Ueber den Vortrag der Mathematik, besonders der Geometrie in den unteren Schulclassen

Hanstein, Ludwig

Stendal, 1804

Aufgaben und Lehrsätze. (S. Seite 55 - 73.)

No. 12. Zwei gerade Linien schließen keinen Raum ein.

Ist durch Winkel und Parallellinien leicht zu erläutern. Zu einer geradlinichten Figur gehören wenigstens drei Gränzlinien oder Seiten.

Aufgaben und Lehrsätze.

(S. Seite 55—73.)

§. 1. Aufgabe.

Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie einen gleichseitigen Triangel zu errichten.

Diese Aufgabe zerfällt in zwei Theile: die Erfüllung des Verlangten, und den Beweis, daß es damit seine Richtigkeit habe. Ehe man aber die Auflösung unternimmt, erinnere man sich

wenigstens, wie sehr die systematische Ordnung der Elementarsätze dadurch gewinnen würde, wenn man mit der Lehre von den Linien und Winkeln anfangen könnte.

sich an die Definition des gleichseitigen Triangels (24. Erkl.), damit man bestimmt vor Augen habe, was hier eigentlich verlangt werde.

I. Auflösung. Man lege die gegebene Linie a b (Fig. 22) zum Grunde, setze den Zirkel*) mit der Spitze in a ein, öffne ihn bis nach b, und beschreibe dann den Kreis b c d, dessen Radius also a b ist. Eben so setze man die Spitze in b ein, und beschreibe den Kreis a c e, dessen Radius b a ist, also derselbe, wie beim ersten Kreise. Beide Kreislinien werden über der Linie a b in einem gewissen Puncte c durch einander hindurchgehen, d. h. einander schneiden, und von diesem Puncte ziehe man als-

*) Unter dieser Benennung wird in der Folge stets das Zirkelinstrument verstanden; unter der Benennung „Kreis" aber die damit beschriebene Figur. Uebrigens werden nachher zur Abkürzung folgende Zeichen gebraucht:

E. bedeutet Erklärung
G. — Grundsatz
Th. — Thesis
Hyp. — Hypothesis
HS. — Hülfssatz
Const. — Construction.

alsdann gerade Linien nach a und nach b, so entsteht dadurch ein Triangel.

II. Beweis, daß dieser Triangel die verlangte Eigenschaft habe.

1. Die Thesis ist hier also, daß ab = ac; ab = bc und ac = bc.

2. Als Hülfssätze dienen hier die Grundsätze: 1) daß alle Radien Eines Kreises einander gleich (15. E.), und 2) daß zwei Dinge, die einem dritten gleich sind, einander selbst gleich sind (1. G.).

3. Die Disposition des Beweises liegt hier deutlich in der Thesis; denn es muß von jedem der drei Paar Seiten einzeln die Gleichheit dargethan werden.

4. Man überlege also 1) daß ab = ac sein müsse, weil sie beide Radien des Kreises bcd sind; 2) daß ab = bc, weil sie beide Radien des Kreises ace sind: So wird man leicht, da hiernach sowol ac als bc der ab gleich sind, 3) nach HS. 2. den Schluß machen, daß auch ac = bc sein müsse. Daher sind alle drei Seiten dieses, auf ab errichteten Triangels gleich, und das Verlangte ist geschehen.

Anm.

Anm. Hat man künftig dergleichen Triangel zu construiren, so ist es nicht nöthig, ganze Kreise zu zeichnen, sondern nur kleine Bogen davon, in der Gegend, wo diese einander schneiden können; denn es ist ja nur um die Bestimmung des Punctes c zu thun.

§. 2. Aufgabe.

An einen gegebenen Punct eine, einer gegebenen gleiche, gerade Linie zu legen.

Eine Aufgabe, welche die Weitläuftigkeit, womit Euklides sie behandelt, nicht erfordert. Wer nur etwas mit dem Zirkel umzugehen weiß, der muß von selbst auf leichte Auflösungen derselben fallen. Man lasse es daher die Zöglinge versuchen; und sollten sie es ja verfehlen, so lasse man sie vom gegebenen Puncte c (Fig. 23) aus einer Linie ziehen, dann die gegebene Linie ab in den Zirkel fassen, diesen in c einsetzen, und einen Bogen beschreiben, welcher die neue Linie schneidet. Das dadurch abgeschnittene Stück cd muß nun, wie jeder ohne Beweis einsieht, der Linie ab gleich sein.

§. 3.

§. 3. Aufgabe.

Es sind zwei ungleiche gerade Linien gegeben; man soll von der größeren eine, der kleineren gleiche Linie wegnehmen.

Bedarf eben so wenig vieler Vorbereitung. Wer die Auflösung der vorigen Aufgabe selbst fand, oder wenigstens ohne Mühe begriff, der wird auch diese leicht bewerkstelligen. Man fasse nemlich die gegebene kleinere Linie ab (Fig. 24) in den Zirkel, setze diesen im Anfangspuncte c der größeren Linie cd ein, und beschreibe einen Bogen, welcher die cd schneidet: So ist ce (=ab) von cd weggenommen.

Anm. Eben so würde man die ab zu der cd hinzuthun, wenn man die ab in den Zirkel nähme, damit von d aus nach der, dem Puncte c entgegengesetzten Seite einen Bogen beschriebe, und alsdann die cd verlängerte, bis sie in f den Bogen träfe. Offenbar wäre dann df = ab, also cf=cd+ab.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn in zwei Triangeln zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel des Einen, zweien Seiten und dem dazwischen liegenden Winkel des Anderen, Stück für Stück gleich sind, so sind die Triangel selbst und alle noch übrigen Theile derselben, so wie sie einzeln eine gleiche Lage haben, ebenfalls einander gleich *).

Der erste Lehrsatz und zugleich einer der wichtigsten.

Man lasse hier zuerst vor den Augen der Zöglinge zwei Triangel mit den im Lehrsatze ausbedungenen Eigenschaften entstehen, wie Fig. 25. Man nehme also dazu zwei Paar Linien, etwa ab und de, ac und df von gleicher Länge, und lege ab und ac unter dem Winkel bac an einander, dem der Winkel edf, wel-

*) Eine verzeihliche Abänderung des Euklidischen Textes, der hier nicht bündig genug ausgedrückt ist.

welchen de und df einschließen, gleich werden muß. Alsdann erläutere man an der Figur

1. Die Hypothesis: $ab = de$; $ac = df$; $\vee bac = \vee edf$; und die Thesis: $\triangle abc = \triangle def$; $bc = ef$; $\vee abc = \vee def$; und $\vee acb = dfe$.

2. Bringe man als Hülfssätze in Erinnerung: 1) den G., daß zwischen zwei Puncten nur Eine gerade Linie Statt finde (nach E. 4, Anm. 1.); und 2) den 8. G. nebst der Anm.

3. Lege man als Disposition zum Grunde, daß hier 1) die Gleichheit der beiden Linien bc und ef zu erweisen sei, woraus denn 2) die übrigen Stücke der Th. gefolgert werden können.

4. Beweis.

1) Man denke sich den $\triangle abc$ auf def gelegt, so daß a auf d und ab in die Richtung von de kommen. Ohne Zweifel wird nun b auf e fallen, weil (nach der Hyp.) $ab = de$; auch werden die (nach der Hyp.)

gleichen Winkel b a c und e d f einander decken, daher muß a c in die Richtung von d f und der P. c also auf den P. f fallen, weil (nach der Hyp.) a c = d f. Nun läßt es sich (HS. 1) nicht denken, daß zwischen e und f noch eine andere gerade Linie Statt finde als e f; folglich muß b c, welche die auf e und f gefallenen Puncte b und c verbindet, ebenfalls mit e f zusammenfallen; also wird b c die e f decken, und ihr gleich sein.

2) Da nun b c die e f deckt und a b die d e, so ist auch V a b c = d e f. Und da b c die e f deckt, und a c die d f, so ist auch V a c b = d f e. Also sind, wenn jene drei, in der Hyp. angegebenen Theile beider Triangel gleich sind, auch alle übrigen, gleichliegenden Theile derselben gleich, und daher die ganzen Triangel selbst.

§. 5.

§. 5. Lehrsatz.

In jedem gleichschenklichten Triangel sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. (Auch sind, wenn man die Schenkel verlängert, die Winkel unter der Grundlinie einander gleich.) Fig. 26.

Ein Satz, der wegen seines vielfach zusammengesetzten Beweises den Anfängern viele Schwierigkeiten macht, und daher, weil man in der Folge sehr oft seiner bedarf, mit größter Behutsamkeit vorgetragen werden muß.

Vorläufig erinnere man beim △ a b c an die 25ste E., und erkläre den Ausdruck Grundlinie, welcher im gleichsch. △ die dritte, ungleiche Seite bedeutet; hier also b c. Nun liegt

1. Die Hypothesis in der E. des gleichsch. △, nemlich ab = ac; und die Thesis ist V acb = V abc (welche an der Grundlinie b c liegen).

2. Zu Hülfssätzen dienen: 1) G. 3. 2) §. 4.

3. Um die zur Beweisführung nöthigen Hülfslinien zu erhalten, verlängere man

die gleichen Schenkel ab und ac unter b und c hinaus, und mache af=ag. Weil nun (Hyp.) ab=ac ist, so wird natürlich, wenn man sich diese beiden von af und ag weggenommen denkt, (G. 3) etwas gleiches übrig bleiben, also bf=cg sein. Endlich ziehe man fc und bg. Dadurch sind in der Figur abfgc außer der Grundfigur abc noch zwei Paar Triangel, 1) afc und agb, 2) bfc uud cgb entstanden, welche zum Theil über einander liegen. Man zeige sie daher dem Schüler, damit er sie alle deutlich bemerke, entweder in einzelnen Figuren, wie sie hier Fig. 26 um abfgc herumgestellt sind; oder in einzelnen, danach geformten Blättern von Pappe, die man willkührlich über einander legen kann. (Ohne diese Vorsicht mögte der Beweis Vielen dunkel bleiben.)

