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen) bildet die theoria motus den VII. Band. Die Disquisitio de elementis ellipticis Palladis bildet den Anfang von Band VI., die übrigen Schriften über die M. d. kl. Q. finden sich in Band IV.

Eine Zusammenfassung bzw. Übersetzung der Gauss schen Schriften über die M. d. kl. Q. ist enthalten in „Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate von Carl Friedrich Gauss, in deutscher Sprache herausgegeben von Dr. A. Börsch und Dr. P. Simon, Assistenten im Königl. Preussischen Geodätischen Institut. Berlin 1887".

In der „theoria motus" wird die Methode der kleinsten Quadrate durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung begründet, es findet sich dabei für das Fehlerwahrscheinlichkeitsgesetz die Exponentialfunktion $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta}$ Hiemit wird die Ausgleichung und Gewichtsbestimmung für vermittelnde Beobachtungen vollständig behandelt.

In der „Disquisitio de elementis ellipticis Palladis" wird unter Einführung der Bezeichnungen [*bb*. 1] u. s. w. das Minimum der Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler bestimmt.

Die Abhandlung „Über die Genauigkeit der Beobachtungen" bestimmt den wahrscheinlichen Fehler einer Unbekannten nicht nur aus der Quadratsumme, sondern zur Vergleichung auch aus anderen Potenzsummen wahrer Beobachtungsfehler.

Die „theoria combinationis" geht nach einigen allgemeinen Betrachtungen über Fehlergesetze zu der selbständigen Definition des mittleren Fehlers über und stellt die Bedingung auf, dass die zu bestimmenden Unbekannten oder Funktionen derselben mit möglichst kleinen mittleren Fehlern behaftet seien.

Endlich wendet das „Supplementum theoriae combinationis" diese Bedingung auf bedingte Beobachtungen und insbesondere auf die Ausgleichung von Dreiecksnetzen mit Winkelbeobachtungen oder vollständigen Richtungsbeobachtungen an.

Diese Gauss schen Theorieen nebst einigen Bessel schen Zusätzen wurden von *Encke* in einer Abhandlung „Über die Methode der kleinsten Quadrate" verarbeitet, welche als Anhang der drei Jahrgänge 1834, 1835, 1836 des Berliner astronomischen Jahrbuchs erschienen ist. In der Sammelausgabe: „J. E. Encke s astronomische Abhandlungen, zusammengestellt aus den Jahrgängen 1830 bis 1862 des Berl. astr. Jahrb." bildet obige Abhandlung über die M. d. kl. Q. die Nummern XII. XIII. XIV. des ersten Bandes (1866).

Dieses bezieht sich alles auf die *theoretischen* Arbeiten von Gauss über Methode der kleinsten Quadrate. Über Gauss' praktische Anwendungen dieser Theorie auf Triangulierungs-Ausgleichung ist erst in jüngster Zeit Licht verbreitet worden durch Mitteilungen von Oberst *Schreiber* in der „Zeitschrift für Vermessungswesen 1879" S. 141, und von Hauptmann *Gäde*, Beiträge zur Kenntnis von Gauss' praktisch-geodätischen Arbeiten, „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 113—225; vgl. auch Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen", Stuttgart 1882, S. 5—18.

Zu den Begründern der Methode der kleinsten Quadrate ist auch noch *Bessel* zu zählen, welcher in einer Abhandlung „Untersuchungen über die Bahn des *Olbers*-schen Kometen" (Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften, mathematische Klasse 1812—1813, S. 119) und in dem Werk „Fundamenta astronomiae" 1818, S. 18—21 die Fehlerverteilung in längeren Beobachtungsreihen untersucht.

Hagen hat in seinen „Grundzügen der Wahrscheinlichkeitsrechnung" Berlin 1837 (2. Auflage 1867) eine Fehlertheorie aufgestellt, welche von der Anschauung ausgeht, dass sich jeder Beobachtungsfehler aus einer sehr grossen Zahl sehr kleiner teils positiver, teils negativer, absolut genommen gleicher Elementarfehler zusammensetzt. Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die verschiedenen Fälle der möglichen Kombinationen dieser Elementarfehler führt auf das Gauss sche Exponential-Fehlergesetz.

In ähnlicher Weise hat Bessel in den „Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler“ diese Sache behandelt. („Astr. Nachrichten“ 15. Band Nr. 358 und 359 vom Oktober 1838, S. 369 u. ff.)

