UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 30. Das Erdsphäroid (Krümmungsradien der Meridian-Ellipse, Gradmessung, Radius des Parallels.)

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

Visual Library

Durch Einsetzung dieser Summe in II erhält man: (s) = — 4,1 und durch Einsetzung von (s) = — 4,1 in II oder III: (1) = + 5, (2) = — 3,2, (3) = + 10,5, (4) = — 1,6.

Es erhält nun jeder der Dreieckswinkel der Dreiecke 1, 2, 3, 4 bezüglich die Verbesserung (1), (2), (3), (4), ausserdem aber diejenigen Dreieckswinkel, welche zugleich Theile der Polygonwinkel bilden, die Verbesserungen $\frac{1}{p}$ (s) bezw. $\frac{1}{q}$ (s).

Nach Verbesserung der Winkel erfolgt die Berechnung der Dreiecksseiten in der Weise, dass zunächst die Anfangsseite a = 1000 angenommen wird. Hierauf erfolgt dann nach § 40 eine **vorläufige** Berechnung der Coordinatenunterschiede.*) Die Summe derselben dient zur Berechnung der **vorläufigen** Entfernung $\mathfrak{S}$ der **gegebenen** Punkte. Ist die bekannte **wirkliche** Entfernung dieser Punkte = S, so ist $q = \frac{S}{\mathfrak{S}}$ die Verhältnisszahl, mit welcher die **vorläufigen** Seiten der Dreiecke und die **vorläufigen** Coordinatenunterschiede zu multipliciren sind, um zu den **wahren** Werthen derselben zu gelangen.

Sind die An- und Abschlussneigungen auf den Punkten 12 und 15 nicht beobachtet, so beschränkt sich die Ausgleichung der Winkel nur auf die Vertheilung der Widersprüche $f_1, f_2 \ldots f_n$ in den einzelnen Dreiecken 1, 2 . . . n. Die Berechnung der vorläufigen Coordinatenunterschiede erfolgt unter Zugrundelegung einer blos durch Schätzung bestimmten Anfangsneigung. Ausser der vorläufigen Entfernung $\mathfrak{S}$ ist dann aus den vorläufigen Coordinatenunterschieden und den Coordinaten der **gegebenen** Punkte noch der Fehler der Anfangsneigung herzuleiten.**) Letztere ist dann um den erhaltenen Betrag zu verbessern, und die Berechnung, nachdem selbstverständlich auch die wahren Werthe der Dreiecksseiten durch Multiplication der vorläufigen Werthe mit q ermittelt worden, mit den so berichtigten Elementen zu wiederholen.

IV. Sphärisch trigonometrische Messungen.

§ 30.

Das Erdsphäroid.

Ein Körper, welcher durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist, heisst Sphäroid. Ein solcher Körper ist bekanntlich die Erde. Die Meridiane, d. i. die durch die Rotationsaxe der Erde gelegten Schnitte, sind also Ellipsen, und es können daher, wo es sich um die Aufnahme ganzer Länder handelt, die Formeln der sphärischen Trigonometrie nicht ohne Weiteres Anwendung finden, bedürfen vielmehr gewisser Correktionen,***) welche ihrerseits die Kenntniss der Excentricität der Meridianellipse bezw. der Abplattung erfordern. Wir wollen daher

*) Im trigon. Form. 19 der pr. Verm.-Anw. Vom § 40 muss hier zum Verständniss des Folgenden vorweg Kenntniss genommen werden.

) Ist die aus den Coordinaten der gegebenen Punkte abgeleitete Neigung der diese Punkte verbindenden Geraden = ν, die aus den **vorläufigen Coordinaten sich ergebende Neigung = n, $\left(\text{tang}\, n = \frac{[\Delta\, \mathfrak{y}]}{[\Delta\, \mathfrak{x}]}\right)$, so ist $n - \nu$ der Fehler der Anfangsneigung.