4. Disposition. Es wird 1) gezeigt, daß △ afc=△ agb, und daraus gefolgert, daß V acf=V abg; 2) bewiesen, daß △ bfc=△cgb, und daraus geschlossen, daß V bcf=cbg; woraus denn 3) die Th. hervorgeht.

5) Be-

5) Beweis.

1) Da (nach der Hyp.) ac = ab (wovon jene dem △ acf und diese dem △ abg zugehört), und (nach der Const.) af = ag (jene in acf, diese in abg); da auch der Winkel bei a in beiden Triangeln derselbe ist, also V caf = bag: So ist △ acf = △ agb, weil sie beide die Eigenschaften haben, unter welchen nach §. 4. zwei △△ einander gleich sind. Daher ist auch *V acf = V abg*, weil sie gleichliegende Stücke der beiden gleichen △△ sind. (Diese Folgerung werde vorzüglich bemerkt.) Auch ist aus eben dem Grunde fc = bg und V afc = V agb.

2) Da, wie eben bewiesen ist, fc = bg (man sehe auf die kleineren △△ bfc und cgb), und V bfc (oder afc) = V cgb (oder agb); da auch (nach der Const. und G. 3.) bf = cg: So ist, ebenfalls nach §. 4, △bfc = △cgb, und daher auch *V bcf = V cbg*, als gleichliegende Stücke.

 3) Weil

3) Weil nun nach n. 1. V acf = V abg, und
nach n. 2. V bcf = V cbg, so subtrahire man diese beiden letzten von den beiden ersten, und es wird (n. G. 3) *V acb* = *V abc* sein.

Anm. Da nach n. 2. △ bfc = △ cgb, so sind auch die Winkel cbf und bcg gleich, als gleichliegende Stücke dieser beiden Triangel. Die genannten Winkel sind aber die, an dem Triangel abc, nach Verlängerung der beiden gleichen Seiten, unter der Grundlinie bc entstandenen; mithin ist auch der eingeklammerte Zusatz des obigen Lehrsatzes erwiesen.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn in einem Triangel zwei Winkel einander gleich sind: So sind auch die den gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten einander gleich. Fig. 27.

Der umgekehrte Lehrsatz aus §. 5. Dort war das Gleichschenklichte des Triangels ausbedungen, hier soll es erwiesen werden; dort wurde

wurde die Gleichheit der Winkel an der Grundl. dargethan, hier ist sie Bedingung. — Also ist beim $\triangle$ abc

1. Die Hypothesis: V abc = acb; die Thesis: ab = ac.

2. Hülfssätze: 1) §. 4. 2) S. 9. 3) Bei der Const. erinnere man sich an §. 3.

3. Disposition. Der Beweis wird indirecte geführt (Siehe S. 66); es wird also 1) das Gegentheil der Thesis angenommen, daß ab und ac nicht von gleicher Länge wären, und daraus eine Folgerung gezogen, aus deren Unmöglichkeit 2) die Wahrheit der Thesis erhellet.

4. Beweis.

1) Wären ab und ac ungleich, so müßte eine von beiden größer sein, etwa ab. Wäre ab > ac, so ließe sich auf ab von b aus ein Theil abschneiden (§. 3), der so lang wäre als ac; dieser sei bd. Ziehet man nun von d nach c eine Linie, so entsteht dadurch ein neuer Triangel dbc, der, weil er ganz im $\triangle$ abc liegt,

den Schülern (wie es bei §. 5 geschah) bemerkbar gemacht werden muß, damit sie ihn genau vom △ abc unterscheiden. Von diesem △ dbc ließe sich nun (nach HS. 1) beweisen, daß er dem △ abc gleich wäre. Denn nach der Const. wäre ac = db; die Seite bc ist in beiden Triangeln dieselbe, und (nach der Hyp.) V acb = dbc (oder abc). Folglich wäre △ acb = △ dbc, d. h. das Ganze wäre so groß wie ein Theil davon, welches (HS. 2) unmöglich ist.

2) Da also aus der vorhin angenommenen Ungleichheit der beiden Seiten ab und ac etwas unmögliches folgen, und diese absurde Folgerung nicht bloß aus dem Einen hier aufgestellten Falle, daß ab > ac, sondern auch aus dem Gegentheile von diesem, wenn man ac > ab annähme, herfließen würde: So kann jene Ungleichheit beider Seiten durch-

durchaus gar nicht Statt finden, und es muß also $ab = ac$ sein.

§. 7. Lehrsatz.

Wenn über einer geraden Linie aus ihren Endpuncten zwei gerade Linien in Einem Puncte zusammen laufen: So können nicht über derselben Linie aus eben den Puncten zwei andere gerade Linien, die jenen jede für sich gleich sind (die erste nemlich der ersten, die zweite der zweiten) in einem anderen Puncte an eben der Seite zusammenlaufen. Fig. 28.

Man ziehe über einer gegebenen geraden Linie ab zwei Linien, ac und bc, die in c zusammen treffen; nun besteht

1. Die Thesis darin, zu zeigen, daß man nicht noch zwei andere, der ac und bc gleiche Linien von a und b aus, an derselben Seite von ab, so ziehen könne, daß sie in einem anderen Puncte als c zusammen liefen.

2. Hülfssätze: 1) §. 5. 2) G. 9.

3. Disposition. Der Beweis wird indirecte geführt, also 1) angenommen, daß man zwei andere Linien ad (= ac) und bd (= bc), die nicht in c, sondern etwa in d zusammen träfen, ziehen könne; und daraus ein Widerspruch hergeleitet, welcher 2) die Thesis als einen bewiesenen Satz darstellt.

4. Als Hülfslinie ziehe man cd, wodurch außer den schon vorhandenen beiden Triangeln acb und adb noch zwei andere entstehen, nemlich acd und bcd, auf welche es hier vorzüglich ankommt. (Man mache sie wie bei §. 5 bemerkbar.)

5. Beweis.

1) Wären, wie es hier angenommen ist, ac = ad und bc = bd, so müßte man auch die $\triangle\triangle$ acd und bcd als gleichschenklichte anerkennen. Folglich wären (HS. 1) im $\triangle$ acd die Winkel an der Grundlinie cd einander gleich, $\angle acd = \angle adc$. Offenbar wäre also, weil (S. 9) $\angle acd > bcd$ ist, auch $\angle adc > bcd$.

Nun

Nun aber ist (HS. 2) $V\,bdc > adc$, folglich noch weit mehr $V\,bdc > V\,bcd$.

Betrachtet man aber nun auch den $\triangle\,bcd$ als einen gleichschenklichten (weil $bc = bd$ angenommen ist), so ist ja in demselben (HS. 1) $V\,bdc = V\,bcd$.

Es entsteht hier also ein Widerspruch, indem dieselben zwei Winkel einmal einander ungleich, und dann wieder gleich sein sollen.

2) Da nun dieser Widerspruch aus der angenommenen Möglichkeit, daß $ad (= ac)$ und $bd (= bc)$ in einem anderen Puncte als in c zusammenlaufen könnten, nach richtigen Schlüssen hervorgeht: So ist daraus klar, daß jene Linien ad und bd, wenn sie den Linien ac und bc gleich sind, nicht in einem anderen P. als in c sich treffen können, und mithin die Thesis erwiesen.

§. 8. Lehrsatz.

Wenn in zwei Triangeln zwei Seiten zweien Seiten, jede für sich, gleich sind, und die dritte Seite der dritten gleich ist: So ist auch ein Winkel einem Winkel gleich, der nemlich, welchen die (ersten beiden) gleichen Seiten einschließen. Fig. 29.

Man lasse die beiden Triangel abc und def so vor den Augen der Schüler entstehen, daß man die drei Seiten des zweiten, einzeln genommen, so lang macht, wie die des ersten. Es ist dann

1. Die Hypothesis: 1) ab = de; ac = df, und 2) bc = ef (die dritte Seite gleich der dritten); die Thesis: V bac = V edf (die von den beiden ersten Seitenpaaren eingeschlossenen Winkel).

2. Hülfssätze. 1) der ganze Beweis dieses Lehrsatzes beruht auf dem im 7ten §, welcher bloß deshalb vorangeschickt wurde. Uebrigens erinnere man sich noch 2) an E. 4. Anm. 1, und 3) an Gr. 8.

3) Be-

3. Beweis. Man denke sich den △ abc auf den △ def gelegt, und zwar so, daß b auf e, und bc in die Richtung von ef komme. Weil nun (nach der Hyp.) bc = ef, so muß c auf f fallen. Da ferner (n. d. Hyp.) ba = ed und ca = fd, so können (§. 7) ba und ca über ef, von e und f aus, in keinem anderen Puncte zusammenlaufen als in d. Es fallen also die Endpuncte der gleichen Linien ba und ed in e und d, und eben so die Endpuncte der gleichen Lin. ca und fd in f und d zusammen. Folglich deckt (HS. 2) ba die ed und ca die fd, und daher auch der V bac den V edf; welche also (HS. 3) einander gleich sind.

