Ueber den Vortrag der Mathematik, besonders der Geometrie in den unteren Schulclassen

Hanstein, Ludwig

Stendal, 1804

II. Vom Vortrage selbst.

urn:nbn:de:hbz:466:1-82606

II.

Vom Vortrage selbst.

Es kann hier nicht der Ort sein, die Eigenschaften eines zweckmäßigen Vortrags überhaupt zu entwickeln, denn theils ist dieser Gegenstand schon von erfahrneren Pädagogen mit Gründlichkeit untersucht, theils manches davon, in so fern es hieher gehört, im ersten Abschnitte berührt; und es darf daher jetzt nur von den Mitteln die Rede sein, wodurch die mathematischen Wahrheiten den Anfängern ohne weitläuftigen Apparat so deutlich und faßlich als möglich dargestellt, und eben deshalb für sie anziehender gemacht werden können. Es frägt sich also vor allem andern, ob die Sokratische Methode oder ein mehr zusammenhängender Vor-

Vortrag, der aber durchaus nicht eigentlich akademisch sein dürfte, zur Erreichung jenes Zweckes dienlicher sei.

Die Sokratische Methode, welche in der neueren Pädagogik eine so wichtige Rolle spielt, gewiß aber weit öfter mit übertriebenen Lobsprüchen empfohlen, als für diejenigen, welche sich ihrer bedienen sollten, richtig und faßlich dargestellt, ja unstreitig noch weit öfter gut auseinandergesetzt, als richtig und zweckmäßig angewandt ist, hat ungeachtet ihres inneren, bleibenden Werthes doch bei weitem noch nicht so viel Glück gemacht, als man anfangs erwartete; und das theils wegen der Schwierigkeiten der Sache selbst, denen im Ganzen immer noch wenige Schulmänner und Prediger eigentlich gewachsen sind, theils aber auch deshalb, weil man diese Lehrart bei Gegenständen hat benutzen wollen, bei welchen sie nicht anwendbar ist. Was soll man z. B. davon denken, wenn sogar Geographie und Weltgeschichte sokratisch docirt werden? Ist es denn möglich, die Lage der Länder und Städte, die Namen und Jahrzahlen

len von irgend einer Begebenheit aus dem Verstande der Kinder zu entwickeln? Sind dergleichen Kenntnisse in Begriffen a priori oder in den Gesetzbüchern der praktischen Vernunft enthalten? Dialogisch sollte jeder Schulvortrag sein; auch die zusammenhängendste Lection sollte oft durch Fragen des Lehrers unterbrochen werden, wodurch er die Aufmerksamkeit der Schüler prüfte, und, ob er sich ihnen verständlich ausgedrückt habe, untersuchte. Aber der dialogische Vortrag in diesem Sinne des Worts ist auch himmelweit von der Sokratischen Lehrart verschieden. Diese kann durchaus nicht überall wirksam sein; es ist Entweihung ihrer rechtmäßigen Würde, wenn man sie immer und überall benutzen will. Ja es liegt eben hierin der Grund, warum sie in den Augen manches Praktikers bereits wieder zu sinken beginnt; und es steht in unserem extremsüchtigen Zeitalter allerdings zu fürchten, daß man sie in kurzem wieder zu sehr vernachlässigen werde, wenn nicht bald die Gränzen ihrer Anwendbarkeit mit Gründlichkeit näher und sicherer bestimmt werden, als es bisher geschehen ist.

Was

Was nun die Anwendung derselben in der Mathematik betrifft, so scheint es allerdings auf den ersten Blick, als ob diese Wissenschaft, als ein Inbegriff reiner Verstandesideen, welche man nur durch Vernunftschlüsse an einander reihet, und nach Angabe der Vernunft allein, ohne Zuziehung der Erfahrung construirt, und zur Anschauung bringt, so ganz dazu geeignet sei, mit den Anfängern sokratisch abgehandelt zu werden. Man hat sie eben deshalb mit der Logik, mit der Pflichtenlehre, mit der Entwickelung religiöser Ideen u. s. w. in eine gewisse Parallele gestellt, und gemeint, der Mathematiker müsse mit seinen Schülern ganz auf ähnliche Art katechisiren wie der Religionslehrer, und wie der, welcher mit Anfängern im Denken überhaupt Verstandesübungen auf mancherlei Weise versucht. Allein ohne diesen Vorschlag eigentlich ganz zu verwerfen, ohne ihn besonders denjenigen zu widerrathen, die theils selbst sehr geübte Katecheten sind, theils sehr fähige, mit dem besonderen Talente zur Mathematik begabte Köpfe zu Zöglingen haben, lassen sich gegen die allgemeinere