***) Wenigstens einer strengen Berücksichtigung des mit der geographischen Breite wechselnden Krümmungsradius der Meridianellipse pp.

noch zeigen, wie diese durch blosse Gradmessungen gefunden werden können, (vergl. 4)), zugleich auch einige Formeln entwickeln, welche auch in die niedere Geodäsie Eingang gefunden haben, seitdem bei Aufnahme grösserer Flächen der Anschluss an die Landesaufnahme vorgeschrieben ist.

1) Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Erdoberfläche ist, infolge der sphäroidischen Gestalt der Erde, kein Bogen eines grössten Kugelkreises, liegt also nicht in einer durch den Erdmittelpunkt gelegten Ebene, ja, sie liegt überhaupt nicht einmal in einer Ebene, ist also eine Kurve doppelter Krümmung. Denkt man sich nämlich diese Linie A B, Fig. 54, durch verticale Signalstangen abgesteckt, so müssten diese, wenn sie in der Ebene des grössten Kugelkreises A B C lägen, in ihren Verlängerungen den Erdmittelpunkt treffen. Dies ist aber, wie man aus der Figur ersieht, nicht der Fall, vielmehr schneidet ein in einem Punkte der nördlichen Halbkugel auf die Erdoberfläche, (Berührungsebene), errichtetes Loth die kleine Axe südlich vom Erdmittelpunkte, und zwar um so südlicher, je nördlicher der fragliche Punkt gelegen. Alle in verschiedenen Breiten errichteten Lothe müssen sich daher in der Nähe des Erdmittelpunktes **kreuzen**, liegen also nicht in einer Ebene, also auch nicht der durch sie bezeichnete Erdbogen. Letzterer heisst die **geodätische Linie**, welche indessen nicht Gegenstand unserer Erörterungen sein kann. Immerhin erschien es angemessen, derselben mit diesen kurzen Andeutungen Erwähnung zu thun.

2) **Abplattung, Excentricität.** Bezeichnen wir die Abplattung, d. h. die Differenz der grossen und kleinen Halbaxe, ausgedrückt in Theilen der ersteren, d. h. also den Bruch $\frac{a-b}{a}$ mit e, die Excentricität der Meridianellipse, ebenfalls in Theilen der grossen Halbaxe ausgedrückt, mit ε, also $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a}} = \varepsilon$, so ist, da $\frac{a-b}{a} = e$:

$$b = a - e\,a = a\,(1-e) \tag{138}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - a^2\,(1-e)^2}{a}} \tag{139}$$

$$\varepsilon = \sqrt{e\,(2-e)}. \tag{140}$$

Hierin ist die Abplattung e durch Gradmessung (vergl. 4) $= \frac{1}{299{,}15}$ gefunden.

3) Ziehen wir in A, Fig. 55, eine Tangente an die Meridianellipse, errichten auf diese in A ein Loth A B, so stellt erstere die Horizontale, letzteres die Verticale für den Punkt A dar. Der Winkel φ heisst die elliptische, ψ die geocentrische Polhöhe des Ortes A.

Die Subnormale D E ist nach (54)

$$D\,E = \frac{b^2}{a^2}\,x \tag{141}$$

ferner ist $$\tan\varphi^2 = \frac{A\,E^2}{E\,D^2} = y^2 : \frac{b^4}{a^4}\,x^2 \text{ (nach 141)} \tag{142}$$

endlich nach der Ellipsengleichung:

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}\,x^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \tag{143}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

also $$\operatorname{tang}\varphi^2 = \frac{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}{\frac{b^4}{a^4}x^2}$$

folglich $$a^4 = (a^2 + b^2 \operatorname{tang}\varphi^2)\, x^2 \tag{144}$$

oder $$a^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\varphi^2\right) x^2.$$