Anm. Offenbar ist auch V abc = def, weil sie einander decken, und eben so V acb = dfe; folglich sind die ganzen Triangel abc und def einander gleich. Es ist dies, wenn man auf §. 4 zurücksieht, der zweite Satz von der Gleichheit der Dreiecke, den man auch ohne Hülfe des 7ten §, nach einer leichten Construction, bloß mit Zuziehung des 4ten und 5ten §. und des 2ten G., directe (also

(also für die Anfänger weit deutlicher) darthun kann. S. Klügel, Mönnich u. s. w.

§. 9. Aufgabe.

Einen gegebenen geradlinichten Winkel zu halbiren. Fig. 30.

Gegeben ist hier ein Winkel, bac.

Verlangt wird, diesen in zwei gleiche Theile zu theilen.

I. Auflösung. (Mit Rücksicht auf §. 1). Man schneide auf den Schenkeln des Winkels bac mit dem Zirkel, von a aus, gleiche Stücke ab, nemlich ad = ae; ziehe de, und errichte auf de, nach der, dem Puncte a entgegengesetzten Seite hin, (§. 1) den gleichseitigen △ def. Alsdann ziehe man von a nach f eine gerade Linie, wodurch der V bac in zwei Theile, V baf und V fac, getheilt wird.

II. Beweis, daß diese beiden Winkel einander gleich seien, folglich die Aufgabe erfüllt sei. Also ist

1. Die Thesis: V daf (baf) = V eaf (caf). Dabei legt man hier zum Grunde, was

durch

durch die Const. ausgemacht ist, daß nemlich ad=ae, und df=ef.

2. Hülfssatz: §. 8; welcher sich hier auf die beiden △△ daf und eaf anwenden läßt.

3. Disposition. Man zeige 1) die Gleichheit zwischen den drei Seiten des △ daf und den drei Seiten des △ eaf, und daraus 2) die Th.

4. Beweis.

1) Da (nach der Const.) da=ae und af in beiden Triangeln liegt, da ferner auch (n. d. Const.) df=ef, also alle drei Seiten des △ daf einzeln den gleichliegenden Seiten des △ eaf gleich sind: So ist

2) (§. 8) V daf=V eaf, und daher die Auflösung richtig.

§. 10. Aufgabe.

Eine gegebene begränzte gerade Linie zu halbiren. Fig. 31.

Gegeben ist hier eine begränzte Linie ab.

Verlangt wird, diese in zwei Hälften zu theilen.

I. Auflösung. (Mit Rücksicht auf §. 1 und 9). Wenn man über ab einen gleichseitigen Triangel acb errichtet, und den Winkel an der Spitze, acb, (nach §. 9) durch die Linie cd halbirt: So wird durch eben diese, gehörig verlängerte Linie, auch die ab in zwei Theile, ad und db getheilt.

II. Beweis, daß diese beiden Stücke, wie verlangt wurde, gleich groß seien. Es ist also

1. Die Thesis: ad = db. Aus der Const. erhellet, daß ac = cb.

2. Hülfssatz: §. 4, welcher auf die beiden, durch die Auflösung entstandenen Triangel acd und bcd angewandt werden kann.

3. Disposition. Weil ad und db in diesen beiden Triangeln liegen, so muß 1) die Gleichheit der Triangel bewiesen, und daraus 2) die Th. gefolgert werden.

4. Beweis.

1) Wenn man die einzelnen Stücke der △ △ acd und bcd betrachtet, so ist (nach der Const.) ac = bc, und

V acd

V acd = V bcd; auch gehört die cd beiden Triangeln an, und ist daher in beiden dieselbe; folglich ist (§. 4) △ acd = △ bcd; also auch 2) ad = bd; mithin die Aufgabe aufgelöst.

§. 11. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie, in einem in ihr gegebenen Puncte, einen Perpendikel zu errichten. Fig. 32.

Gegeben: 1) eine gerade Linie ab; 2) in derselben ein Punct c.

Verlangt: Von dem Puncte c aus eine Linie zu errichten, die auf der Linie ab senkrecht stehe (E. 10).

I. Auflösung. Auf der Linie ab werden von c aus auf beiden Seiten dieses Punctes mit dem Zirkel gleiche Stücke, cd und ce, abgeschnitten. Auf der, dadurch begränzten Linie de, wird (§. 1) ein gleichseitiges Dreieck errichtet, und von der Spitze desselben nach dem gegebenen Puncte c die Linie fc gezogen.

II. Beweis, daß fc auf ab senkrecht stehe. Dies ist (E. 10) der Fall, wenn die Nebenwinkel (E. 9. Anm.), welche fc mit ab bildet, nemlich die VV fcd und fce, gleiche Nebenwinkel oder rechte Winkel sind. Daher ist hier

1. Die Thesis: V fcd = V fce. Die Const. lehrt übrigens, daß cd = ce, und fd = fe.

2. Hülfssatz: §. 8, angewandt auf die beiden Triangel fdc und fec.

3. Disposition. Es wird gezeigt, daß 1) die Bedingung des 8ten §, die Gleichheit der drei Seiten, hier eintrete, also 2) mit Grunde auf die Richtigkeit der Th. geschlossen werden könne.

4. Beweis.

1) Nach der Const. ist in den △△ fdc und fec, cd = ce. Ferner ist die Seite fc beiden Triangeln gemein, und endlich (auch nach der Const.) fd = fe. Folglich ist

2) (§. 8) V fcd = V fce. Sie sind also gleiche Nebenwinkel, und daher

ist

ist fc der verlangte Perpendikel auf ab, errichtet im Puncte c.

§. 12. Aufgabe.

Auf eine gegebene (unbegränzte) gerade Linie, von einem außerhalb derselben gegebenen Puncte, einen Perpendikel zu fällen. Fig. 33.

Man erläutere hier zuerst, worin diese Aufgabe von der vorigen verschieden sei. In beiden ist die Linie, auf welcher der Perpendikel stehen soll, gegeben; allein bei der vorigen Aufgabe war der Punct in der Linie bestimmt, von welchem aus man den Perpendikel errichten sollte, und bei der gegenwärtigen Aufgabe ist ein Punct außerhalb der Linie vorgeschrieben, von welchem aus der Perpendikel gefällt werden soll. Die gegebene Linie sei ab, und der bestimmte Punct über derselben sei c.

I. Auflösung. (Mit Rücksicht auf §. 10, und deshalb auch auf §. 9). Man nehme an der, dem Puncte c entgegenstehenden Seite der

Linie ab einen beliebigen Punct d, fasse die Entfernung von c bis d in den Zirkel, und beschreibe von c aus mit diesem Radius einen Kreis. Durch diesen Kreis wird ab in zwei Puncten, g und e, geschnitten, mithin die Linie ge begränzt werden. Nun halbire man ge (nach §. 10), und ziehe von c nach dem Theilungspuncte h der Linie ge eine gerade Linie ch.

II. Beweis, daß ch auf ab senkrecht stehe, d. h. (wie bei §. 11) daß chg und che gleiche Nebenwinkel oder rechte Winkel seien. Es ist also auch hier

1. Die Thesis: V chg = V che. Dabei merke man sich, daß nach der Const. hg = he ist.

2. Als Hülfssätze sind hier nöthig: 1) §. 8, und 2) E. 15 (Der G. von der Gleichheit der Radien). Um aber nach diesen beiden den Beweis führen zu können, muß man noch

3. zwei Hülfslinien ziehen, nemlich von c nach g und von c nach e, wodurch zwei Triangel, chg und che entstehen, auf welche §. 8 sich anwenden läßt.

4. Die

4. Die Disposition ist hier wie bei §. 11.

5. Beweis.

1) Die drei Seiten des △ chg sind einzeln den drei gleichliegenden Seiten des △ che gleich. Denn hg=he (n. d. Const.); ch liegt in beiden Triangeln; und cg=ce (HS. 2). Daher ist

2) (HS. 1) V chg=V che. Diese sind also gleiche Nebenwinkel, und deshalb ist ch ein, vom Puncte c auf ab gefällter Perpendikel, wie verlangt wurde.

§. 13. Lehrsatz.

Die Winkel, welche eine gerade Linie, die auf einer anderen stehet, mit dieser anderen macht, (oder kürzer: Nebenwinkel, E. 9. Anm.) sind entweder zwei rechte, oder zwei rechten gleich.

Es treten hier zwei verschiedene Fälle ein, indem die Eine Linie auf der Anderen entweder senkrecht stehet, oder nicht.

I. Steht die Eine Linie auf der Anderen senkrecht, wie ab und cd Fig. 15: So sind die Winkel, welche sie mit derselben macht, abc und abd (E. 10) an sich schon gleiche Nebenwinkel, also zwei rechte; denn darauf beruht ja eben die Erklärung des Senkrechten.

II. Steht aber jene Linie nicht senkrecht, sondern etwa wie ab Fig. 34, so sind die Winkel, welche sie mit der anderen, dc, macht, nemlich die Winkel abc und abd zwar einander ungleich; aber es läßt sich beweisen, daß sie beide zusammengenommen so groß seien, als zwei rechte, oder daß der Eine (abc) um eben so viel kleiner sei, als ein rechter, um wie viel der Andere (abd) größer ist. Also ist hier

1. Die Thesis: $\text{V cba} + \text{V abd} = 2\,\text{R}$.

2. Als Hülfssätze hat man hier bloß zwei Grundsätze zu beachten, nemlich G. 1 u. 2.

3. Als Hülfslinie dient ein Perpendikel, den man (nach §. 11) auf dc im Puncte b zu errichten hat, nemlich be. Dadurch entstehen zwei rechte Winkel, cbe und ebd; und der Beweis nimmt nun folgenden Gang.