Befolgung desselben bedeutende Gründe erhaben, die eine nähere Prüfung verdienen möchten. Wenn man die mathematischen Wahrheiten eben so wie z. B. einen moralischen Satz aus der Seele des Knaben entwickeln will, so hat man zuerst vielleicht das nicht genug in Anschlag gebracht, daß die moralischen Ideen, zur Erläuterung eines einzigen Satzes, auf eine weit mannichfachere Art mit einander verbunden werden, und auf einander folgen können, als die mathematischen; daß der Faden, an welchem der Lehrer jene vesthält, und zum Ziele leitet, nur lose gespannt sein darf, und vielerlei Biegungen verträgt; dahingegen der Faden eines mathematischen Beweises weit strenger angezogen ist, also bei einer etwas beträchtlichen Dehnung sogleich reißt, und wieder von neuem angeknüpft werden muß. Diese stärkere Spannung hat ihren Grund in der Construction, wodurch die Mathematik ihre Begriffe der Anschauung darstellt. So sehr eben diese Construction die ganze Sache erleichtert, und gewissermaßen die mathematische Gewißheit begründet, so sehr ist sie einer freie-

ren

ten Behandlung beim mündlichen Unterrichte hinderlich. Wie oft würde da nicht aller Vorsicht ungeachtet der Katechet mit den Schülern von der Bahn des Beweises zu weit abkommen, als daß er hoffen könnte, für diesmal das Ziel zu erreichen. Wie oft würde er also von neuem mit der Hypothesis anfangen müssen, um den Schlußsatz zu finden. Und ob nun bei diesen öfteren Verirrungen die endlich erlangte deutliche Einsicht in den Satz mehr gewinne, ob der Knabe hierbei für die Thätigkeit seines Verstandes wirklich mehr Vortheil, und für seinen Geist überhaupt mehr Unterhaltung finde als bei der schnellen Anschauung des Satzes, welche er durch einen faßlichen Beweis von Seiten des geübten Lehrers erhält, das ist doch ernstlich zu bezweifeln. Mögte es aber auch sein, daß dieser beschwerliche Weg am Ende sicherer zum Ziele führte, wie viele würde es denn zweitens unter allen, auch noch so geschickten Lehrern der Mathematik geben, welche in der sokratischen Methode eine hinlängliche Gewandtheit besäßen, um sie ungeachtet jenes bedeutenden Hindernisses der Construstruction mit Glücke anwenden zu können? Wie viele würden es denn dahinbringen, den Schülern eine gewisse freie Thätigkeit des Geistes in Auffindung der Beweise zu lassen, und sie dabei doch so geschickt zu leiten, daß der Beweis nicht zu oft verunglückte? Bei kurzen und leichten Sätzen ginge es wol, und kann es ja auch mit unter versucht werden; aber bei zusammengesetzteren Beweisen, wo es an sich schon nicht leicht ist, die einfache Schlußfolge gehörig zu übersehen, und ganz im Kopfe zu haben, dürfte es nicht selten dahinkommen, daß Lehrer und Schüler auf einen Standpunct geriethen, wo sie das Ziel ganz und gar aus den Augen verloren hätten. Und wollte der Lehrer, um dies zu verhüten, sich eine gewisse Folge von Fragen aufschreiben, so würde er die Schüler wieder zu ängstlich bei dem Faden erhalten, ihren eigenthümlichen Ansichten nicht nachgehen können, und also aus seinem Sokratismus gerade das verbannen, was den eigentlichen Geist dieser Lehrart bestimmt. Doch gesetzt auch, diese Schwierigkeiten wären hier zu groß geschildert, gesetzt es gäbe deren viele, die mit

Leich-

Leichtigkeit und Sicherheit die mathematischen Ideen katechetisch zu entwickeln verstünden, so bliebe immer noch ein dritter Grund dagegen übrig, daß diese Methode nemlich offenbar zu viele Zeit erfoderte, und daß der Gewinn, den sie für die Selbstthätigkeit und Unterhaltung der Zöglinge hoffen ließe, mit dem größeren Zeitaufwande in der That in keinem schicklichen Verhältnisse stände. Bei andern Gegenständen darf dieser Verlust nicht so sehr in Anschlag kommen, denn bei einer moralischen oder religiösen Wahrheit beruhet größtentheils die Ueberzeugung darauf, daß der Schüler den Satz selbst gefunden zu haben glaube; allein dafür ist dem Mathematiker gar nicht bange; er erzwingt die Ueberzeugung durch richtige Construction. Wozu also hier ein größerer Zeitaufwand, wenn der kleinere eben so sicher zum Ziele führt? Für die Thätigkeit des Schülers dabei kann auf andere Weise gesorgt werden; wovon nachher die Rede sein wird. Auch Pestalozzi hatte gewiß sehr bestimmte Gründe, warum er — laut aller Nachrichten, die wir von der Burgdorfschen Lehrart erhalten haben — selbst bei dem ersten Elementarunterrichte in den Zahl- und Maaßverhältnissen durchaus nicht sokratisch zu Werke geht.

Kurz sollte auch die sokratische Methode in der Mathematik von einzelnen vorzüglich talentvollen und geübten Lehrern bei ausgezeichneten Köpfen ohne Schaden angewandt werden können, so scheint es doch, daß sie fürs allgemeine nicht so zu empfehlen sei, als eine mehr zusammenhängende deutliche Darstellung der Definitionen und Beweise, die vielleicht nach folgenden Vorschlägen nicht unzweckmäßig einzurichten wäre.

