



Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 26. Wiederholte Differentiation

[urn:nbn:de:hbz:466:1-79893](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-79893)

D. h. man differentiirt unentwickelte Funktionen, indem man dieselben partiell erst nach x und dann nach y differentiirt und die partiellen Differentialquotienten nach obiger Formel zusammensetzt.

Beispiel: $f(x, y) = ax^2 + by + c = 0$. 1) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2ax$. 2) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = b$,
also $\frac{dy}{dx} = -\frac{2ax}{b}$.

Von obiger Formel (30) macht man häufig Gebrauch, um in der entwickelten Form vorkommende Wurzeln etc. zu vermeiden.

Beispiel: $y = x\sqrt{x}$, also $y^2 - x^3 = 0$.

1) $\frac{df(x, y)}{dx} = -3x^2$ 2) $\frac{df(x, y)}{dy} = 2y$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$.

Beispiele zur Uebung in der Anwendung der bisherigen Paragraphen.

1) $y = x\sqrt{1+x}$. $\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{d\sqrt{1+x}}{dx} + \sqrt{1+x} \cdot \frac{dx}{dx} = x \times \frac{1}{2} (1+x)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{1+x} \times 1$
 $= \frac{x}{2\sqrt{1+x}} + 1 + \sqrt{1+x} = \frac{2+3x}{2\sqrt{1+x}}$, oder einfacher nach § 25:

2) $y = \frac{a}{x}\sqrt{a^2+x^2}$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{a^3}{x^2 + \sqrt{a^2+x^2}}$ 4) $y = \frac{1-x}{1+x}$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1+x^2}$

3) $y = (a^2+x^2)(a^2-x^2)$ $\frac{dy}{dx} = -4x^3$ 5) $y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2+x}{2\sqrt{(1+x)^3}}$

6) $y^2 = ax - x^2$. Setzt man a) $y^2 = z$, so ist b) $z = ax - x^2$, also $\frac{dz}{dx} = a - 2x$, oder da nach
a) $dz = 2y dy$, so ist: $2y \frac{dy}{dx} = a - 2x$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{a-2x}{2y} = \frac{a-2x}{2(ax-x^2)}$

7) $a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2$. Es ist: $a^2 2y dy = -b^2 2x dx$, also $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$.

8) $z^2 = x^2 + y^2$. Hier kommt § 24 in Betracht. Es ist $2z dz = 2x dx + 2y dy$
also $dz = \frac{x dx + y dy}{z} = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$.

§ 26.

Wiederholte Differentiation.

Enthält der Differentialquotient einer Funktion von x ausser Constanten auch noch die Variable x , so ist derselbe wiederum eine Funktion von x , und man kann mit ihm die Operation des Differentiirens wiederholen. Den so erhaltenen Differentialquotienten nennen wir den 2. Differentialquotienten, (die 2. Abgeleitete). Entsprechend kann man den 3., 4. etc. Differentialquotienten bilden. Ist $y = f(x)$, so bezeichnet man den ersten, 2., 3. . . Differentialquotienten dieser Funktion mit $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, oder man braucht das Symbol $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ Zu dieser Bezeichnung ist man auf folgende Weise gekommen:

Ist $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, so erhält man durch Differentiation, indem man dx als Constante ansieht; (§ 21):

$$\frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{1}{dx} \cdot \frac{d(dy)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

und indem man $\frac{dy}{dx^2}$ nochmals differentiirt, analog:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^3 y}{dx^3} = f'''(x).$$

Es bedarf nicht der Erwähnung, dass die Exponenten von d , d^2 , d^3 - nur das 1., 2., 3. etc. Differential andeuten, nicht etwa Potenzen von d bezeichnen können.

Beispiel: $y = x^n$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = n x^{n-1} \quad (\text{vergl. § 22})$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^n(x) = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Alle noch höheren Differentialquotienten sind hier = 0.

§ 27.

Mac Laurins Theorem.

Wir denken uns $f(x)$ in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von x entwickelt, nämlich

$$1) f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

worin A , B , C noch näher zu bestimmende Constanten bezeichnen. Verstehen wir unter $f(0)$ denjenigen Werth von $f(x)$, welchen diese Funktion annimmt, wenn in derselben $x = 0$ gesetzt wird, so ist

$$f(0) = A.$$

Durch Differentiation der Gleichung 1) erhalten wir (§ 18 u. 22):

$$2) \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots$$

und hieraus für $x = 0$

$$f'(0) = B.$$

Durch Differentiation von 2) wird erhalten

$$3) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x) = 2C + 2 \cdot 3Dx + 3 \cdot 4Ex^2 + \dots$$

und hieraus für $x = 0$

$$f''(0) = 2C$$

und analog

$$f'''(0) = 2 \cdot 3D$$

etc.

Mithin bestimmen sich die Coefficienten A , B , C ... wie folgt:

$$A = f(0)$$

$$B = f'(0)$$

$$C = f''(0) \cdot \frac{1}{1 \cdot 2}$$

$$D = f'''(0) \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

wodurch aus Gl. 1) erhalten wird:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1} + \frac{f''(0)x^2}{1 \cdot 2} + \frac{f'''(0)x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (31)$$