Da $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a}} = \varepsilon$, so ist $\frac{b^2}{a^2} = (1 - \varepsilon^2)$

also
$$\begin{aligned} a^2 &= (1 + (1-\varepsilon^2)\operatorname{tang}\varphi^2)\, x^2 \\ a^2 &= (1 + \operatorname{tang}\varphi^2 - \varepsilon^2 \operatorname{tang}\varphi^2)\, x^2 \\ &= (\sec\varphi^2 - \varepsilon^2\operatorname{tang}\varphi^2)\, x^2 \\ a^2\cos\varphi^2 &= (1 - \varepsilon^2\sin\varphi^2)\, x^2 \end{aligned}$$

mithin $$x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}} \tag{145}$$

Durch Einsetzung dieses Werthes in (142) erhält man leicht, unter Anwendung von (139), da $y = AE$,

$$y = \frac{\frac{b^2}{a^2}\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}} \tag{146}$$

oder auch nach (141), da $y = DE \operatorname{tang}\varphi$

$$y = \frac{b^2}{a^2}\, x \operatorname{tang}\varphi.$$

Weiter ist $\operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x}$, oder nach (145) und (146)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\psi &= \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\varphi \\ &= (1-\varepsilon^2)\operatorname{tang}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

3) Aendern sich y und x um die sehr kleinen Beträge dy und dx, so ändert sich der zum Winkel φ gehörige Bogen um

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Durch Differentiation der Gleichung (143) erhalten wir:

$$2y\,dy = -\frac{-2b^2x}{a^4}dx$$

$$dy^2 = \frac{b^4x^2\,dx^2}{a^4y^2}$$

daher $$ds = \frac{dx}{a^2y}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}$$

oder nach (145) und (146)

$$\begin{aligned} ds &= \frac{dx}{a^2y}\sqrt{\frac{a^2b^4\sin\varphi^2 + a^2b^4\cos\varphi^2}{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}} \\ &= \frac{dx}{a^2y}\, ab^2 \sqrt{\frac{\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2}{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}} \end{aligned}$$

$$ds = \frac{b^2\,dx}{ay}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}.$$

Durch Differentiation von (144) wird erhalten:

$$2\,x\,d\,x\,(a^2 + b^2 \operatorname{tang} \varphi^2) + x^2 b^2\, 2 \operatorname{tang} \varphi\, d \operatorname{tang} \varphi = 0 \quad \text{oder nach (41):}$$

$$2\,x\,d\,x\,(a^2 + b^2 \operatorname{tang} \varphi^2) + \frac{2\,b^2 x^2 \operatorname{tang} \varphi\, d\,\varphi}{\cos \varphi^2} = 0$$

woraus man durch Division mit $2\,x$ und Multiplication mit $\cos \varphi^2$ findet:

$$d\,x = \frac{-\,b^2\,x \operatorname{tang} \varphi\, d\,\varphi}{a^2 \cos \varphi^2 + b^2 \sin \varphi^2}$$

also

$$\frac{d\,x}{y} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{b^2 \operatorname{tang} \varphi\, d\,\varphi}{a^2 \cos \varphi^2 + b^2 \sin \varphi^2}$$

nach (145) und (146) ergiebt sich:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^2}{b^2} \cot \varphi$$

also

$$\frac{d\,x}{y} = -\frac{a^2\,d\,\varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$$

oder da $b^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2)$

$$\frac{d\,x}{y} = -\frac{d\,\varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}$$

der obige Ausdruck für $d\,s$ geht daher über in:

$$d\,s = -\frac{b^2\,d\,\varphi}{a\,(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder wenn wir wieder $a^2 (1 - \varepsilon^2) = b^2$ setzen:

$$\mathbf{d\,s = -\frac{a\,(1 - \varepsilon^2)\,d\,\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}} \tag{148}$$

4) **Gradmessungen** bezwecken die Ermittelung der Abplattung des Erdsphäroids. Setzt man in (148) $d\,\varphi = 1^0 = \frac{\pi}{180}$, so erhält man die Bogenlänge für 1^0 des Meridians in der Breite φ

$$m_\varphi = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)\,\pi}{180\,((1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2))^{\frac{3}{2}}}.$$

Hätte man die Bogenlängen für 1^0 des Meridians unter zwei verschiedenen Breiten φ und φ' gemessen, wären also m_φ und $m_{\varphi'}$ bekannt, dagegen die Dimensionen des Erdsphäroids, in unserer Formel also a und ε, noch unbekannt, so wären zur Bestimmung dieser Unbekannten zwei Gleichungen, nämlich die beiden Ausdrücke für m_φ und $m_{\varphi'}$, gegeben, woraus sich die Unbekannten entwickeln lassen. Es genügt also zur Bestimmung der Dimensionen des Erdsphäroids die Messung zweier Meridiangrade unter möglichst verschiedenen Breiten.*)

