Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 32. Berechnung der sphärischen Coordinaten aus den geographischen Coordinaten, (Länge und Breite)

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

Indem wir nun das Coordinatensystem als eben ansehen, begehen wir den Fehler, dass wir $b = a$ annehmen. Der Fehler $a - b$ kann für die Praxis unbeachtet bleiben, wenn derselbe nicht den Betrag 0,00005 a übersteigt, d. h. der Fehler $a - b$, oder $a - a\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$ darf im äussersten Falle den Werth 0,00005 a erreichen. Wir haben also für diesen Fall die Gleichung

$$a - a\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) = 0{,}00005\,a$$

woraus sich

$$\alpha = 0{,}001$$

ergiebt. Dieser Werth gilt für den Radius 1. Für den Radius $R = \text{rtd}\ 6000000$ m ergiebt sich somit

$$\alpha = 60000 \text{ m}.$$

Wir werden also ein Coordinatensystem als eben ansehen können, so lange seine Ordinaten nicht länger als 60 Kilometer sind. Im anderen Falle können die Formeln der ebenen Trigonometrie nicht ohne Weiteres Anwendung finden. Wir betrachten dann die Terrainoberfläche als eine Kugel, welche das Erdsphäroid im Nullpunkte des Coordinatensystems berührt und sich der Oberfläche des Sphäroids möglichst nahe anschmiegt. Der Radius dieser Kugel ist gleich dem geometrischen Mittel des Krümmungsradius der Meridianellipse in der Breite φ des Coordinaten-Nullpunkts und des zum Meridian senkrechten grössten Kugelkreises, also $R = \sqrt{R_m\, R_n}$, (vergl. (149) und (150)).

§ 32.

Berechnung der sphärischen Coordinaten aus den geographischen Coordinaten, (Länge und Breite).*)

Seit Fertigstellung der Landesaufnahme wird der Geometer die Ausführung selbstständiger Triangulationen nur noch selten nöthig haben. Es wird sich in der Regel nur noch darum handeln, der Landesaufnahme einzelne Punkte durch trigonometrische Punkteinschaltung ergänzend hinzuzufügen. Da die trigonometrischen Punkte der Landesaufnahme durch ihre geographische Länge und Breite gegeben sind, so entsteht dem Geometer zunächst die Aufgabe, diese geographischen Coordinaten in rechtwinklig sphärische umzurechnen, wobei der Meridian irgend eines Punktes der Landesaufnahme als Abscissenaxe, und dieser Punkt selbst als Coordinaten-Nullpunkt angesehen wird.

In der preussischen Vermessungs-Anweisung sind für die verschiedenen Kreise der Provinzen ganz bestimmte trigonometrische Punkte als Nullpunkte vorgeschrieben. Da die Lage derselben eine genügend enge ist, die einzelnen Systeme also nur eine geringe Ausdehnung haben, so können dann die sphärischen Coordinaten dieser Systeme als **ebene** behandelt werden.

Sei nun P_0, Fig. 57, der Nullpunkt des Systems, P ein zweiter Punkt, dessen sphärische Coordinaten, bezogen auf den Meridian des Nullpunktes als Abscissenaxe, gefunden werden sollen, und seien φ_0, φ und λ_0, λ bezüglich die geographischen Breiten und Längen der Punkte P_0 und P, φ_f die geographische Breite des Fusspunktes P_f der Ordinate $P\,P_f$, und setzt man

$$\varphi_f - \varphi = \psi \tag{152}$$

so ist die Abscisse des Punktes P

$$x = P_0\,P_f = (\varphi + \psi) - \varphi_0. \tag{152a}$$

*) Trigon. Formul. 6 der preussischen Verm.-Anw.

Die Ordinate wird, wenn man

$$\lambda - \lambda_0 = \eta \tag{153}$$

setzt, aus dem rechtwinklig sphärischen Dreiecke $N P P_f$

$$\operatorname{tang} y = \operatorname{tang} \eta \cos \varphi_f \tag{154}$$

gefunden, (nach (4), da $\sin N P_f = \cos \varphi_f$).

Es kommt nun darauf an, den Breitenunterschied $\varphi_f - \varphi = \psi$ zu finden, wodurch φ_f bekannt wird.

Man lege senkrecht zum Meridian des Punktes P_0, Fig. 58, den grössten Kugelkreis P_f P, welcher offenbar die Ebene des Parallels $B P B'$, sowie die des Aequators, unter dem Winkel φ_f schneidet, und zwar Erstere in der Kante P D, auf welcher die Radien C B des Parallelkreises und $M P_f$ des Meridians senkrecht stehen. Nach der Scheitelgleichung des Kreises (14) ist dann, wenn r den Radius C B des Parallels in der Breite φ bezeichnet:

$$A P^2 = 2 r A B - A B^2.$$

Da der Bogen P B, — Längenunterschied der Punkte P_0 und P, — stets ein sehr flacher sein wird, so ist A B gegen r, also $A B^2$ gegen 2 r A B, verschwindend klein, und kann die halbe Sehne A P ohne Fehler gleich dem Bogen B P gesetzt werden. Bezeichnet nun L die Bogenlänge für 1″ des Parallels, η'' den in Sekunden ausgedrückten Winkel B C P $(= \lambda - \lambda_0)$, so ist $B P = \eta'' L$, unsere Gleichung geht also über in