Was zuvörderst den Unterricht in der Geometrie betrifft, so kommt hierbei besonders darauf vieles an, daß die ersten Definitionen der einfachen Größen in der Mathematik richtig gefaßt werden. Denn sie sind es, die den Knaben zuerst ganz aus dem Felde der Erfahrung herausheben und in das Gebiet des reinen Verstandes versetzen sollen; er soll hier zuerst die Ideen, welche er bisher bloß in concreto kannte, in ihrer abstracten Reinheit ken-

kennen, und die Bilder dieser Ideen, welche ihm vorgezeichnet werden, als Bilder von der Sache selbst unterscheiden lernen. Man eile also ja nicht über die Definitionen des Punctes, der Linie u. s. w. als über etwas leichtes zu schnell hinweg, sondern man spreche sie mehreremal den Kindern vor; lasse sie öfters von ihnen wiederholen; man lasse sich von ihnen mehr als einmal den Unterschied zwischen der reinen Idee selbst und dem davon gezeichneten Bilde, z. B. zwischen der mathematischen Linie im Verstande und der physischen Linie, die mit Kreide an der Tafel gezogen ist, bestimmt angeben; man versuche endlich die Sache auf mehr als Eine Art zu definiren, um zu erforschen, wie sie diesem oder jenem der Zöglinge zuerst am einleuchtendsten werde. Ein solcher Anfang gibt überhaupt sogleich Gelegenheit, die Kinder an mathematische Präcision und Bestimmtheit des Ausdrucks zu gewöhnen. Keine Definition von ihnen muß als richtig angenommen werden, wo auch nur Ein Wort fehlt oder überflüssig steht. Geben sie eine solche zur Antwort, so müssen sie sogleich auf das Unstatthafte derselben hingeleitet, und überführt werden, daß sie ganz etwas anders als die verlangte Idee definirt haben. Wäre z. B. von einem Zöglinge der Punct als „ein Körper ohne Breite, Länge und Höhe" definirt, so müßte er überzeugt werden, daß diese Bestimmung durch das Wort „Körper" allen Sinn verloren habe. Erhielte der Lehrer auf die Frage, was ein geradlinichter Winkel sei, die Antwort, es sei „die Neigung zweier Linien gegen einander": So zeichne er sogleich einen Winkel mit krummen Schenkeln, beweise alsdann, daß auch auf diesen jene Definition passe, folglich unrichtig sei, und durch den Ausdruck: „zweier gerader Linien" berichtiget werden müsse. Auf eine solche Bestimmtheit der Ausdrücke muß mit großer Strenge gehalten werden, weil davon hauptsächlich das richtige Verstehen aller folgenden Sätze abhängt, und dadurch nicht bloß die mathematischen Ideen in dem Kopfe des Zöglings zur Evidenz gelangen, sondern derselbe auch in seine übrigen Begriffe und Erkenntnisse mehr Klarheit und Deutlichkeit zu bringen veranlaßt wird.

Mit gleicher Ausführlichkeit erkläre man dann auch die Grundsätze der gesamten Mathematik, und suche sie durch mehrere Beispiele dem Vorstellungsvermögen des Zöglings geläufig zu machen. Am sichersten wird man gehen, wenn man diese Beispiele, wo es sich thun läßt, von Zahlen hernimmt. So fällt der Satz: „Zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind einander selbst gleich," sehr in die Augen, wenn man ihn in Zahlen darstellt. Andere, der Geometrie angehörende Grundsätze, die sich in Zahlen nicht darthun lassen, leite man unmittelbar aus den Definitionen selbst her. Wer z. B. das verstanden hat, daß die Begränzungslinie des Kreises in allen ihren Puncten gleich weit vom Mittelpuncte abstehe, der wird eben dadurch leicht den Grundsatz fassen: Alle Radien Eines Kreises sind einander gleich. Dabei hüte man sich aber, in jenem Falle bloß bei den Zahlen, in diesem bloß bei Einem Kreise stehen zu bleiben; man wende vielmehr jenen Satz auch auf Größen anderer Art, und diesen auf Kreise von verschiedenen Durchmessern an, damit sich die

Vorstellung des reinen Grundsatzes nicht an Einen Fall anschließe, sondern zu einer allgemeinen erhebe, welche nachher überall, wo es nöthig ist, mit Leichtigkeit angewandt werden kann.

Sind auf diese Art die ersten Begriffe von den Gegenständen, mit welchen man zu thun hat, aufs reine gebracht, so ist dadurch dem folgenden Vortrage der eigentlichen Sätze und Aufgaben schon mächtig vorgearbeitet. Da nun jeder Satz zum Beweise eines später vorkommenden oder zur Auflösung einer nachfolgenden Aufgabe dient, so versteht es sich, daß kein Satz ohne eigentlichen Beweis hingestellt werde. Der Lehrer der Mathematik muß die Sache selbst reden lassen, nie bloß den Glauben an eine mathematische Wahrheit zu erwecken suchen, sondern überzeugen; und das ist ohne Beweis unmöglich. Es ist ja vielmehr ein Vortheil dieser Wissenschaft, daß sie alle ihre Thesen beweist, und der Lehrer also, welcher dies für unwichtig hält, und viele, vielleicht bedeutende Sätze bloß historisch anführt,

führt, versündiget sich dadurch um so mehr an seiner Wissenschaft, weil er ihr auf diese Art nicht nur kein größeres Interesse gibt, sondern sogar alles Anziehende raubt. Zur deutlichen Führung des Beweises gehört aber folgendes:

1) Bei den ersten Lehrsätzen, und bei vielen der später vorkommenden ist es vorzüglich nöthig, die Thesis selbst erst zu erläutern, d. h. zu zeigen, was darin bewiesen werden solle, und was man als ausbedungen voraussetze, oder als sogenannte Hypothesis annehme. Sehr oft verwechselt sonst der Anfänger die Thesis mit der Hypothesis, bekommt dadurch eine falsche Ansicht des Ziels, worauf bei dem Beweise hingearbeitet wird, und versteht die ganze Schlußfolge nicht. Leicht verfällt er z. B. bei dem Satze von der Gleichheit der Winkel an der Grundlinie im gleichschenklichten Dreiecke, auf die Vorstellung, als ob die Gleichheit der beiden Schenkel, und nicht jener beiden Winkel erwiesen werden sollte; mag man ihm dann dies letzte auch noch so bündig darthun, er wird es nicht begreifen.

Anders ist aber gewiß seine Ansicht davon, wenn man ihn vorher darauf aufmerksam macht, es sei hier von einem gleichschenklichten Dreiecke die Rede, worin schon nach der Definition desselben die zwei Seiten gleich sein müssen; es solle also jetzt aus dieser Eigenschaft jenes Dreiecks eine zweite gefolgert werden, daß nemlich auch die Winkel, welche jenen Seiten gegenüberliegen, allemal gleich sind. Ueberhaupt muß man sehr deutlich machen, was unter Hypothesis verstanden werde. Denn wenn auch der Anfänger die Thesis rein abgesondert im Auge hält, so will er oft, da ihm von der Kraft der Mathematik im Beweisen vieles vorgesprochen wird, selbst die Hypothesis bei einem Satze erst bewiesen sehen. Er verlangt z. B. bei dem Lehrsatze, „daß zwei Triangel, wenn sie drei gleiche Seiten haben, einander gleich sind," man solle ihm erst die Gleichheit der drei Seiten darthun. Diesem sonderbaren Irrthume muß daher sogleich anfangs vorgebeugt werden. Dabei hat aber der Lehrer zu erwägen, daß die Hypothesis von doppelter Art sein kann. Bei einigen Lehrsätzen liegt

liegt sie in dem Begriffe der gegebenen Figur, wie z. B. bei dem vorhin angeführten Satze vom gleichschenklichten Dreiecke; da sich kein Dreieck dieser Art denken läßt, welches nicht zwei gleiche Seiten hätte. Eben so bei dem Pythagoräischen Lehrsatze, indem ein rechtwinklichter Triangel ohne rechten Winkel ein Unding wäre. Bei andern besteht sie hingegen in außerwesentlichen Eigenschaften der Figur, deren sie nur für den vorliegenden Lehrsatz bedarf, und welche also diesen Lehrsatz für alle die Fälle, wo sich dieselben künftig zeigen, begründen. So ist, um dies durch ein Beispiel zu erläutern, bei einem unter den Sätzen von der Gleichheit der Triangel die Voraussetzung, „daß zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite des Einen Triangels einzeln eben so groß sind als zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite des Andern"; d. h. wenn bei künftig erscheinenden Figuren in späteren Lehrsätzen, ja wenn überhaupt irgendwo zwei Triangel sich finden, welche die eben erwähnte Eigenschaft besitzen, so kann man aus derselben auf die Gleichheit und Aehnlichkeit dieser Triangel schließen. Eben um diesen Schluß alsdann mit Sicherheit machen zu können, muß man hier denselben ausführlicher Weise als richtig darthun. Es macht also dieser Schluß und nicht jene Voraussetzung die Thesis bei dem angeführten Lehrsatze aus. Uebrigens wird es für manche Zöglinge gewiß nöthig seyn, diesen Begriff der Hypothesis öfters zu erneuern, und dieselbe bei jedem Lehrsatze von dem, was erwiesen werden soll, gehörig zu unterscheiden.

Was indeß zu dieser Erläuterung (nach dem vorhin gegebenen Begriffe dieses Wortes) der Thesis und Hypothesis eines jeden Satzes nothwendig gehört, das ist die Figur. Sie muß daher sogleich zu Anfange gezeichnet, und an derselben müssen die demonstranda dem Schüler deutlich gemacht werden, ehe noch irgend eine Hülfslinie die anfängliche Figur in ihrer Reinheit dem Auge des Schülers entzieht.

Sind diese Vorsichtsregeln beobachtet, so wird es ihm leicht werden, das Ziel des Beweises vestzuhalten; er wird mit Ungeduld den

Ausgang erwarten, und mit gespannter Aufmerksamkeit die Schlußfolge zu ergreifen suchen. Zweckmäßig ist es ferner, wenn man hierauf zunächst, ehe der eigentliche Beweis beginnt,

2) die Hülfssätze, welche zur Führung desselben erfodert werden, aufs neue in Erinnerung bringt; sie mögen nun entweder in allgemeinen mathematischen Grundsätzen (z. B. in dem, daß durch zwei Puncte nur Eine gerade Linie gedenkbar ist), oder in schon erwiesenen geometrischen Wahrheiten, oder endlich in arithmetischen Regeln z. B. aus der Proportionslehre, liegen. Dadurch wird ein doppelter Vortheil erreicht. Einmal sind jene Hülfssätze dann bei der Führung des Beweises selbst dem Knaben schon gegenwärtig; ihre Anwendung auf den vorliegenden Fall ist also sehr leicht, und die Demonstration geht ihren Gang ungehindert fort. Wenn jenes hingegen versäumt wurde, so hat der Lehrer oft nöthig, seinen Ideengang zu unterbrechen, und den Schülern die Hülfssätze mitten im Beweise von neuem darzustellen, wodurch er sie gewiß nicht selten