4. Dis-

4. Disposition. Es muß 1) gezeigt werden, daß die beiden rechten Winkel, welche be mit dc macht, aus denselben Theilen bestehen, wie 2) die beiden Winkel, welche durch ab auf dc entstanden sind; woraus 3) die Th. hervorgeht.

5. Beweis.

1) Der V cbe besteht offenbar aus den beiden VV cba und abe; also bestehen (S. 2) die beiden rechten cbe und ebd aus den drei Winkeln cba, abe und ebd; oder mathematisch ausgedrückt: $cbe + ebd = cba + abe + ebd$.

2) Sieht man nun auf die Winkel, welche ab mit dc macht, so besteht nach der Const. der Eine davon, nemlich abd, aus den beiden Winkeln abe und ebd; also bestehen (S. 2) cba und abd aus den drei Winkeln cba, abe und ebd; oder mathematisch bestimmt: $cba + abd = cba + abe + ebd$.

3) Da nun die VV cbe + ebd aus denselben Theilen, cba + abe + ebd, zusammengesetzt sind, wie cba + abd: So müssen (G. 1) cbe + ebd = cba + abd sein. Nun sind cbe + ebd 2 Rechte, also sind auch *cba* + *abd* = 2 R.

Anm. 1. Für manchen wird folgender kürzere Beweis anziehender sein: Da (n. d. Const.) cbe ein rechter Winkel ist, so ist cba offenbar um den V abe **kleiner**, als ein R. Da ferner ebd ein R. ist, so ist abd um denselben V abe **größer**, als ein R. Der V cba ist also gerade um so viel kleiner, als ein R., um wie viel der V abd größer ist, als ein R. Daher müssen V cba + abd = 2 R. sein. (Denn wenn die 5 um 3 kleiner ist, als 8, die 11 aber um 3 größer, als 8, so ist natürlich 5 + 11 = 2 X 8.)*).

Anm.

*) Anm. Man versuche beide Beweise, weil dieser Lehrsatz, welcher in der Folge so oft benutzt wird, den An-

Anm. 2. Auf ähnliche Art kann man diesen Satz beweisen, wenn der Nebenwinkel drei, vier oder mehrere sind; ein Versuch für die Schüler.

§. 14. Lehrsatz.

Macht eine gerade Linie an Einem und demselben Puncte, aber auf zwei verschiedenen Seiten, mit zwei anderen geraden Linien, Winkel, welche zusammengenommen zwei rechten gleich sind: So sind diese Winkel Nebenwinkel, d. h. jene beiden anderen Linien liegen in Einer geraden Linie *).

Der umgekehrte Lehrsatz des 13ten §. Dort wurde angenommen, daß (in Fig. 34) die

Anfängern gewöhnlich Schwierigkeiten macht. Daher es auch Entschuldigung verdient, daß er hier ausführlicher, als mancher andere behandelt ist.

*) Anm. Euklid's Worte konnten hier nicht ungeändert stehen bleiben, weil er den Ausdruck „Nebenwinkel" unrichtig gebrauchte. Er sagt: „Machen mit einer geraden Linie, in eben demselben Puncte, zwei andere, nicht

die beiden äußeren Schenkel, cb und bd in Einer geraden Linie lägen, also mit ab Nebenwinkel (E. 9. Anm.) bildeten; und daraus wurde bewiesen, daß die beiden V cba + abd = 2 R. *Hier* wird dies letzte angenommen, daß nemlich eine Linie ab (Fig. 35) mit zwei anderen, bc und bd, welche im Puncte b einander treffen, zwei Winkel, abc und abd mache, welche zusammengenommen zwei rechten W. gleich sind; und daraus bewiesen, daß diese

nicht an (Einer und) derselben Seite liegende gerade Linien — *Nebenwinkel*, welchen zwei R. gleich sind: So liegen *diese Linien in gerader Linie* an einander." Allein in dem Begriffe der Nebenwinkel (E 9. Anm.) ist das schon mit enthalten, daß ihre zwei äußersten Schenkel in Einer geraden Linie liegen. Wenn daher angenommen wäre, eine Linie machte mit zwei anderen — *Nebenwinkel*, so dürfte nicht erst erwiesen werden, daß diese beiden anderen in *Einer geraden Linie* lägen. Und doch *beweist* dies Euklides im vorliegenden Lehrsatze. Man könnte einwenden, Eukl. habe den Ausdruck „Nebenwinkel" in einem anderen, *weiteren* Sinne genommen, da sich überhaupt keine Erkl. dieses Begriffs in seinen Definitionen finde. Aber aus n. 10 in denselben sieht man allerdings, daß er stillschweigend eben die E. davon voraussetze, welche E. 9. Anm. gegeben ist.

diese beiden W. — Nebenwinkel sein müssen. Also ist

1. Hypothesis: $V cba + V abd = 2R$.
Thesis: daß cbd Eine gerade Linie sei. Beim Beweise liegt

2. Als Hülfssatz der 13te §. zum Grunde, mit Zuziehung des 1sten, 3ten und 9ten G.

3. Disposition. Indirecter Beweis; daher 1) aus dem Gegentheil der Th., als lägen nemlich cb und bd nicht in Einer geraden Linie, eine Absurdität gefolgert, und daraus 2) die Wahrheit des Satzes hergeleitet wird.

4. Beweis.

1) Wären cb und bd nicht in Einer ger. Linie, so ließe sich doch cb nach der Seite von d hin verlängern, so daß etwa cbe eine gerade Linie ausmachte. Wäre dies der Fall, so müßten die Winkel, welche ab mit cbe macht, als Nebenwinkel (§. 13) zusammengenommen zwei rechten gleich sein; also $V cba + abe = 2R$. Nun sind aber (nach der Hyp.) $V cba + abd = 2R$. Also wären

ren (S. 1) $cba + abe = cba + abd$; folglich wäre, wenn man cba auf beiden Seiten wegnimmt, (S. 3) $abe = abd$; und dies läßt sich (S. 9) nicht denken, indem abe ein Theil von abd ist.

2) Da also aus dem, was angenommen wurde, daß die verlängerte cb nicht nach d, sondern nach e hinlaufe, etwas unmögliches folgt; da auch eben dasselbe immer folgen würde, wenn man irgend eine andere Linie, die von b aus neben bd hinliefe, als die verlängerte cb ansehen wollte: So kann keine andere, als bd selbst, die verlängerte cb sein; und diese verlängerte cb muß daher mit bd zusammenfallen. Also ist cbd eine gerade Linie, und die Winkel cba und abd sind daher Nebenwinkel.

§. 15.

§. 15. Lehrsatz.

Zwei gerade Linien, die einander schneiden, machen gleiche Scheitelwinkel. Fig. 5.

Aus der (E. 9. Anm.) gegebenen Definition der Scheitelwinkel erhellet, daß durch jede zwei, einander schneidende (E. 4. Anm. 2) gerade Linien zwei Paar Scheitelwinkel entstehen; z. B. in Fig. 5 die VV aec und deb; aed und ceb. Ist dieser Lehrsatz indeß von Einem Paare erwiesen, so läßt er sich von dem Anderen auf eben die Art darthun. Hier also sei

1. Thesis: V aec = V deb.

2. Als Hülfssatz liegt §. 13 zum Grunde; außerdem G. 1 und 3.

3. Beweis. Um auf dem 13ten §. fortzubauen, bemerke man hier die beiden Paar Nebenwinkel (E. 9. Anm.); aec und aed, aed und deb, wovon jene auf der geraden Linie ced, diese aber auf der geraden Linie aeb liegen. Nun sind (§. 13) V aec + aed = 2 R. und auch V aed + deb = 2 R.; folglich (G. 1) V aec + aed = V aed + deb.

Nimmt

Nimmt man nun auf beiden Seiten denselben V aed weg, so bleibt (G. 3) übrig: V aec = V deb.

Eben so wird bewiesen, daß V aed = V ceb; welches man zur Prüfung von den Schülern versuchen lasse.

Zusatz. Wenn man alle vier Winkel dieser Figur ansieht, so kann man sie sich als zwei Paar Nebenwinkel an der Linie ab vorstellen, wovon das erste Paar, nemlich aed und deb über ab, das andere Paar aber, aec und ceb unter ab liegt. Da nun (§. 13) V aed + deb = 2 R., und eben so V aec + ceb = 2 R., so ist offenbar nach folgender Addition:

$$\begin{array}{r} V\, aed + deb = 2\, R. \\ V\, aec + ceb = 2\, R. \\ \hline \end{array}$$

(G. 2) V aed + deb + aec + ceb = 4 R.; d. h. alle vier Winkel, die um den Punct e (es versteht sich, in Einer Ebene) herum liegen, machen zusammengenommen so viel, als vier rechte Winkel.

Anm. Da ferner, nach §. 13. Anm. 2, jede Summe von Nebenwinkeln, so viel ihrer

ihrer auf Einer geraden Linie liegen, zwei rechten Winkeln gleich ist: So gilt es auch im allgemeinen von allen und allerlei Winkeln, die um Einen Punct herum in Einer Ebene liegen, daß sie zusammengenommen vier rechten gleich sind. So sind z. B. Fig. 36 über ab die V amc + cmd + dmb = 2 R., und eben so unter ab die V ame + emf + fmg + gmb = 2 R., also nach obiger Addition: V amc + cmd + dmb + ame + emf + fmg + gmb = 4 R.

§. 16. Lehrsatz.

An jedem Triangel ist, wenn man eine seiner Seiten verlängert, der (dadurch entstandene) äußere Winkel größer, als jeder der ihm gegenüber liegenden inneren Winkel. Fig. 37 u 38.

Wenn man an dem Triangel abc irgend eine Seite, hier die bc, verlängert, so entsteht dadurch ein Winkel acd, den man den äußeren Winkel nennt. Die Winkel des Trian-

Triangels selbst, nemlich b a c, a b c und b c a, heißen dagegen innere Winkel; und von diesen ist, in Beziehung auf jenen äußeren, der ∨ b c a der daran liegende, die ∨∨ b a c und a b c aber sind die dem äußeren gegenüber liegenden. Soll nun bewiesen werden, daß der äußere größer, als jeder dieser beiden letzten sei, so muß man dies von jedem derselben besonders darthun, und der Beweis zerfällt demnach in zwei Theile; daher ist

1. Die doppelte Thesis: 1) ∨ acd > bac. 2) a c d > a b c.

2. Zu Hülfssätzen dienen dabei 1) §. 4. 2) §. 15. 3) G. 9 und 4) bei der Const.: §. 10. — Dieser Hülfssätze bedarf man bei beiden Theilen des Beweises. Da aber die Const. nicht in beiden dieselbe ist, so sehe man nun

I. auf den ersten Satz: daß ∨ acd > bac sein solle. Um dies mit Benutzung jener Hülfssätze beweisen zu können, hat man

1. folgende Construction nöthig. Man halbire (Fig. 37) (nach §. 10) die Seite, welche an beiden Winkeln liegt, nemlich a c,

ziehe von dem gegenüber liegenden Winkel b nach dem Theilpuncte e eine gerade Linie, verlängere sie über e hinaus so weit, bis das äußere Stück ef = be ist, und ziehe dann von f nach c; wodurch die beiden △△ eab und ecf entstehen.

2. Disposition. Nach der Const. läßt sich 1) die Gleichheit der Winkel eab und ecf beweisen, und daraus 2) folgern, daß V acd > eab (oder bac).

3. Beweis.

1) ist (HS. 1) △eab = △ecf; denn (n. d. Const.) ist ea = ec (weil ac halbirt wurde), und be = ef; auch ist (SH. 2) V aeb = V cef. Aus der Gleichheit dieser Triangel folgt aber, daß auch die VV eab und ecf als gleichliegende Winkel einander gleich sind.

2) Nun ist (HS. 3) V acd > V ecf, und also, weil V eab = V ecf ist, auch V acd > V eab, d. h. V acd > V bac.

Auf ähnliche Art wird auch

II. Der zweite Satz bewiesen: daß V acd > V abc sei.

1. Construction. Man halbire (Fig. 38) die an beiden Winkeln liegende Seite bc, ziehe vom gegenüber liegenden Winkel a nach dem Theilpuncte g die Linie ag, verlängere sie unter g hinaus, bis gh = ag ist, und ziehe hc; wodurch ebenfalls, wie vorhin, zwei Triangel, gba und gch entstehen. Auch verlängere man noch die Seite ac unter c hinaus bis zu einer beliebigen Länge, etwa bis k.

2. Disposition. Man beweist: 1) daß V gba = V gch; schließt daraus 2) daß V gck > V gba; und 3) daß V acd > V gba (oder abc).

3. Beweis.

1) Auch hier findet HS. 1 Anwendung, indem in den beiden △△ gba und gch, (n. d. Const.) die Seite gb = gc; ag = gh; und (HS. 2) V agb = V hgc ist. Also ist △gba = △gch, und daher V gba = V gch.

2) Of-

2) Offenbar ist aber (HS. 3) $V gck > V gch$, folglich weil $V gba = V gch$ ist, auch $V gck > V gba$.

3) Da endlich (HS. 2) $V gck = V acd$, und $V gck > V gba$, so ist auch $V acd > V gba$, d. h. $V acd > V abc$.

Anm. Zur Uebung, und zur Prüfung, ob der Beweis verstanden sei, verlängere man eine andere Seite des Triangels, b c oder a c, und lasse von dem, hierdurch entstandenen äußeren Winkel den Satz beweisen.

§. 17. Lehrsatz.

In jedem Triangel sind jegliche zwei Winkel zusammen kleiner, als zwei rechte. Fig. 39.

Es ist einerlei, von welchen zwei Winkeln des △ abc man beweise, daß sie zusammen genommen weniger ausmachen, als zwei rechte; wer den Beweis verstanden hat, wird sogleich einsehen, daß er auf jede zwei Winkel passe. Nimmt man hier die Winkel abc und acb, so ist

1. Thesis: $abc + acb < 2 R$.

2. Hülfssätze: 1) §. 16; 2) §. 13; 3) G. 4. (Dieser Grundsatz bedarf aber hier noch einer Erläuterung, welche für Anfänger nicht immer entbehrlich ist. „Zu Ungleichem Gleiches hinzugethan, bringt Ungleiches" ist nemlich so zu verstehen: Wenn von zwei Größen die Eine größer ist, als die Andere, und zu der ersten eben so viel hinzugethan wird, wie zu der letzten, so entstehen dadurch zwei ungleiche Summen, von welchen diejenige die größere ist, bei welcher die erste (größere) Größe sich befindet. Wenn zur 5 sowol als zur 3 die 2 addirt wird, so ist von den dadurch entstandenen ungleichen Summen diejenige (5 + 2) größer, in welcher die größere der beiden anfänglichen Zahlen, nemlich die 5, mit enthalten ist, und die andere (3 + 2) kleiner.) Um diese benutzen zu können, ziehe man

3. eine

3. eine Hülfslinie; man verlängere nemlich die an beiden W. liegende Seite bc.

4. Beweis. Durch die Const. ist am △ abc ein äußerer Winkel, acd, entstanden, welcher (HS. 1) größer ist, als V abc. Addirt man nun zum V acd sowol als zum V abc den V acb, so entstehen dadurch zwei ungleiche Summen, acd + acb und abc + acb, von welchen (HS. 3) die letzte kleiner sein muß, weil abc < acd. Also abc + acb < acd + acb. Nun ist (HS. 2) acd + acb = 2 R., also offenbar abc + acb < 2 R.

Mit derselben Schlußfolge läßt sich nach derselben Const. beweisen, daß V bac + acb < 2 R. Soll aber eben dies auch von abc + bac bewiesen werden, so muß man eine andere Seite des △ abc verlängern, etwa ab, wie Fig. 40. Beides wäre ein Versuch für die Schüler.

§. 18. Lehrsatz.

In jedem Triangel liegt der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber, Fig. 41.

Man soll jedesmal, wenn Eine Seite eines Triangels länger ist, als eine Andere, mit Sicherheit schließen können, daß auch der Winkel, welcher der längeren Seite gegenüber liegt, größer sei, als der, der kürzeren gegenüber liegende. (Hier lasse man an der Figur die Winkel nennen, welche jeder Seite gegenüber liegen; der Anfänger trifft dies nicht immer.) Ist also im △ abc die Seite ac größer, als ab, so liegt eben hierin

1. Die Hypothesis: ac > ab; und die Thesis ist: ∠ abc > ∠ acb.

2. Hülfssätze: 1) §. 16; 2) §. 5; 3) G. 9.

3. Construction: Man schneide, da ac > ab ist, auf ac von a aus, ein Stück ab, welches der ab gleich ist, nemlich ad, und verbinde die Puncte b und d. Dadurch ist dann der gleichschenklichte △ abd entstanden, und zugleich der kleine △ bdc, an welchem man sich den ∠ adb als den, durch die Verlängerung der Seite cd entstandenen äußeren Winkel vorstellen kann. Auf alles dies merke man, so ist

4. Der Beweis leicht geführt. Sieht man nemlich den ∠ adb als den äußeren Winkel

am

am △ bdc an, so ist (HS. 1) $Vadb > Vdcb$ (oder acb). V adb ist aber auch zugleich der Eine Winkel an der Grundlinie des gleichschenklichten △ abd, und als solcher dem Anderen Winkel an der Grundlinie, nemlich dem V abd (HS. 2) gleich; was also vom V adb gilt, das gilt auch vom V abd, folglich ist $Vabd > acb$. Da nun (HS. 3) V abc > abd, so ist offenbar noch viel mehr $Vabc > acb$.

Anm. Eben so könnte man, nur mit veränderter Const., beweisen, daß abc > bac, weil ac > bc; oder daß acb > bac, weil ab > bc ist.

§. 19. Lehrsatz.

In jedem Triangel liegt dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber. Fig. 42.

Der umgekehrte Satz aus §. 18. Dort wurde aus der Größe der Einen Seite im Vergleich mit einer Anderen auf die Größe der gegenüber liegenden Winkel; hier wird aus der Größe des Einen Winkels im Vergleich mit einem Anderen auf die Größe der gegenüber liegenden Seiten geschlossen. Demnach ist hier im △ abc.

1. Hypothesis: ∨abc > ∨acb; und Thesis: ac > ab.

2. Hülfssätze: 1) §. 5 und 2) §. 18.

3. Disposition. Der Satz wird indirect bewiesen, und zwar 1) das Gegentheil der Thesis angenommen, und daraus etwas, der Hyp. widersprechendes hergeleitet, welches denn 2) den Schluß auf die Thesis als unwiderlegbar darstellt.