In der „Gradmessung in Ostpreussen“ 1837 hat Bessel eine von Gauss unberücksichtigt gelassene Aufgabe, nämlich die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen, gelöst und auf die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit unvollständigen Richtungsbeobachtungen angewendet. Auf Gewichts- und Fehlerberechnungen wurde hiebei nicht eingegangen.

Die Anwendungen der neuen Wissenschaft waren vorwiegend *geodätisch.*

Von Gauss haben wir von 1823 als erstes Zahlenbeispiel eine trigonometrische Ausgleichung für Rückwärtseinschneiden („Astr. Nachr.“ 1. Band, 1823, S. 81—86) und schon von 1826 zwei Triangulierungs-Netz-Ausgleichungen in dem „supplementum theoriae combinationis“.

Auch die anschliessenden Arbeiten von *Bessel, Hansen, Andrae* u. A. waren wesentlich durch geodätische Bedürfnisse hervorgerufen; und wenn wir die heutige im Laufe fast eines Jahrhunderts angewachsene Litteratur über Ausgleichungsrechnung überblicken, so finden wir darunter keine Disciplin so sehr vertreten wie die Geodäsie, und neben Astronomen, Physikern u. A. können wir Feld- und Landmesser uns wohl rühmen, die eifrigsten Jünger des Meisters Gauss in Hinsicht auf die methodus quadratorum minimorum zu sein.

Indessen *unmittelbar* aus den Gauss schen Quellen konnten die Praktiker Anfangs nicht schöpfen; sie brauchten vermittelnde Lehrmeister, und diese waren zuerst 1837 der Wasserbaumeister Hagen und 1843 der Landmesser Gerling. Hagen ging 1837 von der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus, und hat damit die Sache den Praktikern unnötig erschwert, während Gerling 1843 als späterer Schüler von Gauss schlechthin das Princip der kleinsten Quadratsumme an die Spitze stellte und in populärster Weise, durch Zerlegung in je „*sieben Hauptgeschäfte*“ die Sache seinen Lesern so mundgerecht machte, dass der Begriff des mittleren Fehlers und die Grundzüge der Ausgleichung trigonometrischer Messungen sich in wenigen Jahrzehnten allgemein verbreiteten, und dass Gerlings „Ausgleichungs-Rechnungen der praktischen Geometrie oder die Methode der kleinsten Quadrate“ heute noch als Buch für Anfänger geschätzt wird.

In seiner Vorrede sagt Gerling: „Ich erinnere mich noch gar wohl der Zeit, wo der Landmesser, welcher mit den logarithmischen Tafeln umzugehen wusste, für den Gelehrten unter seinen Collegen galt. Jetzt würde sich einer lächerlich zu machen glauben, wenn er sich ohne diese Kenntnisse nur zum Examen melden wollte. In ähnlicher Weise wird es demnächst wohl auch mit der Ausgleichungsrechnung gehen“.

Jetzt, 50 Jahre nachdem sie geschrieben, ist diese Prophezeihung erfüllt, denn die Grundzüge der Ausgleichungsrechnung werden jetzt in allen gut eingerichteten Feldmesserprüfungen unseres Vaterlandes verlangt.

Allerdings ist diese halbhundertjährige Entwickelung nicht immer gleichförmig, und auch nicht ohne Kämpfe, verlaufen.

Ein Haupteinwand gegen die geodätischen Anwendungen der Methode der kl. Q. betraf die grosse Arbeit der dabei nötigen Zahlenrechnungen, namentlich bei Auflösung der Normalgleichungen. Allen Anfängern bereiten diese Rechnungen grossen Kummer, und sie bildeten eine stehende Beschwerde, welcher wir aber am wirksamsten begegnen, indem wir den Spiess *umkehren*, indem wir sagen, dass die richtig angewendete Methode der kl. Q. nicht Vermehrung, sondern *Verminderung* der geodätischen Rechenarbeit gebracht hat.

Hierzu wollen wir zuerst einen Ausspruch des bayerischen Geodäten *von Orff* citieren, welcher im Jahre 1866 sich an die schwierige Arbeit gemacht hat, die ganze alte bayerische Triangulierung von Anfang des Jahrhunderts an neu zu berechnen und auszugleichen; er wirft dabei die Frage auf, ob die mancherlei probeweise vorzunehmenden Rechnungen, welche mit der Anwendung anderer Ausgleichungsmethoden verbunden sind, ohne in den Schlussergebnissen zu Tage zu treten, nicht einen ähnlichen Aufwand von Zeit und Mühe verursachen wie die M. d. kl. Q.?

Von dem westlichen Nachbar Bayerns, dem trefflichen *Bohnenberger* in Württemberg, wissen wir, dass er wegen Mangels eines festen Ausgleichungsverfahrens niemals zu einem festen Abschluss seiner Triangulierung gekommen ist; und ebenso war es in Baden, wo man bis zu den vierziger Jahren eine unzählige Menge von Winkeln gemessen und jahrzehntelang gerechnet hatte, bis endlich der tüchtige Obergeometer *Rheiner* noch in reifen Lebensjahren die M. d. kl. Q. lernte und damit die jahrzehntelangen Triangulierungs-Messungen und Berechnungen in Baden endlich (etwa 1850) zum Abschluss brachte.

Wie Triangulierungen in ganzen Netzen früher ausgeglichen wurden, das kann niemand sagen; man weiss nur so viel, dass vor der M. d. kl. Q. ein ewiges Verwerfen und Wiederholen, Probieren, Rücken und Drücken Mode war, und es hat sich aus jener Zeit die treffende Redensart erhalten: Wenn es nicht stimmt, so schickt man einen Trigonometer hinaus und lässt ihn einen Winkel so lange messen, bis er um 3″ grösser (— oder kleiner —) wird. —

In solchem Wirrwarr wirkte die Methode der kleinsten Quadrate wie eine Erlösung, aber allerdings musste dabei eine lange Schule durchgemacht werden, und noch vor kaum 20 Jahren haben sich höchstgestellte Geodäten noch öffentlich gestritten um rein formelle Fragen, wie die „Berechnung des mittleren Fehlers der Winkelmessungen“ oder die berühmte Bessel sche „Nullpunktskorrektion z“.

Wenn nun auch solche Streitfragen jetzt verstummt sind und die Unentbehrlichkeit der M. d. kl. Q. in der *höheren* Geodäsie jetzt allgemein anerkannt ist, so wurde andererseits deren Anwendbarkeit für die sogenannte niedere Geodäsie lange bestritten.

Allerdings häufen sich die Zweifel und Schwierigkeiten der Anwendung der M. d. kl. Q. umsomehr, je weiter man von den Triangulierungen I. Ordnung zu der II.—IV. Ordnung herabsteigt, allein auch auf diesem Gebiete hat sich die M. d. kl. Q. siegreich bewährt.

General *Schreiber* hat sich als Chef der Preussischen Landesaufnahme hierüber ausgesprochen in dem Berichte über die Erdmessungs-Conferenz zu Nizza 1887 (Annex X b. S. 10): „Die M. d. kl. Q. dient bei den Triangulierungen niederer Ordnung lediglich dem Zweck, auf eine möglichst willkürfreie Art zu widerspruchsfreien und plausiblen Resultaten zu gelangen. Dieses Ziel wird aber mit Hilfe der Methode, wenn man nur da, wo wirkliche Strenge ohnehin unerreichbar, auch auf den Schein einer solchen verzichtet, in der denkbar *einfachsten* und elegantesten Weise erreicht."

Dieses leitet uns über zu den Näherungsmethoden im allgemeinen, namentlich auch trigonometrischer Art, welche die M. d. kl. Q. ersetzen sollen. Es giebt deren eine grosse Menge von der persönlichen Willkür im einzelnen Fall bis zu den verklausuliertesten Anleitungen und Zwangsformularien. Wenn auf dem Gebiete der Feld- und Landmessausgleichung in den letzten zwei Jahrzehnten gesündigt worden ist, so ist es sicher bei diesen Näherungsmethoden am meisten geschehen. Allgemein wird die M. d. kl. Q. als Prüfstein für Näherungsverfahren anerkannt und deswegen muss man verlangen, dass ein Näherungsverfahren erheblich *weniger* Arbeit erheische, als die wirkliche M. d. kl. Q. Dieses ist aber bei vielen der zahlreichen Vorschläge jener Art nicht der Fall.

Eine grosse Zahl von Einwirkungen der M. d. kl. Q. auf unser Fach kann man kurz als *moralische* Vorteile bezeichnen; das Messen und Berechnen ist durch die M. d. kl. Q. ehrlicher geworden. Jeder von uns weiss, welche Gemütsbedrückungen entstehen können, wenn Messungen nicht stimmen, wie sie nach billigem Erwarten stimmen sollten. In der Geschichte der Geodäsie wird berichtet, dass der Astronom und Geodät *Mechain* bei der berühmten französisch-spanischen Gradmessung von 1792 durch unehrliches Unterdrücken eines Teiles seiner Messungen bei Barcelona sich eine dauernde Gemütskrankheit und mittelbar den Tod zugezogen habe und in der „Zeitschrift für Verm. 1884", S. 285 wurde hiezu bemerkt, dass vielleicht Mechain gerettet worden wäre, wenn er sich bereits im Besitze der M. d. kl. Q. befunden hätte. Ob die M. d. kl. Q. dazu genügt hätte, lässt sich natürlich nicht bestimmt behaupten, aber das ist zweifellos, dass unehrliches Unterdrücken von Messungen und dergleichen seit der M. d. kl. Q. viel seltener geworden ist als früher.

Den besten Einblick in die geodätischen Ehrlichkeitsverhältnisse früherer Zeiten giebt der Bericht, den Hauptmann *Gäde* aus den Gauss schen Gradmessungsakten gezogen hat. („Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 205, Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel S. 423.) Im Jahre 1830 schrieb Gauss an Bessel: Ich habe das System meiner Hauptdreiecke sorgfältig ausgeglichen, *„ohne alle Willkür, ohne Auswählen oder Ausschliessen"*. Wenn Gauss das ausdrücklich hervorhebt, so kann man daraus rückwärts schliessen, wie es vorher und anderwärts zugegangen sein mag; und in der That werden über die niederländischen, bayerischen, österreichischen und französischen Triangulierungen Einzelheiten berichtet, welche deutlich zeigen, wie gering die Objektivität der Messungen jener Zeit war. Es sei nur das eine erwähnt, dass oft schon die Diagonalen-Controlen (Seitengleichungen) hinreichten, um unehrlich zusammen gestimmte Dreiecksketten zu entlarven.

Alle diese Verhältnisse haben sich nun wesentlich gebessert und wir haben in unseren neuesten Ausgleichungen sogar ein gewisses mathematisches Maass für die Objektivität des Beobachters, nämlich in dem Verhältnis des mittleren Gewichtseinheitsfehlers *nach* der Ausgleichung und *vor* der Ausgleichung, ein Verhältnis das theoretisch = 1 sein sollte, aber häufig 1,5 bis 2,0 sich einstellt. Dasselbe hängt allerdings auch von gänzlich unbekannten Elementen ab, bringt aber doch auch den Ehrlichkeitsgrad der Messung und Berechnung mit zum Ausdruck.

Ein schönes Feld der Anwendung hat die Theorie der Beobachtungsfehler auch in den Genauigkeitsbestimmungen für Messungen irgend welcher Art, insbesondere für unsere Feld- und Landmessungen, Festsetzung amtlicher Fehlergrenzen u. s. w.

In früheren Zeiten wurden die Messungsfehler so wenig als möglich erwähnt, es giebt ganze Bücher über Landmessung, welche die Frage der Messungsgenauigkeit mit unbestimmten Redensarten abhandeln oder auch ganz übergehen. Ja manche alte Verordnung verpflichtet den Feldmesser *bei seinem Eide „ganz genau"* zu messen.

Solchen Anschauungen gegenüber ist die Einführung des mittleren Fehlers an und für sich schon ein grosser Fortschritt, auch wenn die mittleren Fehler nicht immer richtig berechnet wurden. Die beste Bearbeitung eines Vermessungswerkes besteht jetzt nicht mehr wie früher darin, die Fehler zu verstecken, sondern sie so hervorzuheben und zusammenzustellen, dass man rasch ein Urteil über das Ganze gewinnen kann.

Die Genauigkeitsbestimmungen früherer Zeit bewegten sich fast nur in Procentangaben oder Verhältniszahlen; man sagte z. B., der mittlere Fehler einer Kettenmessung sei 1 : 1000, oder der zulässige Fehler einer Flächenbestimmueg sei $1/_2$ $^0/_0$, oder gar, die Genauigkeit eines Nivellements sei 1 : 500 000 der Länge u. s. w., was alles unzutreffend ist.

Erst mit Hilfe der M. d. kl. Q. sind für die meisten Feldmessarten richtige Fehlergesetze gefunden worden, welche für die Anordnung der Messungen zum Voraus, zur Beurteilung des Erfolges nach der Messung und zur amtlichen Fehlergrenzbestimmung von höchster Wichtigkeit sind.

Wir wollen hierbei uns der langen Controversen über die Fehler der Ketten-, Band- und Lattenmessung erinnern, welche im deutschen Geometerverein vor etwa 20 Jahren geführt worden und in den ersten Bänden der „Zeitschr. f. Verm." enthalten sind.

Diese Sache wurde von den Streitenden damals vielleicht teilweise überschätzt, allein die Ergebnisse jener Erörterungen finden wir heute mittelbar in zahlreichen amtlichen und privaten Schriften anerkannt wieder.

Wenn nun schon die einfache Frage nach den Fehlern der Ketten- und Lattenmessungen nicht ohne Fehlertheorie gelöst werden konnte, so ist das noch vielmehr der Fall bei den so wichtigen Fehlergesetzen der Polygonzüge, des Nivellierens u. s. w. Wir wissen jetzt z. B., dass der mittlere Querfehler eines gestreckten gleichseitigen Zuges proportional der $1^1/_2$ Potenz der Gesamtlänge ist, dass der zu fürchtende Querfehler eines offenen Zuges durch Azimutanschluss auf die Hälfte und wenn noch Coordinatenanschluss hinzu kommt, auf $^1/_8$ reduciert wird, oder wir wissen, dass der Querfehler eines Theodolitzuges umgekehrt proportional der Quadratwurzel der Zielweite, dagegen der Fehler eines Kompasszuges und eines Nivellements direkt proportional der Quadratwurzel der Zielweite ist u. s. w. und wir können darnach unsere Anordnungen treffen und den Erfolg beurteilen.

Solche Fehlergesetze sind zu vergleichen den Spannungs- und Biegungsgesetzen der Ingenieurmechanik; und wir wollen daraus auch die weitere Analogie bilden, dass auch die praktischen Anwendungen solcher Gesetze in beiden Fällen innig verwandt sind. Tausende von Bauwerken werden ohne Festigkeitsberechnung nur nach dem praktischen Griff des Maurers und Zimmermanns ausgeführt; aber wer nicht gegebenen Falles auch mit der Berechnung von Spannungen und von Trägheitsmomenten umzugehen weiss, der kann heutzutage wohl als Bauhandwerker aber nicht als wissenschaftlicher Ingenieur gelten. Ähnlich verhält es sich mit den Fehlergesetzen unseres

Faches. Züge und Dreiecke u. s. w. zu messen und nach *sin* und *cos* zu berechnen, genügt für den täglichen Bedarf, aber von dem Meister unseres Faches verlangt man, dass er auch einen Einblick in die verschlungenen Fäden der Fehlerzusammenwirkung besitze.

Die erwähnten allgemeinen Fehlergesetze bilden insofern einen ganz besonderen Gewinn für unsere Messungen als sie, einmal gefunden und aufgestellt, jedermann mühelos zu gute kommen, und es ist keine Übertreibung, wenn wir aussprechen: in diesem Sinne lässt sich die M. d. kl. Q. auf *alle* Messungen, sogar auf diejenigen mit der Kette mit Vorteil anwenden, allerdings durchaus nicht so, dass immer Fehlergleichungen gebildet und Normalgleichungen aufgelöst würden, sondern so, dass zwar nach Gutdünken im einzelnen Falle ausgeglichen, dabei aber die Fehlereinflüsse aller Einzelgeschäfte im Ganzen nach theoretischen Gesetzen berücksichtigt werden.

Nach all diesen idealen Vorteilen wollen wir auch die realen und materiellen Gewinne betrachten, welche die M. d. kl. Q. den Feld- und Landmessern gebracht hat und zwar dadurch, dass die Berechnungen schwieriger und eben damit geachteter und *lohnender* geworden sind.

Um dieses zu zeigen, müssen wir uns der gedrückten Lage erinnern, in welcher die Feld- und Landmessung neben den anderen technischen Wissenschaften sich lange befand und teilweise sich noch befindet.

Da das Aufmessen eines kleinen Lageplans oder das Nivellieren eines Flusslaufes u. dgl. allerdings eine einfache Sache ist, die wohl jeder gute Architekt oder Bauingenieur nebenbei machen kann, wenn er nur den guten Willen dazu hat, so glaubten viele Staatsbehörden, die ganze Landmesserei sei nur eine Art Handwerk für Techniker zweiten Ranges und könne einem Beamten von anderem Fache amtlich *unterstellt* werden. — Da war es nun eine für uns ganz vorteilhafte Neuerung, dass z. B. in den Nivelliertabellen neue Spalten auftraten mit Quadraten und Quadratwurzeln, deren Bedeutung die Vertreter der alten Schule nicht mehr verstanden. Dieses führte an vielen Orten zu der nützlichen Erkenntnis, dass zu solchen Arbeiten Männer angestellt werden müssen, welche die Sache nicht nur nebenbei, sondern ganz verstehen und als Lebensberuf betreiben und dass solche Männer mit gleichen Rechten wie alle anderen Beamten angestellt und in gleicher Weise auch bezahlt werden müssen.