so weit von dem jetzt zu behandelnden Satze abziehen wird, daß er nach Erläuterung der Hülfswahrheit denselben von vorn anfangen muß. Eine unnütze Zeitverschwendung, eine gefahrvolle Erschwerung des Beweises sind die gewöhnlichen Folgen davon. Zweitens aber wird durch ein solches, zur rechten Zeit angebrachtes Hindeuten auf die Hülfssätze der Ueberblick, den der Schüler über die ganze Kette von Lehrsätzen erhalten soll, nach und nach ungemein erhellt; er fühlt bei jedem folgenden die Wichtigkeit und Unentbehrlichkeit aller vorhergehenden; sein Interesse an der Wissenschaft wächst, und die ganze Folge ihrer Lehren, welche einzeln wie todte Massen daliegen, wird ihm zu einer lebendigen Ideenwelt, wo Eine der Andern forthilft, und keine müßig oder unbrauchbar dasteht.

Hat der Schüler nun diese Hülfssätze sich wieder vergegenwärtigt, hat er dadurch gleichsam die Werkzeuge in die Hand bekommen, womit er das Werk des Beweises angreifen soll, so bereite man ihm ferner die Handhaben selbst, wo er seine Werkzeuge anzulegen hat, d. h. man ziehe nun

3) die Hülfslinien, wenn dergleichen nemlich zum Beweise nöthig sind. Man zeige, daß der Beweis nicht ohne dieselben geführt werden könne, weil man Gelegenheit haben müsse, die vorher bewiesenen Wahrheiten hier anzuwenden, daß es aber allerdings dem, welcher einen Beweis über irgend eine Figur zu führen habe, erlaubt sei, so viele Linien, als sein Zweck erfodere, zu ziehen, wenn nur die Grundfigur dadurch nicht im wesentlichen verändert werde. Eben deshalb müssen auch diese Nebenlinien, wenigstens vor den Augen der jüngsten Anfänger, sich von den Hauptlinien der Figur unterscheiden; sie müssen schwächer sein, oder nach einer längst bekannten Manier nur punctirt angezeigt werden. Noch deutlicher würde dies alles vielleicht dadurch dargestellt werden, wenn man, wenigstens bei schwierigeren Beweisen, welche sehr linienreiche Figuren erfodern, diese nicht an die Tafel zeichnete, sondern in dünne Holzplatten ausschneiden ließe,

an welche sich kleine Stäbchen als Hülfslinien durch Stifte nach Belieben bevestigen, und ohne Mühe wieder abnehmen ließen. Da, wo durch Hülfslinien vollständige neue Figuren in der Grundfigur entstehen, könnten die neuen Figuren ebenfalls besondere, aber durchlöcherte Holzplättchen von anderer Farbe sein, welche, ohne die Grundfigur zu verstecken, an derselben durch Stifte bevestigt würden. Doch dies ist nichts wesentliches, und es hat keine unüberwindliche Schwierigkeit, die Figuren mit allen Nebenlinien auch an der Tafel in das gehörige Licht zu stellen; so lange man nemlich, wovon hier einzig die Rede ist, im Gebiete der Planimetrie sich befindet.

Da ferner die meisten Lehrsätze eines zusammengesetzten Beweises bedürfen, so wird es nicht undienlich sein, wenn demselben

4) eine Uebersicht der Hauptmomente, worauf er beruht, eine Art von Disposition vorangeschickt wird. Man lasse sich nicht durch dieses, aus der Homiletik entlehnte Wort zu-

rückschrecken. Eine jeder Vortrag wird, sobald er ein Ganzes ausmachen soll, dadurch um so nützlicher, wenn der Zuhörer vorher eine kurze Anzeige der wichtigsten Abschnitte desselben erhält; sollte dies also nicht auch auf den mathematischen mit Nutzen angewendet werden können? Der Beweis eines Satzes besteht aus einzelnen Schlüssen, wovon zuweilen jeder wieder durch andere Schlüsse erst möglich gemacht werden muß. Ist z. B. die Congruenz zweier Figuren zu erweisen, so beruht dieselbe, weil Figuren nicht einfache, sondern zusammengesetzte Größen sind, auf der Gleichheit gewisser einzelner gleichliegender Theile. Sollte da nicht nothwendig das Verfolgen des Beweises selbst sehr erleichtert werden, wenn der Schüler vorher die einzelnen Theile kennen lernt, deren Gleichheit nach einander gezeigt werden muß? Wenn er schon im voraus die Reihe der Hauptschlüsse weiß, welche am Ende den letzten Schluß hervorbringen? Der Lehrer aber, welcher diesen Kunstgriff in Anwendung setzen wollte, müßte allerdings selbst die richtige Ansicht der Hauptmomente nicht verfehlen, und

schwie-

schwierigere Beweise zu diesem Zwecke genau prüfen, da es nicht überall in die Augen springt, welche Schlüsse die Hauptschlüsse sind, und die bisherigen Compendien noch nicht darauf hindeuten. Ein Paar Beispiele mögen es indeß deutlich machen, wie bald eine genaue Ueberlegung dem Lehrer die Hauptpuncte des Beweises zeigen könne. Wenn z. B. bewiesen werden sollte, „daß zwei Triangel ähnlich sind, sobald zwei Winkel des Einen dieselbe Größe haben wie zwei Winkel des Anderen": So bedenke man nur, worauf sich die Aehnlichkeit zweier Figuren gründe. Bekanntlich liegt sie darin, daß jeder Winkel der Einen dem gleichliegenden Winkel der Anderen gleich und jedes Paar Seiten der Einen dem gleichliegenden Paare der Anderen proportionirt sei. Da also hier die Gleichheit zweier Winkel in dem Einen und dem Anderen Triangel vorausgesetzt wird, so sind daraus noch vier einzelne Stücke zu erweisen, nemlich 1) die Gleichheit des dritten Winkels in beiden Triangeln, und dann die Proportionalität 2) der zwei Paar Seiten, die den ersten Winkel in beiden Triangeln, 3) der

zwei

zwei Paar Seiten, die den zweiten W. i. b. T., und 4) der zwei Paar Seiten, die den dritten W. i. b. T. einschließen. Diese vier Abschnitte geben also die Disposition des Beweises; denn nur erst, wenn sie alle einzeln dargethan sind, ist der Schluß auf die Aehnlichkeit beider Triangel möglich. Eben so zerfällt der Beweis des Satzes, „daß der äußere Winkel, welcher durch die Verlängerung irgend einer Seite des Dreiecks entsteht, den beiden ihm entgegengesetzten inneren Winkeln zusammengenommen gleich sei", offenbar in zwei Abschnitte. Man muß nemlich 1) zeigen, daß der Eine innere Winkel dem Einen, durch die Hülfslinie bestimmten Theile des äußeren, und 2) daß der Andere innere Winkel dem Andern Theile des äußeren gleich sei. Dann erst kann man schließen, daß beide innere zusammengenommen so groß sind als der äußere. Auf diese Art findet man leicht bei jedem Satze die Hauptmomente; man mache diese den Schülern bekannt, und, was nie vergessen werden darf, bringe sie an der schon gezeichneten Figur zur Anschauung; dann werden die Zuhörer auch längeren Beweisen mit einer unermüdeten Aufmerksamkeit folgen können. Und, was eben so wahr ist, der Lehrer hat sich unvermerkt seine eigene Arbeit dadurch erleichtert. Vorzüglich ist eine solche Disposition nöthig bei den sogenannten indirecten Beweisen, wo man das Gegentheil von der Thesis annimmt, und daraus eine Folgerung herleitet, die einen Widerspruch enthält. Diese Art zu schließen ist für Anfänger die schwerste, und man muß es ihnen vorher recht deutlich machen, wie eben dadurch, daß das angenommene Gegentheil zur Absurdität führe, die Wahrheit der Thesis erhelle. Auch dies gibt sehr bemerkbare Abschnitte im Beweise.

Es ist übrigens nicht zu befürchten, daß durch diese Zurüstungen zum eigentlichen Beweise zu viele Zeit verloren gehe. Sie scheinen nur, wenn man sie in solcher Darstellung überliest, weitläuftig zu sein; bei der wirklichen Anwendung sind sie es nicht, wie man bei dem Versuche bald finden wird. Im Gegentheil, ein vollständiger Beweis mit allen genannten

ten Vorbereitungen erfordert, in dieser Ordnung vorgetragen, und eben deshalb schneller verstanden, gewiß weniger Zeit, als wenn er ohne Umstände sogleich angefangen, und oft durch anzuführende Hülfssätze, durch Berichtigung unausbleiblicher Mißverständnisse u. s. w. unterbrochen wird.

Durch alles bisher erwähnte sind dann die Zöglinge auf den rechten Standpunct gestellt, von wo aus sie die Entwickelung der Thesis beobachten müssen; der Lehrer hat eben dadurch sich selbst auf das sicherste im Gebiete des Satzes, den er eben durchnimmt, orientirt, und er wird nun

5) gewiß mit Glücke den Beweis selbst vortragen können. Er lasse nun nach Anleitung der gegebenen Disposition Schluß auf Schluß nach einander folgen, und mache jeden vollendeten Abschnitt bemerkbar; er zeige dabei auf die Winkel und Linien der Figur, und benenne dieselben mit hinlänglichen Buchstaben, damit keine Verwechselung entstehen

 könne:

könne: So wird die ganze Schlußfolge nach und nach in völliger Klarheit vor dem Auge des Knaben vorübergehen. Aber freilich ist eben hier der Ort, wo die Gabe des Vortrags recht eigentlich hingehört. Hier darf keine verwickelte und verfehlte Construction dem Lehrer entfallen; hier muß er sich aufs sorgfältigste vor dem zu viel und zu wenig in den Worten seiner Darstellung hüten; hier ist das, was man „sich versprechen" nennt, eben so schädlich für die Zuhörer, als es durch die vielen Buchstaben und schon durch die anstrengende Aufmerksamkeit auf die Schlußfolge, leider nur zu leicht möglich gemacht wird. Vorsichtig und bedachtsam gehe also der Lehrer dabei zu Werke; er spreche nicht zu schnell, weil er sich selbst dadurch zu Irrungen im Ausdrucke Anlaß gibt, und dem Schüler oft nicht verständlich genug wird. Aber er falle auch nicht in das andere Extrem einer zu langsamen, schleppenden und gedehnten Rede, weil eine solche nicht nur überhaupt für Knaben ermüdend und also für ihre Aufmerksamkeit höchst gefährlich ist, sondern auch in dem vorliegenden besonderen Falle dadurch nachtheilig

wird

wird, daß sie den Beweis zu sehr ausdehnt, und das Verstehen desselben erschwert. Hält also der Vortrag des Beweises das glückliche Mittel im Zeitmaaße; ist er dabei zugleich lebendig; bemerkt man an dem Lehrer das eigene Interesse, welches er an der Wissenschaft nimmt; weiß er das, was wichtig ist, die Schlüsse und Sätze, welche mehr als andere auf das Ziel hinarbeiten, selbst durch Ton und Stimme herauszuheben: So wird ein solcher Vortrag doppelt so viel wirken als ein anderer, dem es bei aller Richtigkeit und Bestimmtheit doch an diesen accidentellen Eigenschaften mangelt. — Indem aber der Lehrer auf diese Art den Beweis selbst zusammenhängend führt, darf er es nie vergessen, daß er nicht erwachsene, gebildete, an Schlußfolgen gewöhnte Zuhörer vor sich hat, sondern Knaben, deren Verstand hauptsächlich erst durch den Unterricht in der Mathematik jene Gewandtheit erhalten soll, die also in dieser Uebungszeit noch mancherlei Störungen ihrer Aufmerksamkeit unterworfen sind. Er frage also mit unter, besonders, wenn einzelne Abschnitte der Disposition vollendet sind, ob man auch alles verstanden habe, ob man gefolgt sei, und sich mit ihm auf Einem Puncte der Beweisbahn befinde. Ja er verlasse sich auch auf diese Fragen nicht allein; er prüfe die Aufmerksamkeit zuweilen dadurch, daß er bei einer Conclusion, die aus leichten Vordersätzen ohne Mühe hervorgeht, plötzlich inne hält, und von den Schülern seine eigene angefangene Periode vollenden läßt. Treffen sie dann das rechte, so leidet der Vortrag keine Unterbrechung; verfehlen sie es, welches gewiß selten der Fall sein wird, so ist das entweder ein Beweis von Nachlässigkeit der Schüler, oder von der Schwierigkeit der Sache selbst, und der Beweis muß von neuem geführt werden. Der Lehrer übe sich endlich, sogar während des Beweises die Mienen der Schüler zu prüfen, denn sehr oft läßt sich schon daraus ohne weiteres Fragen abnehmen, ob sie verstehen und folgen oder nicht. Eine jede eingesehene Wahrheit zwingt dem Menschen unwillkührlich eine Miene des Beifalls ab, die nicht zu verkennen ist; dahingegen auch der peinliche Zustand, wenn man etwas begreifen soll und doch nicht einzusehen vermag, sich auf dem Gesichte so deutlich ausdrückt, daß er dem aufmerksamen Lehrer nicht entgehen kann.

Zuweilen wird das Verstehen eines Beweises auch dadurch sehr erleichtert, wenn man die Hauptschlüsse desselben an die Tafel schreibt. Leichtere und kürzere Schlußfolgen werden zwar besser gefaßt, wenn man sie nicht durchs Anschreiben unterbricht; schwerere und längere aber gewiß nicht. Der Schüler folgt dem zusammengesetzten, mit vielen Hülfssätzen durchflochtenen Beweise weit leichter, wenn er die bereits gefundenen Prämissen vor Augen sieht; er trägt dann um so weniger Bedenken, sie als ausgemachte, nicht mehr zu bezweifelnde Wahrheiten zu benutzen; es wird ihm dann um so deutlicher, wie die Disposition theilweise hintereinander wirklich zur Ausführung kommt. Doch muß natürlich dies Anschreiben nur in der Kürze geschehen, um nicht zu viel Zeit zu verderben, und den Schüler nicht zur Unachtsamkeit zu verleiten; welches leicht der Fall sein dürfte, wenn er die Hoffnung hätte, am Ende des Vortrags den ganzen ausführlichen Beweis an der Tafel zu finden.

Alles, was hier von der Darstellung eigentlicher Lehrsätze gesagt ist, gilt auch von den Aufgaben, welche hin und wieder eingeschaltet werden. Sie zerfallen beim Vortrage in zwei Hauptttheile, weil erstlich die Auflösung des Problems selbst gezeigt, und dann die Richtigkeit derselben bewiesen werden muß. Bei der Auflösung selbst hat man besonders das zu beobachten, daß man deutlich mache, was gegeben sei, und was damit vorgenommen werden solle. So bestehn bei der Aufgabe: „ein Dreieck in ein Parallelogramm mit einem gegebenen Winkel und einer gegebenen Seite zu verwandeln" die data in einem Dreiecke, einem Winkel, und einer Linie; und das postulatum ist das Parallelogramm, worin der Winkel und die Linie befindlich sein müssen. Nach dieser Erörterung mache dann der Lehrer die Auflösung an der Tafel, und erkläre dabei zugleich das Verfahren. Der Beweis, daß alles verlangte geschehen sei, wird hierauf wie jeder andere Beweis auseinandergesetzt. —

Um

Um nun die ganze, bis hierher angegebene Vortragsweise für manchen noch deutlicher und anwendbarer zu machen, so soll sie im praktischen Abschnitte dieser Schrift in concreto dargestellt werden. Man wird daselbst bei jedem Lehrsatze Thesis, Hypothesis, Hülfssätze, Hülfslinien, Disposition und dann den Beweis; bei jeder Aufgabe aber das Gegebene, das Verlangte, die Auflösung, und darauf die ganze Darstellung ihrer Richtigkeit angegeben finden. Es ist übrigens leicht einzusehen, daß der Lehrer, wenn er nach dieser Methode vortragen will, die Beweise selbst sehr deutlich gefaßt haben, daß er recht eigentlich damit vertraut sein müsse; und es war daher oben nicht zu viel verlangt, wenn das Dociren aus dem Hefte oder Lehrbuche, welches in manchen andern Lectionen ohne Schaden zulässig ist, beim Vortrage der Mathematik gänzlich verworfen wurde. Ueberhaupt ist die Einführung eines Lehrbuchs in den unteren Classen aus einem andern Grunde nicht rathsam; wovon weiter unten die Rede sein wird.

Jetzt noch ein Paar Worte, um die Vertheidiger der Sokratischen Methode doch in etwas zufrieden zu stellen. Sind die Schüler schon einigermaßen im Beweisen geübt, haben sie bereits einige Einsicht in die Bündigkeit mathematischer Schlußfolgen erlangt, so kann man zuweilen bei leichteren Sätzen ihre Beurtheilungskraft auffodern und anleiten, den Beweis selbst zu finden, oder, wenn schon Ein Beweis gegeben ist, einen Anderen aufzusuchen. Dies macht fähigen Schülern gewöhnlich viel Freude, und erweckt die Aufmerksamkeit aufs neue. Sie werden dabei nicht selten einen falschen Weg einschlagen; aber dann lasse man sie denselben immer fortgehen, bis sie sich überzeugen, daß sie hier die gesuchte Wahrheit nicht erreichen können. Ja selbst, wenn sie mit richtigen und zweckmäßigen Sätzen anfangen, mache man ihnen bei jeder schwachen Seite, die ihr Beweis zeigen mögte, Einwürfe, damit sie sich nie mit dunkelen Vorstellungen begnügen, sondern alles mit gehöriger Begründung und Deutlichkeit darstellen lernen. Aber oft darf dies allerdings nicht geschehen, weil es sonst

eine

eine unnöthige und nachtheilige Zeitverschwendung veranlassen würde.

Ueber den Unterricht in der Arithmetik erwarte man hier keine ausführlichen Vorschläge. Denn theils wird ein Lehrer, der überhaupt die Gabe der Deutlichkeit sich erworben hat, und nach obigen oder ähnlichen Regeln die geometrischen Sätze zur Evidenz zu bringen weiß, auch bei der Arithmetik das nicht vernachlässigen, was vorzüglich zum Verstehen derselben dient, nemlich Vollständigkeit und völlige Klarheit der ersten Begriffe, deutliche Auseinandersetzung der arithmetischen Gesetze und Regeln, und Gewöhnung an eine geschickte und fertige Anwendung derselben; — theils aber ist es hierbei mit einzelnen allgemeinen Vorschlägen nicht abgethan, indem ein jeder Abschnitt der Arithmetik für die Anfänger eine eigene Behandlung erfodert. Sollte also dazu eine gründliche Anleitung gegeben werden, so müßte die ganze Elementar-Arithmetik, eben so wie der nachfolgende Abschnitt aus der Elementar-Geometrie, praktisch dargestellt

hier

hier ihren Platz finden. Allein da man längst schon in diesem Theile der Mathematik das Bedürfniß einer größeren Deutlichkeit fühlte, so hat man bereits leichtere Wege zur Erreichung derselben eröffnet, und es wäre unnütz, hier abzuschreiben und zusammenzuziehen, was von Anderen, namentlich von Kästner, Klügel*), Lorenz, Mönnich und vorzüglich von Busse **) darin vorgearbeitet ist. Welchem Lehrer der Mathematik sollte das alles unbekannt sein!

Eins vergesse man indeß nicht, die Knaben nemlich zu fortgesetzten Uebungen in den Regeln der Arithmetik zu veranlassen. Will und kann man nicht von den Schulstunden zu viele Zeit dazu verwenden, so gebe man ihnen Aufgaben für ihren Privatfleiß mit. Man findet

*) In den „Anfangsgründen der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie."

**) In dem „ersten Unterricht in der algebraischen Auflösung u. s. w."; in den Vorreden zu diesem Werke und zu dem allgemein geschätzten Rechenbuche; auch in der Schrift „über Plus und Minus" u. s. w.

det ja dergleichen in allen Lehrbüchern, und, kann leicht ähnliche nach diesen Mustern entwerfen*). Uebung aber macht auch hier die Sache leichter und — interessanter.

Es ist noch ein Mittel übrig, welches den Vortrag unterstützen muß, um die Anfänger mit dieser schwierigen Wissenschaft noch vertrauter zu machen; ein Mittel, ohne welches auch die deutlichste Darstellung für viele nicht hinreichend wäre, nemlich die Wiederholung. Auch sie bedarf, wenn sie zweckmäßig sein soll, einer besonderen Einrichtung; worüber einige Worte vielleicht nicht verloren sind.

*) Was die Algebra betrifft, so findet man dazu besonders in dem „Exempelbuche für Anfänger und Liebhaber der Algebra von Uflacker (2te Aufl. Braunschw. 1799)" eine zweckmäßige Sammlung von Aufgaben.

III. Von