4. Beweis.

1) Nimmt man an, daß ac nicht größer als ab sei: So sind nur noch zwei andere Fälle möglich, indem ac entweder der ab gleich, oder kleiner als ab sein müßte. Was würde aber hieraus folgen?

a) Wäre ac = ab, so wäre △ abc gleichschenklicht, folglich (HS. 1) ∨abc = ∨acb. Dies kann aber nicht sein, weil nach der Hyp. abc > acb ist.

b) Wäre

b) Wäre ac < ab, so müßte (HS. 2) V abc < V acb sein; welches aber ebenfalls der Hyp. widerspricht.

2) Da also ac weder der ab gleich (n. a), noch kleiner als ab (n. b) sein kann: So bleibt nichts anderes übrig, als daß ac > ab ist; mithin ist daran nicht zu zweifeln.

Anm. 1. Die Anwendung auf andere Seiten: ac und bc, ab und bc mag, wie bei §. 18, zur Uebung der Zuhörer dienen.

Anm. 2. Der Beweis könnte auch auf folgende freiere und kürzere Art geführt werden. Vergleicht man die beiden Seiten in Absicht ihrer Größe mit einander, so sind nur drei Fälle möglich; es muß entweder 1. ac = ab, oder 2. ab > ac, oder 3. ac > ab sein. Aus n. 1. würde folgen: daß V abc = V acb; aus n. 2: daß abc < acb wäre. Beides ist n. d. Hyp. unmöglich,

 also

also n. 3, als Thesis dieses Satzes, richtig.

§. 20. Lehrsatz.

In jedem Triangel sind jegliche zwei Seiten zusammen größer als die dritte. Fig. 43.

Wählt man im △ abc zu diesem Satze die beiden Seiten ba und ac, so ist

1. Die Thesis: $ba + ac > bc$.

2. Hülfslinien. Soll gezeigt werden, daß ba und ac zusammengesetzt länger seien, als bc, so setze man jene beiden Seiten wirklich in Eine zusammen; man verlängere die Eine, etwa ba über den Punct a (wo beide Seiten an einander stoßen) hinaus so weit, daß das daran gesetzte Stück ad der Seite ac gleich sei. Verbindet man nun noch d mit c, so finden hier

3. Die Hülfssätze: 1) §. 5 und 2) §. 19 Anwendung.

4. Disposition. Man zeigt 1) daß $\vee adc < bcd$; 2) daß $bd > bc$; also auch 3) $ba + ac > bc$.

5) Be-

5. Beweis.

1) Offenbar ist der, durch die Hülfslinien entstandene △ adc gleichschenklicht (weil ad der ac gleich gemacht wurde); mithin (HS. 1) V adc = V acd. Was daher vom V acd gilt, das gilt auch vom V adc. Da also V acd < bcd ist, so ist auch V adc < bcd.

2) Diese beiden Winkel aber sind zwei Winkel des großen △ bdc, so bald man sich die Seite ac wegdenkt [Anm. Der Lehrer könnte hier den △ bdc ohne ac daneben setzen, wie es bei §. 5 gemacht wurde]; und da in diesem △ der V bcd > V bdc ist, so muß (HS. 2) auch die Seite, welche dem V bcd gegenüber liegt, größer sein, als die, welche dem V bdc gegenüber liegt, d. h. bd > bc.

3) Endlich bemerke man, daß bd aus ba und ad bestehe, ad aber der

ac gleich sei, so ist klar, daß bd $=$ ba $+$ ac, und daß von ba $+$ ac desselben wahr sein müsse, was von bd bewiesen ist; folglich ba $+$ ac $>$ bc.

Anm. 1. Will man diesen Satz auch von anderen Seitenpaaren des $\triangle$ abc beweisen, so bemerke man nur, daß die Const. der Hülfslinien immer über den Punct hinaus geschehen müsse, in welchem die beiden Seiten zusammen treffen. Soll also erwiesen werden, daß ac $+$ cb $>$ ab, so verlängere man (Fig. 44) ac unter c hinaus so weit, bis ce $=$ cb ist, d. h. stelle ac und cb in der Einen Linie ae dar. Wäre zu zeigen, daß ab $+$ bc $>$ ac, so müßte (Fig. 45) ab (oder cb) über b hinaus verlängert werden, bis ak so lang wäre, wie ab $+$ bc. Alle diese Veränderungen sind für die Zuhörer nützlich.

Anm. 2. Wer es etwa aus Zeitmangel rathsam fände, die Folge der Euklidischen Sätze und einzelne Beweise so viel als möglich abzukürzen (wozu schon bei §. 3 und 4, besonders aber bei §. 8 in der Anm. Winke gegeben sind), der könnte auch den Beweis des vorliegenden Lehrsatzes ersparen, und die Wahrheit desselben allein auf E. 4 begründen. Denn die Seite bc (Fig. 43) ist offenbar als einfache gerade Linie der kürzeste Weg vom Puncte b zum Puncte c. Daher ist jeder andere Weg von b nach c, der nicht gerade zu die Richtung von bc nimmt, länger als bc. Also ist der Weg von b nach c, welcher über den Punct a geht, unstreitig länger, als bc, d. h. die beiden Seiten ba und ac sind zusammen größer als bc.

§. 21. Lehrsatz.

Wenn innerhalb eines Triangels über einer seiner Seiten, aus deren Endpuncten, zwei gerade Linien in Einem Puncte zusammenlaufen: So sind die zusammenlaufenden Linien kleiner als des Triangels beide übrige Seiten, schließen aber einen größeren Winkel ein. Fig. 46.

Dies sind eigentlich zwei verschiedene Lehrsätze, welche ganz unabhängig von einander bewiesen werden. Wenn man nemlich innerhalb des $\triangle$ abc auf der Grundlinie bc den kleineren $\triangle$ bdc errichtet, so sind I. die Seiten bd und dc des kleineren Triangels zusammen kleiner als die Seiten ba und ac des größeren Triangels; aber es ist II. der $\vee$ bdc im kleineren Triangel größer, als der $\vee$ bac im größeren. Daher ist

I. im ersten Satze

1. Die Thesis: $bd + dc < ba + ac$; oder: $ba + ac > bd + dc$.

2. Hülfs-

2. Hülfssätze. Der Beweis beruht ganz auf §. 20, mit Zuziehung des 4ten G. (nach der, §. 17 gegebenen Erläuterung dieses G.). Um §. 20 anwenden zu können, bedarf es

3. Der Hülfslinie de (d. h. der bis an die Seite ac verlängerten Seite bd), wodurch zwei neue Triangel, abe und dec, entstehen.

4. Disposition. Man hat zu zeigen, 1) daß $ba + ac > be + ec$, und 2) daß $be + ec > bd + dc$, woraus 3) die Thesis sich ergiebt.

5. Beweis.

1) Um einzusehen, daß $ba + ac > be + ec$, bemerke man, daß im $\triangle abe$ (§. 20) die Seiten $ba + ae > be$ sein müssen. Addirt man nun auf beiden Seiten die Linie ec, so ist (G. 4) $ba + ae + ec > be + ec$; und weil $ae + ec$ nichts anderes als die Seite ac ist, so kann ich in jenem Ausdruck ac für $ae + ec$ setzen. Daher ist $ba + ac > be + ec$.

2) Sieht

2) Sieht man nun auf den $\triangle$ dec, so sind auch hier (§. 20) $de + ec > dc$. Wird auf beiden Seiten bd addirt, so muß (wie vorhin nach G. 4) $bd + de + ec > bd + dc$ sein. Nun machen $bd + de$ die Linie be aus, und es kann daher in jenen Ausdruck be anstatt $bd + de$ gesetzt werden, so daß nun $be + ec > bd + dc$.

3) Man vergleiche hierauf den Schlußsatz von n. 1 mit dem von n. 2. Die Summe $ba + ac$ war größer als die S. $be + ec$, und diese wieder größer als die S. $bd + dc$; folglich muß ja offenbar $ba + ac > bd + dc$, oder, wie es im Lehrsatze heißt: $bd + dc < ba + ac$ sein.

II. Im zweiten Satze

1. ist die Thesis: $V\, bdc > V\, bac$.

2. Der Beweis beruht allein auf §. 16, welcher (nach derselben Const. wie in n. I) auf die beiden Triangel dec u. abe Anwendung findet.

3. Dis

3. Disposition. Die Th. zu beweisen, muß man den V dec mit zu Hülfe zu nehmen, und zeigen, daß 1) V bdc > dec, 2) V dec bac, also 3) V bdc > bac sei.

4. Beweis.

1) Betrachtet man den △ dec, so kann man den V bdc als einen durch die Verlängerung der Seite ed entstandenen äußeren Winkel an jenem Triangel ansehen, welcher daher (§. 16) größer, als jeder von den, ihm entgegen stehenden inneren ist, z. B. größer als V dec; also *V bdc > dec.*

2) Sieht man aber auf den △ abe, so ist wieder der V dec als ein, durch die Verlängerung der Seite ae entstandener äußerer Winkel an diesem Triangel zu betrachten, und also (§. 16) größer als jeder der entgegen stehenden inneren; folglich *V dec > bac (bae).*

3) Vergleicht man nun, was n. 1 lehrt, „daß bdc größer ist als dec" mit

dem, was sich aus n. 2 ergibt, „daß dec wieder größer ist, als bac": So muß ja ohne Zweifel $V\,bdc > V\,bac$ sein.

§. 22. Aufgabe.

Es sind drei gerade Linien gegeben, von denen jede zwei zusammen größer als die dritte sind; man soll einen Triangel beschreiben, dessen Seiten den gegebenen Linien, jede für sich, gleich sind. Fig. 47.

Gegeben sind hier drei gerade Linien: a, b, c; welche die Eigenschaft haben, daß $a + b > c$; $a + c > b$; und $b + c > a$.

Verlangt wird, aus diesen einen Triangel zu beschreiben, d. h. einen Triangel zu zeichnen, dessen Seiten, einzeln, jenen drei Linien gleich seien. Eben darum mußten die drei Linien die erwähnte Eigenschaft haben. Denn nach §. 20 sind in jedem Triangel jede zwei Seiten zusammen größer als die dritte; aus drei Linien also, welchen diese Eigenschaft fehlte, ließe sich kein Triangel construiren.

I. Auf-

I. Auflösung. Man ziehe von einem beliebigen Puncte d aus eine Linie, welche nach e hin unbegränzt sei. Auf diese trage man, von d aus, eine der gegebenen, etwa a; sie wird bis f reichen. Von f aus trage man die zweite Linie b auf, welche bis g reicht; und von g aus trage man die dritte Linie c auf, die sich bis h erstrecken wird. So ist denn $df = a$; $fg = b$; $gh = c$. Danach nehme man fd in den Zirkel, und beschreibe damit aus f einen Kreis; eben so fasse man gh in den Zirkel, und beschreibe damit aus g einen Kreis. Beide Kreise werden unfehlbar einander schneiden, hier im Puncte k; von diesem ziehe man alsdann kf und kg, so entsteht daraus der $\triangle$ kgf.

II. Beweis, daß kgf der verlangte Triangel sei, dessen Seiten

1. (Thesis) den gegebenen Linien, Stück für Stück, gleich seien. Man merke dabei auf das, was in der Construction geschehen, daß nemlich fd der Linie a, fg der Linie b, und gh der Linie c gleich gemacht ist.

2. Erinnert man sich an E. 15 und G. 1, so ist ohne Zuziehung besonderer Lehrsätze der

3. Beweis leicht geführt, wenn man die Seiten des △ kgf nach einander betrachtet. Denn nach der Const. ist fd=a; aber (E. 15) fd=fk; mithin (G. 1) fk=a. Eben so ist n. d. Const. gh=c; und (E. 15) gh=gk; folglich (G. 1) gk=c. Die dritte Seite des Triangels, nemlich fg, war n. d. Const. der Linie b gleich; also hat der Triangel die verlangten Seiten erhalten.

Anm. Bei der Anwendung der gegebenen Auflösung in der Folge hat man nicht nöthig, ganze Kreise zu zeichnen, sondern nur kleine Bogen, in der Gegend, wo die Kreise einander schneiden würden; weil es bloß auf den Punct k ankommt.

§. 23. Aufgabe.

Auf eine gegebene gerade Linie, an einen in ihr gegebenen Punct, einen, einem gegebenen gleichen geradlinichten Winkel zu setzen. Fig. 48.

Gegeben ist hier 1) eine gerade Linie ab, 2) in derselben ein Punct a, und 3) außerhalb derselben ein Winkel ecd.

Ver-

Verlangt wird, an a einen, dem V ecd gleichen Winkel anzulegen, und zwar so, daß die Linie ab ein Schenkel desselben werde.

I. Auflösung. Ohne weitere Vorrichtung an a einen Winkel von bestimmter Größe zu legen, dazu finden sich in den bisher vorgetragenen Sätzen noch keine Hülfsmittel. Wie aber, wenn der Winkel ecd ein Winkel in einem Triangel wäre. Könnte man dann nicht auf der Linie ab einen Triangel construiren, welcher jenem gleich wäre, mithin auch den verlangten Winkel in sich enthielte? Ließe sich auch nicht diese Construction so einrichten, daß der Winkel gerade an den Punct a käme? Ein Rückblick auf die vorige Aufgabe und auf den 8ten §. wird dies lehren. Um den V ecd zu einem Triangelwinkel zu machen, darf man nur auf den Schenkeln desselben, ce und cd, zwei beliebige Puncte, f und g, nehmen, und sie durch die Linie fg verbinden. Dadurch entsteht ein Triangel, dessen Seiten cf, cg und fg sind; und mit diesen beschreibe man (n. §. 22) auf ab einen neuen Triangel akh, jedoch mit der Vorsicht, daß die Seiten des $\triangle$ akh dieselbe Lage gegen ab haben, wie die Seiten des △ cfg gegen ce. (Man fängt zu dem Ende damit an, daß man (§. 3) cf auf ab von a aus in die Richtung nach b hin legt. Alsdann beschreibt man, wie der vorige §. lehrt, mit cg von a aus einen Bogen, und eben so mit fg von k aus. Beide Bogen treffen einander in h, und von h zieht man darauf nach a und nach k.) Es ist also dann ak=cf, ah=cg, und kh=fg.

II. Der Beweis, daß dadurch das verlangte geschehen sei, daß nemlich der Winkel bei dem gegebenen V ecd (oder fcg) gleich sei, hat keine Schwierigkeit, so bald man nur an §. 8 zurückdenkt. Denn aus der Const. erhellet ja, daß die Seiten des △ akh einzeln den Seiten des △ cfg gleich sind, und auch in jenem Triangel dieselbe Lage haben, wie in diesem. Daher sind (§. 8) in beiden Triangeln jede zwei gleichliegende Winkel ebenfalls gleich), folglich V kah=V ecd (oder fcg). Auch liegt der V kah am Puncte a, und zwar so, daß ab einen Schenkel des W. ausmacht; mithin ist die ganze Aufgabe aufgelöst.

§. 24. Lehrsatz.

Wenn in zwei Triangeln zwei Seiten zweien Seiten, jede für sich, gleich sind; ein Winkel (des Einen Triangels) aber größer ist, als ein Winkel (des Anderen Tr.), der nemlich, welchen die gleichen Seiten einschließen: So ist auch die dritte Seite in jenem Triangel größer, als die dritte in diesem. Fig. 49.

Erläuterung. Wenn man die Triangel a b c und d e f so gezeichnet hat, daß die Seiten a b und a c des △ a b c einzeln so groß sind, als die Seiten d e und d f des △ d e f, der dazwischen liegende Winkel (bac) aber in jenem Triangel größer ist als der in diesem (edf): So soll bewiesen werden, daß unter solchen Bedingungen allemal die Seite b c, welche jenem größeren Winkel (des ersten Tr.) gegenüber liegt, auch größer sei als die Seite e f, welche dem kleineren Winkel (des zweiten Tr.) entgegen steht. Es ist hier also

1. Hypothesis: ab=de; ac=df; V bac > V edf. Thesis: bc > ef. Dies zu beweisen, erfordert

2. mehrere Hülfssätze: 1) §. 4; 2) §. 5, und 3) §. 19. Und deshalb ist noch

3. eine besondere weitläuftige Construction nöthig. Man lege (§. 23) an de im Puncte d einen Winkel an, welcher dem V bac (der n. d. Hyp. größer als V edf ist) gleich sei, also den V edg, und mache den neuen Schenkel desselben, dg, so lang, daß er der Seite ac gleich sei, mithin auch der Seite df (weil n. d. Hyp. ac=df). Endlich ziehe man ge und gf. Dadurch sind drei neue Triangel, edg, dfg und efg entstanden, welche zum Theil über einander liegen, und den Zuhörern deutlich gezeigt werden müssen. Mit Hülfe derselben, besonders des △ efg, welcher die beiden Seiten bc und ef in sich vereinigt, kann die Th. dargethan werden, und zwar nach folgender

4. Disposition. Es ist zu beweisen, daß 1) eg=bc; 2) V efg > V egf, und also 3) eg (bc) > ef sei.

5) Be-

5. Beweis.

1) Die beiden Triangel abc und deg sind (HS. 1) einander gleich, weil (n. d. Hyp.) ab = de und (n. d. Const.) nicht nur ac = dg, sondern auch V bac = V edg ist. Ist aber hiernach △ abc = △ deg, so sind auch die gleichliegenden dritten Seiten derselben, nemlich bc und eg gleich; was also in der Folge von eg bewiesen wird, das gilt auch von bc.

2) Man sehe nun auf den △ dfg, welcher ein gleichschenklichter ist, indem (n. d. Const.) df = dg; worin also (HS. 2) V dfg = V dgf. Offenbar ist aber V efg > dfg, mithin auch V efg > dgf. Da nun wiederum V dgf > egf, so muß noch viel mehr V efg > V egf sein.

3) Diese beiden Winkel efg und egf sind aber zugleich Winkel des kleinen △ efg. Daher muß (HS. 3) in diesem Triangel dem größeren

kel auch eine größere Seite gegenüber liegen; also ist $eg > ef$, und folglich, wenn man hiermit den Schlußsatz von n. 1 vergleicht, auch $bc > ef$.

§. 25. Lehrsatz.

Wenn in zwei Triangeln zwei Seiten zweien Seiten, jede für sich, gleich sind, die dritte Seite (des Einen Triangels) aber größer ist als die dritte (des Anderen Triangels): So ist auch ein Winkel in jenem Triangel größer als ein Winkel in diesem, der nemlich, welchen die gleichen Seiten einschließen. Fig. 50.