Diese Erkenntnis haben wir nicht zum geringsten Teile dem Eindringen der M. d. kl. Q. in unser Fach zu verdanken.

Beim Rückblick auf die Entwickelung, welche die M. d. kl. Q. einerseits im Ganzen und andererseits in ihren einzelnen Zweigen und bei ihren einzelnen persönlichen Vertretern genommen hat, finden wir die Analogie eines physiologischen Gesetzes über die „Entstehung der Arten“ bestätigt, nämlich dass alle die Stadien, welche die Gesamtheit allmählich durchlaufen hat, auch in der Entwickelung der Unterabteilungen und der einzelnen Individuen nochmals verhältnismässig kurz durchgemacht werden müssen.

Die Hauptstufen dieser Entwickelung sind in unserem Falle: Erstens langsames Erlernen und bedenkliches Auffassen, zweitens Überschätzen und blindes Vertrauen wie zu einem Universalmittel gegen alle Messungsschäden, drittens ruhige Würdigung und erfolgreicher Gebrauch.

So war es z. B. eine zu hoch aufgeschossene Blüte des zweiten Stadiums, als

Hansen vor 25 Jahren glaubte, bei Triangulierungen brauche man nun fast keine Rücksicht auf schiefe Dreiecke und spitze Winkel zu nehmen, wenn man nur genügend viele Kontrollen hat, deren Gesamtausgleichung alle Schäden heilen sollte.

Andererseits ist es eine Frucht des dritten, reifen, Stadiums, dass die Fehlerwirkung der Messungs-Elemente schon vor Beginn der Messungen selbst erwogen und die Gesamt-Anlage und Auswahl der Messungen darnach getroffen wird.

Zur richtigen Auswahl gehören aber namentlich die schon oben erwähnten mannigfaltigen Fehlergesetze.

Die Theorie der Beobachtungsfehler ist fast der einzig *deductive* Teil unserer sonst wesentlich nur *empirisch-inductiven* Feld- und Landmessung, welche in vielen Beziehungen erst durch Einführung jener Theorie zu dem Range einer Wissenschaft erhoben worden ist.

Versuchen wir zum Schlusse die Entwickelung und die heutige Stellung der M. d. kl. Q. in der Feld- und Landmessung durch wenige zusammenfassende Worte zu charakterisieren, so können wir sagen: Diese Methode hat unserem Fache die wichtigsten Dienste teils auf unmittelbarem, teils auf mittelbarem Wege geleistet, unmittelbar in der Klarstellung und Sicherung der Fehlerausgleichungen und der Genauigkeitsbestimmungen, mittelbar als wichtigster Hebel zur Hebung unseres Faches und Gleichstellung desselben mit den übrigen technischen Wissenschaften.

Kapitel I.

Allgemeine Theorie der kleinsten Fehlerquadratsumme.

In diesem ersten Kapitel werden wir die allgemeine Theorie der Methode der kleinsten Quadrate nach der Definition des mittleren Fehlers und nach dem Princip der kleinsten Fehlerquadratsumme in einem Zuge behandeln, und nur so viel von Anwendungen und Beispielen aufnehmen als zur Erläuterung der Theorien nöthig ist. Die eigentlichen Anwendungen, namentlich geodätischer Natur, werden in den nachfolgenden Kapiteln besonders behandelt werden.

§ 2. Erklärungen.

Wer sich mit Messungen irgend welcher Art beschäftigt, macht dabei die Erfahrung, dass diese Messungen Fehlern ausgesetzt sind.

Man hat hauptsächlich zwei Mittel, die Richtigkeit von Messungen zu prüfen, entweder wiederholt man eine Messung unmittelbar und sieht zu, ob man das Ergebnis der ersten Messung wieder erhält, oder man misst verschiedene Grössen, welche unter sich in einer bekannten Beziehung stehen, je einmal, und untersucht, ob die Messungsergebnisse die erwähnte Beziehung zeigen; z. B. man misst die drei Winkel eines ebenen Dreiecks und vergleicht deren Summe mit 180°. Wenn man bei jeder Messung sich eine derartige Probe verschafft, und dieselbe in aller Strenge