$$(\eta'' L)^2 = 2 r A B.$$

Ferner kann man ohne Fehler setzen:

$$\psi = A B \sin P_f \quad A B = A B \sin \varphi_f$$

$$1)\ \psi = \frac{(\eta'' L)^2 \sin \varphi_f}{2 r}.$$

Ist nun r der Radius des Parallelkreises in der Breite φ, so ist die Bogenlänge für 1″ dieses Parallels $L = \frac{r}{\varrho''}$, — (denn die Bogenlänge für 1″ des mit dem Radius **Eins** beschriebenen Kreises ist nach Thl. I, § 31 1) gleich $\frac{1}{\varrho''}$). — Nach § 30, 6) ist aber

$$2)\ r = R_n \cos \varphi$$

also

$$3)\ L = \frac{R_n}{\varrho''} \cos \varphi.$$

Setzen wir 2) und 3) in 1) ein, so erhalten wir:

$$\psi = \frac{\eta'' \eta'' L \sin \varphi_f}{2 \varrho''}$$

oder, da φ_f nur um wenige Sekunden von φ verschieden ist, so dass wir ohne merklichen Fehler $\sin \varphi$ für $\sin \varphi_f$ setzen können

$$\psi = \frac{\eta'' \eta'' L \sin \varphi}{2 \varrho''}.$$

Bezeichnet nun R_m den Krümmungsradius des Meridians in der Breite φ, und setzt man $\frac{L \sin \varphi}{2 R_m} = q$ (worin q aus Tabelle I des Anhangs entnommen werden kann), also $L \sin \varphi = 2 R_m q$, so erhalten wir:

$$\psi = \eta'' \eta'' q \frac{R_m}{\varrho''}$$

$$\psi \frac{\varrho''}{R_m} = \eta'' \eta'' q.$$

Da $\frac{\psi}{R_m}$ das analytische Mass für den Winkel ψ, so ist $\frac{\psi}{R_m}\varrho''$ der in Sekunden ausgedrückte Winkel ψ. Setzen wir denselben gleich ψ'', so erhalten wir:

$$\psi'' = \eta''\,\eta''\,q. \tag{155}$$

Die Gleichungen (152)—(155) setzen uns in den Stand, die Bögen x und y in Gradmass zu berechnen. Wir werden in § 34 zeigen, wie dasselbe in Metermass auszudrücken ist.

§ 33.

Additamentenverfahren.

Drücken wir den Sinus und die Tangente eines Winkels φ nach (47) und (49) durch seinen Bogen aus, wobei wir uns den Winkel φ so klein vorstellen wollen, dass alle Glieder der bezüglichen Reihen, welche φ in höherer als der dritten Potenz enthalten, als verschwindend angesehen werden können, so erhalten wir:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{2\,.\,3}$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3}$$

und wenn wir $\frac{\varphi^3}{2\,.\,3} = a$, $\frac{\varphi^3}{3}$ also $= 2\,a$ setzen:

$$1)\left\{\begin{array}{l}\sin\varphi = \varphi - a\\ \operatorname{tang}\varphi = \varphi + 2\,a.\end{array}\right.$$

Da wir φ als sehr klein annehmen, so wird auch a eine sehr kleine Grösse (Differential) sein.

Nach (38) ist nun

$$d\log\varphi = M\frac{d\varphi}{\varphi}$$

also für $d\varphi = a$

$$d\log\varphi = \frac{M\,a}{\varphi}$$

d. h. lässt man in der Funktion $\log\varphi$ die Veränderliche φ um den Betrag a zu- oder abnehmen, so wird $\log\varphi$ um den Betrag $\frac{M\,a}{\varphi}$ zu- oder abnehmen,

also ist

$$\log(\varphi - a) = \log\varphi - \frac{M\,a}{\varphi}\text{*)}$$

oder nach 1):

$$\log\sin\varphi = \log\varphi - \frac{M\,a}{\varphi},$$

oder für $\frac{M\,a}{\varphi} = A$

und ebenso

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{\log\sin\varphi = \log\varphi - A}\\ \mathbf{\log\operatorname{tang}\varphi = \log\varphi + 2\,A}\end{array}\right\} \tag{156}$$

woraus weiter folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{\log\varphi = \log\sin\varphi + A}\\ \mathbf{\log\varphi = \log\operatorname{tang}\varphi - 2\,A}\\ \mathbf{\log\sin\varphi = \log\operatorname{tang}\varphi - 3\,A}\end{array}\right\} \tag{156 a}$$

---

*) Dies folgt auch ohne Weiteres aus der Taylorschen Reihe (§ 52), wenn in derselben alle Glieder, welche das Differential a, — einen sehr kleinen Bruch, — in höherer als der 1. Potenz enthalten, als verschwindend angesehen werden.