Die Verwandtschaft dieses Satzes mit dem vorigen ist leicht einzusehen. Dort wurde angenommen, daß die Winkel zwischen den gleichen Seiten ungleich wären, und daraus auf die Ungleichheit der denselben gegenüber liegenden dritten Seiten geschlossen. Hier wird angenommen, daß zwar zwei Seiten des $\triangle abc$ zweien Seiten des $\triangle def$ gleich, aber die dritten Seiten, bc und ef, in beiden Triangeln

geln ungleich seien, und daraus soll bewiesen werden, daß der V bac, welcher der größeren von jenen beiden Seiten, bc, gegenüber steht, größer sei als der V edf, welcher der kleineren von jenen beiden Seiten, ef, gegenüber steht. Also ist hier

1. Hypothesis: ab=de; ac=df; bc>ef. Thesis: V bac>V edf.

2. Hülfssätze: 1) §. 4, und 2) §. 24.

3. Disposition. Der Beweis wird indirect geführt; es wird 1) angenommen, daß V bac nicht größer sei als V edf, und daraus etwas, der Hyp. widersprechendes hergeleitet, welches 2) auf die Wahrheit der Thesis schließen läßt.

4. Beweis.

1) Wäre V bac nicht größer als V edf, so müßten entweder beide gleich, oder edf müßte größer sein.

a) Nähme man V bac=V edf an, so wäre, da (n. d. Hyp.) auch ab=de und ac=df ist, (HS. 1) bc=ef. Dies kann aber nicht sein, weil n. d. Hyp. bc>ef ist.

b) Wollte man annehmen, daß V edf > V bac, so müßte man (HS. 2) schließen, daß auch ef > bc sei. Aber auch dies ist unmöglich, weil es der Hyp. widerspricht.

2) Kann nun, der Hyp. zufolge, V bac weder dem V edf gleich sein (n. a), noch auch kleiner als edf (n. b): Was bleibt alsdann weiter übrig, als daß V bac > V edf ist? Mithin ist der Satz erwiesen.

Anm. Eine freiere Ansicht des Beweises wäre folgende. In Absicht der Größe beider Winkel gibt es nur drei Fälle: Entweder 1. sind sie einander gleich, oder 2. es ist edf > bac, oder 3. bac > edf. Aus n. 1 würde folgen: daß bc = ef; aus n. 2: daß ef > bc. Beides ist nach der Hyp. unmöglich, also n. 3 das einzige, welches unter den Bedingungen dieses Satzes Statt finden kann.

§. 26.

§. 26. Lehrsatz.

Wenn in zwei Triangeln zwei Winkel zweien Winkeln, jeder für sich, gleich sind, und eine Seite einer Seite gleich ist, sie mag nun an den gleichen Winkeln, oder einem derselben gegenüber liegen: So sind auch die beiden übrigen Seiten (des Einen Triangels) den beiden übrigen Seiten (des Anderen Triangels), jede für sich, auch der dritte Winkel (im ersten) dem dritten (im zweiten Triangel) gleich. Fig. 51 und 52.

Dieser Satz zerfällt in zwei Theile, oder eigentlich in zwei Sätze, deren jeder einen eigenen Beweis erfodert; denn der Fall ist ganz anders, wenn die, in beiden Triangeln gleiche Seite zwischen den gleichen Winkeln, als wenn sie einem von diesen Winkeln gegenüber liegt.

Erster Fall.

Es sind hier zwei Triangel, abc und def, (Fig. 51) so gezeichnet, daß die beiden Winkel an der Seite bc, einzeln den beiden Winkeln an der Seite ef gleich, und daß diese Seiten selbst gleich lang sind. Also ist in diesem Falle

1. Hypothesis: V abc = def, V acb = dfe, und $bc = ef$. — Thesis: ba = ed, ac = df, und V bac = edf (Kurz: $\triangle\, abc = \triangle\, def$).

2. Hülfssätze: 1) §. 4; 2) G. 1; und 3) G. 9.

3. Disposition. Es kommt hier bloß darauf an, ob nach der Hyp. bewiesen werden könne, daß $ba = ed$ sei. Denn, ist dies dargethan, so treten die Bedingungen des im 4ten §. enthaltenen Lehrsatzes ein, und auf diesen wird dann der vorliegende Satz zurückgeführt. Es wird also 1) bewiesen, daß ba = ed; und zwar indirect, indem man a) das Gegentheil davon annimmt, daraus eine ungereimte Folgerung zieht, nnd so b) auf die Gleichheit von ba und ed schließt. Alsdann werden hieraus 2) die übrigen Theile der Th. hergeleitet.

4. Beweis.

1) ba muß der ed gleich sein. Denn

a) wäre dies nicht der Fall, wäre etwa ba > ed, so müßte sich auf ba von b aus eine Linie abschneiden lassen, die so lang wäre als ed. Dies sei bg. Zieht man nun gc, so entsteht dadurch △ gbc, dessen Gleichheit mit dem △ def sich beweisen ließe. Es wäre nemlich, wie eben bemerkt wurde, bg = ed; auch ist (n. d. Hyp.) bc = ef, und V gbc (abc) = V def; demnach wären zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel des △ gbc zweien Seiten und dem dazwischen liegenden Winkel des △ def gleich, also (HS. 1) △ gbc = △ def, und auch V gcb = V dfe. Nun war aber (n. d. Hyp.) V acb = V dfe, folglich wäre auch (HS. 2) V gcb = V acb, welches (HS. 3) unmöglich ist.

b) Da

b) Da mithin aus dem angenommenen Satze, daß ba > ed, etwas ungereimtes folgt, und eben dies auch sich folgern ließe, wenn man annähme, daß ba < ed: So muß *ba = ed* sein.

2) Ist nun ba = ed, und nimmt man dazu, daß (n. d. Hyp.) auch bc = ef und der dazwischen liegende V abc = V def ist: So ist (HS. 1) ac = df und V bac = V edf (mithin △ *abc* = △ *def*).

Anm. Man könnte auch den ganzen Beweis darauf ankommen lassen, ob ac = df sei; der Gang wäre derselbe.

Zweiter Fall.

Jetzt sind die beiden Triangel abc und def (Fig. 52) so beschrieben, daß außer denen beim ersten Falle vorkommenden Winkeln (b und e, c und f), nicht die daran liegenden Seiten gleich sind, sondern die, den V V c und f gegenüber liegenden Seiten ba und ed.

[Statt

[Statt dieser beiden könnten es auch ac und df sein.]
Also ist hier

1. Hypothesis: V abc = def, V acb = dfe, und *ba* = *ed*. — Thesis: bc = ef, ac = df, und V bac = edf (Kurz: △ *abc* = △ *def*).

2. Hülfssätze: 1) §. 4; 2) G. 1; und 3) §. 16.

3. Disposition (ähnlich der Disp. im ersten Falle). Es frägt sich hier nur, ob nach der Hyp. gezeigt werden könne, daß *bc* = *ef* sei. Ist dies erwiesen, so beruht der Satz wieder, wie vorhin, auf §. 4. Es wird also 1) ausgemacht, daß bc = ef, und zwar indirect, wie beim ersten Falle: daraus aber 2) das übrige der Th. gefolgert.

4. Beweis.

1) bc und ef sind gleich; denn

a) wären sie ungleich, wäre etwa bc > ef, so ließe sich doch auf bc von b aus eine Linie abschneiden, welche mit ef gleiche Länge hätte. Diese sei bk. Verbindet man nun k mit a, so entsteht ein

neuer

neuer $\triangle$ abk, der dem $\triangle$ def gleich sein müßte. Es wäre nemlich, nach eben bemerkter Construction, bk = ef; ferner ist (n. d. Hyp.) ba = ed, und V abk (abc) = V def. Mithin wäre (HS. 1) $\triangle$ abk = $\triangle$ def und V akb = V dfe. Nun war aber (n. d. Hyp.) V acb = V dfe; also müßte auch (HS. 2) V akb = V acb sein. Und dies ist (HS. 3) unmöglich, denn man kann sich akb als den, durch die Verlängerung von ck entstandenen äußeren Winkel am $\triangle$ akc vorstellen, und daraus schließen, daß er größer sei, als V acb.

b) Aus dem angenommenen Satze also, daß bc > ef sei, läßt sich ein anderer folgern, welcher eine Unwahrheit enthält; eben das wäre der Fall, wenn man ef > bc annähme: Folglich läßt es sich nicht anders denken, als daß *bc* = *ef* ist.

2) Ist

2) Ist nun ausgemacht, daß bc = ef, und nimmt man dazu, daß (n. d. Hyp.) auch ba = ed, und V abc = V def (welche zwischen den gleichen Seiten liegen): So ist (HS. 1) ac = df, und V bac = V edf (mithin △ *abc* = △ *def*).

Anm. In diesem §. sind der dritte und vierte Lehrsatz von der **Gleichheit der Triangel** enthalten; den ersten enthielt §. 4, den zweiten §. 8. Diese vier Sätze gehören wegen ihrer oft wiederholten Anwendung zu den wichtigsten in der ganzen Geometrie, und verdienen deshalb vorzüglich eingeschärft zu werden. Zugleich ist es interessant, ihre genaue Verwandtschaft zu beobachten; denn sowol der hier gegebene Beweis des dritten und vierten, als auch der, in der Anm. zum 8ten §. nachgewiesene (directe) Beweis des zweiten von diesen Sätzen beruhen sämtlich auf dem

er-

ersten. Dieser ist eben deshalb eine der größten mathematischen Wahrheiten, die sich um so höher erhebt, je weiter man sich in der Folge der Sätze von ihr entfernt. Und bedenkt man zugleich, wie jener Satz auf dem einfachen Grundsatze, „daß zwischen zwei Puncten nur Eine gerade Linie Statt finde", sich stütze: So erscheint dieser als ein Hauptgrundstein des ganzen Gebäudes.
