Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 31. Sphärische Coordinaten

5) **Krümmungsradien der Meridianellipse.** Der Krümmungsradius des Meridians für die Breite φ ist nach (59)

$$R_m = \frac{d\,s}{d\,\varphi}$$

daher nach (148)
$$\mathbf{R_m} = \frac{\mathbf{a\,(1 - \varepsilon^2)}}{\mathbf{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}}. \qquad (149)$$

6) **Der Radius des Parallelkreises** in der Breite φ ist nach (145), da $r = x$

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a \cos \varphi}}{\mathbf{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}}} \qquad (150)$$

mithin ist A B, Fig. 55, welches wir gleich R_n setzen wollen:

$$\mathbf{R_n} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}}}.\text{*)} \qquad (151)$$

Aufgabe: Wie gross ist der Radius einer Kugel, deren Parallelkreis in der Breite φ dem Parallelkreise des Sphäroids in der Breite φ congruent ist?

Ist R der Radius der Kugel, r der Radius des Parallelkreises für die Kugel sowohl, wie für das Sphäroid, so ist für die Kugel $r = R \cos \varphi$, wie ohne Weiteres erhellt, für das Sphäroid $r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}}$, also $R = \frac{a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}} = R_n$.

§ 31.

Sphärische Coordinaten.

Die niedere Geodäsie, welche sich die Aufnahme von Flächen geringer Ausdehnung zur Aufgabe stellt, kann von der Berücksichtigung der sphäroidischen Gestalt der Erde absehen und die Flächen als **eben** betrachten. Es fragt sich nun, wie weit ein Messungsgebiet ausgedehnt werden darf, wenn man dasselbe noch als eben ansehen will, ohne befürchten zu müssen, dass dadurch ein für die Praxis merkbarer Fehler entsteht.

Denken wir uns senkrecht zum Meridian, den wir als Abscissenaxe eines Coordinatensystems ansehen, in verschiedenen Punkten grösste Kugelkreise gelegt, Fig. 56, so werden diese sich sämmtlich in **einem** um 90° vom Meridian entfernten Punkte schneiden, (ebenso wie sich die zum Aequator senkrechten Meridiane sämmtlich im Pole schneiden). Die Convergenz der Ordinatenbögen ist indessen in der Nähe des Meridians noch sehr gering, und es fragt sich, bis zu welcher Entfernung von demselben kann dieselbe noch vernachlässigt werden? Denken wir uns in der Entfernung α vom Meridian zu diesem einen Parallelkreis gezogen, Fig. 56, wo wir den Bogen α in Theilen des Erdradius ausgedrückt denken wollen, so ist, wenn wir die Bezeichnungen der Figur einführen:

$$b = a \cos \alpha$$

— denn der Radius des Parallelkreises ist, wenn R den Radius des Meridiankreises bezeichnet, $r = R \cos \alpha$. — Nach (48) können wir, wenn wir in dieser Reihe alle Glieder, welche α in höherer als der 2ten Potenz enthalten, vernachlässigen, diesen Ausdruck schreiben:

$$b = a\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right).$$

*) R_n ist Krümmungsradius des zum Meridian senkrechten grössten Kugelkreises in der Breite φ.

Indem wir nun das Coordinatensystem als eben ansehen, begehen wir den Fehler, dass wir b = a annehmen. Der Fehler a — b kann für die Praxis unbeachtet bleiben, wenn derselbe nicht den Betrag 0,00005 a übersteigt, d. h. der Fehler a — b, oder $a - a\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$ darf im äussersten Falle den Werth 0,00005 a erreichen. Wir haben also für diesen Fall die Gleichung

$$a - a\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) = 0{,}00005\,a$$

woraus sich

$$\alpha = 0{,}001$$

ergiebt. Dieser Werth gilt für den Radius 1. Für den Radius R = rtd 6000000 m ergiebt sich somit $\alpha = 60000$ m.

Wir werden also ein Coordinatensystem als eben ansehen können, so lange seine Ordinaten nicht länger als 60 Kilometer sind. Im anderen Falle können die Formeln der ebenen Trigonometrie nicht ohne Weiteres Anwendung finden. Wir betrachten dann die Terrainoberfläche als eine Kugel, welche das Erdsphäroid im Nullpunkte des Coordinatensystems berührt und sich der Oberfläche des Sphäroids möglichst nahe anschmiegt. Der Radius dieser Kugel ist gleich dem geometrischen Mittel des Krümmungsradius der Meridianellipse in der Breite φ des Coordinaten-Nullpunkts und des zum Meridian senkrechten grössten Kugelkreises, also $R = \sqrt{R_m\, R_n}$, (vergl. (149) und (150)).

§ 32.

Berechnung der sphärischen Coordinaten aus den geographischen Coordinaten, (Länge und Breite).*)

Seit Fertigstellung der Landesaufnahme wird der Geometer die Ausführung selbstständiger Triangulationen nur noch selten nöthig haben. Es wird sich in der Regel nur noch darum handeln, der Landesaufnahme einzelne Punkte durch trigonometrische Punkteinschaltung ergänzend hinzuzufügen. Da die trigonometrischen Punkte der Landesaufnahme durch ihre geographische Länge und Breite gegeben sind, so entsteht dem Geometer zunächst die Aufgabe, diese geographischen Coordinaten in rechtwinklig sphärische umzurechnen, wobei der Meridian irgend eines Punktes der Landesaufnahme als Abscissenaxe, und dieser Punkt selbst als Coordinaten-Nullpunkt angesehen wird.

In der preussischen Vermessungs-Anweisung sind für die verschiedenen Kreise der Provinzen ganz bestimmte trigonometrische Punkte als Nullpunkte vorgeschrieben. Da die Lage derselben eine genügend enge ist, die einzelnen Systeme also nur eine geringe Ausdehnung haben, so können dann die sphärischen Coordinaten dieser Systeme als **ebene** behandelt werden.

Sei nun P_0, Fig. 57, der Nullpunkt des Systems, P ein zweiter Punkt, dessen sphärische Coordinaten, bezogen auf den Meridian des Nullpunktes als Abscissenaxe, gefunden werden sollen, und seien φ_0, φ und λ_0, λ bezüglich die geographischen Breiten und Längen der Punkte P_0 und P, φ_f die geographische Breite des Fusspunktes P_f der Ordinate $P\,P_f$, und setzt man

$$\varphi_f - \varphi = \psi \tag{152}$$

so ist die Abscisse des Punktes P

$$x = P_0\,P_f = (\varphi + \psi) - \varphi_0. \tag{152a}$$

*) Trigon. Formul. 6 der preussischen Verm.-Anw.