*) Weitere Mittel zur Bestimmung der Abplattung hat man in Pendelbeobachtungen und in Bestimmungen der Mondbahn, deren Gestalt einen Schluss auf die Gestalt der Erde gestattet. Alle diese verschiedenen Mittel führen zu etwas von einander abweichenden Resultaten. Die Resultate der Pendelbeobachtungen sind schwankende wegen der verschiedenen Dichtigkeit der Erde. Da auch die Resultate verschiedener Gradmessungen nicht so genau unter sich übereinstimmen, als die Schärfe der Messungen erwarten lässt, so ist man zu der Annahme einer mathematisch nicht genauen Sphäroidform der Erde genöthigt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

5) **Krümmungsradien der Meridianellipse.** Der Krümmungsradius des Meridians für die Breite φ ist nach (59)

$$R_m = \frac{d\,s}{d\,\varphi}$$

daher nach (148)
$$\mathbf{R_m} = \frac{\mathbf{a\,(1 - \varepsilon^2)}}{\mathbf{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}}. \qquad (149)$$

6) **Der Radius des Parallelkreises** in der Breite φ ist nach (145), da $r = x$

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a \cos \varphi}}{\mathbf{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}}} \qquad (150)$$

mithin ist A B, Fig. 55, welches wir gleich R_n setzen wollen:

$$\mathbf{R_n} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}}}. \text{*)} \qquad (151)$$

Aufgabe: Wie gross ist der Radius einer Kugel, deren Parallelkreis in der Breite φ dem Parallelkreise des Sphäroids in der Breite φ congruent ist?

Ist R der Radius der Kugel, r der Radius des Parallelkreises für die Kugel sowohl, wie für das Sphäroid, so ist für die Kugel $r = R \cos \varphi$, wie ohne Weiteres erhellt, für das Sphäroid $r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}}$, also $R = \frac{a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}} = R_n$.

§ 31.
Sphärische Coordinaten.

Die niedere Geodäsie, welche sich die Aufnahme von Flächen geringer Ausdehnung zur Aufgabe stellt, kann von der Berücksichtigung der sphäroidischen Gestalt der Erde absehen und die Flächen als **eben** betrachten. Es fragt sich nun, wie weit ein Messungsgebiet ausgedehnt werden darf, wenn man dasselbe noch als eben ansehen will, ohne befürchten zu müssen, dass dadurch ein für die Praxis merkbarer Fehler entsteht.

Denken wir uns senkrecht zum Meridian, den wir als Abscissenaxe eines Coordinatensystems ansehen, in verschiedenen Punkten grösste Kugelkreise gelegt, Fig. 56, so werden diese sich sämmtlich in **einem** um 90° vom Meridian entfernten Punkte schneiden, (ebenso wie sich die zum Aequator senkrechten Meridiane sämmtlich im Pole schneiden). Die Convergenz der Ordinatenbögen ist indessen in der Nähe des Meridians noch sehr gering, und es fragt sich, bis zu welcher Entfernung von demselben kann dieselbe noch vernachlässigt werden? Denken wir uns in der Entfernung α vom Meridian zu diesem einen Parallelkreis gezogen, Fig. 56, wo wir den Bogen α in Theilen des Erdradius ausgedrückt denken wollen, so ist, wenn wir die Bezeichnungen der Figur einführen:

$$b = a \cos \alpha$$

— denn der Radius des Parallelkreises ist, wenn R den Radius des Meridiankreises bezeichnet, $r = R \cos \alpha$. — Nach (48) können wir, wenn wir in dieser Reihe alle Glieder, welche α in höherer als der 2ten Potenz enthalten, vernachlässigen, diesen Ausdruck schreiben:

$$b = a\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right).$$

*) R_n ist Krümmungsradius des zum Meridian senkrechten grössten Kugelkreises in der Breite φ.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN