



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Anfangsgründe der niederen Geodäsie**

**Loewe, Hans**

**Liebenwerda, 1892**

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-79893](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-79893)

# Niedere Geodäsie

Mit Berücksichtigung

der

Preuss. Vermessungs-Anweisungen VIII & IX

dargestellt

von

Loewe, Landmesser.



*Liebenwerda*

Verlag des technischen Versand-Geschäfts

R. Reiss.

M  
22 951

4.20

9/6

~~E. K. 3888~~

~~1295~~

24

~~9888~~

~~L. 19.~~

4.

~~REDACTED~~

UNIVERSITÄT  
PADERBORN

~~z. N. 3888~~

~~1295~~

# ANFANGSGRÜNDE

DER

# NIEDEREN GEODÄSIE

MIT

BERÜCKSICHTIGUNG DER FORMELN DER PREUSSISCHEN  
VERMESSUNGSANWEISUNG

(KATASTERANWEISUNG VIII u. IX)

DARGESTELLT

VON

**LOEWE**

LANDMESSER.

MIT 24 FIGURENTAFELN

UND EINEM ANHANGE, ENTHALTEND MATHEMATISCHE TABELLEN

03  
M  
22951



1892

VERLAG DES TECHNISCHEN VERSANDGESCHÄFTS  
R. REISS, LIEBENWERDA.



4.

ANFANGSGRÜNDE

NIEDEREN GEODASIE

BEWÄHRUNG DER FORMEN DER PREUSSISCHEN  
VERMESSUNGSWEISUNG

Alle Rechte vorbehalten, namentlich die der Uebersetzung in fremde Sprachen.  
Nachdruck wird strafrechtlich verfolgt.

KOHN

MIT 24 FIGUREN



## Vorwort.

---

Unter den Vorkämpfern der Kultur ist es im neueren Zeitalter besonders der Techniker, welcher überall, wo Erfolge errungen werden, immer wieder in den vordersten Reihen erblickt wird. Dem Aufschwunge der Technik im Allgemeinen muss die Vermessungskunst im Besonderen nothwendig folgen, denn für alle kulturellen Anlagen, mögen sie sich auf industrielle und Verkehrsverhältnisse beziehen, oder der Boden- und Wasserwirthschaft dienen, gehört die Herstellung von Plänen und Nivellements, die Ausführung von hydrometrischen Vorarbeiten, Bodenumformungen und dergl. zu den ersten Erfordernissen. Dementsprechend gehen denn auch die Anforderungen an das Wissen und Können des Landmessers mehr und mehr in die Höhe und ist es jetzt an der Zeit, dass auch die vom Staate für den Landmesserberuf zu fordernde Vorbildung entsprechend gesteigert werde. Schon längst hat sich diese Ueberzeugung bei den Landmessern selbst fest eingewurzelt, und ein Blick auf die überraschend grosse Zahl derer, welche vergeblich Mühe, Zeit und Geld daran setzen, um die Hindernisse auf der nicht genügend vorgeebneten Bahn zu ihrem Ziele zu überwinden, belehrt jeden Unbefangenen darüber, wie sehr diese Ueberzeugung gerechtfertigt ist. Schon das praktische Lehrjahr des Landmessereleven ist bei der unzureichenden Vorbildung derselben zum grossen Theile verloren. Zwar wird jeder verständige Lehrherr nach Möglichkeit seinem Zöglinge nur die elementarsten Aufgaben stellen, doch ist die heutige Praxis des Landmessers eine derartige, dass die vollständige Durchführung dieses Grundsatzes zu den Unmöglichkeiten gehört, wenn nicht zeitweise Unterbrechungen in der Beschäftigung des Zöglings eintreten sollen. So hat dieser denn nicht selten Arbeiten zu bewältigen, deren handwerksmässige Ausführung ihm nach streng vorgeschriebener Schablone zwar möglich ist, die ihn aber nicht zufrieden stellen und zunächst zwar in ihm mächtig das Verlangen anregen, die Formeln, nach denen er zu arbeiten gehalten ist, in ihrem Wesen kennen zu lernen, dann aber auch, nachdem er alle dahin zielenden Anstrengungen als unnütz erkannt hat, sein Interesse für den neu erwählten Beruf vorzeitig einschlimmern lassen.

Ursprünglich ist dieses Interesse naturgemäss grade beim Anfänger, der, den engen Schulräumen endlich entflohen, eine Welt von Hoffnungen in der Brust hegt, am lebendigsten, und um so verhängnissvoller daher der Fehler, dass eine mangelhafte Vorbildung dafür Sorge trägt, dasselbe in vielen Fällen von vorn herein zu ersticken, statt für die Zukunft nutzbringend auszugestalten. Die in dieser Beziehung im Wissen des angehenden Landmessers vorhandene grosse Lücke auszufüllen vermag nur der Staat durch Forderung einer angemessenen Schulvorbildung, so lange aber die Staatshilfe noch aussteht, soll das vorliegende Werk dieselbe, wenn auch mit nur schmalen, dürftigem Steg, wenigstens überbrücken helfen. Das ist das ganze Ziel dieses Werkes, welches also nicht entfernt den Anspruch erhebt, als ein vollständiges Lehrbuch der Geodäsie zu gelten, sondern nur hofft, im Kreise der Anfänger seine Freunde zu finden, und welches darum darauf angewiesen ist, da, wo es auch in weitere Kreise Eingang erhalten sollte, auf doppelt nachsichtige Beurtheilung zu rechnen.

Bromberg, im Juni 1892.

Loewe.

# Inhaltsverzeichnis.

## Theil I. Mathematische Vorstudien.

### Abchnitt I. Sphärische Trigonometrie.

	Seite
1. Erläuterungen . . . . .	3
2. Das rechtwinklig sphärische Dreieck . . . . .	3
3. Schiefwinklig sphärisches Dreieck . . . . .	4
4. Flächeninhalt des sphär. Dreiecks. Sphärischer Excess . . . . .	4

### Abchnitt II. Analytische Geometrie.

5. Rechtwinklige Coordinaten . . . . .	5
6. Polarcoordinaten . . . . .	5
7. Gleichung einer Linie . . . . .	6
8. Gleichung der Geraden . . . . .	6
9. Schnittpunkt zweier Linien . . . . .	6
10. Umformung der Coordinaten . . . . .	7
11. Gleichung des Kreises . . . . .	7
12. Die Ellipse . . . . .	7
13. Mittelpunktsgleichung der Ellipse . . . . .	8
14. Scheitelgleichung der Ellipse . . . . .	8
15. Parabel. Gleichung derselben . . . . .	8
16. Hyperbel. Gleichung derselben . . . . .	9

### Abchnitt III. Differentialrechnung.

17. Erläuterungen . . . . .	9
18. Differentiation der Summe zweier Funktionen . . . . .	11
19. Differentiation der Differenz zweier Funktionen . . . . .	12
20. Differentiation des Produkts zweier Funktionen . . . . .	12
21. Differentiation des Quotienten zweier Funktionen . . . . .	12
22. Differentiation der Potenz zweier Funktionen . . . . .	13
23. Funktion einer Funktion . . . . .	14
24. Funktionen zwischen zwei Veränderlichen . . . . .	15
25. Unentwickelte Funktionen . . . . .	15
26. Wiederholte Differentiation . . . . .	16
27. Mac Laurins Theorem . . . . .	17
28. Binomialreihe . . . . .	18
29. Differentiation von Exponentialgrössen . . . . .	18
30. Differentiation logarithmischer Grössen . . . . .	20
31. Differentiation goniometrischer Funktionen . . . . .	20
32. Differentiation cyclometrischer Funktionen . . . . .	22
33. Goniometrische Reihen . . . . .	22
34. Cyclometrische Reihen . . . . .	23
35. Die Taylor'sche Reihe . . . . .	23
36. Geometrische Bedeutung des Differentialquotienten . . . . .	24
37. Maxima und Minima . . . . .	24
38. Die unbestimmten Ausdrücke $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ . . . . .	26

**Abschnitt IV. Anwendung der Differentialrechnung auf analytische Geometrie.** (Fortsetzung zu Abschnitt II.) A. Ellipse.

	Seite
§ 39. Tangente, Normale, Subtangente, Subnormale . . . . .	27
§ 40. Quadratur der Ellipse . . . . .	28
	B. Parabel.
§ 41. Subtangente und Subnormale . . . . .	28
§ 42. Quadratur der Parabel . . . . .	28
	C. Krümmungskreise.
§ 43. Erläuterungen . . . . .	29
§ 44. Krümmungsradius . . . . .	29

**Theil II. Von den Messungen.**

**Abschnitt I. Astronomische Begriffe.**

§ 1. Die Himmelskugel . . . . .	35
§ 2. Geographische Ortsbestimmung . . . . .	36
§ 3. Bestimmung der Mittagslinie . . . . .	37

**Abschnitt II. Methode der kleinsten Quadrate.**

§ 4. Princip . . . . .	39
§ 5. Die mittleren Fehler . . . . .	40
§ 6. Mittlerer Fehler zusammengesetzter Grössen . . . . .	42
§ 7. Gewichte der Beobachtungen. Allgemeines arithmetisches Mittel . . . . .	43
§ 8. Die drei Hauptaufgaben der Ausgleichsrechnung . . . . .	44
§ 9. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen . . . . .	45
	a. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.
	(1. Einleitende Erläuterungen. 2. Aufstellen der Fehlergleichungen und Entwicklung der Normalgleichungen aus denselben. 3. Auflösung der Normalgleichungen mit 2 Unbekannten. Rechenproben. 4. Auflösung der Normalgleichungen, mit vier Unbekannten. 5. Mittlerer Fehler.)
	b. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.
§ 10. Ausgleichung bedingter Beobachtungen . . . . .	50
	a. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.
	(1. Einleitende Erläuterungen. 2. Bedingungsbedingungen. Correlaten und Normalgleichungen. 3. Mittlerer Fehler. 4. Beispiel.)
	b. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.
	(1. Correlaten- und Normalgleichungen. 2. Mittlerer Fehler. 3. Beispiel.)

**III. Abschnitt. Trigonometrische Messungen.**

**A. Dreiecksnetz.**

§ 11. Triangulirung . . . . .	54
§ 12. Vortheilhafteste Gestalt der Dreiecke . . . . .	56
§ 13. Signale . . . . .	57
§ 14. Winkelmessung . . . . .	57
	(1. Richtungsbeobachtungen. 2. Einzelbeobachtungen.)
§ 15. Ausgleichung der Winkelbeobachtungen . . . . .	59
	(1. Richtungsbeobachtungen. 2. Einzelbeobachtungen.)
§ 16. Centriren der Winkel . . . . .	61
§ 17. Netz-Ausgleichung . . . . .	63
	B. Trigonometrische Punkteinschaltung.
§ 18. Methoden der Punktbestimmung . . . . .	65
§ 19. Berechnung der Neigungen . . . . .	66
§ 20. Orientirung der beobachteten Richtungen . . . . .	66
§ 21. Vorwärtseinschneiden . . . . .	68
	(Berechnung der genäherten Coordinaten, Ausgleichungs- und Proberechnungen.)
§ 22. Rückwärtseinschneiden . . . . .	71
	(Berechnung der genäherten Coordinaten, Ausgleichungs- und Proberechnung.)
§ 23. Das combinirte Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden . . . . .	75
§ 24. Einschneiden mit graphischer Darstellung der Visirstrahlen . . . . .	75
	(1. Berechnung und Darstellung der Schnittfigur. 2. Bertotsches Problem. 3. Lösung des Problems für 3 Strahlen.)

	Seite
§ 25. Einschneiden für zwei Punkte . . . . . (Hansensches Problem.)	80
§ 26. Einschneiden für zwei Punkte mit graphischer Darstellung der Visirstrahlen . . . . .	81
§ 27. Wiederherstellung verlorener trigonometrischer Punkte durch Rückwärtsvisuren . . . . .	83
§ 28. Einschalten . . . . .	83
§ 29. Einketten . . . . .	84

**Abchnitt IV. Sphärisch trigonometrische Messungen.**

§ 30. Das Erdsphäroid . . . . . (Krümmungsradien der Meridian-Ellipse, Gradmessung, Radius des Parallels.)	86
§ 31. Sphärische Coordinaten . . . . .	90
§ 32. Berechnung der sphärischen Coordinaten aus den geographischen Coordinaten, (Länge und Breite) . . . . .	91
§ 33. Additamentenverfahren . . . . .	93
§ 34. Verwandlung des Gradmasses der kleinen Bögen $y$ und $x$ (§ 32) in Längenmass . . . . .	94
§ 35. Berechnung geographischer Coordinaten aus den sphärischen Coordinaten . . . . .	95
§ 36. Berechnung geodätischer Dreiecke . . . . . (1. Additamentenmethode. 2. Theorem von Legendre.)	95
§ 37. Berechnung sphärischer Coordinaten (nach Soldner) . . . . .	96
§ 38. Berechnung der sphärischen Entfernungen und Neigungen aus den sphärischen Coordinaten . . . . .	97

**Abchnitt V. Polygonometrische Arbeiten.**

§ 39. Polygonmessung . . . . .	98
§ 40. Berechnung der Polygone . . . . .	98
§ 41. Fehler der Coordinatenunterschiede . . . . . (1. Für Bussolenzüge. 2. Für Theodolitaufnahmen. 3. Graphische Darstellung der Längen- und Querkorrektion eines Polygons.)	100
§ 42. Polygonanschluss an unzugängliche Punkte . . . . .	103
§ 43. Knotenpunkte . . . . . (1. Nach der preussischen Vermessungsanweisung, 2. nach anderer Methode, 3. Polygonnetz-Ausgleichung.)	104
§ 44. Auffinden grober Messungsfehler . . . . .	106
§ 45. Genauigkeit der Polygone . . . . .	106
§ 46. Bussolenmessungen . . . . .	107
§ 47. Kleinpunkte . . . . . (Bindepunkte, rechtwinklige Abstände, Bogenschnitt.)	108
§ 48. Umformung der Coordinaten . . . . .	109

**Abchnitt VI. Detailaufnahme und Flächenberechnung.**

§ 49. Stückvermessung . . . . . (1. Grenzen. 2. Liniennetz. 3. Längenmessung.)	110
§ 50. Fortschreibungsvermessungen . . . . .	113
§ 51. Flächenberechnung . . . . .	116
§ 52. Polarplanimeter . . . . .	116
§ 53. Linearplanimeter . . . . .	120
§ 54. Flächenberechnung grösserer Complexe . . . . .	121
§ 55. Theilung der Grundstücke . . . . . A. Nach der Fläche. (1. Theilung von gegebenem Punkte aus. 2. Paralleltheilung. 3. Normaltheilung. 4. Proportionaltheilung.) B. Nach dem Werthe. C. Grenzregulirung. D. Planabsteckung.	122

**Abchnitt VII. Linienabsteckung.**

§ 56. Abstecken grader Linien . . . . . (1. Mit Hülfe von Winkelmessungen, Theodolit, Bussole. 2. Mit Hülfe vorhandener Karten.)	126
---	-----

57.	Kurvenabsteckung . . . . .	Seite 127
	(A. Kreis. B. Parabel. C. Uebergangskurve. Ueberhöhung der äusseren Schiene in Eisenbahnkurven. D. Vermittelung des Gefällwechsels.)	

### Theil III. Vertical-Messungen.

#### Abschnitt I. Nivellements.

1.	Trigonometrisches Höhenmessen . . . . .	135
2.	Refraktion . . . . .	135
3.	Trigonometrisch-nivelitisches Netz . . . . .	138
4.	Barometrisches Höhenmessen . . . . .	139
	(Bauernfeindsche Barometerformel, Hygrometrie, Reduktion des Barometers auf 0°.)	
5.	Aneroidbarometer . . . . .	144
6.	Messungen mit dem Aneroidbarometer . . . . .	145
	(1. Mit Standbarometer. 2. Interpolationsverfahren.)	
7.	Nivellement mit Niveau . . . . .	147
8.	Terraindarstellung . . . . .	148

#### Abschnitt II. Erdbau.

9.	Massenberechnung und Terrainumformung . . . . .	150
	(1. Massenberechnung. 2. Planirung. 3. Quadratnetzaufnahmen. 4. Auflockerung des Bodens. 5. Langgestreckte Erdbauten.)	
10.	Kostenveranschlagung . . . . .	154
	(1. Transportkosten. 2. Nebenarbeiten. 3. Ermittlung der Transportweite. 4. Massennivellement. 5. Notizen für Erdarbeiten.)	

### Theil IV. Hydrometrische Arbeiten.

1.	Stromnivellement . . . . .	161
2.	Geschwindigkeitsmessungen . . . . .	162
	(1. Schwimmer. 2. Schwimmstock. 3. Pitotsche Röhre. 4. Woltmansche Flügel.)	
3.	Bewegung des Wassers in Canälen . . . . .	163
4.	Bewegung des Wassers in Röhren . . . . .	165
5.	Wassermengen . . . . .	166
	(1. Direkte Messung derselben. 2. Messung mittelst Ueberfalls. 3. Berechnung nach dem Niederschlagsgebiet.)	
6.	Wasserkraft . . . . .	168
7.	Höhe von Stauanlagen . . . . .	169
8.	Berechnung der Staukurve . . . . .	169

### A n h a n g .

#### Mathematische Tabellen.

Erläuterungen zu den Tabellen . . . . .	3
Tabelle I. Erddimensionen . . . . .	9
"  II. Additamente . . . . .	15
"  III. Grössen $\frac{k}{s}$ und Strahlengewichte $p = \left(\frac{k}{s}\right)^2$ . . . . .	18
"  IV. Höhenunterschiede für die Barometerdifferenz 1 mm . . . . .	19
"  V. Tafel der zulässigen Längen- und Streckenfehler . . . . .	20
"  VI. Quadrattafel . . . . .	21



Theil I.  
Mathematische Vorstudien.

Mathematische Vorstudien.  
Theil I.

# I. Sphärische Trigonometrie.

## § 1.

### Erläuterungen.

Ein von drei Bögen grösster Kugelkreise eingeschlossenes Dreieck heisst ein **sphärisches Dreieck**. Die Seiten desselben sind also Bögen grösster Kugelkreise und werden gemessen durch ihre Centriwinkel. Unter dem  $\sin$ ,  $\cos$  etc. einer **Seite** versteht man demgemäss den  $\sin$ ,  $\cos$  etc. des zu dieser Seite gehörigen Centriwinkels.

Unter den Winkeln des sphärischen Dreiecks versteht man die Neigungen der Ebenen der drei das Dreieck einschliessenden grössten Kugelkreise untereinander, z. B. wird der Winkel  $C$  des Dreiecks  $ABC$ , Fig. 1, erhalten, wenn man in  $C$  an die Kreise  $CA$  und  $CB$  Tangenten zieht\*), oder auch, indem man in einem beliebigen Punkte  $D$  der gemeinschaftlichen Kante  $CM$  auf eben diese Kante in den Ebenen  $ACM$  und  $BCM$  Lothe,  $DA$  und  $DE$ , errichtet. Ist  $\angle ADE$  bei  $D$  rechtwinklig, so heisst auch  $\triangle ACB$  ein bei  $C$  rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

## § 2.

### Das rechtwinklig sphärische Dreieck.

Bezeichnet man die beiden Katheten mit  $a$  und  $b$ , die Hypotenuse mit  $c$ , die den Seiten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  gegenüberliegenden Winkel mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , so finden im rechtwinklig sphärischen Dreiecke folgende Relationen statt. (Fig. 1.)

$$\text{I } \sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}. \quad (1)$$

$$\text{II } \cos c = \cos a \cdot \cos b. \quad (2)$$

$$\text{III } \cos a = \frac{\tan b}{\tan c} \text{ und } \cos \beta = \frac{\tan a}{\tan c}. \quad (3)$$

$$\text{IV } \sin b = \frac{\tan a}{\tan \alpha} \text{ und } \sin a = \frac{\tan b}{\tan \beta}. \quad (4)$$

$$\text{V } \cos c = \cot a \cdot \cot \beta. \quad (5)$$

$$\text{VI } \sin a = \frac{\cos \beta}{\cos b} \text{ und } \sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a}. \quad (6)$$

Beweis:

Zu I: Sind  $AE$  und  $ED \perp BC$ , so ist:

$$\sin \beta = \sin AED = \frac{AD}{AE} = \frac{AM \sin b}{AM \sin c} = \frac{\sin b}{\sin c}, \text{ also}$$

$$\sin c = \frac{\sin b}{\sin \beta} \text{ und analog } \sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha}$$

\*) Man begreift leicht, dass dieser Winkel stets grösser ist, als der von den **Sehnen**  $CA$  und  $CB$  eingeschlossene Winkel, und zwar um so mehr, je spitzere Winkel letztere mit der Kante  $CM$  bilden. Die Winkelsumme im sphär. Dreiecke ist daher stets grösser als  $180^\circ$ . — Vergl. § 4.

Zu II:  $\cos a = \frac{EM}{MD}$ ,  $\cos b = \frac{MD}{AM}$ , also  $\cos a \cdot \cos b = \frac{EM}{AM} = \cos c$ .

Zu III:  $\cos \beta = \cos AED = \frac{DE}{AE} = \frac{ME \tan a}{ME \tan c} = \frac{\tan a}{\tan c}$ .

Zu IV:  $\tan \beta = \frac{AD}{DE} = \frac{DM \tan b}{DM \sin a} = \frac{\tan b}{\sin a}$  etc.

Aehnlich ist der Beweis zu V zu führen. Es folgt dann VI aus II, III und V.

§ 3.

**Schiefwinklig sphärisches Dreieck.**

In jedem sphärischen Dreiecke gelten die beiden Sätze:

I Sinussatz:  $\sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin C$ . (7)

II Cosinussatz:  $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$ . (8)

Beweis:

Zu I: Der grösste Kugelkreis  $CD = h$  (Fig. 2 a u. b) sei  $\perp AB$ .

Nach § 2, I ist  $\sin h = \sin b \cdot \sin a = \sin a \sin \beta$ ,

folglich:  $\sin a : \sin b = \sin a : \sin \beta$  etc.

Zu II: Im Folgenden gelten die oberen Vorzeichen für Fig. 2a, die unteren für Fig. 2b. Nach § 2 II ist:

$$\cos a = \cos h \cdot \cos q = \cos h \cdot \cos(c \mp p)$$

oder 1)  $\cos a = \cos h \cdot \cos c \cdot \cos p \pm \cos h \sin c \cdot \sin p$ .

Ferner ist nach § 2 II

2)  $\cos h \cos p = \cos b$ , oder mit  $\tan p = \tan b (\pm \cos a)$  multiplicirt:

$$\cos h \cdot \sin p = \cos b \cdot \tan b (\pm \cos a)$$

oder:

3)  $\cos h \sin p = \pm \sin b \cdot \cos a$ .

Durch Einsetzen von 2) und 3) in 1) erhält man:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos a$$

Folgerung:

$$\cos a = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \quad (8a)$$

§ 4.

**Flächeninhalt des sphär. Dreiecks. Sphärischer Excess.**

1) **Erklärung:** Der zwischen den Halbperipherien zweier sich schneidenden grösster Kugelkreise liegende Theil der Kugeloberfläche heisst **Kugelstreifen**. Derselbe verhält sich zur ganzen Kugeloberfläche wie sein Winkel zu  $360^\circ$ .

Unter dem **sphärischen Excess** versteht man den Ueberschuss der Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks über  $180^\circ$ , — vergl. die Anmerkung zu § 1.

2) **Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks.** Verlängert man (Fig. 3) die Seiten  $AB$  und  $AC$  des sphär. Dreiecks  $ABC$  über  $B$  und  $C$  hinaus, so schneiden sie sich im Endpunkte  $D$  des Durchmessers  $AD$ . Es ist dann  $\triangle AEF = \triangle CBD$ , wegen Gleichheit der Seiten\*). Ferner ist die Summe der Streifen mit den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ :

\*) Die Gleichheit der Seiten ergibt sich daraus, dass dieselben gemeinschaftliche Ergänzungen zum Halbkreise haben, z. B.  $FE + EC = \text{Halbkreis}$ ,  $BC + EC = \text{Halbkreis}$ , also  $FE = BC$ .

$\text{strf } \alpha + \text{strf } \beta + \text{strf } \gamma = \text{Halbkugel} + 2 \triangle A B C$   
 oder, da die Halbkugel =  $\text{strf } 180^\circ$ :

$$\triangle A B C = \frac{\text{strf } (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ)}{2}$$

oder wenn E den sphärischen Excess bezeichnet:

$$\triangle A B C = \frac{\text{strf } E}{2}$$

Ist E in Graden ausgedrückt, so ist  $\text{strf. } \frac{E}{2} = E \times \frac{\text{Kugeloberfl.}}{2 \times 360} = \frac{4 r^2 \pi E}{4 \times 180}$   
 $= \frac{r^2 \pi E}{180}$ , also

$$\triangle = \frac{r^2 \pi E}{180} \quad (9)$$

3) **Sphärischer Excess.** Aus (9) folgt, wenn nunmehr der Flächeninhalt des Dreiecks = F gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} E^0 &= \frac{180}{\pi} \cdot \frac{F}{r^2} \\ \text{oder in Sekunden:} \\ E'' &= \frac{648000}{\pi} \cdot \frac{F}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

## II. Analytische Geometrie.

### § 5.

#### Rechtwinklige Coordinaten.

Sind zwei rechtwinklig sich schneidende Gerade ihrer Lage nach gegeben, so ist jeder Punkt, (P Fig. 4), zwischen denselben seiner Lage nach bekannt, wenn seine Abstände y und x von den beiden Geraden (Axen) gegeben sind. Da jedoch 4 Quadranten vorhanden, so entsteht in Bezug auf den Punkt P eine Vierdeutigkeit, die dadurch beseitigt wird, dass man den Abständen y und x, (Coordinaten), bestimmte Vorzeichen beilegt, wie aus Fig. erhellt. Beispielsweise liegt der Punkt P mit den Coordinaten + y und - x, ( $P_{+y-x}$ ) im II. Quadranten.

Der Abstand y heisst Ordinate, x Abscisse. Die gegebenen Coordinatenachsen heissen Abscissenaxe (X Axe) und Ordinatenaxe, (Y Axe), ihr Schnittpunkt 0 heisst Coordinatennullpunkt.

### § 6.

#### Polarcoordinaten.

Ist die Entfernung  $OP = s$  und der Winkel  $XOP = a$  gegeben, so ist der Punkt P ebenfalls bestimmt. Die Vierdeutigkeit in Bezug auf die Quadranten fällt hier fort. Die den Punkt P bestimmenden Elemente (s und a) heissen Polarcoordinaten. Aus ihnen lassen sich die rechtwinkligen Coordinaten (Orthogonalcoordinaten) leicht herleiten, denn es ist:

$$y = s \sin a, \quad x = s \cos a. \quad (11)$$

§ 7.

**Gleichung einer Linie.**

Hat man eine Gleichung mit zwei Unbekannten,  $y$  und  $x$ , so erhält man aus derselben für  $y$  verschiedene Werthe, wenn man für  $x$  nach und nach verschiedene Werthe einsetzt und die Gleichung nach  $y$  auflöst. Es ist also  $y$  eine von  $x$  abhängige Grösse, eine „Funktion von  $x$ “, ( $y = f(x)$ ). Fasst man  $y$  und  $x$  als Coordinaten auf, construirt die den verschiedenen Werthen, welche man für  $x$  angenommen und für  $y$  berechnet hat, entsprechenden Punkte, indem man die Grössen  $x$  der Reihe nach vom Durchschnittspunkt zweier rechtwinklig sich schneidenden Graden aus auf einer dieser Beiden Linien, ( $x$  Axe), abträgt, und in den so gewonnenen Punkten Senkrechte gleich den zugehörigen  $y$  errichtet, so gehören alle die so construirten Punkte einer Linie (Kurve) an, deren Verlauf von der Form der Gleichung  $y = f(x)$  abhängt. Die Gleichung  $y = f(x)$  heisst die Gleichung dieser Kurve. Haben wir z. B. die Gleichung  $y = ax$ , setzen in dieselbe für  $x$  der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3 . . . ein, so erhalten wir die zugehörigen Werthe für  $y = a, 2a, 3a . . .$ . Tragen wir die Werthe 1, 2, 3 . . . vom Nullpunkte aus auf der  $x$  Axe ab, errichten in den so erhaltenen Punkten dieser Axe Senkrechte  $= a, 2a, 3a . . .$ , so gehören die Endpunkte dieser Senkrechten sämtlich einer graden Linie an, welche durch den Nullpunkt des Coordinatensystems geht, wie man leicht einsieht. Die Gleichung  $y = ax$  ist also die Gleichung einer Geraden, welche die beiden Axen im Nullpunkte schneidet.

§ 8.

**Gleichung der Geraden.**

Die Gleichung einer Geraden, welche die Abscissenaxe im Punkte A (Fig. 5) unter dem Winkel  $\alpha$  schneidet, ist, wenn  $c$  den Abstand des Punktes A vom Nullpunkte, (d. h. die Abscisse des Punktes A) bezeichnet:

$$y = (x - c) \operatorname{tang} \alpha$$

denn diese Gleichung gilt für jeden beliebigen Punkt P der Geraden AP. Für  $\operatorname{tang} \alpha = a$  lautet dieselbe:

$$y = (x - c) a$$

oder für  $-a \cdot c = b$ :

$$y = ax + b. \tag{12}$$

Jede Gleichung von der Form  $y = ax + b$  stellt eine grade Linie dar. Die Grösse  $b = -ac = -c \operatorname{tang} \alpha$  bedeutet den Abstand des Punktes B, in welchem die Gerade die Ordinatenaxe schneidet, vom Nullpunkte 0. Wäre  $c$  negativ, läge also A in Fig. 5 links von 0, so wäre  $b = -ac$  positiv, der Durchschnitt B würde also oberhalb 0 zu liegen kommen.

§ 9.

**Schnittpunkt zweier Linien.**

Hat man für 2 sich schneidende Linien deren Gleichungen:

$$y_1 = a_1 x_1 + b_1$$

$$y_2 = a_2 x_2 + b_2$$

so wird für den Durchschnittspunkt offenbar  $y_1 = y_2, x_1 = x_2$  sein. Setzen wir

$y_1 = y_2 = y$ ,  $x_1 = x_2 = x$ , so erhalten wir die Coordinaten für den Schnittpunkt beider Linien aus den zwei Gleichungen:

$$y = a_1 x + b_1$$

$$y = a_2 x + b_2$$

welche nach  $x$  und  $y$  aufzulösen sind.

§ 10.

**Umformung der Coordinaten.**

Gegeben seien die Coordinaten eines Punktes  $P$ , Fig. 6, bezogen auf das Coordinatensystem  $0'Y'$ ,  $0'X'$ , gesucht die Coordinaten desselben Punktes, bezogen auf das System  $0Y$ ,  $0X$ . Die Neigung der Abscissenaxen beider Systeme zu einander sei  $\alpha$ , die Coordinaten des Punktes  $0'$ , bezogen auf das System  $0Y$ ,  $0x$  seien  $a$ , (Abscisse), und  $b$ , (Ordinate), so ist:

$$x = OS - QS = a + 0'R - Q'T$$

$$x = a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$\text{und analog } y = b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \quad (13)$$

§ 11.

**Gleichung des Kreises.**

Ist der Kreismittelpunkt Nullpunkt des Coordinatensystems, so ergibt sich als Gleichung des Kreises ohne Weiteres: — vergl. Fig. 7a:

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad (14)$$

**(Mittelpunktsgleichung.)** Liegt dagegen der Nullpunkt in einem Endpunkte des Durchmessers, und betrachtet man diesen als Abscissenaxe, die Tangente im Nullpunkte als Coordinatenaxe, Fig. 7b), so ergibt sich die **Scheitelgleichung**:

$$y^2 = r^2 - (r - x)^2$$

$$= 2rx - x^2$$

$$y = \sqrt{2rx - x^2} \quad (14a)$$

Die Zweideutigkeit des Wurzelzeichens deutet an, dass die Ordinaten positiv und negativ, d. h. zu beiden Seiten der Abscissenaxe liegen können. Da der Wurzel Ausdruck rechts allein steht, so sind die beiden aus dem Ausdrucke rechts sich ergebenden Werthe für  $y$  ihrem absoluten Werthe nach gleich, nur dem Vorzeichen nach verschieden, womit angedeutet ist, dass zu einer Abscisse zwei gleiche, nur dem Vorzeichen nach verschiedene Ordinaten gehören.

Da es ganz gleichgültig ist, welche der beiden Axen man als  $X$ axe und welche man als  $Y$ axe ansehen will, so kann man die letztere Gleichung auch schreiben:

$$x = \sqrt{2ry - y^2} \quad (14b)$$

§ 12.

**Die Ellipse.**

Die Ellipse ist eine Kurve, in welcher die Summe der Abstände jedes beliebigen Kurvenpunktes von zwei festen Punkten  $F$  und  $F'$  (Brennpunkten), constant ist, also z. B. in Fig. 8  $NF' + NF = PF' + PF$ .

$PF'$  und  $PF$  heissen radii vectores,  $MM'$ , der Lage nach bestimmt durch die Brennpunkte  $F$  und  $F'$ , heisst die grosse Axe, ihr Halbirungspunkt  $A$  der Mittelpunkt, die in  $A$  errichtete Senkrechte  $NN'$  die kleine Axe der Ellipse. Der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte heisst die Excentricität. Die doppelte

Ordinate in einem der Brennpunkte, bezogen auf die grosse Axe als Abscissenaxe, der Parameter der Ellipse.

Bezeichnen  $a$  die halbe grosse,  $b$  die halbe kleine Axe,  $e$  die Excentricität,  $z$  und  $z'$  die Radien vectoren, so folgt aus der Grundeigenschaft der Ellipse ohne Weiteres:

$$\left. \begin{array}{l} 1) z + z' = 2a. \\ 2) e = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ (da } FN = a). \end{array} \right\} \quad (15)$$

§ 13.

**Mittelpunktsgleichung der Ellipse.**

Es ist (Fig. 8):

$$z = \sqrt{y^2 + (e - x)^2}$$

$$z' = \sqrt{y^2 + (e + x)^2}$$

also  $z + z'$ , d. i. nach (15)  $2a = \sqrt{y^2 + (e - x)^2} + \sqrt{y^2 + (e + x)^2}$ .

$$2a - \sqrt{y^2 + (e - x)^2} = \sqrt{y^2 + (e + x)^2}$$

oder wenn wir quadriren:

$$4a^2 + y^2 + e^2 + x^2 - 2ex - 4a\sqrt{y^2 + (e - x)^2} = y^2 + e^2 + x^2 + 2ex.$$

oder:  $a^2 - ex = a\sqrt{y^2 + (e - x)^2}$ .

und wenn wir nochmals quadriren:

$$a^4 - e^2x^2 - 2a^2ex = a^2y^2 + a^2e^2 + a^2x^2 - 2a^2ex$$

oder  $a^2(a^2 - e^2) = a^2y^2 + (a^2 - e^2)x^2$

oder, da  $a^2 - e^2 = b^2$ , nach (15):

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2. \quad (16)$$

§ 14.

**Scheiteltgleichung der Ellipse.**

Verlegt man den Coordinatennullpunkt an einen Endpunkt der grossen Axe, so ändern sich nur die Abscissen um die grosse Halbaxe, während die Ordinaten unverändert bleiben. Die Mittelpunktsgleichung geht daher, indem man statt  $x$  den Werth  $(x - a)$  setzt, über in:

$$a^2y^2 = b^2(2ax - x^2). \quad (16a)$$

Das doppelte Vorzeichen, welches sich aus dieser quadratischen Gleichung für  $y$  ergibt, deutet an, dass für jede Abscisse zwei dem absoluten Werthe nach gleiche, nur dem Vorzeichen nach verschiedene Ordinaten existiren. Die Kurve liegt also zu beiden Seiten der Abscissenaxe.

**Zusatz.** Für  $b = a$  gehen die Gleichungen der Ellipse in die des Kreises über. Dieser ist also eine Ellipse, deren Excentricität = 0. (Vergl. 14a.)

§ 15.

**Parabel. Gleichung derselben.**

Mit dem Namen Parabel bezeichnet man eine Kurve, in welcher jeder Punkt von einem gegebenen Punkte (Brennpunkt) und einer gegebenen Geraden (Leitlinie, Direktrix) gleiche Abstände hat. (Fig. 9.)  $BP = PF$ .

Liegt der Coordinatennullpunkt im Scheitel  $A$ , so ist für den Punkt  $P$   $AQ = x$ ,  $PQ = y$ .

Nach der charakteristischen Eigenschaft der Parabel ist, wenn  $p$  den Abstand des Brennpunktes von der Direktrix bezeichnet:

$$\begin{aligned}
 & 1) AF = \frac{1}{2}p. \\
 & 2) PF = BP = FQ + p. \\
 \text{ferner} \quad & y^2 = PF^2 - FQ^2 \\
 & = (FQ + p)^2 - FQ^2 = p^2 + 2FQ \cdot p. \\
 & = p^2 + 2(x - \frac{1}{2}p)p \\
 \text{oder:} \quad & y^2 = 2px. \tag{17}
 \end{aligned}$$

**Parameter:** Die Abscisse des Brennpunktes ist  $= \frac{1}{2}p$ , daher die zugehörige Ordinate, d. h. der halbe Parameter der Parabel nach (17):  $y^2 = p^2$ , also  $y = p$ , also der Parameter, (d. i.  $2y$ )  $= 2p$ .

§ 16.

**Hyperbel. Gleichung derselben.**

Die Hyperbel ist eine Kurve von der Eigenschaft, dass die Differenz der Abstände (radii vectores) jedes ihrer Punkte von zwei festen Punkten, (Brennpunkten), constant ist.

In Fig. 10 ist also für jeden beliebigen Punkt P der Kurve  $F'P - FP$  constant. Wir setzen dieselbe  $= 2a$ .

Nehmen wir  $FF'$  als Abscissenaxe, die in ihrem Halbirungspunkt A errichtete Senkrechte als Ordinatenaxe, dann ist, wenn  $FF' = e$  gesetzt wird, analog § 13:

$$\begin{aligned}
 PF' - PF &= 2a = \sqrt{y^2 + (x + e)^2} - \sqrt{y^2 + (x - e)^2} \\
 2a + \sqrt{y^2 + (x - e)^2} &= \sqrt{y^2 + (x + e)^2}.
 \end{aligned}$$

woraus sich ergibt: (analog § 13)

$$a^2 y^2 - (e^2 - a^2) x^2 = -a^2 (e^2 - a^2)$$

und wenn man  $e^2 - a^2 = b^2$  setzt:

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$$

$$\text{oder} \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \tag{18}$$

Für  $x = a$  wird  $y = 0$ , der Punkt P liegt also für  $x = a$  in der Abscissenaxe, die Kurve schneidet also die Abscissenaxe in der Entfernung a vom Coordinatennullpunkte. Dieser Durchschnittspunkt ist der der Coordinatenaxe nächste Punkt der Kurve, denn für  $x < a$  wird die Wurzel imaginär. Für  $x = -a$  wird  $y$  ebenfalls  $= 0$ , mithin wird die Abscissenaxe in ihrem negativen Theile ebenfalls von der Kurve geschnitten, diese besteht also aus zwei getrennten Theilen. Die Entfernung der beiden Punkte M und M' ist  $= 2a$ .

Wir werden dieses Capitel im Abschnitt IV mit Anwendung der im nächsten Abschnitt III zu behandelnden Differentialrechnung fortsetzen.

### III. Differentialrechnung.

§ 17.

**Erläuterungen.**

Bedeutet  $y = f(x)$  dass y eine Funktion von x sei, wobei wir uns also unter  $f(x)$  irgend einen Ausdruck, in welchem x in irgend einer Verbindung vorkommt, zu denken haben, (vergl. Abschn. II § 7), so wird, sobald man x um eine gewisse

Grösse ändert, auch  $y$  eine Aenderung erleiden. Bezeichnen wir die Grössen, um welche  $x$  und  $y$  sich ändern, mit  $\Delta x$  und  $\Delta y$ , so ist:

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= f(x + \Delta x) \\ \Delta y &= f(x + \Delta x) - y \\ \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \end{aligned}$$

und das Verhältniss der Aenderungen (Differenzen genannt)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (19)$$

Das Verhältniss  $\Delta y : \Delta x$  heisst Differenzenquotient. Je mehr sich die Differenzen  $\Delta y$  und  $\Delta x$  der Null nähern, um so mehr nähert sich der Bruch  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  einem ganz bestimmten Werthe, und geht in diesen über, sobald  $\Delta y$  und  $\Delta x$  der Null gleich werden.

Hat man z. B. die Funktion:

$$y = ax^2$$

so ist 
$$\begin{aligned} y + \Delta y &= a(x + \Delta x)^2 \\ &= ax^2 + 2ax\Delta x + a\Delta x^2 \\ \Delta y &= 2ax\Delta x + a\Delta x^2 \end{aligned}$$

also 
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x.$$

Je mehr nun  $\Delta x$  sich der Null nähert, um so mehr nähert sich  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  der Grenze  $2ax$ , und geht in diese über, sobald  $\Delta x$  in Null übergeht.

Sind die Differenzen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  unendlich klein, so nennt man sie Differentiale und bezeichnet sie mit  $dx$  und  $dy$ . Das Symbol  $\frac{dy}{dx}$  liest man „Differentialquotient“ von  $y$  nach  $x$ . Die Grösse  $x$  heisst die „Veränderliche“ der Funktion  $f(x)$ .

Unter dem Differentialquotienten einer Funktion nach ihrer Veränderlichen versteht man also nach Obigen die Grenze, welcher der Differenzenquotient  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  sich ohne Ende nähert, wenn man die Aenderung  $\Delta x$  sich der Null nähern lässt. Der Differentialquotient nimmt zwar die unbestimmte Form  $\frac{0}{0}$  an, hat aber, wie obiges Beispiel zeigt, doch einen ganz bestimmten Werth.

Beispiele:

1) Ist  $y = ax + b$ , so ist  $y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$   
 $= ax + a\Delta x + b$ , folglich  $\Delta y = a\Delta x$ , also  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ , für jeden beliebigen

Werth der Aenderung  $\Delta x$ , mithin auch  $\frac{dy}{dx} = a$ , d. i.  $\frac{d(ax + b)}{dx} = a$ .

2) Für  $y = a + x$  findet man auf demselben Wege  $\frac{dy}{dx}$ , d. i.  $\frac{d(a + x)}{dx} = 1$ .

3) Ist  $y = a - x$ , so ist  $\frac{dy}{dx} = -1$ .

4)  $\therefore y = \pm x$ , so ist  $\frac{dy}{dx} = \pm 1$ .

5) Ist  $y = a x$ , so ist  $\frac{d y}{d x} = a$ .

6) Für  $y = \frac{a}{x}$  ist  $\frac{d y}{d x}$ , d. i.  $\frac{d a}{d x} = -\frac{a}{x^2}$ .

7) „  $y = \frac{x}{a}$  „  $\frac{d y}{d x}$ , d. i.  $\frac{d x}{d x} = \frac{1}{a}$ .

Wir fügen hierzu unser obiges Beispiel:

8) Für  $y = a x^2$  ist  $\frac{d y}{d x}$ , d. i.  $\frac{d a x^2}{d x} = 2 a x$ .

§ 18.

**Differentiation der Summe zweier Funktionen.**

Hat man  $y = f(x) + \varphi(x)$   
 so ist  $y + \Delta y = f(x + \Delta x) + \varphi(x + \Delta x)$   
 $\Delta y = f(x + \Delta x) + \varphi(x + \Delta x) - [f(x) + \varphi(x)]$   
 $= f(x + \Delta x) - f(x) + [\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)]$   
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$

oder nach (19)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x}$

oder wenn man zur Grenze übergeht:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{d f(x)}{d x} + \frac{d \varphi(x)}{d x}. \quad (20)$$

D. h. der Differentialquotient der Summe zweier Funktionen ist gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Funktionen.

Beispiel: Ist  $y = a x^2 + b x$ , so ist nach diesem Satze  $\frac{d y}{d x} = \frac{d a x^2}{d x} + \frac{d b x}{d x}$ . Nach § 17, Beispiel 8, ist  $\frac{d a x^2}{d x} = 2 a x$ , und nach Beispiel 5:  $\frac{d b x}{d x} = b$ , folglich  $\frac{d y}{d x}$  d. i.  $\frac{d (a x^2 + b x)}{d x} = 2 a x + b$ .

Aufgabe: Um wieviel ändert sich die Funktion  $y = a x^2 + b x$ , wenn  $x$  um den kleinen Betrag  $d x$  geändert wird?

Nach obigem Beispiel ist:  $\frac{d y}{d x} = 2 a x + b$ , also  $d y = (2 a x + b) d x$ .

Man findet also die Aenderung der Funktion, indem man die Aenderung der Variablen mit dem Differentialquotienten der Funktion multipliziert.

Zusatz: Für  $y = a + x$  ist nach obigem Satze:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{d a}{d x} + \frac{d x}{d x}$$

Nach § 17, Beispiel 2, ist

$$\frac{d (a + x)}{d x} = 1$$

folglich  $\frac{d a}{d x} + \frac{d x}{d x} = 1$

$$\frac{d a}{d x} + 1 = 1$$

folglich  $\frac{d a}{d x} = 0$ .

D. h. der Differentialquotient einer Constanten ist = 0. Dies folgt auch schon daraus, dass bei einer Constanten von einer Aenderung keine Rede sein kann, mithin  $da = 0$  sein muss.

§ 19.

**Differentiation der Differenz zweier Funktionen.**

Man erhält ganz analog § 18 den Satz:

Der Differentialquotient der Differenz zweier Funktionen ist gleich der Differenz der Differentialquotienten der einzelnen Funktionen, also

$$\frac{d [f(x) - \varphi(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} - \frac{d\varphi(x)}{dx}. \quad (21)$$

§ 20.

**Differentiation des Produkts zweier Funktionen.**

1) Ist  $y = f(x) \cdot \varphi(x)$

so ist  $\Delta y = f(x + \Delta x) \cdot \varphi(x + \Delta x) - f(x) \cdot \varphi(x)$

oder wenn man rechts  $f(x + \Delta x) \varphi(x)$  erst addirt und wieder subtrahirt:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) \varphi(x) - f(x) \varphi(x) + f(x + \Delta x) \varphi(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \varphi(x) \\ &= \varphi(x) [f(x + \Delta x) - f(x)] + f(x + \Delta x) [\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)] \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x + \Delta x) \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

oder wenn wir zur Grenze übergehen:

$$\frac{dy}{dx} \text{ d. i. } \frac{df(x) \varphi(x)}{dx} = \varphi(x) \frac{df(x)}{dx} + f(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (22)$$

D. h. Der Differentialquotient des Produkts zweier Funktionen ist gleich der Summe der Produkte aus jeder Funktion in den Differentialquotienten der anderen.

In anderer Schreibweise lautet die Gleichung:

$$d(f(x) \varphi(x)) = \varphi(x) df(x) + f(x) \cdot d\varphi(x). \quad (22a)$$

Folgerung:  $d(af(x)) = a df(x) + f(x) da$ , oder, da  $da = 0$  (§ 18 Zusatz):  $d(af(x)) = a df(x)$ .

2) Ist ein Produkt von mehreren Faktoren zu differenzieren, z. B.  $y = u \cdot v \cdot w$ , worin  $u, v, w$  Funktionen von  $x$  bezeichnen sollen, so ist nach 1)

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot w \frac{du}{dx} + u \frac{d(v \cdot w)}{dx}$$

oder da  $\frac{d(v \cdot w)}{dx} = v \frac{dw}{dx} + w \frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} \text{ d. i. } \frac{d(uvw)}{dx} = vw \frac{du}{dx} + uw \frac{dv}{dx} + uv \frac{dw}{dx} \quad (22b)$$

oder auch 
$$\frac{d(uvw)}{dx} = \frac{d(uvw)}{uvw} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}. \quad (22c)$$

§ 21.

**Differentiation des Quotienten zweier Funktionen.**

Sei  $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$

so ist  $y \varphi(x) = f(x)$

folglich 
$$\frac{d f(x)}{d x} = y \frac{d \varphi(x)}{d x} + \varphi(x) \frac{d y}{d x} \quad (\text{nach } \S 20)$$

$$= \frac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{d \varphi(x)}{d x} + \varphi(x) \frac{d y}{d x}$$

also 
$$\varphi(x) \frac{d f(x)}{d x} = f(x) \frac{d \varphi(x)}{d x} + [\varphi(x)]^2 \frac{d y}{d x}$$

woraus folgt:

$$\frac{d y}{d x} \text{ d. i. } \frac{d \frac{f(x)}{\varphi(x)}}{d x} = \frac{\varphi(x) \frac{d f(x)}{d x} - f(x) \frac{d \varphi(x)}{d x}}{[\varphi(x)]^2} \quad (23)$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\frac{d \frac{f(x)}{\varphi(x)}}{\varphi(x)} = \frac{\varphi(x) d f(x) - f(x) d \varphi(x)}{[\varphi(x)]^2} \quad (23a)$$

D. h. das Differential eines Quotienten ist gleich dem Produkt aus dem Differential des Zählers in den Nenner, vermindert um das Produkt aus dem Differential des Nenners in den Zähler und dividirt durch das Quadrat des Nenners.

Ist der Zähler constant, so hat man:

$$\frac{d \frac{a}{f(x)}}{d x} = - \frac{a \frac{d f(x)}{d x}}{[f(x)]^2}$$

Ist  $f(x)$  gleich  $x$ , so hat man also:

$$\frac{d \frac{a}{x}}{d x} = - \frac{a}{x^2} \quad (\text{vergl. } \S 17, \text{ Beispiel 6}). \quad (24)$$

Ist der Nenner constant, so erhält man für  $f(x) = x$ :

$$\frac{d \frac{x}{a}}{d x} = \frac{1}{a}, \quad (\text{vergl. } \S 17, \text{ Beispiel 7}). \quad (25)$$

### § 22.

#### Differentiation der Potenz zweier Funktionen.

1) Sei  $y = [f(x)]^n = f(x) f(x) f(x) \dots n \text{ mal.}$ , so ist nach 22c

$$\begin{aligned} \frac{d y}{d x} &= \frac{d [f(x)]^n}{d x} = \frac{d f(x)}{d x} \frac{d [f(x)]^{n-1}}{d x} + \dots \\ &= \frac{d f(x)}{d x} \frac{d [f(x)]^{n-1}}{d x} + \dots \\ &= n \frac{d f(x)}{d x} [f(x)]^{n-1} \end{aligned}$$

folglich 
$$\frac{d [f(x)]^n}{d x} = n [f(x)]^{n-1} \frac{d f(x)}{d x} \quad (26)$$

oder in anderer Schreibweise:

$$d [f(x)]^n = n [f(x)]^{n-1} d f(x) \quad (26a)$$

Beispiel: Nach (22) ist  $\frac{d (ax)^2}{d x} = 2ax \cdot a = 2a^2x$ .

\*) Bei der Ableitung dieser Formel ist ein positives ganzes  $n$  vorausgesetzt. Dass die Formel auch für ein negatives und gebrochenes  $n$  gilt, lässt sich zeigen, indem man  $y^{-n} = \frac{1}{y^n}$  setzt, bezw. wenn man statt  $y = [f(x)]^q$  schreibt  $y^q = [f(x)]^p$  und hierauf Formel (26) anwendet, mit welcher Andeutung wir uns hier begnügen wollen.

Aufgabe: Um wieviel ändert sich die Hypotenuse  $y$  eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Catheten  $a$  und  $x$ , wenn sich die Cathete  $x$  um den sehr kleinen Betrag  $dx$  ändert?

Es ist  $y^2 = a^2 + x^2$ , also nach § 18  
 $dy^2 = da^2 + dx^2$ , oder nach § 18 Zusatz und (26a):  
 $2y dy = 2x dx$

$$dy = \frac{x}{y} dx = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx.$$

2) Obige Gleichungen (26) und (26a) finden auch Anwendung bei der Differentiation einer Wurzel, denn es ist

$$\sqrt[n]{f(x)} = f(x)^{\frac{1}{n}}. \quad \text{Danach ist z. B. } \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

oder 
$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (27)$$

§ 23.

### Funktion einer Funktion.

Hat man  $z = f(y)$   
 $y = \varphi(x)$

so ist auch  $z$  eine Funktion von  $x$ , und es kann die Aufgabe entstehen,  $z$  nach  $x$  zu differenzieren. Setzen wir

$$z = F(x)$$

so werden bei einer Aenderung von  $x$  um  $\Delta x$  gleichzeitig  $z$  und  $y$  sich ändern, und man hat:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(y + \Delta y) - f(y) \\ \Delta y &= \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) \end{aligned}$$

also 
$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y}$$

und 
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

mithin 
$$\frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

oder 
$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

und wenn man zur Grenze übergeht:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (28)$$

Von dieser Formel kann man häufig Gebrauch machen, um sich die Operation des Differenzierens zu erleichtern.

Beispiel 1:  $y = (a + bx)^2$ . Setzt man  $a + bx = z$ , also  $y = z^2$ , so ist  $\frac{dy}{dz} = 2z$ ,  $\frac{dz}{dx} = b$ ,  
 also  $\frac{dy}{dx} = 2bz = 2b(a + bx)$ .

Beispiel 2:  $y = \frac{1}{\sqrt{a - bx}}$ . Setzt man  $a - bx = z$ , also  $y = z^{-\frac{1}{2}}$ , so ist  $\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}$ ,  
 $\frac{dz}{dx} = -b$ , also  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{b}{2\sqrt{z^3}}$ .

§ 24.

**Funktionen zwischen zwei Veränderlichen.**

Hat man eine von zwei Veränderlichen abhängige Funktion

$$z = f(x, y)$$

so ist:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

oder für  $x + \Delta x = x_1$ ,  $y + \Delta y = y_1$ :

$$\Delta z = f(x_1, y_1) - f(x, y)$$

oder wenn man rechts  $f(x, y_1)$  erst subtrahirt und dann addirt:

$$\Delta z = \frac{f(x_1, y_1) - f(x, y_1)}{\Delta x} \cdot \Delta x + \frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \Delta y.$$

Je mehr sich nun  $\Delta y$  der Null nähert, um so mehr nähert sich  $y_1$  der Grenze  $y$ . Beim Uebergange zur Grenze wird also  $y_1$  in  $y$  übergehen. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man schon vor dem Uebergange zur Grenze  $y$  für  $y_1$  setzt, dann aber beim Uebergange  $y$  als Constante betrachtet, so dass es als solche beim Uebergange unverändert bleibt. Wir werden daher statt des Ausdrucks  $\frac{f(x_1, y_1) - f(x, y_1)}{\Delta x}$  den Differenzenquotienten  $\frac{f(x_1, y) - f(x, y)}{\Delta x}$  zur Grenze überführen und dabei  $y$  als Constante betrachten. Ebenso können wir im zweiten Gliede rechts  $x$  als Constante betrachten, und erhalten somit beim Uebergange zur Grenze:

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot dy. \quad (29)$$

D. h. um das Differential  $dz$  der Funktion zu erhalten, differentiirt man dieselbe erst nach  $x$ , indem man  $y$  als Constante betrachtet, sodann nach  $y$ , indem man  $x$  als Constante betrachtet. Mit den so erhaltenen Differentialquotienten multiplicirt man die Differentiale der Veränderlichen und addirt die Produkte. Die so gebildeten Differentialquotienten heissen **partielle** Differentialquotienten und werden als solche symbolisch durch ein rundes  $\partial$  bezeichnet. Die Ausdrücke  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx$  und  $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$  heissen **partielle** Differentiale von  $z$  nach  $x$  und  $y$ . Das vollständige Differential  $dz$  ist also gleich der Summe der partiellen Differentiale nach den einzelnen Veränderlichen.

§ 25.

**Unentwickelte Funktionen.**

Ist eine Funktion noch unentwickelt, ist z. B.  $y$  nicht in der Form  $y = f(x)$ , sondern in der noch unentwickelten Form  $f(x, y) = 0$  gegeben, in welcher uns also der Werth von  $y$  noch unbekannt ist, so ist zwar  $y$  gleichwohl eine Funktion von  $x$ , doch gestaltet sich die Operation des Differentiirens in diesem Falle etwas anders. Ist  $0 = f(x, y)$ , so ist nach (29)

$$d0, \text{ d. i. } 0 = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot dy$$

woraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}} \quad (30)$$

D. h. man differentiirt unentwickelte Funktionen, indem man dieselben partiell erst nach  $x$  und dann nach  $y$  differentiirt und die partiellen Differentialquotienten nach obiger Formel zusammensetzt.

Beispiel:  $f(x, y) = ax^2 + by + c = 0$ . 1)  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2ax$ . 2)  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = b$ ,  
 also  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2ax}{b}$ .

Von obiger Formel (30) macht man häufig Gebrauch, um in der entwickelten Form vorkommende Wurzeln etc. zu vermeiden.

Beispiel:  $y = x\sqrt{x}$ , also  $y^2 - x^3 = 0$ .

1)  $\frac{df(x, y)}{dx} = -3x^2$  2)  $\frac{df(x, y)}{dy} = 2y$ , also  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$ .

**Beispiele zur Uebung in der Anwendung der bisherigen Paragraphen.**

1)  $y = x\sqrt{1+x}$ .  $\frac{dy}{dx} = x \frac{d\sqrt{1+x}}{dx} + \sqrt{1+x} \cdot \frac{dx}{dx} = x \times \frac{1}{2} (1+x)^{-\frac{1}{2}} \frac{d(1+x)}{dx} + \sqrt{1+x} \times 1$   
 $= \frac{x}{2\sqrt{1+x}} \times 1 + \sqrt{1+x} = \frac{2+3x}{2\sqrt{1+x}}$ , oder einfacher nach § 25:

2)  $y = \frac{a}{x}\sqrt{a^2+x^2}$   $\frac{dy}{dx} = -\frac{a^3}{x^2 + \sqrt{a^2+x^2}}$  4)  $y = \frac{1-x}{1+x}$   $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1+x^2}$

3)  $y = (a^2+x^2)(a^2-x^2)$   $\frac{dy}{dx} = -4x^3$  5)  $y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$   $\frac{dy}{dx} = \frac{2+x}{2\sqrt{(1+x)^3}}$

6)  $y^2 = ax - x^2$ . Setzt man a)  $y^2 = z$ , so ist b)  $z = ax - x^2$ , also  $\frac{dz}{dx} = a - 2x$ , oder da nach  
 a)  $dz = 2y dy$ , so ist:  $2y \frac{dy}{dx} = a - 2x$ , also  $\frac{dy}{dx} = \frac{a-2x}{2y} = \frac{a-2x}{2(ax-x^2)}$

7)  $a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2$ . Es ist:  $a^2 2y dy = -b^2 2x dx$ , also  $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ .

8)  $z^2 = x^2 + y^2$ . Hier kommt § 24 in Betracht. Es ist  $2z dz = 2x dx + 2y dy$   
 also  $dz = \frac{x dx + y dy}{z} = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ .

§ 26.

**Wiederholte Differentiation.**

Enthält der Differentialquotient einer Funktion von  $x$  ausser Constanten auch noch die Variable  $x$ , so ist derselbe wiederum eine Funktion von  $x$ , und man kann mit ihm die Operation des Differentiirens wiederholen. Den so erhaltenen Differentialquotienten nennen wir den 2. Differentialquotienten, (die 2. Abgeleitete). Entsprechend kann man den 3., 4. etc. Differentialquotienten bilden. Ist  $y = f(x)$ , so bezeichnet man den ersten, 2., 3. . . Differentialquotienten dieser Funktion mit  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$ , oder man braucht das Symbol  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ ,  $\frac{d^3y}{dx^3}$  . . . . Zu dieser Bezeichnung ist man auf folgende Weise gekommen:

Ist  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ , so erhält man durch Differentiation, indem man  $dx$  als Constante ansieht; (§ 21):

$$\frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{1}{dx} \cdot \frac{d(dy)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

und indem man  $\frac{d y}{d x^2}$  nochmals differentiirt, analog:

$$\frac{d \frac{d^2 y}{d x^2}}{d x} = \frac{d^3 y}{d x^3} = f'''(x).$$

Es bedarf nicht der Erwähnung, dass die Exponenten von  $d$ ,  $d^2$ ,  $d^3$  ... nur das 1., 2., 3. etc. Differential andeuten, nicht etwa Potenzen von  $d$  bezeichnen können.

Beispiel:  $y = x^n$

$$\frac{d y}{d x} = f'(x) = n x^{n-1} \text{ (vergl. § 22)}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = f^n(x) = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Alle noch höheren Differentialquotienten sind hier = 0.

§ 27.

**Mac Laurins Theorem.**

Wir denken uns  $f(x)$  in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von  $x$  entwickelt, nämlich

$$1) f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

worin  $A, B, C$  noch näher zu bestimmende Constanten bezeichnen. Verstehen wir unter  $f(0)$  denjenigen Werth von  $f(x)$ , welchen diese Funktion annimmt, wenn in derselben  $x = 0$  gesetzt wird, so ist

$$f(0) = A.$$

Durch Differentiation der Gleichung 1) erhalten wir (§ 18 u. 22):

$$2) \frac{d f(x)}{d x} = f'(x) = B + 2 Cx + 3 D x^2 + \dots$$

und hieraus für  $x = 0$

$$f'(0) = B.$$

Durch Differentiation von 2) wird erhalten

$$3) \frac{d^2 f(x)}{d x^2} = f''(x) = 2 C + 2 \cdot 3 D x + 3 \cdot 4 E x^2 + \dots$$

und hieraus für  $x = 0$

$$f''(0) = 2 C$$

und analog

$$f'''(0) = 2 \cdot 3 D$$

etc.

Mithin bestimmen sich die Coefficienten  $A, B, C \dots$  wie folgt:

$$A = f(0)$$

$$B = f'(0)$$

$$C = f''(0) \cdot \frac{1}{1 \cdot 2}$$

$$D = f'''(0) \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

wodurch aus Gl. 1) erhalten wird:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0) x}{1} + \frac{f''(0) x^2}{1 \cdot 2} + \frac{f'''(0) x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (31)$$

In Worten: Lässt sich eine Funktion von  $x$  nach aufsteigenden Potenzen von  $x$  entwickeln, so ist deren constantes Glied gleich demjenigen Werthe der Funktion, den dieselbe für  $x = 0$  annimmt, ihre Coefficienten aber gleich denjenigen Werthen des 1., 2., 3. . . Differentialquotienten, welche diese für  $x = 0$  annehmen, dividirt durch die Facultäten der aufsteigenden Zahlen von 1 ab.

Beispiel im folgenden §.

§ 28.

**Binomialreihe.**

Hat man  $f(x) = (a + x)^n$   
 so ist  $f'(x) = n(a + x)^{n-1}$   
 $f''(x) = n(n-1)(a + x)^{n-2}$   
 $\vdots$   
 $f^k(x) = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)(a + x)^{n-k}$   
 also:  $f(0) = a^n$   
 $f'(0) = n a^{n-1}$   
 $f''(0) = n(n-1) a^{n-2}$   
 $\vdots$   
 $f^k(0) = n(n-1)(n-2) \dots (n-(k+1)) a^{n-k}$

also nach (31)

$$(a + x)^n = a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2 + \frac{n(n-1) \dots (n-(k+1))}{1 \cdot 2 \dots (k-1) k} a^{n-k} x^k \quad (32)$$

die bekannte Binomialreihe.

§ 29.

**Differentiation von Exponentialgrössen.**

Wir lassen in der Funktion

$$y = a^x$$

den Exponenten  $x$  um die Grösse  $k$  wachsen und setzen

$$y_1 = a^{x+k}$$

oder

$$1) y_1 = a^x [1 + (a-1)]^k$$

oder nach (32)

$$y_1 = a^x \left\{ 1 + k(a-1) + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} (a-1)^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (a-1)^3 + \dots \right\}$$

$$= a^x \left\{ 1 + k(a-1) + \frac{k^2 - k}{1 \cdot 2} (a-1)^2 + \frac{k^3 - k^2 + 2k}{1 \cdot 2 \cdot 3} (a-1)^3 + \dots \right\}$$

$$= a^x \left\{ 1 + k(a-1) + \frac{k^2(a-1)^2}{1 \cdot 2} - \frac{k(a-1)^2}{2} + \frac{(k^3 - k^2)(a-1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k}{3} (a-1)^3 + \dots \right\}$$

Bezeichnen wir hierin die Coefficienten aller derjenigen Glieder, welche  $k$  in höherer als in der 1. Potenz enthalten, mit  $p, q, r$  etc., so lautet die Gleichung:

$$y_1 = a^x \left\{ 1 + k(a-1) + \frac{k}{2} (a-1)^2 + \frac{k}{3} (a-1)^3 - \dots + p k^2 + q k^3 + r k^4 + \dots \right\}$$

$$= a^x \left\{ 1 + \left[ (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \dots \right] k + p k^2 + q k^3 + r k^4 + \dots \right\}$$

$$= a^x + a^x \left\{ \left[ (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \dots \right] k + p k^2 + q k^3 + r k^4 + \dots \right\}$$

Subtrahirt man hiervon die Gleichung  $y = a^x$  und dividirt gleichzeitig durch  $k$ , so entsteht:

$$\frac{y_1 - y}{k} = a^x \left[ (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \dots \right] + p k + q k^2 + r k^3 + \dots$$

und wenn man zur Grenze übergeht, indem man  $k = dx = 0$  setzt:

$$2) \frac{dy}{dx} = a^x \left[ (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \dots \right]$$

oder wenn man die Klammergrösse  $= A$  setzt:

$$3) \frac{dy}{dx} \text{ d. i. } \frac{d a^x}{dx} = a^x A.$$

Da  $A$  eine Constante, so folgt hieraus ohne Weiteres:

$$3a) \begin{cases} \frac{d^2 a^x}{dx^2} = a^x A^2 = f''(x) \\ \frac{d^3 a^x}{dx^3} = a^x A^3 = f'''(x) \end{cases}$$

etc.

Um die Constante  $A$  zu bestimmen, entwickeln wir  $a^x$  nach der Mac Laurin'schen Reihe und erhalten:

$$\begin{array}{ll} f(x) = a^x & \text{also } f(0) = 1 \\ \text{und nach 3)} & f'(x) = a^x A \quad \text{also } f'(0) = A \\ & f''(x) = a^x A^2 \quad \text{also } f''(0) = A^2 \\ & \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{array}$$

$$\text{also } a^x = 1 + A x + \frac{A^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{A^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

und wenn man hierin  $x = \frac{1}{A}$  setzt:

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$\text{oder 4)} \quad a^{\frac{1}{A}} = 2,71828.$$

Diese Zahl wird allgemein mit dem Buchstaben  $e$  bezeichnet.

Nach 4) ist  $\sqrt[A]{a} = e$ , also  $a = e^A$ , folglich

$$5) A = \frac{\log a}{\log e}$$

für jede beliebige Logarithmenbasis. Nimmt man diese  $= e$ , — (natürliches Logarithmensystem), — so ist

$$A = \frac{\log_e a}{\log_e e} = \log_e a = \log \text{ nat } a \text{ (logarithmus naturalis } a)$$

$$\text{also nach 3)} \quad \frac{d a^x}{dx} = a^x \log \text{ nat } a. \quad (33)$$

Folgerung:  $\frac{d e^x}{d x} = e^x$ .

Um vom natürlichen Logarithmus auf den Logarithmus eines anderen Systems überzugehen, hat man nach 5)

$$\log \text{ nat } a = \frac{\log a}{\log e}$$

also  $\log a = \log \text{ nat } a \log e$   
oder für  $\log e = M$

$$\log a = \log \text{ nat } a \cdot M. \tag{34}$$

Für das Briggische System ist  $\log e = M = 0,4342945$ . Diese Zahl heisst der Modulus des briggischen Logarithmensystems.

§ 30.

**Differentiation logarithmischer Grössen.**

Ist  $y = \log_b x$   
so ist  $x = b^y$   
 $\frac{d x}{d y} = b^y \log \text{ nat } b$ .

$$\frac{d y}{d x} = \frac{1}{b^y \log \text{ nat } b}$$

oder da  $b^y = x$

$$\frac{d y}{d x} \text{ d. i. } \frac{d \log_b x}{d x} = \frac{1}{x \log \text{ nat } b} \tag{35}$$

Folgerung:  $\frac{d \log \text{ nat } x}{d x} = \frac{1}{x} \tag{36}$

oder  $d \log \text{ nat } x = \frac{d x}{x} \tag{37}$

Für ein beliebiges System lautet diese Gleichung, wenn M den Modulus dieses Systems bezeichnet, da nach (34)  $\log x = M \log \text{ nat } x$ :

$$d \log x = M \frac{d x}{x} \tag{38}$$

Die Aenderung des Logarithmus ist also, so lange es sich um sehr kleine Aenderungen, (Differentialle), handelt, der Aenderung der Grundzahl proportional. Hierauf beruht die Einrichtung der Interpolationstafelchen in den Logarithmentafeln.

§ 31.

**Differentiation goniometrischer Funktionen.**

1) **Analytisches Winkelmaß:** Wir haben in der Elementarmathematik einen Winkel in Graden, Min. und Sek. ausdrücken gelernt, und müssen uns nun zunächst mit einem anderen Winkelmasse bekannt machen. Wir können den zum Winkel gehörigen Bogen, wie als Bruchtheil der Peripherie, so auch, da diese zum Radius in einem constanten Verhältnisse steht, als **Bruchtheil des Radius** ansehen, d. h. wir geben als Winkelmaß die Länge des Bogens an, gemessen mit dem Radius als Masseinheit. Unter  $x = \frac{1}{100}$  verstehen wir also einen Winkel, dessen Bogen

gleich  $\frac{1}{100}$  des Radius ist. Ist der Radius = 1 m, so ist  $x = 0,01$  m;  $x$  ist also die Bogenlänge des Winkels für den mit dem Radius 1 beschriebenen Kreis. Kennen wir die Bogenlänge des Winkels  $x$  für einen mit dem Radius  $R$  geschriebenen Kreis =  $s$ , so erhalten wir die zum Winkel  $x$  gehörige Bogenlänge für den Radius 1 =  $\frac{s}{R}$ . Man kann also einen Winkel auch ausdrücken durch das Verhältniss des Bogens zum Radius.

Haben wir in analytischem Masse  $x = \frac{1}{100}$ , so heisst dies nach Obigen: Der Bogen des Winkels  $x$  ist =  $\frac{1}{100} R$ . Da nun  $2 R \cdot \pi = 360^\circ$ , so ist  $R = \frac{360^\circ}{2\pi}$ , also  $x = \frac{1}{100} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi}$  oder für  $\frac{360^\circ}{2\pi} = \varrho^\circ$ :  $x = \frac{1}{100} \varrho^\circ$ , d. h., um aus dem analytischen Winkelmass in Gradmass überzugehen, haben wir mit  $\varrho^\circ$  zu multipliciren. Um einen in analytischem Masse ausgedrückten Winkel in Sekunden zu erhalten, haben wir zu multipliciren mit  $\varrho'' = \frac{360 \times 60 \times 60}{2\pi} = 206264,806$ . Umgekehrt erhalten wir das analytische Winkelmass eines in Sekunden ausgedrückten Winkels durch Division mit  $\varrho'' = 206264,806$ .

2) Wir können nunmehr, nach dieser kleinen Abschweifung, zur Differentiation der Winkelfunktionen übergehen:

$$\begin{aligned} \text{Ist} \quad & y = \sin x \\ \text{so ist} \quad & y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \\ & = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x. \\ & \Delta y = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x \\ & = \sin x (\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x. \end{aligned}$$

Ist nun ein Winkel sehr klein, so kann man sehr nahe den sinus gleich dem Verhältniss des Bogens zum Radius setzen, wie man leicht begreift. Gehen also  $\Delta x$  und  $\Delta y$  über in  $dx$  und  $dy$ , so können wir, wenn wir  $dx$  und  $dy$  in analytischem Masse ausgedrückt denken,  $\sin dx = dx$  setzen, während  $\cos dx = 1$  wird. Wir erhalten somit beim Uebergange zur Grenze:

$$\begin{aligned} dy &= 0 + \cos x dx \\ \frac{dy}{dx} \text{ d. i. } \frac{d \sin x}{dx} &= \cos x. \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \text{3) Ist} \quad & y = \cos x \\ & = \sin(90 - x) \\ \text{so ist nach (38)} \quad & \frac{d \sin(90 - x)}{d(90 - x)} = \cos(90 - x) \\ \text{oder da nach § 18} \quad & d(90 - x) = -dx \\ & - \frac{d \sin(90 - x)}{dx} = \cos(90 - x) \\ \text{d. h.} \quad & \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x. \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \text{4) Für tang } x \text{ findet man durch Differentiation der Gleichung } \text{tang } x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \frac{d \text{ tang } x}{dx} &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tang}^2 x \end{aligned} \quad (41)$$

5) und analog für  $\cot x$

$$\frac{d \cot x}{d x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x). \quad (42)$$

§ 32.

**Differentiation cyclometrischer Funktionen.**

**Erläuterung:** Man versteht unter  $\arcsin x$  den in Theilen des Radius ausgedrückten Bogen, dessen Sinus  $= x$  ist.

1) Hat man  $y = \arcsin x$   
 so ist  $\sin y = x$   
 also:  $\frac{d x}{d y} = \cos x$   
 $\frac{d y}{d x}$ , d. i.  $\frac{d \arcsin x}{d x} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$   
 $\frac{d \arcsin x}{d x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (43)$

2) Analog erhält man:  
 $\frac{d \arcsin x}{d x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (44)$

3) Ist  $\arcsin x = y$ , so ist  $x = \sin y$   
 also  $\frac{d x}{d y} = \cos y, \frac{d y}{d x} = \frac{1}{\cos y}$   
 oder  $\frac{d \arcsin x}{d x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (45)$   
 und analog

4)  $\frac{d \arcsin x}{d x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (46)$

§ 33.

**Goniometrische Reihen.**

1) **Aufgabe:**  $\sin x$  in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von  $x$  zu entwickeln.

Es ist  $f(x) = \sin x, \quad f(0) = 0$   
 $f'(x) = \cos x, \quad f'(0) = 1$   
 $f''(x) = -\sin x, \quad f''(0) = 0$   
 $f'''(x) = -\cos x, \quad f'''(0) = -1.$

Also nach (31)  
 $\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \quad (47)$

Analog findet man

2)  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \quad (48)$

3)  $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3 \cdot 5} + \dots \quad (49)$

4)  $\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{4 \cdot 5} - \dots \quad (50)$

§ 34.

**Cyclometrische Reihen.**

**Aufgabe:** arc tang x in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von x zu entwickeln:

Die Reihe sei

$$1) \text{ arc tang } x = A + Bx + Cx^2 + \dots$$

Es sind hierin nun die Coefficienten A, B, C zu bestimmen.

Für  $x=0$  folgt arc tang  $x=0$ , d. h.  $f(0)=0$ , mithin das erste Glied der Mac Laurin'schen Reihe:  $A=0$ . Die übrigen Coefficienten B, C etc. entwickeln wir zweckmässiger auf einem anderen Wege: Wir differentiiren Gl. 1) und erhalten:

$$\frac{1}{1+x^2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots$$

oder wenn wir die Division links ausführen:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots$$

oder

$$1 + 0x - x^2 + 0x^3 + x^4 + \dots = B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots$$

woraus wir zur Bestimmung der Coefficienten B, C, D erhalten:

$$B = 1, \text{ mithin } B = 1$$

$$2C = 0 \quad ,, \quad C = 0$$

$$3D = -1 \quad ,, \quad D = -\frac{1}{3}$$

$$E = 0 \quad ,, \quad E = 0$$

also ist nach 1)

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (51)$$

Diese Reihe kann zur Berechnung der Zahl  $\pi$  benutzt werden.

Es ist nämlich

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tang } 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$\pi = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) = 3,1415926.$$

§ 35.

**Die Taylor'sche Reihe.**

Lässt man in  $f(x)$  die Variable  $x$  um  $k$  wachsen, so lässt sich der dadurch entstandene Werth der geänderten Funktion  $f(x+k)$  durch eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von  $k$  ausdrücken. Es gehen nämlich die durch wiederholtes Differentiiren der Funktion  $f(x+k)$  erhaltenen Differentialquotienten  $f'(x+k)$ ,  $f''(x+k)$  etc. für  $k=0$  über in

$$f'(0) = f'(x)$$

$$f''(0) = f''(x)$$

etc.

wodurch nach (31) erhalten wird:

$$f(x+k) = f(x) + f'(x) \frac{k}{1} + f''(x) \frac{k^2}{1 \cdot 2} + f'''(x) \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (52)$$

§ 36.

**Geometrische Bedeutung des Differentialquotienten.**

Stellen wir uns die Funktion  $y = f(x)$  als Gleichung einer Kurve vor, indem wir  $x$  als Abscisse,  $y$  als Ordinate ansehen, so können wir, indem wir für  $x$  nach und nach verschiedene Werthe einsetzen und die zugehörigen Werthe  $y$  berechnen, eine beliebige Anzahl von Punkten der Kurve erhalten und diese danach construiren. Ergeben nun die Coordinaten  $x$  und  $y$  den Punkt A, Fig. 11,  $x + \Delta x$  und  $y + \Delta y$  den Punkt B der Kurve, so ist  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  die trigonometrische Tangente des von der Sekante AB und der Abscissenaxe eingeschlossenen Winkels. Je kleiner  $\Delta x$  und  $\Delta y$  angenommen werden, um so mehr rückt B nach A hin, und fällt mit diesem Punkte zusammen, sobald  $\Delta x$  und  $\Delta y$  der Null gleich werden. In demselben Augenblicke wird die Sekante AB zur Tangente im Punkte A, die Differenzen  $\Delta y$  und  $\Delta x$  werden zu Differentialen, und der Werth  $\frac{dy}{dx}$  stellt die trigonometrische Tangente des von der Abscissenaxe und der in A an die Kurve gezogenen Tangente eingeschlossenen Winkels dar. Die trigonometrische Tangente dieses Winkels ist also die Grenze, welcher sich das Verhältniss  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  ohne Ende nähert, wenn man  $\Delta y$  und  $\Delta x$  sich der Null nähern lässt, sie ist gleich dem Differentialquotienten der Funktion  $y = f(x)$ .

§ 37.

**Maxima und Minima.**

Ist  $y = f(x)$ , so kann es vorkommen, dass für einen gewissen Werth von  $x$  ein Maximum wird, d. h. für jeden grösseren oder kleineren Werth von  $x$  wird  $y$  kleiner. Ebenso kann  $y$  für einen gewissen Werth von  $x$  ein Minimum werden, d. h. für jeden grösseren oder kleineren Werth von  $x$  würde  $y$  grösser werden.

Giebt es für  $x$  einen bestimmten Werth  $a$ , Fig. 12, für welchen  $y$  ein Maximum wird, so wird  $y$  für jeden grösseren oder kleineren Werth von  $x$  abnehmen, die Funktionskurve wird also bei zunehmenden oder abnehmenden  $x$  fallen, d. h. sich der Abscissenaxe nähern. Ist  $x$  grösser oder kleiner als  $a$ , so steigt dagegen die Kurve bei zu- oder abnehmenden  $x$ , bis dieses den Werth  $a$  erreicht hat. Zugleich erkennen wir aus der Figur, dass die in einem Punkte B an die Kurve gezogene Tangente mit der Abscissenaxe einen um so kleineren Winkel einschliessen wird, je näher B an den Culminationspunkt A heranrückt, oder je mehr sich die Abscisse  $x$  des Punktes B dem Werthe  $a$  nähert. In dem Augenblicke, in welchem B in A übergeht, wird dieser Winkel, also auch seine trigonometrische Tangente = 0. Wird  $x > a$ , so fällt die Kurve wieder, der Tangentenwinkel, und mit ihm seine trigonometrische Tangente, wird negativ. Mit anderen Worten: Ist  $x < a$ , so wird bei zunehmenden  $x$  der Differentialquotient der Kurvengleichung abnehmen, bis er für  $x = a$  verschwindet. Bei noch weiter zunehmenden  $x$  geht er in das Bereich der negativen Grössen über. Stellen wir daher den Differentialquotienten als Funktionscurve dar, so wird diese also bei zunehmenden  $x$  fallen, Fig. 13, für  $x = a$  die Abscissenaxe schneiden, und für  $x > a$  auf die andere, d. h. negative Seite der Abscissenaxe übergehen. Die an diese Kurve gezogenen

Tangenten bilden mit der  $x$  Axe sämmtlich negative Winkel, deren trigonometrische Tangenten daher ebenfalls negativ sind, d. h. der Differentialquotient des Differentialquotienten, d. i. der zweite Differentialquotient der Funktion  $f(x)$  ist negativ. Hieraus der Satz:

Ist die Funktion  $y=f(x)$  für  $x=a$  ein Maximum, so ist der Differentialquotient für  $x=a$  gleich 0, ( $f'(a)=0$ ), der zweite Differentialquotient  $f''(a)$  ist negativ.

Durch ganz analoge Betrachtungen — vergl. Fig. 14a und b, — finden wir den Satz:

Ist  $y=f(x)$  für einen gewissen Werth von  $x=a$  ein Minimum, so ist  $f'(a)=0$ ,  $f''(a)$  positiv.

Um den Werth von  $x$  zu bestimmen, welcher die Funktion  $y=f(x)$  zum Maximum oder Minimum macht, werden wir den Differentialquotienten  $f'(x)=0$  setzen und aus der so erhaltenen Gleichung  $x$  entwickeln. Für den so gewonnenen Werth von  $x$  wird  $y$  ein Maximum, wenn  $f''(x)$  negativ, ein Minimum, wenn  $f''(x)$  positiv ist.

Beispiel 1: Nach § 11 ist die Scheitelgleichung des Kreises:  $y^2=2rx-x^2$  also  $2y dy=2r-2x dx$ , woraus  $\frac{dy}{dx}=r-x$  erhalten wir. Setzt man  $r-x=0$ , so folgt  $x=r$ . Durch Differentiation der Funktion  $\frac{dy}{dx}=r-x$  erhalten wir  $f''(x)=-1$ ,  $f''(x)$  ist also negativ,  $y$  wird also für  $x=r$  ein Maximum.

Beispiel 2: Es sind  $n$  Punkte,  $P_1 P_2 \dots P_n$  durch ihre Coordinaten gegeben, gesucht ein Punkt  $P$  so, dass die Summe der Quadrate der Verbindungslinien mit den gegebenen Punkten, also  $PP_1^2+PP_2^2+\dots+PP_n^2$  (Fig. 15) ein Minimum werde.

Seien die Coordinaten der gegebenen Punkte  $x_1 y_1, x_2 y_2, \dots$ , des gesuchten Punktes  $=x, y$ , dann ist nach dem pythagoräischen Lehrsatz:

$$\begin{aligned} PP_1^2 &= (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 \\ PP_2^2 &= (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

folglich:  $PP_1^2+PP_2^2+\dots=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\dots+(y-y_1)^2+(y-y_2)^2+\dots$ . Um nun diejenigen Werthe für  $x$  und  $y$  zu ermitteln, welche  $PP_1^2+PP_2^2+\dots=f(x, y)$  zum Minimum machen, differenzieren wir die Gleichung zunächst partiell nach  $x$  und erhalten:

$$1) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2(x-x_1) + 2(x-x_2) + \dots + 2(x-x_n)$$

und setzen den Werth rechts  $=0$ , also

$$2(x-x_1) + 2(x-x_2) + \dots + 2(x-x_n) = 0$$

woraus sich ergibt:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Nunmehr differenzieren wir dieselbe Gleichung partiell nach  $y$ , setzen den Differentialquotienten  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$ , und erhalten analog:

$$y = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

Aus Gleichung 1) erhält man:

$$\frac{df(x, y)}{dx} = 2nx - 2(x_1 + x_2 + \dots)$$

also  $\frac{d^2 f(x, y)}{dx^2} = +2n$ , und analog  $\frac{d^2 f(x, y)}{dy^2} = +2n$ .

Die 2. Differentialquotienten sind also positiv, woraus folgt, dass  $f(x, y)$  für die obigen Werthe von  $x$  und  $y$  ein Minimum, kein Maximum wird.

**Die unbestimmten Ausdrücke  $\frac{0}{0}$  und  $\frac{\infty}{\infty}$ .**

1) Haben wir die Funktionen  $y = f(x)$  und  $z = \varphi(x)$  und wird für  $x = a$  sowohl  $f(x)$  als auch  $\varphi(x) = 0$ , so nimmt der Ausdruck  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  für  $x = a$  die unbestimmte Form  $\frac{0}{0}$  an. Es kommt dann darauf an, den durch diesen Ausdruck dargestellten Werth von  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  zu ermitteln.

Stellen wir die Funktionskurven für  $f(x)$  und  $\varphi(x)$  dar, so werden dieselben in dem durch die Abscisse  $x = a$  bestimmten Punkte A die Abscissenaxe schneiden, Fig. 16. Es ist nun weiter:

$$\left. \begin{array}{l} y = (x - a) \tan \alpha \\ z = (x - a) \tan \beta \end{array} \right\} \text{ also } \frac{y}{z} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$$

Für  $x = a$  werden die Sekanten AB und AC zu Tangenten in A,  $\tan \alpha$  wird gleich  $f'(a)$ ,  $\tan \beta$  gleich  $\varphi'(a)$ , also  $\frac{y}{z} = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$  wird für  $x = a$  gleich  $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ .

2) Nimmt  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  für  $x = a$  die Form  $\frac{\infty}{\infty}$  an, so schreibe man dafür  $\frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ .

Man erhält dann für  $x = a$  wieder die Form  $\frac{0}{0}$ . Es ist also nach 1)

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)}$$

Beispiel 1)  $\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = f(x)$ . Für  $x = a$  wird diese Funktion  $f(a) = 0$ .

Es ist 
$$\frac{\frac{d(x^3 - a^3)}{dx}}{\frac{d(x^2 - a^2)}{dx}} = \frac{3x^2}{2x}, \text{ oder für } x = a \text{ gleich } \frac{3}{2} a.$$

Beispiel 2):  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$  nimmt für  $x = 2$  die Form  $\frac{0}{0}$  an, also  $f(2) = \frac{0}{0}$ . Es ist nun 
$$\frac{\frac{d(x^2 - 5x + 6)}{dx}}{\frac{d(x^3 - 2x^2 - x + 2)}{dx}} = \frac{2x - 5}{3x^2 - 4x - 1}, \text{ oder für } x = 2$$

gleich  $-\frac{1}{3}$ .

## IV. Anwendung der Differentialrechnung auf analytische Geometrie.

(Fortsetzung zu Abschnitt II.)

### A. Ellipse.

§ 39.

#### Tangente, Normale, Subtangente, Subnormale.

1) Durch Differentiation der Mittelpunktsgleichung

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

erhalten wir:

$$a^2 2 y \, dy + b^2 2 x \, dx = 0$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Dieser Ausdruck bedeutet nach § 36 die trigonometrische Tangente des Winkels  $\alpha$  (Fig. 17), welchen die im Punkte  $P_{x,y}$  an die Kurve gezogene Tangente mit der Abscissenaxe einschliesst. Hieraus ergibt sich die Länge der Subtangente **AB**:

$$\text{Subt.} = y \cotang \alpha = y \left( -\frac{a^2 y}{b^2 x} \right)$$

$$\text{Subt.} = -\frac{a^2 y^2}{b^2 x}$$

oder auch nach der Mittelpunktsgleichung:

$$\text{Subt.} = \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{b^2 x}$$

$$\text{Subt.} = \frac{a^2 - x^2}{x} \quad (53)$$

2) Hieraus ergibt sich ohne Weiteres die Abscisse des Punktes **A** (Fig. 17)

$$x_A = \frac{a^2 - x^2}{x} + x = \frac{a^2}{x}$$

Diese Abscisse ist also nur von der Hauptaxe und von der Abscisse  $x$  des Punktes  $P$  abhängig, bleibt daher für alle über der Hauptaxe beschriebenen Ellipsen so lange constant, als  $x$  ungeändert bleibt, d. h. die Tangenten an allen diesen Ellipsen in den Punkten, welche derselben Abscisse  $x$  angehören, schneiden sich in einem und demselben Punkte **A** der verlängerten Hauptaxe. Da auch der Kreis einer dieser Ellipsen, so ergibt sich hieraus ein einfaches Verfahren, in einem gegebenen Punkte  $P$  an die Ellipse eine Tangente zu ziehen: Man schlägt über die grosse Axe einen Kreis und verfährt nach Anleitung der Figur 17.

3) Ist  $PC \perp AP$ , Fig. 17, so heisst  $PC$  die Normale für den Punkt  $P$ ,  $BC$  die Subnormale. Man findet auf demselben Wege, auf welchem wir zur Subtangente gelangten:

$$\text{Subnorm.} = \frac{b^2}{a^2} x. \quad (54)$$

§ 40.

**Quadratur der Ellipse.**

Schlagen wir über die grosse **A**xe einen Kreis, bezeichnen die einer und derselben **A**bscisse  $x$  angehörig Ordinatn des Kreises und der Ellipse mit  $Y$  und  $y$ , so ist nach der Mittelpunkts-gleichung des Kreises und der Ellipse:

$$Y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

also

$$y : Y = b : a,$$

für jeden beliebigen Werth von  $x$ . Denkt man sich nun unendlich viele Ordinatn in den unendlich kleinen **A**bständen  $dx$  gezogen, so werden Kreis und Ellipse in unendlich kleine Rechtecke  $Y dx$  und  $y dx$  zerlegt, und es gilt für jedes Paar derselben die Gleichung

$$y dx : Y dx = b : a.$$

Mithin verhält sich, wie sofort erhellt, die Ellipsenfläche zur Kreisfläche

$$f : F = b : a$$

$$f : a^2 \pi = b : a$$

$$f = a b \pi.$$

(55)

**B. Parabel.**

§ 41.

**Subtangente und Subnormale.**

Die Subtangente des Punktes  $P_{x,y}$  findet sich aus der Gleichung der Parabel auf analogem Wege, wie bei der Ellipse:

$$1) \text{ Subtang.} = 2x \tag{56}$$

$$2) \text{ Subnorm.} = p. \tag{57}$$

Aus Gleichung 1) ergibt sich ein leichtes Verfahren, an die Parabel in einem gegebenen Punkte eine Tangente zu ziehen.

Aus Gl. 2) folgt, dass die Subnormale für alle Punkte constant ist, nämlich  $= p$ .

§ 42.

**Quadratur der Parabel.**

Ändert sich in der Gleichung  $y^2 = 2px$  die **A**bscisse  $x$  um  $\Delta x$  und setzt man  $x + \Delta x = x_1$ , so ändert sich die Ordinate  $y$  um  $\Delta y$  und geht in  $y_1$  (Fig. 18) über. Das von den Ordinaten  $y$  und  $y_1$  eingeschlossene Trapez ist mit um so grösserer Annäherung gleich dem Flächenabschnitte, welcher von denselben Ordinaten, dem **A**bscissenabschnitte  $\Delta x$  und dem Parabelbogen eingeschlossen wird, je kleiner man  $\Delta x$  nimmt, und wird diesem Flächenabschnitte gleich, wenn  $\Delta x$  gleich 0 genommen wird. In demselben Moment wird  $y = y_1$ . Bezeichnet  $f_1$  diesen unendlich kleinen Flächenabschnitt, so ist also

$$1) f_1 = y dx = \sqrt{2px} \cdot dx.$$

Ebenso finden wir den unendlich kleinen Flächenabschnitt  $f_2$  in Fig. 18

$$2) f_2 = x dy.$$

Durch Differentiation der Parabelgleichung finden wir:

$$2y \, dy = 2p \, dx$$

$$dy = \frac{p \, dx}{y} = \frac{p}{\sqrt{2px}} \cdot dx$$

wodurch Gl. 2) übergeht in:

$$3) \, f_2 = x \frac{p}{\sqrt{2px}} \cdot dx.$$

Setzen wir das uns noch unbekannte Verhältniss  $f_1 : f_2 = \frac{1}{n}$ , also  $n f_1 = f_2$ ,

so erhalten wir aus 1) und 3)

$$n \sqrt{2px} \cdot dx = \frac{px}{\sqrt{2px}} \cdot dx$$

$$2npx = px$$

$$n = \frac{1}{2}.$$

Es ist also:  $f_2 = \frac{1}{2} f_1.$

Da man die mit I und II bezeichneten Flächenabschnitte in Fig. 18 als Summe einer unendlichen Zahl solcher kleinen Flächenabschnitte mit der Basis  $dx$  bzw.  $dy$  ansehen kann, so folgt, dass die Fläche  $F_2$  des mit II bezeichneten Abschnitts = der Hälfte der Fläche  $F_1$  des mit I bezeichneten Abschnitts sein muss. Die Summe beider Flächen ist aber gleich  $xy$ , daher

$$F_1 = \frac{2}{3} xy. \tag{58}$$

D. h. die Fläche des von den Coordinaten  $x$  und  $y$  abgegrenzten Parabelsegments ist gleich dem Rechtecke  $\frac{2}{3} xy$ .

### C. Krümmungskreise.

§ 43.

#### Erläuterungen.

Zieht man in zwei Punkten A und B, Fig. 19, einer Kurve an diese Tangenten, so heisst der von diesen eingeschlossene Winkel  $\alpha$  die Krümmung des Kurvenbogens A B. Bezeichnet  $s$  die Länge des Bogens A B, so heisst  $\frac{\alpha}{s}$  die durchschnittliche Krümmung der Längeneinheit.

§ 44.

#### Krümmungsradius.

1) Ist  $s$  der Bogen eines Kreises mit dem Radius  $r$ , Fig. 20, so ist  $\frac{s}{r}$  ein Mass für den Winkel  $\beta$ , — (vergl. § 31, 1) —, oder da  $\alpha = \beta$ , auch für den Winkel  $\alpha$ . Die durchschnittliche Krümmung der Längeneinheit ist also  $= \frac{1}{r}$ . Die Reciproke des Radius ist also ein Mass für dieselbe.

Da hiernach die Krümmung nur vom Radius  $r$  abhängt, so ist dieselbe beim Kreise constant. Der Radius heisst in seiner Eigenschaft als Mass der Krümmung „Krümmungsradius“.

2) Unter der Krümmung einer Kurve in einem bestimmten Punkte  $P$  versteht man die Krümmung eines diesen Punkt enthaltenden unendlich kleinen Kurvenbogens. Sind  $a$  und  $b$ , Fig. 21, die Endpunkte dieses Bogens, d. s. (Bogendifferential), dessen Länge,  $\tau$  der Winkel, den die in  $a$  an die Kurve gezogene Tangente mit der Abscissenaxe einschliesst, so ist, wie sofort erhellt, die Krümmung  $d\tau$  des Bogens  $\widehat{ab}$  gleich der Aenderung, welche  $\tau$  erleidet, wenn der Berührungspunkt  $a$  der Tangente nach  $b$  rückt, oder wenn  $x$  und  $y$  sich um  $dx$  und  $dy$  ändern, d. h.  $d\tau$  ist das Differential des Winkels  $\tau$ . Die durchschnittliche Krümmung des Bogens  $ab$  ist gleich  $\frac{d\tau}{ds}$ . Bezeichnet  $r$  den Radius eines Kreises von gleicher

$$\begin{aligned} \text{Krümmung, so ist also} \quad \frac{1}{r} &= \frac{d\tau}{ds} \\ r &= \frac{ds}{d\tau}. \end{aligned} \tag{59}$$

Dieser Radius heisst Krümmungsradius der Kurve im Punkte  $P$ , der damit beschriebene Kreis heisst Krümmungskreis. Es ist dies also derjenige Kreis, welcher mit der Kurve im Punkte  $P$  auf eine sehr kleine Strecke  $ab$  zur Deckung gebracht werden kann. Denkt man sich in den einander unendlich nahe gelegenen Punkten  $a$  und  $b$  zu den Tangenten Senkrechte errichtet, so ist der Durchschnitt derselben der Mittelpunkt des Krümmungskreises, und seine Entfernung von  $a$  und  $b$  der Krümmungsradius.

Das Differential des Bogens  $ds$  kann als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten  $dx$  und  $dy$  angesehen werden, also ist:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx^2 \end{aligned}$$

$$1) \quad ds = \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \cdot dx$$

Ferner ist:  $2) \quad \tan \tau = \frac{dy}{dx}$

also  $d \tan \tau = \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot dx$

oder nach (41)  $3) \quad d\tau \cdot \frac{1}{\cos^2 \tau} = \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot dx$

$$d\tau = \cos^2 \tau \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot dx$$

oder da  $\cos^2 \tau = \frac{\cos^2 \tau}{\sin^2 \tau + \cos^2 \tau} = \frac{1}{\frac{\sin^2 \tau}{\cos^2 \tau} + 1} = \frac{1}{1 + \tan^2 \tau}$

$$d\tau = \frac{1}{1 + \tan^2 \tau} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot dx$$

daher nach 2)  $d\tau = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \cdot dx$

Setzt man 1) und 2) in (59) ein, so erhält man:

$$r = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{\frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx}$$

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (60)$$

Beispiel: Eine Kurve durch ihre Gleichung

$$y = m x^3$$

gegeben, den Krümmungsradius derselben in dem Punkte  $P_x, y$  zu finden.

Es ist:  $\frac{dy}{dx} = 3 m x^2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6 m x$$

also 
$$r = \frac{[1 + (3 m x^2)^2]^{\frac{3}{2}}}{6 m x} = \frac{(1 + 9 m^2 x^4)^{\frac{3}{2}}}{6 m x}$$

Für  $x=0$  erhalten wir hieraus  $r = \infty$ .

3) Der Krümmungsradius der Parabel für den gegebenen Punkt  $P_x, y$  lässt sich zwar leicht nach derselben Formel finden, da aber ein anderer Weg, auf welchem man zum Krümmungsradius gelangen kann, sich für die Parabel besonders einfach gestaltet, so soll derselbe hier noch erläutert werden.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Normale für den Punkt  $P_1$  seien  $Y_1, X_1$ , Fig. 22, dann ist, wenn  $y_1, x_1$  die Coordinaten des Punktes  $P_1$  selbst bezeichnen:

$$X_1 = x_1 + p - Y_1 \tan \tau$$

oder da  $\tan \tau = \frac{p}{y_1}$ , (worin  $p$  die Subnormale, vergl. (57))

$$I) X_1 = x_1 + p - Y_1 \frac{p}{y_1}$$

Entsprechend lautet die Gleichung der Normale für einen zweiten Punkt  $P_2$  der Parabel

$$II) X_2 = x_2 + p - Y_2 \frac{p}{y_2}$$

Für den Durchschnittspunkt  $M$  beider Normalen muss sich aus beiden Gleichungen für die Coordinaten derselbe Werth ergeben, es ist also in beiden Gleichungen  $X_1 = X_2, Y_1 = Y_2$  zu setzen, wofür wir einfach  $X$  und  $Y$  schreiben wollen, wo also  $X$  und  $Y$  die Coordinaten des Punktes  $M$  bezeichnen. Demnach erhalten wir aus beiden Gleichungen für den Durchschnittspunkt  $M$ :

$$x_1 - Y \frac{p}{y_1} = x_2 - Y \frac{p}{y_2}$$

oder:

$$Y \left( \frac{p}{y_2} - \frac{p}{y_1} \right) = x_2 - x_1$$

$$Y p \left( \frac{y_1 - y_2}{y_1 y_2} \right) = x_2 - x_1$$

$$Y = - \frac{(x_2 - x_1) \cdot y_2 y_1}{y_2 - y_1} \cdot \frac{1}{p}$$

oder wenn  $\alpha$  den von der Sehne  $P_1 P_2$  und der Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel bezeichnet:

$$I) Y = - \frac{y_1 y_2}{p} \cot \alpha$$

Für  $X$  ergibt sich durch Einsetzen dieses Werthes in eine der obigen Gleichungen I und II

$$2) X = p + x_2 + y_1 \cot \alpha$$

Rückt nun  $P_2$  unendlich nahe an  $P_1$ , so wird  $y_1 = y_2$ , die Sehne  $P_1 P_2$  wird zur Tangente in  $P_1$ ,  $\alpha$  wird  $= \tau$ ,  $\tan \alpha$  wird  $= \frac{p}{y}$  (dem Differentialquotienten der Parabelgleichung), Gl. 1) geht daher über in:

$$3) Y = - \frac{y^3}{p^2}$$

und Gl. 2), da  $y \cot a$  gleich der Subtangente,  $= 2x$  (§ 41)

$$4) X = p + 3x.$$

Somit haben wir die Coordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises für den Punkt P. Aus diesen Coordinaten und aus denen des Punktes P selbst erhalten wir nach dem pythagoräischen Lehrsatz (unter Berücksichtigung des Vorzeichens von Y):

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (X-x)^2 + (Y-y)^2 \\ &= (p+2x)^2 + \left(y + \frac{y^3}{p^2}\right)^2 \end{aligned}$$

oder da nach der Parabelgleichung  $y^2 = 2px$ , also  $2x = \frac{y^2}{p}$ ,

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{(p^2 + y^2)^2}{p^4} \\ \rho &= \frac{\sqrt{(p^2 + y^2)^3}}{p^2} \end{aligned}$$

worin der Zähler gleich der Normale.

Zusatz. Den kleinsten Krümmungsradius der Parabel findet man, indem man in dieser Gleichung  $y=0$  setzt:  $r = p$ .

Da  $y$  nur für den Scheitel der Parabel  $= 0$  ist, so ist der Krümmungsradius für den Scheitel der kleinste Krümmungsradius der Parabel.

Theil II.  
Von den Messungen.

Thell II.  
Von den Messungen.

# I. Astronomische Begriffe.

## § 1.

### Die Himmelskugel.

Die Himmelskugel, d. i. die scheinbare Kugel, in deren Mittelpunkte  $O$ , Fig. 23, ein Beobachter zu stehen glaubt, und auf deren innerer Seite er die Sterne erblickt, wird durch die horizontale Ebene  $NS$  in zwei Hälften, eine obere sichtbare und eine unsichtbare getheilt. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der scheinbaren Oberfläche der Himmelskugel heisst Horizont des Beobachters. Eine im Standpunkte  $O$  des Beobachters zur Ebene des Horizonts errichtete Senkrechte trifft die Kugeloberfläche in den Punkten  $Z$ , dem Zenith, und  $Z'$ , dem Nadir. Steht in  $T$  ein Stern, so heisst der Bogen  $ZT$  seine Zenithdistanz, der Bogen  $TT'$  seine Höhe. Ein durch  $T$  parallel zum Horizont gelegter Kreis heisst ein Almukantarat.

Sämmtliche Sterne beschreiben infolge der Drehung der Erde um ihre Axe  $PP'$  scheinbar parallele Kreise, Parallelkreise, welche zu dieser Axe senkrecht stehen. Das ganze Himmelsgewölbe scheint sich um diese Axe zu drehen. Die allein ruhenden Endpunkte  $P$  und  $P'$  dieser Axe heissen Pole, (Himmelspole). Der durch  $P$ ,  $Z$  und  $P'$  gelegte grösste Kugelkreis heisst Meridian des Beobachtungsortes. Die Linie  $NS$ , in welcher die Meridianebene die Ebene des Horizonts schneidet, heisst Mittagslinie, der Kreisbogen  $NP$  die Polhöhe des Beobachtungsortes.

Der Ort des Sternes  $T$  ist bekannt, wenn man seine Höhe  $TT'$  und den Winkel  $NOT'$  kennt. Dieser letztere Winkel, welchen der durch  $T$  gelegte Höhenkreis mit dem Meridian einschliesst, heisst Azimut des Sternes  $T$ . Er wird von den Geodäten, von der Nordlinie  $ON$  beginnend, rechts herum gezählt.

Jeder Stern hat auf dem Parallelkreise, auf welchem er sich scheinbar bewegt, einen höchsten und einen tiefsten Punkt, obere und untere Culmination. Beide liegen im Meridian, in der Fig.  $B$  und  $B'$ . Diejenigen Sterne, deren untere Culmination über dem Horizonte liegt, also für den Beobachter sichtbar ist, heissen Circumpolarsterne. Alle anderen Sterne gehen für den Beobachtungsort auf und unter. Der sichtbare Theil ihrer scheinbaren Bahn heisst Tagbogen, der unsichtbare Nachtbogen. Ein Almukantarat wird von dem Tagbogen in zwei Punkten geschnitten. Der Bogen des Parallelkreises sowohl, als des Almukantarats, welcher zwischen diesen beiden Punkten liegt, wird durch den Meridian halbirt. Die Durchschnittspunkte des grössten Parallelkreises, — Aequators, — mit dem grössten Almukantarat, — Horizont, — heissen Ost- und Westpunkt. In der Figur ist nur der letztere,  $W$ , sichtbar. Der Tagbogen des Aequators ist gleich dem Nachtbogen, daher Tag- und Nachtgleiche, wenn die Sonne im Aequator steht. Der Bogen  $AS$  heisst Aequatorhöhe, der Bogen  $AB = TU$  heisst Deklination des im Parallel-

kreise  $BTB'$  sich bewegenden Sternes. Der durch  $P$  und  $T$  gelegte grösste Kugelkreis schneidet den Aequator rechtwinklig in  $U$ . Die Entfernung des Punktes  $U$  von einem bestimmten Punkte des Aequators, ( $\Upsilon$  in der Figur) dem Frühlingspunkte, heisst Rectascension. Diese und die Deklination bilden zusammen die Aequatorcoordinaten, durch welche der Ort des Sternes  $T$  bekannt ist. Mit dem Frühlingspunkte hat es folgende Bewandniss: Da die Erde sich um die Sonne bewegt, so wird Letztere, von der Erde aus gesehen, scheinbar einen Kreis am Himmelsgewölbe beschreiben und alljährlich einmal durchlaufen, welcher in der Ebene der Erdbahn liegt. Dieser Kreis, Ekliptik oder Thierkreis, würde in die Ebene des Aequators fallen, wenn die Erdaxe senkrecht zu ihrer Bahn um die Sonne stände. Da in Wirklichkeit die Erdaxe gegen die Erdbahn geneigt, so wird auch die Aequatorebene gegen die Ekliptik eine Neigung (von  $23\frac{1}{2}^{\circ}$ ) haben. Aequator und Ekliptik fallen also nicht zusammen, sondern schneiden sich gegenseitig in zwei Punkten, dem Frühlings- und Herbstpunkte. Im Frühlingspunkte steht die Sonne zu Frühlingsanfang, sie steht also zu dieser Zeit im Aequator, ihre Deklination ist  $= 0$ . Allmählich entfernt sie sich dann immer mehr vom Aequator, bis sie nach 3 Monaten die grösste Deklination von ca.  $23\frac{1}{2}^{\circ}$  erreicht hat. Hier scheint sie kurze Zeit Halt zu machen, (Sommersolstitium) und beginnt dann sich dem Aequator wieder zu nähern, bis sie nach weiteren drei Monaten denselben im Herbstpunkte schneidet. Nun wird die Deklination negativ, bis sie  $-23\frac{1}{2}^{\circ}$  erreicht, (Wintersolstitium), worauf sich die Sonne wieder dem Aequator nähert. Die Aenderung der Sonnendeklination in einer bestimmten Zeiteinheit, z. B. in einer Stunde, ist am grössten in der Nähe des Aequators, und kommt in der Nähe der Solstitien der Null nahe.

Steht die Sonne im Frühlings- oder Herbstpunkte, so sind Tag und Nacht gleich. Sonnen-Auf- und -Untergang erfolgen genau im Ost- und Westpunkte. Diese Punkte erhält man, wenn man auf die Mittagslinie in  $O$  ein Loth errichtet und dasselbe nach beiden Seiten hin bis zum Durchschnitte mit dem Horizont verlängert. Bei zunehmender Deklination rücken die Punkte, in welchen die Sonne auf- und untergeht, mehr nach Norden. Der Stern  $T$  geht z. B. in  $B''$  unter. Der Winkel  $SOB''$  heisst Abendweite des Sterns.

## § 2.

### Geographische Ortsbestimmung.

1) **Der Längenunterschied** zweier Orte auf der Erde ergibt sich aus deren Zeitunterschieden. Da die Erde sich in 4 Minuten um  $1^{\circ}$  um ihre Axe dreht, so entspricht ein Zeitunterschied von 4 Minuten einem Längenunterschiede von  $1^{\circ}$ . Der Schiffer bedient sich daher eines Chronometers, das genau die Zeit eines bestimmten Ortes, z. B. Berlin, anzeigt. Um dasselbe zu controlliren, bedarf es von Zeit zu Zeit astronomischer Beobachtungen. Kennt man die Zeit, in welcher ein bestimmtes astronomisches Ereigniss für einen Ort  $A$ , z. B. Berlin, eintreten muss, (z. B. die Verfinsternung eines Jupitertrabanten), und beobachtet man die Zeit, in welcher eben dieses Ereigniss in  $B$  eintritt, so ist der Zeitunterschied beider Orte bekannt.

2) **Die geographische Breite** ist, wie man leicht erkennt, gleich der Polhöhe des betreffenden Ortes<sup>\*)</sup>. Stünde daher in der Verlängerung der Erdaxe ein

<sup>\*)</sup> Stellt Fig. 23 die Erde dar, so ist die Breite des Beobachtungsortes  $Z = A \hat{O} Z$ . Die Polhöhe ist  $= \angle P \hat{O} N$ . Jeder dieser beiden Winkel wird durch  $P \hat{O} Z$  zu  $90^{\circ}$  ergänzt, mithin sind die Winkel gleich.

Stern, so brauchte man nur dessen Höhe über dem Horizonte zu messen, um die Breite zu erhalten. Da dies nicht der Fall, — denn auch der Polarstern liegt bekanntlich nicht genau in der Himmelsaxe, — so hat man die obere und untere Culmination irgend eines Circumpolarsterns zu beobachten, und aus beiden Beobachtungen das arithmetische Mittel zu nehmen. Beide Beobachtungen sind jedoch zuvor wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung zu verbessern, da diese die gemessenen Elevationen zu gross erscheinen lässt. Diese Correktion beträgt bei einer beobachteten Höhe von

50°	in Sekunden:	48,4
51°	„	46,7
52°	„	45,1
53°	„	43,5
54°	„	41,9
55°	„	40,4.

Die so gewonnene Breite ist die elliptische — vergl. § 30 —, aus welcher sich die geocentrische nach (147) ergibt.

### § 3.

#### Bestimmung der Mittagslinie.

Soll die Neigung einer auf der Erdoberfläche gegebenen Strecke A B gegen die Mittagslinie gefunden werden, so stellt man einen Theodolit vormittags in A auf, stellt das Fadenkreuz auf B ein, und sodann, nach Ablesung der Nonien, auf die Sonne, welche man derart anvisirt, dass beide Fäden des Fadenkreuzes die Ränder der Sonne tangiren, worauf man die Nonien des Horizontal- und Verticalkreises abliest. Zugleich notirt man die Zeit dieser Beobachtung nach einer gewöhnlichen, nur einigermassen richtig gehenden Uhr. Man kennt dann ungefähr die Zeit, um welche die Sonne am Nachmittage wieder in derselben Höhe stehen wird. Vor Ablauf derselben begiebt man sich wieder auf den Punkt A, wiederholt zunächst die Visur nach B, liest die Nonien des Horizontalkreises ab, stellt den Verticalkreis auf die vormittags gemachte Ablesung ein, und visirt nun die Sonne derart an, dass der Verticalfaden den entgegengesetzten Sonnenrand berührt, als bei der vormittäglichen Beobachtung. So begleitet man die Sonne, bis dieselbe auch den Horizontalfaden wieder berührt, worauf der Horizontalkreis gebremst und die Nonien abgelesen werden. (Bei genaueren Beobachtungen auch die Uhr.) War nun die Ablesung vormittags = A, nachmittags = A', so liegt die Südrichtung des Meridians in der Richtung  $\frac{A + A'}{2}$ , wie sofort erhellt, wenn man bedenkt, dass der Bogen eines Almukantarats, welcher zwischen den Durchschnittspunkten der scheinbaren Sternbahn liegt, durch den Meridian halbirt wird.

Natürlich wird man schon vormittags die Beobachtungen in kleinen Zwischenräumen wiederholen und dann nachmittags die correspondierenden Beobachtungen vornehmen, um schliesslich aus den erhaltenen Resultaten das arithmetische Mittel zu bilden.

Bei genaueren Beobachtungen ist dem Resultate noch eine Verbesserung wegen der Aenderung der Sonnendeklination anzubringen. Ist in Fig. 24 A der Standpunkt der Sonne während der Beobachtung vormittags, so würde der Almukantarat A C A' nachmittags von der Sonne in A' geschnitten werden, wenn **keine**

Änderung der Sonnendeklination stattfindet. Es fragt sich nun, wie viel ändert sich der Winkel  $CMA' = a$ , wenn sich die Deklination  $JEB = D$  um den kleinen Betrag  $dD$  ändert?

Bezeichnet  $h$  die Höhe des Almukantarats, und setzt man den scheinbaren Radius der Himmelskugel  $r = 1$ , so ist der Radius des Almukantarats, wie leicht ersichtlich:

$$MA' = MC = r \cos h = \cos h.$$

Ferner  $MF = MA' \cos a = \cos h \cos a.$

Ist  $\varphi = MEJ = MGF$  die geographische Breite des Beobachtungsortes so ist

$$MG = MF \cot \varphi = \cos h \cos a \cot \varphi.$$

und  $GE = ME - MG$   
 $= \sin h - \cos h \cos a \cot \varphi.$

Weiter ist  $KE = GE \sin \varphi = \sin h \cdot \sin \varphi - \cos h \cos a \cos \varphi$

oder da  $KE = r \sin KBE = \sin D$

$$\sin D = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos a \cos \varphi$$

und wenn wir nach  $a$  differentiieren:

$$dD \cos D = \cos h \cos \varphi \sin a \, da$$

also I  $da = \frac{dD \cos D}{\cos \varphi \cos h \sin a}.$

Um unsere Figur nicht durch weitere Hilfskonstruktionen zu verwirren, gehen wir auf Fig. 25 über\*), wo wir sofort erkennen, dass  $a = SEA''$ ,  $\sin a = \cos A'EW$ , wo  $W$  den Durchschnitt des Aequators mit dem Horizont (Westpunkt) bezeichnet. Der Bogen  $A'A''$  ist die Beobachtungshöhe  $h$ . In dem bei  $A''$  rechtwinkligen sphärischen Dreieck  $A'A''W$  ist nach (5)  $\cos A'A'' \cos A''W = \cos A'W$  oder

$$II \quad \cos h \sin a = \cos A'W.$$

Zieht man den grössten Kugelkreis  $A'HP$ , so ist das sphärische Dreieck  $A'HW$  bei  $H$  rechtwinklig und es ist:

$$\cos A'H \cdot \cos HW = \cos A'W$$

oder da  $A'H = D$

$$III \quad \frac{\cos D}{\cos A'W} = \frac{1}{\cos HW} = \frac{1}{\sin HJ}.$$

Aus I und II erhalten wir:

$$da = \frac{dD}{\cos \varphi} \cdot \frac{\cos D}{\cos A'W}$$

oder nach III

$$IV \quad da = \frac{dD}{\cos \varphi \sin HJ}.$$

Es ist aber  $\sin HJ = \sin A'B$ . Der Bogen  $A'B$  stellt den in der halben Zwischenzeit zwischen den Beobachtungen vor- und nachmittags zurückgelegten Weg der Sonne dar. Ist die halbe Zwischenzeit, in Zeitminuten ausgedrückt,  $= t$ , die Änderung der Sonnendeklination pro Zeitminute  $= d$ , so ist die Änderung der Deklination während der ganzen Zwischenzeit  $dD = 2td$ . Da nun die Sonne in einer Zeitminute einen Bogen von  $15'$  zurücklegt, so ist der in der halben Zwischen-

\*) In dieser Figur ist die Deklination  $JB$  negativ dargestellt, d. h. der Parallelkreis der scheinbaren Sonnenbahn liegt unterhalb des Aequators, weil uns scheint, dass die Figur dadurch anschaulicher wird.

zeit zurückgelegte Weg = 15 t', also der Bogen A'B = 15 t'. Wir erhalten daher aus Formel IV:

$$d a = \frac{2 t d}{\cos \varphi \sin 15 t'}$$

Dieser Winkel ist von der nachmittäglichen Beobachtung **ganz**, oder, was dasselbe ist, vom Mittel  $\frac{A + A'}{2}$  zur Hälfte in **Abzug** zu bringen. Die Correktion lautet also

$$d a = \frac{t d}{\cos \varphi \sin 15 t'}$$

Die Aenderung der Deklination pr. Zeitminute beträgt in Sekunden:

am 1. Januar	+ 0,20	am 1. Juli	— 0,15
1. Februar	+ 0,72	1. Aug.	— 0,62
1. März	+ 0,95	1. Sept.	— 0,93
20. März	+ 0,99	20. Sept.	— 0,98
1. April	+ 0,95	1. Okt.	— 0,97
1. Mai	+ 0,72	1. Nov.	— 0,80
1. Juni	+ 0,34	1. Dec.	— 0,40

Der nach Anleitung dieses § beobachtete Winkel zählt von der Strecke A B, deren Neigung gegen die Mittagslinie zu bestimmen war, rechts herum bis in die Südrichtung der Mittagslinie. Hieraus kann die Neigung im Sinne der Geodäten, d. h. der von der Nordrichtung der Mittagslinie rechts herum bis zur Strecke A B zählende Winkel leicht gefunden werden.

## II. Methode der kleinsten Quadrate.

### § 4.

#### Princip.

Bei wiederholter Messung einer und derselben Grösse werden wir infolge der unvermeidlichen, in der Unvollkommenheit unserer Sinne und unserer Instrumente begründeten kleinen Messungsfehler, lauter um ein Geringes von einander abweichende Resultate erzielen, und es entsteht uns nun die Aufgabe, aus allen diesen verschiedenen Resultaten denjenigen Werth zu finden, welcher die grösste Wahrscheinlichkeit für sich hat, dass er dem wahren Werthe der gemessenen Grösse am nächsten komme.

Wir sind gewöhnt, und es entspricht dies einem gewissen praktischen Gefühle, das arithmetische Mittel aus allen direkten Beobachtungen als einen, dem wahren Werthe der gemessenen Grösse sehr nahe kommenden Werth anzusehen. Das arithmetische Mittel hat nun folgende sehr merkwürdige Eigenschaft:

Bezeichnen wir die durch Messung gewonnenen Grössen mit  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ , den wahrscheinlichsten Werth der gemessenen Grösse mit  $x$ , die Verbesserungen, welche wir den einzelnen Beobachtungen  $l$  beizulegen haben, um zum Werthe  $x$  zu gelangen, mit  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , so dass also

$$\begin{aligned} x - l_1 &= v_1 \\ x - l_2 &= v_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

und setzen wir das arithmetische Mittel  $\frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} = M$ , so wird die Summe der Quadrate der Verbesserungen für  $x = M$  ein Minimum, also

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2 = \text{minimum},$$

oder nach üblicher Schreibweise:

$$[v v] = \text{minim.}$$

Differenzieren wir nämlich die Gleichung

$$[v v] = (x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + \dots + (x - l_n)^2$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d[v v]}{d x} &= 2(x - l_1) + 2(x - l_2) + \dots + 2(x - l_n) \\ &= 2 n x - 2(l_1 + l_2 + \dots + l_n). \end{aligned}$$

Setzen wir gemäss Theil I, § 35, diesen Differentialquotienten = 0, also

$$0 = 2 n x - 2(l_1 + l_2 + \dots + l_n)$$

so erhalten wir denjenigen Werth für  $x$ , welcher die Funktion  $[v v] = (x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + \dots + (x - l_n)^2$  zum Minimum macht, nämlich

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} = M. \quad (61)$$

Da wir nun gewöhnt sind, das arithmetische Mittel als wahrscheinlichsten Werth anzusehen, so ist hieraus der Satz hervorgegangen, dass man allgemein denjenigen Werth als den wahrscheinlichsten anzusehen hat, welcher die Summe der Quadrate der Verbesserungen zum Minimum macht.

Die Verbesserungen sind nach Obigen

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= M - l_1 \\ v_2 &= M - l_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

welche Gleichungen Fehlergleichungen heissen. Ihre Summe giebt:

$$[v] = n M - [l]$$

oder nach (61):

$$[v] = n \frac{[l]}{n} - [l] = 0. \quad (63)$$

D. h. die Summe der Verbesserungen der einzelnen Beobachtungen ist = 0. In dieser Gleichung ist eine Probe für die Bildung des arithmetischen Mittels gegeben.

### § 5.

#### Die mittleren Fehler.\*)

Denkt man sich statt der  $n$  wirklich ausgeführten Beobachtungen  $n$  andere, welche sämmtlich unter sich gleich sind und einen solchen Werth haben, dass die Summe der Quadrate ihrer  $n$  gleichen Fehler  $a$  der Quadratsumme der Fehler  $v$  der wirklichen Beobachtungen gleich ist, so ist

$$[a a] = [v v]$$

oder

$$n a^2 = [v v]$$

also

$$a = \sqrt{\frac{[v v]}{n}}. \quad (64)$$

\*) Wilski, Einführung in die Katasteranw. IX.

Diese Grösse heisst die mittlere Abweichung der Beobachtungen vom arithmetischen Mittel. Sie ist der Quadratwurzel der Zahl  $n$  der Beobachtungen indirekt proportional.

Da das arithmetische Mittel noch nicht den **wahren** Werth der gesuchten Grösse repräsentirt, so ist die mittlere Abweichung vom Mittel auch noch nicht der mittlere Fehler der Beobachtungen. Dieser ist vielmehr

$$m = \sqrt{\frac{[w w]}{n}} \quad (65)$$

wenn man mit  $w_1 w_2 \dots w_n$  die Verbesserungen bezeichnet, welche den Beobachtungen  $l_1 l_2 \dots l_n$  zugelegt werden müssten, um den **wahren** Werth  $X$  der gesuchten Grösse zu erhalten. In dieser Gleichung bleibt uns freilich  $[w w]$  unbekannt, weil wir  $X$  nicht kennen, doch können wir wenigstens einen Näherungswerth für  $[w w]$  ermitteln.

Es ist zunächst:

$$\begin{aligned} X - l_1 &= w_1 \\ X - l_2 &= w_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\frac{n X - [l]}{n} = \frac{[w]}{n}$$

also

$$X - \frac{[l]}{n} = \frac{[w]}{n}$$

oder nach (61)

$$X - M = \frac{[w]}{n}$$

oder wenn wir  $X - M = \mu$  setzen, worin  $\mu$  den Fehler des arithmetischen Mittels bezeichnet:

$$\mu = \frac{w_1 + w_2 + \dots + w_n}{n}$$

$$\mu^2 = \frac{[w w]}{n^2} + 2 \frac{(w_1 w_2 + w_2 w_3 + \dots + w_{n-1} w_n)}{n^2}$$

Da nun die gleichen, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Fehler  $w$  gleiche Wahrscheinlichkeit für sich haben, so sind die Produkte in der Klammer des zweiten Gliedes rechts mit derselben Wahrscheinlichkeit als positiv, wie als negativ anzusehen, ihre wahrscheinlichste Summe ist also  $= 0$  zu setzen, woraus wir erhalten:

$$\mu^2 = \frac{[w w]}{n^2} \quad (66)$$

Da nun

$$\begin{aligned} X - l &= w \\ M - l &= v \end{aligned}$$

so ist

$$X - M = w - v$$

oder

$$\mu = w - v$$

$$w = \mu + v$$

oder einzeln:

$$\begin{aligned} w_1 &= \mu + v_1 \text{ und } w_1^2 = \mu^2 + 2 v_1 \mu + v_1^2 \\ w_2 &= \mu + v_2 \text{ ,, } w_2^2 = \mu^2 + 2 v_2 \mu + v_2^2 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\text{Summe } [w w] = n \mu^2 + 2 \mu [v] + [v v]$$

oder da  $[v] = 0$ :

$$[w w] = [v v] + n \mu^2 \quad (67)$$

oder da nach (66)  $n^2 \mu^2 = [w v]$ , also  $n \mu^2 = \frac{[w v]}{n}$ :

$$[w w] = [v v] + \frac{[w v]}{n}$$

woraus folgt:

$$[w w] = \frac{n [v v]}{n-1} \quad (68)$$

daher nach (65)

$$m = \sqrt{\frac{[v v]}{n-1}} \quad (69)$$

d. h. wir finden den mittleren Fehler der Beobachtungen, indem wir die Quadratsumme der Verbesserungen durch die Anzahl der **überschüssigen** Beobachtungen dividiren und die Quadratwurzel ziehen, (denn da zu einer einmaligen Bestimmung der Grösse  $x$  **eine** Beobachtung genügt, so sind von den  $n$  vorhandenen Beobachtungen  $n-1$  Beobachtungen überschüssige.

Den Fehler  $\mu$  des arithmetischen Mittels finden wir aus (66) und (68)

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \frac{n [v v]}{n^2 (n-1)} = \frac{[v v]}{n (n-1)} \\ \mu &= \sqrt{\frac{[v v]}{n (n-1)}} \end{aligned} \quad (70)$$

oder nach (69)  $\mu = \frac{m}{\sqrt{n}}$ . (70a)

D. h. wenn wir bei  $n$  Beobachtungen in jeder einzelnen Beobachtung einen mittleren Fehler  $m$  zu befürchten haben, so haben wir im arithmetischen Mittel dieser  $n$  Beobachtungen den Fehler  $\frac{m}{\sqrt{n}}$  zu befürchten. Der Fehler des arithmetischen Mittels ist also der Quadratwurzel aus der Zahl der Beobachtungen umgekehrt proportional.

### § 6.

#### Mittlerer Fehler zusammengesetzter Grössen.

Besteht ein Ganzes aus  $n$  Theilen, deren mittlere Fehler  $= m_1, m_2, \dots, m_n$  seien, so ist der mittlere Fehler des Ganzen:

$$m = \pm m_1 + (\pm m_2) + (\pm m_3) \dots + (\pm m_n).$$

worin die Werthe  $m$  theils positiv, theils negativ sind, und wenn wir diese Gleichung quadriren, mit Rücksicht auf beide gleich wahrscheinlichen Vorzeichen, vergl. die Bemerkung vor Gl. (66):

$$\begin{aligned} 1) \quad m^2 &= m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2 \\ 2) \quad m &= \sqrt{[m m]} \end{aligned}$$

Für  $m_1 = m_2 = m_3 \dots$  geht 1) über in:

$$m^2 = n m^2$$

also

$$m = m \sqrt{n} \quad (71)$$

d. h. der mittlere Fehler der ganzen Grösse ist der Quadratwurzel aus der Anzahl der Theile proportional.

Beispielsweise ist der mittlere Fehler einer gemessenen Länge proportional der Quadratwurzel der in derselben enthaltenen Kettenlängen, d. h. proportional der Quadratwurzel ihrer Länge. Ist also  $m$  der mittlere Fehler der Längeneinheit, so ist der mittlere Fehler der Länge  $s$ :

$$m = m \sqrt{s}.$$

Enthält aber die Längenmessung ausser den zufälligen Fehlern noch einen **constanten** Fehler, so ist dieser der Länge  $s$  proportional. Ist  $m'$  der constante Fehler der Längeneinheit, so ist der der ganzen Länge  $= m' s$ .

Ist  $m$  der mittlere Fehler der einzelnen Winkel eines Polygons, so ist  $m \sqrt{n}$  der Fehlbetrag der Winkelsumme gegen die theoretische Winkelsumme  $2n - 4 R.$ , oder zeigt umgekehrt die Summe der gemessenen Winkel eines Polygons gegen das Soll den Widerspruch  $w$ , so ist  $\frac{w}{\sqrt{n}}$  der mittlere Fehler der Beobachtungen.

§ 7.

**Gewichte der Beobachtungen. Allgemeines arithmetisches Mittel.**

Je genauer eine Beobachtung ist, um so geringer wird ihr mittlerer Fehler sein. Die Genauigkeit ist dem mittleren Fehler umgekehrt proportional. Demnach verhält sich z. B. die Genauigkeit des arithmetischen Mittels aus  $n$  Beobachtungen umgekehrt wie der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels, also nach (70a) direkt wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen. Ist demnach einer Beobachtung der mittlere Fehler  $m$  beizulegen, so werden 4, 9, 16 Beobachtungen erforderlich sein, wenn man den mittleren Fehler des Mittels auf  $\frac{1}{2} m$ ,  $\frac{1}{3} m$ ,  $\frac{1}{4} m$  herabdrücken will. Weiss man beispielsweise aus Erfahrung, dass man von einem Theodolit einen mittleren Fehler von  $30''$  zu erwarten hat, so wird man mit diesem Instrumente einen Winkel 4 mal, 9 mal etc. messen müssen, wenn man denselben  $15''$ ,  $10''$  etc. genau erhalten will. Oder hat man zwei Instrumente, von denen eines eine  $n$  mal so genaue Beobachtung gestattet, als das andere, so wird man mit letzterem  $n^2$  Beobachtungen ausführen müssen, um dieselbe Genauigkeit zu erreichen, welche das bessere Instrument mit einer einzigen Beobachtung erzielt. Hätte man mit beiden Instrumenten nur **eine** Beobachtung ausgeführt, so würde man der mit dem besseren Instrumente ausgeführten Beobachtung ein  $n^2$  faches Gewicht, gegenüber der mit dem anderen Instrumente ausgeführten Beobachtung beizumessen haben. Die den einzelnen Beobachtungen beizulegenden Gewichte verhalten sich also wie die Quadrate der Genauigkeiten, oder umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Fehler. Bezeichnen wir die Gewichte zweier Beobachtungen, denen die mittleren Fehler  $m_1$  und  $m_2$  beizumessen sind, mit  $p_1$  und  $p_2$ , so ist also

$$\left. \begin{aligned} p_1 : p_2 &= \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} \\ \text{oder} \quad m_1 : m_2 &= \frac{1}{\sqrt{p_1}} : \frac{1}{\sqrt{p_2}} \end{aligned} \right\} (72)$$

Hätten wir zwei Beobachtungen mit den Gewichten  $p_1$  und  $p_2$  und sollten wir den wahrscheinlichsten Werth der beobachteten Grösse ermitteln, so werden wir statt der einen Beobachtung mit dem Gewichte  $p_1$  setzen können  $p_1$  Beobachtungen mit dem Gewichte 1. Statt der Beobachtung mit dem Gewichte  $p_2$  können wir setzen  $p_2$  Beobachtungen mit dem Gewichte 1. Wir erhalten somit  $p_1 + p_2$  Be-

obachtungen von gleichem Gewichte, und werden nun das arithmetische Mittel aus denselben als wahrscheinlichsten Werth anzusehen haben. Seien die Beobachtungen mit den Gewichten  $p_1 p_2 \dots p_n = l_1 l_2 \dots l_n$ , so erhalten wir als wahrscheinlichsten Werth

$$x = \frac{l_1 + l_1 + \dots (p_1 \text{ mal}) + l_2 + l_2 + \dots (p_2 \text{ mal}) + \dots}{p_1 + p_2 + \dots}$$

oder

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots + l_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \quad (73)$$

Wir finden also das arithmetische Mittel aus mehreren Beobachtungen von verschiedenem Gewichte, — **allgemeines arithmetisches Mittel** —, wenn wir jede Beobachtung mit ihrem Gewichte multipliciren und die Summe dieser Produkte durch die Summe der Gewichte dividiren. Analog der Gl. (63) erhalten wir als Rechenprobe:

$$[p v] = 0. \quad (73a)$$

### § 8.

#### Die drei Hauptaufgaben der Ausgleichsrechnung.

1) **Ausgleichung direkter Beobachtungen.** Eine Grösse ist direkt wiederholt gemessen.

2) **Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.** Es sind die wahrscheinlichsten Werthe mehrerer von einander unabhängiger Grössen zu ermitteln, welche nicht direkt gemessen worden sind, an deren Stelle aber mehrere andere Grössen beobachtet sind, aus denen die gesuchten Grössen sich ableiten lassen, welche also Funktionen der Unbekannten sind.

3) **Ausgleichung bedingter Beobachtungen.** Die unmittelbar beobachteten Grössen müssen gewissen Bedingungen genügen, z. B. die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks muss  $180^\circ$  betragen.

Die Ausgleichung direkter Beobachtungen ist im § 5 behandelt. Wir haben gesehen, dass das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen den wahrscheinlichsten Werth der gesuchten Grösse liefert, was uns zu den Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} v_1 &= M - l_1 \\ v_2 &= M - l_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

führte. Der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen wurde  $m = \sqrt{\frac{[v v]}{n-1}}$  gefunden. Analog wird der mittlere Fehler, wenn den Beobachtungen verschiedene Gewichte beizumessen sind

$$m = \sqrt{\frac{p [v v]}{[p] - 1}} \quad (74)$$

erhalten. — Vergl. § 7.

Um den mittleren Fehler eines Theodolit zu bestimmen, beobachtet man einen Winkel wiederholt, bildet das arithmetische Mittel, sodann die Verbesserungen  $v$  und findet den mittleren Fehler des Instruments nach der Formel  $m = \sqrt{\frac{[v v]}{n-1}}$ .

### Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

#### a. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.

1) Nehmen wir an, es seien die Coordinaten  $x$  und  $y$  eines Punktes  $P$ , — Fig. 26 — zu ermitteln. Die Punkte  $P_1, P_2, P_3 \dots$  seien durch ihre Coordinaten gegeben, so können wir die Coordinaten des Punktes  $P$  durch vermittelnde Beobachtungen verschiedener Art bestimmen, z. B. indem wir die Neigungen  $a_1, a_2, a_3 \dots$  der Strahlen  $P_1 P, P_2 P \dots$  gegen die Abscissenaxe (Meridian) beobachten, oder indem wir die Strecken  $s_1, s_2, s_3 \dots$  messen und dergl. mehr. Nehmen wir an, wir hätten die Strecken  $s$  gemessen, so würden zwei Strecken zur Bestimmung des Punktes  $P$  genügen. Alle übrigen gemessenen Strecken sind überschüssige Beobachtungen. Durch die Messung **zweier** Strecken würde nur eine einmalige Bestimmung des Punktes möglich sein. Die bei der Beobachtung begangenen Fehler können nicht zu Tage treten. Wir erkennen dieselben aber sofort, wenn noch eine oder mehrere Strecken zu Gebote stehen. Gesetzt, wir hätten aus den Strecken  $s_1$  und  $s_2$  die Coordinaten des Punktes  $P$  berechnet, so können wir aus den so gewonnenen Coordinaten, die wir mit  $\eta$  und  $\chi$  bezeichnen wollen, und aus den bekannten Coordinaten der Punkte  $P_3, P_4 \dots$  die Strecken  $s_3, s_4 \dots$  mit Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes ableiten. Die Differenzen der so erhaltenen Streckenlängen gegen die durch direkte Messung gefundenen Längen  $s$  geben uns Aufschluss über die begangenen Fehler. Es wird nun darauf ankommen, den Punkt  $P$  durch **A**enderung seiner vorläufigen Coordinaten  $\eta$  und  $\chi$  so zu verschieben, dass, wenn die aus den so erhaltenen **endgültigen** Coordinaten abgeleiteten Strecken  $s$  mit den beobachteten Strecken verglichen werden, die Summe der Quadrate der sich ergebenden Unterschiede, (d. h. der an den gemessenen Strecken durch diese **A**enderung der Coordinaten angebrachten Verbesserungen), ein Minimum werde.

Es bedarf nicht der Erwähnung, dass zu einer **einmaligen** Bestimmung des Punktes  $P$  nicht immer grade **zwei** Elemente, wie hier zwei Strecken  $s$  oder zwei Neigungen  $a$ , erforderlich sind. Wir werden z. B. später sehen, dass wenn dieser Punkt durch blosse Winkelmessung auf demselben bestimmt werden soll, zu einer einmaligen Bestimmung 3 Richtungen von  $P$  aus nach gegebenen Punkten hin zu messen sind.

2) Wir bezeichnen nun allgemein die ausgeführten Beobachtungen mit  $l_1, l_2, l_3 \dots l_n$ , wählen aus denselben so viele Beobachtungen aus, als zu einer einmaligen Bestimmung der gesuchten Grössen  $y$  und  $x$  erforderlich sind, und berechnen aus diesen die genäherten Werthe  $\eta$  und  $\chi$ . Wir sind nunmehr im Stande, mit Hülfe der genäherten  $\eta$  und  $\chi$  umgekehrt die beobachteten Grössen herzuleiten, und bezeichnen die durch diese Rechnungen gefundenen Werthe correspondierend mit  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_n$ . Alsdann ergeben sich die Widersprüche:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - l_1 &= f_1 \\ \lambda_2 - l_2 &= f_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

oder allgemein:  $\lambda - l = f. \tag{75}$

**A**ndern wir nun die zur Berechnung der Grössen  $\lambda$  benutzten Coordinaten  $\eta$  und  $\chi$  um die kleinen Beträge  $\delta y$  und  $\delta x$ , so werden sich auch die Grössen  $\lambda$ , welche Functionen von  $\eta$  und  $\chi$  sind, ( $\lambda = f(\eta, \chi)$ ), um kleine Beträge  $\delta \lambda$  ändern, und wir sind im Stande, mit Hülfe der Differentialrechnung die **A**enderungen  $\delta \lambda$

durch die Aenderungen  $\delta y$  und  $\delta x$  auszudrücken. Bezeichnen wir nämlich die partiellen Differentialquotienten der Funktion  $\lambda = f(y, x)$  nach  $y$  und  $x$  mit  $a$  und  $b$ , so ist nach (29)

$$\delta \lambda = a \delta x + b \delta y. \quad (76)$$

Hierin verstehen wir unter  $\delta x$  und  $\delta y$  die uns noch unbekanntten Verbesserungen, welche wir den genäherten Werthen  $x$  und  $y$  beizulegen haben, um die wahrscheinlichsten Werthe  $x$  und  $y$  der gesuchten Grössen zu erhalten. Die Grössen  $\lambda$  werden durch diese Verbesserungen übergehen in  $\lambda + \delta \lambda$ . Vergleichen wir diese endgültigen Werthe  $\lambda + \delta \lambda$  mit den durch Beobachtung ermittelten Werthen  $l$ , so werden die bei der Beobachtung begangenen Fehler  $v$  erscheinen, oder richtiger die Verbesserungen, welche wir den einzelnen Beobachtungen  $l$  beizulegen haben, wenn die mit Hilfe dieser verbesserten Beobachtungen berechneten Grössen  $x$  und  $y$  ihren wahrscheinlichsten Werth erhalten sollen. Man findet:

$$\begin{aligned} v &= \lambda + \delta \lambda - l \\ \text{oder nach (76)} \quad v &= a \delta x + b \delta y + f \\ \text{oder einzeln:} \quad v_1 &= a_1 \delta x + b_1 \delta y + f_1 \\ v_2 &= a_2 \delta x + b_2 \delta y + f_2 \\ &\vdots \\ v_n &= a_n \delta x + b_n \delta y + f_n \end{aligned} \quad (77)$$

Es kommt nun darauf an, in diesen **Fehlergleichungen** die noch unbekanntten Coordinatenverbesserungen  $\delta y$  und  $\delta x$  so zu bestimmen, dass

$$v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = [v v] = \text{minimum.} \quad (78)$$

Wir werden zu dem Ende die Gleichungen (77) quadriren und erhalten  $n$  Gleichungen von der allgemeinen Form:

$$v^2 = a^2 \delta x^2 + 2 a b \delta x \delta y + 2 a f \delta x + b^2 \delta y^2 + 2 b f \delta y + f^2$$

und durch Summirung dieser  $n$  Gleichungen:

$$[v v] = [a a] \delta x^2 + 2 [a b] \delta x \delta y + 2 [a f] \delta x + [b b] \delta y^2 + 2 [b f] \delta y + [f f].$$

Soll nun  $[v v]$  ein Minimum werden, so haben wir diese Gleichung partiell nach  $\delta x$  und  $\delta y$  zu differentiiiren und die partiellen Differentialquotienten  $\frac{d[v v]}{d(\delta x)}$  und  $\frac{d[v v]}{d(\delta y)} = 0$  zu setzen und aus den so erhaltenen Gleichungen  $\delta x$  und  $\delta y$  zu entwickeln. Die Differentiation nach  $\delta x$  ergibt:

$$\frac{d[v v]}{d(\delta x)} = [a a] \delta x + 2 [a b] \delta x + 2 [a f]$$

und die Differentiation nach  $\delta y$ :

$$\frac{d[v v]}{d(\delta y)} = 2 [a b] \delta x + 2 [b b] \delta y + 2 [b f].$$

Setzen wir diese Differentialquotienten  $= 0$ , so ergeben sich die **Normalgleichungen**:

$$\begin{aligned} [a a] \delta x + [a b] \delta y + [a f] &= 0 \\ [a b] \delta x + [b b] \delta y + [b f] &= 0 \end{aligned} \quad (79)$$

3) Die **Auflösung der Normalgleichungen** nach den Unbekannten  $\delta y$  und  $\delta x$  erfolgt in der preussischen Vermessungsanweisung nach folgender Schablone: Dieselben erhalten zunächst durch Einführung kürzerer Zeichen die Form:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad 0 &= a_1 \delta x + b_1 \delta y + f_1 \\ \text{II} \quad 0 &= b_1 \delta x + b_2 \delta y + f_2 \end{aligned}$$

Aus I erhalten wir durch Multiplication mit  $\frac{b_1}{a_1}$

$$\text{III } 0 = b_1 \delta x + \frac{b_1}{a_1} b_1 \delta y + \frac{b_1}{a_1} f_1$$

und wenn wir III von II abziehen:

$$0 = \delta y \left( b_2 - \frac{b_1}{a_1} b_1 \right) + f_2 - \frac{f_1}{a_1} b_1.$$

Setzt man den Klammerausdruck =  $b_2$ , die Summe des zweiten und dritten Gliedes =  $\bar{f}_2$ , so erhält man

$$\text{IV } 0 = b_2 \delta y + \bar{f}_2$$

$$\delta y = - \frac{\bar{f}_2}{b_2} \quad (80)$$

Durch Einsetzung des Werthes für  $\delta y$  in I wird erhalten:

$$\delta x = - \frac{f_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} \delta y. \quad (81)$$

Rechenprobe: Eine Probe für die richtige Auflösung der Gleichungen kann man sich wie folgt verschaffen: Multiplicirt man (81) mit  $f_1$ , addirt beiderseits  $f_2 \delta y$ , so erhält man:

$$f_1 \delta x + f_2 \delta y = - \frac{f_1}{a_1} f_1 - \frac{b_1}{a_1} f_1 \delta y + f_2 \delta y$$

oder nach (80)

$$f_1 \delta x + f_2 \delta y = - \frac{f_1}{a_1} f_1 - \left( \frac{b_1}{a_1} f_1 - f_2 \right) \left( - \frac{\bar{f}_2}{b_2} \right)$$

$$= - \frac{f_1}{a_1} f_1 - \left( f_2 - \frac{b_1}{a_1} f_1 \right) \frac{\bar{f}_2}{b_2}$$

$$f_1 \delta x + f_2 \delta y = - \frac{f_1}{a_1} f_1 - \frac{\bar{f}_2}{b_2} \bar{f}_2.$$

Man erhält also eine Probe, wenn man

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= f_1 \delta x + f_2 \delta y \quad \text{und} \\ \Sigma &= - \frac{f_1}{a_1} f_1 - \frac{\bar{f}_2}{b_2} \bar{f}_2 \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

aus jeder dieser beiden Gleichungen berechnet und die beiden Resultate vergleicht.

Eine Probe für die richtige Bildung der Werthe  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $f_1$ ,  $b_2$  und  $f_2$  erhält man wie folgt: Man berechnet die Verbesserungen  $v$  nach den Gleichungen (77), quadirt die einzelnen  $v$  und die Fehler  $f$ , dann muss zunächst die Summe der Fehlerquadrate  $[ff]$  grösser sein, als die zum Minimum gewordene Summe  $[vv]$ . Eine schärfere Probe geht aber noch aus Folgendem hervor: Es ist:

$$[vy] = [(a \delta x + b \delta y + f)^2]$$

$$= [a a] \delta x^2 + 2[a b] \delta x \delta y + [b b] \delta y^2 + 2[a f] \delta x$$

$$+ 2[b f] \delta y + [f f]$$

$$[vv] = ([a a] \delta x + [a b] \delta y + [a f]) \delta x + ([a b] \delta x + [b b] \delta y + [b f]) \delta y$$

$$+ [a f] \delta x + [b f] \delta y + [f f]$$

die beiden Klammerausdrücke sind nach (79) = 0, also ist:

$$[vv] - [ff] = [a f] \delta x + [b f] \delta y$$

$$= f_1 \delta x + f_2 \delta y$$

oder nach (82)

$$[vv] - [ff] = \Sigma. \quad (83)$$

4) **Auflösung der Normalgleichungen mit vier Unbekannten:** Hätten wir 4 Normalgleichungen mit vier Unbekannten (vergl. § 26), von der Form:

$$\begin{aligned} 0 &= [a a] \delta x_a + [a b] \delta y_a + [a c] \delta x_b + [a d] \delta y_b + [a f] \\ 0 &= [a b] \delta x_a + [b b] \delta y_a + [b c] \delta x_b + [b d] \delta y_b + [b f] \\ 0 &= [a c] \delta x_a + [b c] \delta y_a + [c c] \delta x_b + [c d] \delta y_b + [c f] \\ 0 &= [a d] \delta x_a + [b d] \delta y_a + [c d] \delta x_b + [d d] \delta y_b + [d f] \end{aligned}$$

so schreiben wir dieselben zunächst unter einfacherer Bezeichnung der Faktoren:

$$\begin{aligned} \text{I } 0 &= a_1 \delta x_a + b_1 \delta y_a + c_1 \delta x_b + d_1 \delta y_b + f_1 \\ \text{II } 0 &= b_1 \delta x_a + b_2 \delta y_a + c_2 \delta x_b + d_2 \delta y_b + f_2 \\ \text{III } 0 &= c_1 \delta x_a + c_2 \delta y_a + c_3 \delta x_b + d_3 \delta y_b + f_3 \\ \text{IV } 0 &= d_1 \delta x_a + d_2 \delta y_a + d_3 \delta x_b + d_4 \delta y_b + f_4 \end{aligned}$$

Multiplizieren wir I der Reihe nach mit  $\frac{b_1}{a_1}$ ,  $\frac{c_1}{a_1}$ ,  $\frac{d_1}{a_1}$  und ziehen die so erhaltenen 3 Gleichungen der Reihe nach von den Gleichungen II, III, IV ab, so erhalten wir 3 neue Gleichungen mit nur 3 Unbekannten:

$$1) 0 = \left(b_2 - \frac{b_1}{a_1} b_1\right) \delta y_a + \left(c_2 - \frac{c_1}{a_1} b_1\right) \delta x_b + \left(d_2 - \frac{d_1}{a_1} b_1\right) \delta y_b + \left(f_2 - \frac{f_1}{a_1} b_1\right)$$

oder unter einfacherer Bezeichnung der Klammergrößen:

$$\text{V } 0 = b_2 \delta y_a + c_2 \delta x_b + d_2 \delta y_b + f_2$$

$$2) 0 = \left(c_2 - \frac{c_1}{a_1} b_1\right) \delta y_a + \left(c_3 - \frac{c_1}{a_1} c_1\right) \delta x_b + \left(d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1\right) \delta y_b + \left(f_3 - \frac{f_1}{a_1} c_1\right)$$

Hierin ist die erste Klammergröße = dem früheren  $c_2$ , also

$$\text{VI } c_2 \delta y_a + \left(c_3 - \frac{c_1}{a_1} c_1\right) \delta x_b + \left(d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1\right) \delta y_b + \left(f_3 - \frac{f_1}{a_1} c_1\right)$$

$$3) 0 = \left(d_2 - \frac{b_1}{a_1} d_1\right) \delta y_a + \left(d_3 - \frac{c_1}{a_1} d_1\right) \delta x_b + \left(d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1\right) \delta y_b + \left(f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1\right)$$

worin die erste Klammergröße =  $d_2$  ist, also:

$$\text{VII } 0 = d_2 \delta y_a + \left(d_3 - \frac{c_1}{a_1} d_1\right) \delta x_b + \left(d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1\right) \delta y_b + \left(f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1\right).$$

Multiplizieren wir die erste der drei neuen Gleichungen, (V), der Reihe nach mit  $\frac{c_2}{b_2}$  und  $\frac{d_2}{b_2}$  und ziehen die Resultate von den beiden anderen Gleichungen VI und VII ab, so erhalten wir zwei neue Gleichungen, welche nur noch die Unbekannten  $\delta x_b$  und  $\delta y_b$  enthalten:

$$1) 0 = \left(c_1 - \frac{c_1}{a_1} c_1 - \frac{c_2}{b_2} c_2\right) \delta x_b + \left(d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1 - \frac{d_2}{b_2} c_2\right) \delta y_b + \left(f_3 - \frac{f_1}{a_1} b_1 - \frac{f_2}{b_2} c_2\right)$$

oder wenn wir einfache Zeichen für die Klammergrößen einführen:

$$\text{VIII } 0 = c_3 \delta x_b + d_3 \delta y_b + f_3.$$

$$2) 0 = \left(d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1 - \frac{d_2}{b_2} c_2\right) \delta x_b + \left(d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{d_2}{b_2} d_2\right) \delta y_b + \left(f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{f_2}{b_2} d_2\right)$$

worin die erste Klammergröße gleich dem früheren  $d_3$  ist, also

$$\text{IX } 0 = d_3 \delta x_b + \left(d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{d_2}{b_2} d_2\right) \delta y_b + \left(f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{f_2}{b_2} d_2\right)$$

Multiplizieren wir weiter VIII mit  $\frac{d_3}{c_3}$  und ziehen das Resultat von IX ab, so ergibt sich:

$$0 = \left( d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{d_2}{b_2} d_2 - \frac{d_3}{c_3} d_3 \right) \delta y_b + \left( f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{f_2}{b_2} d_2 - \frac{f_3}{c_3} d_3 \right)$$

oder unter Einführung einfacherer Zeichen für die Klammergrößen:

$$X \quad 0 = d_4 \delta y_b + f_4.$$

Nunmehr ergeben sich die Unbekannten wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \delta y_b &= -\frac{f_4}{d_4} \quad (\text{aus X}) \\ \delta x_b &= -\frac{f_3}{c_3} - \frac{d_3}{c_3} \delta y_b \quad (\text{aus VIII}) \\ \delta y_a &= -\frac{f_2}{b_2} - \frac{d_2}{b_2} \delta y_b - \frac{c_2}{b_2} \delta x_b \quad (\text{aus V}) \\ \delta x_a &= -\frac{f_1}{a_1} - \frac{d_1}{a_1} \delta y_b - \frac{c_1}{a_1} \delta x_b - \frac{b_1}{a_1} \delta y_a \quad (\text{aus I}). \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Um das Gesetz des Coefficientenbaues deutlicher vor Augen zu führen, stellen wir die Coefficienten hier nochmals zusammen, und glauben, dass es danach leicht sein wird, auch bei noch mehreren Unbekannten die weiteren Coefficienten ohne Weiteres anzusetzen:

$$\left. \begin{aligned} b_2 - \frac{b_1}{a_1} b_1 &= b_2 \\ c_2 - \frac{c_1}{a_1} b_1 &= c_2 \\ d_2 - \frac{d_1}{a_1} b_1 &= d_2 \\ f_2 - \frac{f_1}{a_1} b_1 &= f_2 \\ c_3 - \frac{c_1}{a_1} c_1 - \frac{c_2}{b_2} c_2 &= c_3 \\ d_3 - \frac{d_1}{a_1} c_1 - \frac{d_2}{b_2} c_2 &= d_3 \\ f_3 - \frac{f_1}{a_1} c_1 - \frac{f_2}{b_2} c_2 &= f_3 \\ d_4 - \frac{d_1}{a_1} d_1 - \frac{d_2}{b_2} d_2 - \frac{d_3}{c_3} d_3 &= d_4 \\ f_4 - \frac{f_1}{a_1} d_1 - \frac{f_2}{b_2} d_2 - \frac{f_3}{c_3} d_3 &= f_4 \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Eine Probe für die richtige Auflösung der Gleichungen giebt die den Gleichungen (82) analoge Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= -\frac{f_1}{a_1} f_1 - \frac{f_2}{b_2} f_2 - \frac{f_3}{c_3} f_3 - \frac{f_4}{d_4} f_4 \\ \Sigma &= f_1 \delta x_a + f_2 \delta y_a + f_3 \delta x_b + f_4 \delta y_b \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

5) **Mittlerer Fehler.** Derselbe ist analog (69) zu bilden. Ist  $q$  die Anzahl der Beobachtungen, welche zu einer **einmaligen** Bestimmung der gesuchten Grössen erforderlich ist, so sind  $n - q$  Beobachtungen **überschüssige**. Der mittlere Fehler wird also sein:

$$m = \sqrt{\frac{[v v]}{n - q}}. \quad (87)$$

**b. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.**

Sind den einzelnen Beobachtungen verschiedene Gewichte beizulegen, so sind die Quadrate und Produkte der Coefficienten der Normalgleichungen mit den ihnen zukommenden Gewichten  $p$  zu multipliciren. Die Normalgleichungen für 2 Unbekannte werden also z. B. lauten:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= [p a a] \delta x + [p a b] \delta y + [p a f] \\ 0 &= [p a b] \delta x + [p b b] \delta y + [p b f] \end{aligned} \right\} \quad (88a)$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ergibt sich aus der Gleichung

$$m = \sqrt{\frac{[p v v]}{n - q}}. \quad (88b)$$

Die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen sind dann nach (72):

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}}, \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}} \text{ etc.} \quad (88c)$$

§ 10.

**Ausgleichung bedingter Beobachtungen.**

**a. Beobachtungen von gleicher Genauigkeit.**

1) Die Beobachtungen haben gewissen Bedingungen zu genügen, z. B. im Dreiecksnetz Fig. 27 folgenden:

- 1)  $\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = 180^\circ$
- 2)  $\alpha_4 + \beta_5 + \gamma_6 = 180^\circ$
- 3)  $\alpha_7 + \beta_8 + \gamma_9 = 180^\circ$
- 4)  $\gamma_3 + \gamma_6 + \gamma_9 = 360^\circ$

Zu diesen ohne Weiteres verständlichen Bedingungen kommt noch eine 5. Bedingung. Bezeichnen wir nämlich die drei innerhalb des Dreiecks liegenden Dreiecksseiten mit  $a, b, c$ , so ist nach dem Sinussatze:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_2} \cdot b \\ b &= \frac{\sin \alpha_4}{\sin \beta_5} \cdot c \\ c &= \frac{\sin \alpha_7}{\sin \beta_8} \cdot a \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \alpha_4}{\sin \beta_5} \cdot \frac{\sin \alpha_7}{\sin \beta_8} = 1 \quad (89)$$

oder

$$5) \log \sin \alpha_1 + \log \sin \alpha_4 + \log \sin \alpha_7 - \log \sin \beta_2 - \log \sin \beta_5 - \log \sin \beta_8 = 0. \quad (89a)$$

Wäre die Bedingung 5) nicht erfüllt, und berechnete man, von der als bekannt vorausgesetzten Dreiecksseite  $a$  ausgehend, nach und nach die Dreiecke I, II, III, so würde die aus dem Dreiecke III berechnete Länge für  $a$  nicht mit der der Rechnung zu Grunde gelegten Dreiecksseite  $a$  übereinstimmen, wenn auch die Bedingungen 1)–4) erfüllt sind.

Infolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler werden diese Bedingungen nicht ohne Weiteres genau erfüllt sein, sondern es werden sich kleine Widersprüche  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$  ergeben, und es entsteht die Aufgabe, die Winkel durch beigelegte Verbesserungen  $v_1, v_2, \dots, v_9$  so zu ändern, dass die Widersprüche beseitigt werden, während gleichzeitig die Summe der Quadrate dieser Verbesserungen ein Minimum werden, d. h. den kleinsten Werth erhalten soll, welchen die 5 Bedingungen zulassen.

Setzen wir in Gl. 5) die Differentialquotienten  $\frac{d \log \sin a_1}{d a_1}, \frac{d \log \sin a_4}{d a_4}$  etc.  $= a_1, a_4$  etc., so werden sich die Logarithmen der Sinus, — bei Aenderung der Winkel um die kleinen Beträge  $v_1, v_4$  etc. um die Beträge  $a_1 v_1, a_4 v_4$  etc. ändern. In den Gleichungen 1)–4) sind die Differentialquotienten  $\frac{d a}{d \alpha}, \frac{d \beta}{d \beta}$  etc. sämmtlich  $= 1$ , demnach die Aenderungen der Winkel, wie sich ja auch von selbst versteht,  $= 1 \cdot v_1, 1 \cdot v_2$  etc. Durch die Aenderungen  $v$  sollen nun die Widersprüche aufgehoben werden, es entstehen also aus den Gleichungen 1)–5) die Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + w_1 = 0 \\ \text{II} \quad & 1 \cdot v_4 + 1 \cdot v_5 + 1 \cdot v_6 + w_2 = 0 \\ \text{III} \quad & 1 \cdot v_7 + 1 \cdot v_8 + 1 \cdot v_9 + w_3 = 0 \\ \text{IV} \quad & 1 \cdot v_3 + 1 \cdot v_6 + 1 \cdot v_9 + w_4 = 0 \\ \text{V} \quad & a_1 v_1 + a_4 v_4 + a_7 v_7 - a_2 v_2 - a_5 v_5 - a_8 v_8 + w_5 = 0. \end{aligned}$$

Hierzu kommt als 6. Bedingung

$$v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_9^2 = \text{minim.}$$

welche erfordert, dass

$$v_1 d v_1 + v_2 d v_2 + \dots + v_9 d v_9 = 0.$$

2) In grösserer Allgemeinheit werden diese Gleichungen lauten:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1 \\ 0 &= b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2 \\ 0 &= c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n + w_3 \\ &\text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

worin die Differentialquotienten  $a, b, c = 0$  zu setzen sind, wenn das zugehörige  $v$  fehlt. (So fehlen beispielsweise in Gl. I  $v_4, v_5, \dots, v_9$ , in Gl. IV  $v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8$ , in Gl. V  $v_3, v_6, v_9$ .) — Ferner erfordert die Minimumsbedingung:

$$v_1 d v_1 + v_2 d v_2 + \dots + v_n d v_n = 0. \quad (91)$$

Durch Differentiation der Gleichung (90) wird erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 d v_1 + a_2 d v_2 + \dots + a_n d v_n \\ 0 &= b_1 d v_1 + b_2 d v_2 + \dots + b_n d v_n \\ &\text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen, deren Anzahl gleich  $b$  sei (Anzahl der Bedingungen), der Reihe nach mit  $b$  noch näher zu bestimmenden Coefficienten  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_b$  und addiren sie, so erhalten wir:

$$0 = (a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \dots) d v_1 + (a_2 k_1 + b_2 k_2 + \dots) d v_2 + \dots$$

welche Gleichung nach ihrem Bau mit (91) übereinstimmt.

Dieser Gleichung (91) wird also genügt werden, wenn wir in derselben die einzelnen  $v$  den correspondierenden Klammergrössen der letzten Gleichung gleichsetzen, also:



dieselben zugleich mit den Logarithmen der Sinus selbst. Lauter Winkel des ersten Quadranten vorausgesetzt, sind diese Coefficienten für die Winkel des Zählers in Gl. (89), also für die Winkel  $\alpha$ , positiv, für die des Nenners, also für die Winkel  $\beta$ , negativ. Die Coefficienten  $e$  und der Widerspruch  $w_5$  ermittelt sich demnach wie folgt:

		$e$		$e$
log sin $\alpha_1$	9,664 931	4,0		
" " $\alpha_4$	9,759 291	3,0		
" " $\alpha_7$	9,666 040	4,0		
log sin $\beta_2$			9,718 669	— 3,8
" " $\beta_5$			9,655 357	— 4,1
" " $\beta_8$			9,716 172	— 2,5
Summa	9,090 262		9,090 198	
Verglichen	9,090 198			
Mithin	$w_5 = +64$			

Zur Bildung der Quadrat- und Produktensummen [a a], [a b] etc. der Normalgleichungen (92) benutzen wir das folgende Schema, zu welchem bemerkt wird, dass im Fusse desselben für die daselbst ermittelten Quadrat- und Produktensummen [a a], [a b] etc. gemäss § 9, 4) die einfachen Bezeichnungen  $a_1, b_1$  etc.

Beobachtung	a	b	c	d	e	aa	ab	ac	ad	ae	bb	bc	bd	be	cc	cd	ce	dd	de	ee	
$\alpha_1$	1	0	0	0	+4,0	1	"	"	"	+4,0	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	16,0
$\beta_2$	1	0	0	0	—3,8	1	"	"	"	—3,8	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	14,4
$\gamma_3$	1	0	0	1	0	1	"	"	1	"	"	"	"	"	"	"	"	"	1	"	"
$\alpha_4$	0	1	0	0	+3,0	"	"	"	"	"	1	"	"	+3,0	"	"	"	"	"	"	9,0
$\beta_5$	0	1	0	0	—4,1	"	"	"	"	"	1	"	"	—4,1	"	"	"	"	"	"	16,8
$\gamma_6$	0	1	0	1	0	"	"	"	"	"	1	"	1	"	"	"	"	"	1	"	"
$\alpha_7$	0	0	1	0	+4,0	"	"	"	"	"	"	"	"	"	1	"	+4,0	"	"	"	16,0
$\beta_8$	0	0	1	0	—2,5	"	"	"	"	"	"	"	"	"	1	"	—2,5	"	"	"	6,2
$\gamma_9$	0	0	1	1	0	"	"	"	"	"	"	"	"	"	1	1	"	1	"	"	"
Summe [ ]	+3	0	0	+1	—0,2	+3	0	+1	—1,1	+3	+1	+1,5	+3	+1	+1,5	+3	0	+7,8			
	$a_1$	$b_1$	$c_1$	$d_1$	$e_1$	$b_2$	$c_2$	$d_2$	$e_2$	$c_3$	$d_3$	$e_3$	$d_4$	$e_4$	$e_5$						

eingeführt sind. Es sind nun sonach sämtliche Coefficienten der Normalgleichungen bekannt. Durch Einsetzen dieser Werthe in die Formeln (85) — in welchen hier  $w$  statt  $f$  zu schreiben ist, — und demnächst durch Einsetzen der daraus ermittelten Coefficienten  $b_2, c_2$  etc. in die Formeln (84) — in welchen  $k_2, k_4 \dots$  statt  $\delta y_b, \delta x_b \dots$  zu schreiben ist, — werden die Unbekannten  $k$  gefunden und hierauf aus den Correlatengleichungen (91a) die Winkelverbesserungen  $v$  in Sekunden.

**b. Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit.**

1) Kommen den Beobachtungen verschiedene Gewichte zu, so ändert das an den Bedingungsgleichungen natürlich nichts, da die Bedingungen dieselben bleiben. Da aber alsdann nicht die Summe  $[v v]$ , sondern  $[p v v]$  zum Minimum zu machen ist, so geht die Gleichung (91) über in

$$0 = p_1 v_1 d v_1 + p_2 v_2 d v_2 + \dots$$

und man kommt durch analoge Entwicklung zu den Correlatengleichungen:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{a_1 k_1}{p_1} + \frac{b_1 k_2}{p_2} + \frac{c_1 k_3}{p_3} + \dots \\ v_1 &= \frac{a_2 k_1}{p_1} + \frac{b_2 k_2}{p_2} + \frac{c_2 k_3}{p_3} + \dots \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

und erhält hieraus die Normalgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{a a}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{a b}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{a c}{p} \right] + \dots + w_1 &= 0 \\ \left[ \frac{b a}{p} \right] k_1 + \left[ \frac{b b}{p} \right] k_2 + \left[ \frac{b c}{p} \right] + \dots + w_2 &= 0 \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

2) Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist

$$m = \sqrt{\frac{[p v v]}{b}} \quad (96)$$

also der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen nach (72)

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}}, \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}}, \quad \text{etc.} \quad (97)$$

3) Beispiel.\*) Es habe die Messung der Winkel eines Dreiecks ergeben:

$$\begin{aligned} l_1 &= 62^\circ 37' 24'' \text{ und sei das Gewicht } p_1 = 16 \\ l_2 &= 48^\circ 47' 46'' \text{ " " " " " } p_2 = 25 \\ l_3 &= 68^\circ 34' 35'' \text{ " " " " " } p_3 = 36 \\ \text{Sa. } &179^\circ 59' 45'' \\ &w = -15'' \end{aligned}$$

Die Fehlergleichung lautet:  $v_1 + v_2 + v_3 - 15'' = 0$ .

Die Correlatengleichungen:

$$v_1 = \frac{1}{16} k_1, \quad v_2 = \frac{1}{25} k_1, \quad v_3 = \frac{1}{36} k_1$$

und die Normalgleichung:

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}\right) k_1 = +15''$$

also

$$k_1 = \frac{1500}{13}$$

somit

$$v_1 = \frac{1500}{13 \cdot 16} = +7,2''$$

$$v_2 = \frac{1500}{13 \cdot 25} = +4,6''$$

$$v_3 = \frac{1500}{13 \cdot 36} = +3,2''$$

$$\text{Sa. } +15'' = -w.$$

Man erkennt, dass die Verbesserungen  $v$  den Gewichten  $p$  umgekehrt proportional sind.

### III. Trigonometrische Messungen.

#### A. Dreiecksnetz.

§ 11.

#### Triangulirung.\*\*)

Bei Aufnahme grösserer Flächen ist es nöthig, vor Beginn der Einzelaufnahme eine Anzahl von Punkten mit möglichster Schärfe zu bestimmen, an welche dann die Detailmessungen immer wieder angeschlossen werden können, um eine Fortpflanzung und Anhäufung der unvermeidlichen Messungsfehler unmöglich zu machen. Die Bestimmung dieser Punkte geschieht durch trigonometrische Messungen. Zu dem Ende wird die aufzunehmende Fläche mit einem Netze möglichst weniger, also möglichst grosser Dreiecke überspannt. Für die Zwecke der niederen Geodäsie wird man bestrebt sein, diesem Dreiecksnetze eine möglichst einfache Form zu geben, z. B. die der Fig. 28 oder 29. Die Ausgleichung der Winkel dieses Netzes könnte nach § 10 erfolgen — (dass der Fall der Fig. 28 auf den der Fig. 27 zu-

\*) Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde.

\*\*) Dieser § ist hierher gestellt, um vorweg wenigstens eine Vorstellung von den Principien der Triangulirung zu schaffen. Zum vollen Verständniss desselben wird man erst gelangen, nachdem man bis § 26 vorgeschritten sein wird. Man wolle diesen § dann noch einmal wiederholen. Auch mag es sich empfehlen, vor der Repetition noch von den §§ 39–40 Kenntniss zu nehmen.

rückzuführen ist, erkennt man sofort, wenn man sich den Punkt D so verschoben denkt, dass er innerhalb des Dreiecks ABC zu liegen kommt), — doch wird man, so weit es sich um Zwecke der niederen Geodäsie handelt, im Allgemeinen diese verhältnissmässig bedeutende Rechenarbeit vermeiden, und zu einem anderen Ausgleichungsverfahren seine Zuflucht nehmen, (vergl. § 17), welches eben die möglichst einfache Gestaltung des Netzes erfordert. Hat man ein solches Netz entworfen, so ist es alsdann leicht, dasselbe durch Einschaltung weiterer Dreieckspunkte nach einer der in den nächsten Paragraphen zu erörternden Methoden nach Belieben zu ergänzen, und grade dieser Umstand macht es möglich, auch da, wo eine sehr dichte Lage der Dreieckspunkte nothwendig erscheint, (vergl. Fig. 30), dem Netze der Hauptdreiecke dennoch eine einfache Gestalt zu geben. Da die Dreiecksseiten des Hauptnetzes (Netz 1. Ordnung), eine beliebig grosse Länge haben können, so wird es häufig möglich sein, das ganze Gebiet mit einem einzigen Dreiecke zu überspannen, und dieses als Hauptdreiecksnetz anzusehen, indessen ist der Form der Fig. 28 der Vorzug zu geben, in welcher auf einer gemeinschaftlichen Basis zwei Dreiecke, ABC und ABD, stehen, deren Spitzen C und D durch gegenseitige Visur verbunden sind, wodurch es möglich wird, die Punkte C und D nach § 26 zu behandeln, d. h. ihre infolge der unvermeidlichen Fehler etwas fehlerhafte Lage durch gegenseitige Wechselverbesserungen zu berichtigen. Wo es nicht möglich ist, das ganze Messungsgebiet mit einem so einfachen Netze wenigstens annähernd zu überspannen, wird sich das Dreiecksnetz doch wenigstens aus Theilen von der Form der Fig. 28 oder ähnlicher einfacher Formen zusammensetzen lassen, wie das Hauptdreiecksnetz in Fig. 30.

Die Winkel des Hauptnetzes sind mit möglichster Schärfe zu messen, während die Winkel des Netzes niederer Ordnung, (in Fig. 30 punktirt dargestellt), eine geringere Genauigkeit beanspruchen. Ausser den Winkeln des gesammten Netzes misst man ferner die Neigung irgend einer Dreiecksseite, z. B. AB\*) gegen den Meridian, welchen man als Abscissenaxe des Coordinatensystems, für welches später die Coordinaten der Netzpunkte zu berechnen sind, ansieht. Endlich ist noch eine in ebenem Terrain gelegene Dreiecksseite, z. B. CD, (Basis), oder besser mehrere solcher Basen zu messen, worauf alle zur Berechnung des Netzes nöthigen Elemente bekannt sind.

Behufs Berechnung der Coordinaten der Netzpunkte verschafft man sich nun zunächst einen angenäherten Werth der Seite AF des Hauptnetzes, indem man von der bekannten Basis CD ausgehend nacheinander die Dreiecke CDE, CEA und CAF berechnet. Dass der gefundene Werth für AF wegen der sich häufenden Fehler nur ein angenäherter ist, kümmert uns vorläufig nicht.

Ist nun A der Nullpunkt des Coordinatensystems, so sind seine Coordinaten = 0. Die Coordinaten des Punktes F finden wir nach (11)

$$y_F = AF \sin v'_A \text{ und } x_F = AF \cos v'_A$$

somit sind die Coordinaten zweier Punkte des Hauptnetzes bekannt\*\*), worauf die

\*) Ist die Neigung einer Strecke AB auf Punkt A gemessen, so bezeichnet man sie mit  $v'_A$ , ist sie auf B gemessen, mit  $v''_A$ . Beide Neigungen differiren, wie man aus Fig. 30 leicht erkennt, um  $180^\circ$ .

\*\*) Hätte das Hauptnetz die Form der Fig. 29, so würde man die Winkel desselben nach § 17 auszugleichen und sämmtliche Dreiecksseiten zu berechnen haben, worauf die Coordinaten der Netzpunkte nach §§ 39—40 gefunden werden können. Wegen der vollständigen Ausgleichung der Winkel des Netzes können Schlussfehler sich nicht ergeben. Der § 41 findet hier somit keine Anwendung.

Punkte C und E, B und G nach § 26 gefunden werden können. Nunmehr wird zur Coordinatenberechnung des Netzes zweiter Ordnung geschritten, welche nach § 18—26 zu erfolgen hat.

Nachdem wir so sämtliche Coordinaten der Netzpunkte ermittelt, haben wir uns zu erinnern, dass der ganzen Rechnung nur ein **angenäherter** Werth der Basis AF zu Grunde liegt. Wir sind nun aber im Stande, aus den Coordinaten der Endpunkte der gemessenen Basen deren Längen herzuleiten\*) und mit den durch direkte Messung gefundenen Werthen derselben zu vergleichen. Seien die **gemessenen** Längen der Basen  $l_1, l_2, l_3 \dots$ , die aus den Coordinaten berechneten Längen correspondierend  $= \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$ , so ist, wenn man das Verhältniss  $l_1 : \lambda_1 = q_1, l_2 : \lambda_2 = q_2$  etc. setzt:  $l_1 = q_1 \lambda_1, l_2 = q_2 \lambda_2$  etc. Es bedeuten also die Werthe  $q$  diejenigen Zahlen, mit welchen man die aus den Coordinaten abgeleiteten Werthe zu multipliciren hat, um die gemessenen, genaueren Werthe  $l$  zu erhalten. Man bildet nun aus den einzelnen  $q$  das arithmetische Mittel

$$Q = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{n}$$

welches der Eins natürlich sehr nahe kommen wird, und multiplicirt mit  $Q$  die berechneten Coordinaten sämtlicher trigonometrischen Punkte des Netzes.

§ 12.

**Vorteilhafteste Gestalt der Dreiecke.**

In einem Dreiecke sei die Seite  $a$  und die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  gemessen, die Seiten  $b$  und  $c$  sind zu berechnen. Wenn nun die gemessenen Grössen kleine Fehler,  $da, d\alpha, d\beta, d\gamma$  enthalten, wie gross sind die Fehler, welche dadurch in den Seiten  $b$  und  $c$  entstehen?

Es ist 
$$b = a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad c = a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$\log b = \log a + \log \sin \beta - \log \sin \alpha$$

$$\log c = \log a + \log \sin \gamma - \log \sin \alpha$$

also wenn wir differentiiren, nach (37)

$$\frac{db}{b} = \frac{da}{a} + \frac{d \sin \beta}{\sin \beta} - \frac{d \sin \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{da}{a} + \frac{d \sin \gamma}{\sin \gamma} - \frac{d \sin \alpha}{\sin \alpha}$$

oder nach (39): 1) 
$$\frac{db}{b} = \frac{da}{a} + d\beta \cot \beta - d\alpha \cot \alpha$$

2) 
$$\frac{dc}{c} = \frac{da}{a} + d\gamma \cot \gamma - d\alpha \cot \alpha.$$

Sollen nun die in den einzelnen Dreiecksseiten entstehenden Fehler den Seiten selbst proportional, soll also z. B.  $\frac{db}{b} = \frac{da}{a}$  sein, so muss nach Gleichung 1)  $d\beta \cot \beta - d\alpha \cot \alpha = 0$  werden. Sind die Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen, so dass die Winkelfehler als gleich angenommen werden können, also  $d\alpha = \pm d\beta$ , so muss demnach  $\cot \beta = \pm \cot \alpha$  sein, also entweder  $\beta = \alpha$  oder  $\beta = 180 - \alpha$ . **Beiden**

\*) Damit diese Rechnungen möglichst zutreffende Resultate liefern, müssen die Basen zwischen zwei gut bestimmten Punkten gewählt werden.

Bedingungen wird genügt, wenn  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ; also  $\gamma = 0$  wird. Dieses Resultat ist wichtig bei indirekten Längenmessungen, wenn man eine Länge  $b$  durch Messung einer Hilfsbasis  $a$  und der Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ermitteln will. Man wird die Hilfsbasis so zu legen haben, dass der ihr und der der zu berechnenden Seite gegenüberliegende Winkel möglichst nahe bei  $90^\circ$  liegen. Sollen **beide** Seiten,  $b$  und  $c$ , berechnet werden, so bleibt nichts übrig, als den Winkel  $\alpha$  bei  $90^\circ$ , die Winkel  $\beta$  und  $\gamma$  bei  $45^\circ$  zu nehmen.

Bei Triangulationen, wo man nicht vorher weiss, **welche** Seite zur Berechnung jedes einzelnen Dreiecks dienen wird, wird man allen Verhältnissen gleichzeitig am besten Rechnung tragen, wenn man sämtliche Dreiecke des Netzes soviel als möglich **gleichseitig** zu machen sucht.

### § 13.

#### Signale.

Um die trigonometrischen Punkte mit dem Fernrohr des Winkelmessers anvisiren zu können, sind über denselben Signale zu errichten. Eine für die Zwecke der Kleintriangulirung empfehlenswerthe Konstruktion derselben ist folgende: (Fig. 31). Das Signal wird aus 5—10 m starken, 5—10 m langen Stangen zusammengesetzt. Fig. 31b zeigt die Verbindung derselben an der Spitze. Aus ca. 30—40 cm langen Stangen wird ein gleichseitiges Dreieck zusammengenagelt. In die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  werden die Spitzen der drei Hauptstrebestangen gelegt und durch einen durchgezogenen starken Eisendraht oder mit Nägeln befestigt. In das Dreieck hinein wird die verticale Signalstange geschoben und mit einem Nagel festgenagelt, die Spitze derselben mit einer Flagge versehen, und nun das ganze Signal aufgerichtet, und durch drei Mann über den trigonometrischen Punkt getragen, sodann das untere Ende der Signalstange in der aus Fig. 31a erkenntlichen Weise befestigt, das Signal durch Hin- und Herrücken genau centrirt, endlich neben den Fuss jeder Strebestange ein Pfahl geschlagen, und erstere mit diesem durch Nägel verbunden. Hierdurch wird das Signal ziemlich widerstandsfähig. Die Strebestangen können dann noch durch weitere leichtere Stangen gegenseitig verstrebt werden.

Der trigonometrische Punkt selbst wird durch ein vertical in die Erde versenktes Drainrohr unterirdisch vermarkt, und zur leichten Wiederauffindung dieser Marke von festen Punkten, (Grenzsteinen, Häuserecken und dergl.), aus aufgemessen.

### § 14.

#### Winkelmessung.

Nachdem sämtliche Signale errichtet sind, wird zur Winkelmessung geschritten. Man unterscheidet Richtungs- und Einzelbeobachtungen. Letztere sind bei Benutzung weniger fein getheilter Instrumente zu empfehlen, während bei besseren Instrumenten die Richtungsbeobachtungen wegen des geringeren Zeitverbrauchs den Vorzug verdienen.

1) **Richtungsbeobachtungen:** Nachdem das Instrument auf dem trigonometrischen Punkte gut centrirt und horizontal aufgestellt worden, wird das Fernrohr auf ein fernes, deutlich sichtbares trigonometrisches Signal scharf eingestellt, die Nonien abgelesen und die Ablesungen in ein geeignetes Formular — (trigon.

Formul. 1 der preussischen Vermessungsanweisung) — eingetragen. Sodann wird die Alhidade, nach Lösung ihrer Bremsschraube, rechts herumgedreht, das Fernrohr auf den folgenden Punkt eingestellt, die Nonien abgelesen etc. In dieser Weise werden nach und nach alle Signale im Kreise herum anvisirt, bis man wieder auf das Anfangssignal gekommen ist, wo man sich durch nochmaliges Ablesen der Nonien von dem unveränderten Stande des Instruments überzeugt. Hierauf wird das Fernrohr durchgeschlagen und die zweite Messung ebenso, jedoch in umgekehrter Reihenfolge der Signale, also durch linkssinnige Drehung der Alhidade, ausgeführt — (wobei die Nonien-Ablesungen in Spalte 6 des trigon. Formul. 1 von unten nach oben notirt werden). — Sobald man wieder auf den Anfangspunkt zurückgekehrt ist, ist die Beobachtung eines Satzes abgeschlossen. In derselben Weise werden die Beobachtungen mehrfach, je nach der erfordernten Genauigkeit wiederholt, (in der Regel 3 Sätze), wobei man jedoch zu beachten hat, dass zwischen je zwei Satzbeobachtungen der Limbus gegen die Alhidade etwas zu verschieben ist, so dass also dieselben Winkel jedesmal mit einer anderen Stelle der Kreistheilung gemessen werden, damit die Theilungsfehler des Instrumentes möglichst zur Ausgleichung kommen. Die Verschiebung muss, wenn  $n$  Sätze beobachtet werden sollen, jedesmal ca.  $\frac{180^\circ}{n}$  betragen, vorausgesetzt, dass das Instrument zwei um  $180^\circ$  von einander entfernte Nonien besitzt.

Nach beendeter Winkelmessung erfolgt die Mittelung der Nonienablesungen, und sodann in der Regel die Reduktion auf die Anfangsrichtung, indem von jedem einzelnen Richtungswinkel die Anfangsrichtung abgezogen wird, so dass diese selbst auf  $0^\circ$  reducirt wird, während die Gradzahlen der übrigen Richtungen unmittelbar die Neigungen gegen die Anfangsrichtung angeben.

2) **Einzelbeobachtungen:** Jeder Winkel wird einzeln, und zwar wie folgt gemessen: Man visirt auf das Signal des linken Schenkels, liest die Nonien ab, löst die Bremsschraube der Alhidade, stellt das Fernrohr auf das Signal des rechten Schenkels ein, löst nun die Bremsschraube des Limbus, während die Alhidade mit dem Limbus fest verbunden bleibt, führt Limbus sammt Alhidade zurück, und stellt das Fernrohr wieder auf das linke Signal ein. \*) Hierauf löst man wieder die Alhidade, geht auf den rechten Schenkel und wiederholt diese Manipulation so oft, als die beabsichtigte Genauigkeit der Winkelmessung dies erfordert. Schliesslich liest man wieder die Nonien ab. Subtrahirt man die Anfangsablesung von der Schlussablesung, dividirt den erhaltenen Rest durch die Anzahl der Repetitionen, so erhält man den gesuchten Winkel. Um beurtheilen zu können, wie viele Vollkreise der Nonien-Nullpunkt bei der Messung durchlaufen hat, ist es nöthig, nach der ersten Repetition eine Controllablesung an einem Nonius zu machen, welche den **einfachen** Winkel roh angiebt. — Die Messung ist nun mit durchgeschlagenem Fernrohr zu wiederholen, doch wird in der zweiten Fernrohrlage nicht **derselbe** Winkel, sondern besser seine Ergänzung zu  $360^\circ$  gemessen, und das gewonnene Resultat von  $360^\circ$  abgezogen. Es geschieht dies, um den Einfluss, welchen eine kleine Drehung des Stativs auf die Winkelmessung ausübt, möglichst auszugleichen.

\*) Das Zurückführen des Fernrohrs auf das linke Signal geschieht ebenfalls durch **rechts**sinnige Drehung, damit nicht das vielleicht sich etwas mit drehende Stativ sich wieder zurückdreht, um dann bei der Wiederholung der Messung von Neuem eine schädliche Rechtsdrehung ausführen zu können.

### Ausgleichung der Winkelbeobachtungen.

1) **Richtungsbeobachtungen.** Die einzelnen, auf die Anfangsrichtung reducirten Sätze werden (im trigon. Formul. 2 der preussischen Vermessungsanweisung) in der aus Beispiel 1 (vergl. das umstehende Formular), ersichtlichen Weise nebeneinander geschrieben und gemittelt, wobei die Mittel für die Richtungen des Hauptnetzes ( $\hat{\circ}$ ) und die des Netzes 2. Ordnung ( $\hat{\text{v}}$ ) in der Regel in getrennte Spalten eingetragen werden.

Es kommt bisweilen vor, dass man bei der Beobachtung eines Satzes, z. B. bei plötzlich eintretendem ungünstigen Lichte, ein- oder das andere mal das Signal irgend einer Richtung nicht auffinden kann, so dass in dem betreffenden Satze die betreffende Richtung fehlt, — so im Beispiel Nr. 2 im 3. Satze die Richtung nach  $\hat{\circ}$  7, im 4. Satze nach  $\hat{\circ}$  11. — In solchen Fällen müssten die durch die Mittelung erhaltenen endgültigen Richtungswinkel in den späteren Berechnungen eigentlich mit verschiedenen Gewichten geführt werden, doch sieht man hiervon in der Regel ab, und wählt statt dessen ein anderes Ausgleichungsverfahren. Man bildet nämlich zunächst in gewöhnlicher Weise die Mittel  $m_1$  aus den Richtungsbeobachtungen der einzelnen Sätze, berechnet sodann die Abweichungen der einzelnen Richtungen  $r_1$  vom Mittel, d. h. man bildet die Differenzen  $d = m_1 - r_1$ , addirt dieselben satzweise und dividirt sie durch die Anzahl der in den betreffenden Sätzen enthaltenen Beobachtungen. Das so für jeden Satz enthaltene Mittel der Differenzen  $d, o = \frac{[d]}{n}$  ist als Durchschnittsabweichung der einzelnen Richtungen  $r_1$  des betreffenden Satzes anzusehen. Es wird nun jede einzelne Richtung  $r_1$  um diesen Durchschnittsfehler des betreffenden Satzes verbessert und die so verbesserten Richtungen  $r_2 (= r_1 + o)$  wieder in gewöhnlicher Weise gemittelt. Zeigen diese neuen Mittel  $m_2$  gegen die Mittel  $m_1$  wesentliche Differenzen, — was in unserem Beispiele nicht der Fall, — so wiederholt man dasselbe Verfahren, indem man die Differenzen  $d_2 = m_2 - r_2$  bildet etc., wodurch die Mittel  $m_3$  erhalten werden, welche nun, — wenn nicht eine **nochmalige** Wiederholung nothwendig erscheint, als endgültige Richtungswinkel beibehalten werden.\*)

2) **Einzelbeobachtungen.** In dem die Regel bildenden Falle der Fig. 152, — gleiche Anfangsrichtung, — bedarf es keiner besonderen Ausgleichung. Im Falle der Fig. 153 wird man die Winkel  $a$  des Hauptnetzes auf  $360^\circ$ , sodann die Winkel  $\beta + \gamma$  auf die einzelnen Winkel  $a$  auszugleichen haben.

\*) Zur weiteren Erläuterung des an sich leicht verständlichen Princips dieses Verfahrens diene noch Folgendes. Gesetzt, man habe drei Sätze beobachtet. Die Richtungen der beiden ersten Sätze seien gegen das Mittel im Durchschnitt zu gross, so müssen die des dritten Satzes naturgemäss zu klein sein. Das Plus der beiden ersten Sätze wird durch das Minus im dritten Satze ausgeglichen. Fehlt nun im dritten Satze die Beobachtung für eine Richtung, so fehlt auch das ausgleichende Minus für dieselbe, das Mittel wird nur aus den beiden ersten Sätzen, also zu hoch erhalten. Dieser Fehler wird beseitigt, wenn die Richtungen in den einzelnen Sätzen um ihre Durchschnittsfehler verbessert, also die der ersten beiden Sätze vermindert werden. Hierdurch wird auch das Mittel für die im dritten Satze fehlende Richtung vermindert, während die Mittel für die **übrigen** Richtungen, wegen der gleichzeitigen Erhöhung der Richtungen des dritten Satzes, nahezu ungeändert bleiben.

Trigon. Formular 2 der preussischen Vermessungs-Anweisung.

Bezeichnung der Punkte	Satz 1			Satz 2			Satz 3			Satz 4			Mittel			Mittel						
	o	'	"	o	'	"	o	'	"	o	'	"	o	'	"	o	'	"				
<b>Nr. 1 Standpunkt <math>\hat{\odot}</math> 9.</b>																						
													$\hat{\odot}$	$\hat{\odot}$	$\bar{\odot}$	$\bar{\odot}$						
$\hat{\odot}$ 10	0	00	00	6	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00							
$\hat{\odot}$ 14	41	00	58	41	00	30	41	00	58	41	00	45	41	00	48							
$\bar{\odot}$ 8	106	46	00	106	46	20										106	46	10				
$\hat{\odot}$ 13	163	48	10	163	47	40	163	48	00	163	47	50	163	47	55							
	35	08		34	30		48	58		48	35		48	43		46	10					
<b>Nr. 2 Standpunkt <math>\hat{\odot}</math> 10.</b>																						
1. Richtungen $r_1$ <span style="float: right;"><math>m_1</math></span>																						
$\hat{\odot}$ 4	0	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00							
$\hat{\odot}$ 7	87	10	40	87	10	32	"	"	"	87	10	18	87	10	30							
$\hat{\odot}$ 8	100	16	00	100	15	50	100	15	50	100	16	43	100	15	51							
$\hat{\odot}$ 11	210	11	55	210	11	35	210	11	30	"	"	"	210	11	40							
$\hat{\odot}$ 13	215	10	25	215	10	20	215	10	20	215	10	15	215	10	20							
	49	00		48	17		37	50		37	16		48	21								
2. Differenzen $d = m_1 - r_1$																						
$\hat{\odot}$ 4			0			0			00			00										
$\hat{\odot}$ 7			- 10			- 2			"			+ 12										
$\hat{\odot}$ 8			- 9			+ 1			+ 1			+ 8										
$\hat{\odot}$ 11			- 15			+ 5			+ 10			"										
$\hat{\odot}$ 13			- 5			00			00			+ 5										
			[d]			+ 4			+ 11			+ 25										
$\sigma = \frac{[d]}{n}$			- 8			+ 1			+ 3			+ 6										
3. Richtungen $r_2 = r_1 + 0$ <span style="float: right;"><math>m_2</math></span>																						
$\hat{\odot}$ 4	359	59	52	0	00	01	0	00	03	0	00	06	0	00	00							
$\hat{\odot}$ 7	87	10	32	87	10	33	"	"	"	87	10	24	87	10	30							
$\hat{\odot}$ 8	100	15	52	100	15	51	100	15	53	100	16	49	100	15	51							
$\hat{\odot}$ 11	210	11	47	210	11	36	210	11	33	"	"	"	210	11	39							
$\hat{\odot}$ 13	215	10	17	215	10	21	215	10	23	215	10	21	215	10	20							
	48	20		48	22		37	52		37	50		48	20								

## § 16.

## Centriren der Winkel.

1) Wenn Kirchturmspitzen und dergl. als trigonometrische Punkte benutzt werden, so kann man das Instrument nicht centrisch über denselben aufstellen. Man stellt dasselbe dann in einiger Entfernung **neben** das Centrum der Station, z. B. in S, Fig. 32, und beobachtet statt der Richtungen  $\alpha_{c_1}, \alpha_{c_2} \dots$  etc. die Richtungen  $\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2} \dots$  etc. Um aus letzteren die Richtungen  $\alpha_c$  zu erhalten, hat man den Richtungen  $\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2} \dots$  etc. bezüglich die Winkel  $\delta_1, \delta_2 \dots$  etc. zuzulegen. Es ist also, wie eine durch C zu SP<sub>1</sub> gezogene Parallele sofort erkennen lässt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{c_1} &= \alpha_{s_1} + \delta_1 \\ \alpha_{c_2} &= \alpha_{s_2} + \delta_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (98a)$$

Zur Berechnung der Winkel  $\delta_1, \delta_2 \dots$  hat man, wenn e die Excentricität, d. h. die Entfernung CS,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$  die Winkel, welche die Verbindende CS mit den Dreiecksseiten SP<sub>1</sub>, SP<sub>2</sub> ... einschliesst, und  $s_1, s_2, s_3$  etc. die Längen P<sub>1</sub>C, P<sub>2</sub>C ... etc. bezeichnen:

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta_1 &= e \frac{\sin \varepsilon_1}{s_1} \\ \sin \delta_2 &= e \frac{\sin \varepsilon_2}{s_2} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Die Längen s erhält man genau genug durch eine vorläufige Dreiecksberechnung, z. B. der Dreiecke P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>C etc., in welchen jedesmal nur der Winkel bei C noch unbekannt ist, wenn, wie wir voraussetzen, die Beobachtungen auf sämtlichen Dreieckspunkten, also auch auf P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub> ... bereits stattgefunden haben. Der Winkel bei C ergibt sich dann als Supplement der beiden anderen Winkel. Die Grössen e und  $\varepsilon$  müssen durch Messung bestimmt werden.

Da die Winkel  $\delta$  in der Regel sehr klein sind, so kann man statt des  $\sin \delta$  den in Theilen des Radius ausgedrückten Bogen  $\delta$  selbst setzen und hat dann nach (98a)  $\delta = e \frac{\sin \varepsilon}{s}$ , oder um  $\delta$  in Sekunden zu erhalten, nach Thl. I, § 32, 1)

$$\delta'' = \rho'' e \frac{\sin \varepsilon}{s} \quad (99)$$

Nach (47) ist, wenn man alle Glieder, welche x in höherer als der 3. Potenz enthalten, vernachlässigt,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}.$$

Der bei Anwendung der Näherungsformel (99) begangene Fehler ist also gleich  $\frac{\delta^3}{6}$ . Soll derselbe den Werth 0,5'', d. h. in analytischem Masse  $\frac{0,5}{\rho''} = 0,000025$  nicht überschreiten, so ergibt sich als Grenzwert für  $\delta$

$$\frac{\delta^3}{6} = 0,0000025$$

$$\delta = \sqrt[3]{0,000015} = \frac{1}{41}.$$

\*) Es sind dies die im trigon. Formul. 4 der preussischen Vermessungsanweisung zur Anwendung kommenden Formeln.

Steht die Strecke  $e$  senkrecht zur Strecke  $s$ , so ist  $\frac{e}{s}$  annähernd das analytische Mass für den Winkel  $\delta$ . Man wird daher die Formel (99) nur anwenden, wenn das Verhältniss  $e:s$  den Werth  $\frac{1}{41}$  nicht übersteigt, kann dann aber versichert sein, dass im **ungünstigsten** Falle, (wenn nämlich  $e$  senkrecht zu  $s$  steht), der begangene Fehler nicht den Werth  $0,5''$  übersteigt.

2) Die obenentwickelten Formeln finden auch Anwendung, wenn nicht das Instrument auf der Beobachtungsstation, sondern das Signal eines Zielpunktes excentrisch steht. Hier handelt es sich indessen meistens um sehr geringe Excentricität, welche durch schiefen Stand des Signals verursacht wird. Man hat dann die Signalspitze genau auf die Erdoberfläche zu projiciren und kann hierauf am einfachsten wie folgt verfahren: Man trägt die im Centrum der betreffenden Station nach den umliegenden Punkten beobachteten Richtungen mittelst eines Transporteurs auf, Fig. 33, trägt die in ihrer Lage zum Centrum  $C$  genau eingemessene projecirte Signalspitze  $S$  unter Anwendung eines grossen Massstabs (etwa 1:5) in die Figur ein, fällt von  $S$  auf die einzelnen Richtungsstrahlen  $Lothe$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  etc. und erhält die Winkel  $\delta_1, \delta_2 \dots$  in analytischem Masse  $= \frac{h_1}{s_1}, \frac{h_2}{s_2} \dots$ , oder wenn  $h$  in cm,  $s$  in m ausgedrückt ist  $= \frac{h_1}{100 s_1}, \frac{h_2}{100 s_2}$ , also in Sekunden, wenn man  $\frac{\rho''}{100} = k$  setzt,  $= h_1 \frac{k}{s}, h_2 \frac{k}{s} \dots$ , worin die Grössen  $\frac{k}{s}$  aus Tabelle III des Anhangs entnommen werden können.

3) Die Excentricität  $e$  in den Formeln (98) und (99) wird man in den seltensten Fällen **direkt** messen können. Man misst dann eine Basis, deren Anfangspunkt in  $S$  liegt, und deren Endpunkt  $A$  heissen möge, und beobachtet die Winkel  $ASC$  und  $SAC$ , wodurch  $SC = e$  bekannt wird. — Liegt  $S$  auf der Gallerie eines Thurmes, dessen Spitze Stationscentrum ist, so kann man weder eine Basis  $SA$  noch den Winkel  $ASC$  messen. In diesem und ähnlichen Fällen wählt man eine Basis  $AB = g$ , Fig. 34, beobachtet von  $S$  nach  $A$  und  $B$  und von  $A$  und  $B$  nach  $C$  und  $S$ , dann ist zunächst:

$$\varepsilon = \angle P_o SB - \psi$$

und es kommt nun darauf an,  $\angle \psi$  und die Excentricität  $e$  zu berechnen. Es ist:

$$\text{tang } \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \text{tang } \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \frac{a + b}{a - b}$$

$$a = g \frac{\sin \gamma_s}{\sin(\beta_s + \gamma_s)}$$

$$b = g \frac{\sin \gamma_c}{\sin(\beta_c + \gamma_c)}$$

oder unter Einführung kürzerer Zeichen:

$$a = g m_s$$

$$b = g m_c$$

$$\text{daher} \quad \text{tang } \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \text{tang } \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \frac{m_c + m_s}{m_c - m_s}$$

$$= \text{tang } \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \frac{\frac{m_c}{m_s} + 1}{\frac{m_c}{m_s} - 1}$$

oder für  $\frac{m_c}{m_s} = \text{tang } \mu$ :

$$\begin{aligned} \text{tang } \frac{1}{2} (\varphi - \psi) &= \text{tang } \frac{1}{2} (\varphi + \psi) \frac{\text{tang } \mu + 1}{\text{tang } \mu - 1} \\ &= \text{tang } \frac{1}{2} (\varphi + \psi) \frac{\text{tang } \frac{\pi}{4} + \text{tang } \mu}{\text{tang } \frac{\pi}{4} \text{ tang } \mu - 1} \end{aligned}$$

oder  $\text{tang } \frac{1}{2} (\varphi - \psi) = \text{tang } \frac{1}{2} (\varphi + \psi) \text{cot} \left( \frac{\pi}{4} - \mu \right).$  (100)\*

Da auch  $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2} - \beta$  bekannt, so können nunmehr  $\varphi$  und  $\psi$  gefunden werden.

Zur Berechnung von  $CS = e$  hat man dann:

$$e = \frac{a \sin \beta}{\sin \varphi} \text{ und } e = \frac{b \sin \beta}{\sin \psi}$$

oder  $e = \frac{m_s}{\sin \varphi} g \sin \beta,$  und  $e = \frac{m_c}{\sin \psi} g \sin \beta.$  (101)\*

§ 17.

**Netz-Ausgleichung.**

Wir haben im § 10 andeutungsweise die Ausgleichung der Winkel eines Dreiecksnetzes nach der Methode der kl. Quadrate behandelt. Für die Zwecke der niederen Geodäsie werden wir uns indessen mit einer weniger strengen Methode begnügen können, welche hier noch besprochen werden soll. Die Winkel des Netzes Fig. 29 haben, wie wir gesehen haben, folgenden Bedingungen zu genügen:

1) in jedem der Dreiecke I—V muss die Summe der drei Winkel  $\alpha + \beta + \gamma$   $180^\circ$  betragen.

2) die Summe der Winkel  $\beta$  muss  $360^\circ$  betragen.

3) es muss der Gleichung genügt werden

$$\log \sin \alpha_1 + \log \sin \alpha_2 + \dots + \log \sin \alpha_n - \log \sin \gamma_1 - \log \sin \gamma_2 - \dots - \log \sin \gamma_n = 0.$$

Bezeichnen nun:

a)  $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$  die Widersprüche gegen die Bedingungen zu 1)

b) (1), (2), (3),  $\dots$  (n) die danach jedem einzelnen Winkel in den Dreiecken I, II, III  $\dots$  n beizulegenden Verbesserungen,

c)  $f_s$  den Fehler der Winkelsumme  $[\beta]$  gegen den Sollwerth  $360^\circ$ ,

d) (s) die danach jedem Winkel  $\beta$  beizulegende Verbesserung, so muss zunächst sein:

$$\text{I} \left\{ \begin{array}{l} 3(1) + (s) - f_1 = 0 \\ 3(2) + (s) - f_2 = 0 \\ \vdots \\ 3(n) + (s) - f_n = 0. \end{array} \right.$$

$$\text{II} \quad n(s) + (1) + (2) + \dots + (n) = 0$$

\*) Die Formeln (100) und (101) kommen im trigon. Formul. 3 der preussischen Vermessungsanweisung zur Anwendung.

denn auf die Winkel  $\beta_1, \beta_2 \dots$  treffen neben den Verbesserungen (s) noch bezüglich die Verbesserungen (1), (2) . . . (n).

Multiplizieren wir Gleichung II mit 3, so erhalten wir:

$$1) \quad 3n(s) + 3[(1) + (2) + \dots + (n)] - 3f_s = 0$$

und durch Addition der Gleichungen I

$$2) \quad 3[(1) + (2) + \dots + (n)] + n(s) - [f] = 0$$

und wenn wir 1) von 2) subtrahieren:

$$2n(s) - 3f_s + [f] = 0$$

$$\text{also} \quad (s) = \frac{-[f] + 3f_s}{2n} \quad (102)$$

worauf wir für die Verbesserungen (1), (2), (3) . . . (n) aus den Gleichungen I erhalten

$$\left. \begin{aligned} (1) &= \frac{1}{3}(f_1 - (s)) \\ (2) &= \frac{1}{3}(f_2 - (s)) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ (n) &= \frac{1}{3}(f_n - (s)). \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Von diesen Verbesserungen fallen auf die Winkel  $\beta$  bezüglich die Verbesserungen (1) + (s), (2) + (s) . . . (n) + (s), während die Winkel  $\alpha$  und  $\gamma$  im Dreieck I die Verbesserungen (1), im Dreieck II die Verbesserungen (2) etc. erhalten. — Weiter haben nun aber die Winkel  $\alpha$  und  $\gamma$  noch der Bedingung 3) zu genügen, wonach:

$$\log \sin \alpha_1 + \log \sin \alpha_2 + \dots + \log \sin \alpha_n - \log \sin \gamma_1 - \dots - \log \sin \gamma_n = 0.$$

Der gegen diese Bedingung sich ergebende Widerspruch sei  $\varphi$ , die den einzelnen Winkeln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_1, \gamma_2, \dots$  zufallende Verbesserung sei  $v''$ , und seien  $d\alpha_1, d\alpha_2, \dots, d\gamma_1, d\gamma_2, \dots$  die Aenderungen, welche die Logarithmen der Sinus erleiden, wenn die Winkel  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_1, \gamma_2, \dots$  um  $1''$  geändert werden, so sind die Aenderungen der Sinus bei einer Aenderung der Winkel um  $v'' = d\alpha_1 v'', d\alpha_2 v''$  etc., und es muss sein:

$$v''(d\alpha_1 + d\alpha_2 + \dots + d\alpha_n - d\gamma_1 - d\gamma_2 - \dots - d\gamma_n) = \varphi$$

$$\text{also} \quad v'' = \frac{\varphi}{[d]}. \quad (104)$$

Die Coefficienten  $da$  und  $d\gamma$  sind aus den Logarithmentafeln als Tafeldifferenz gleichzeitig mit den Logarithmen der Sinus zu entnehmen. Dieselben sind für die Winkel  $\gamma$  mit negativem Vorzeichen einzuführen. Demnach werden auch die Verbesserungen der Winkel  $\gamma$  das **entgegengesetzte** Vorzeichen der den Winkeln  $\alpha$  zufallenden Verbesserungen erhalten, so dass die durch die Verbesserungen (103) erfüllten Bedingungen zu 1) durch die neuen Verbesserungen  $v$  nicht gestört werden, ebensowenig wie die durch (102) erfüllte Bedingung zu 2), da die Winkel  $\beta$  durch die Verbesserungen  $v$  überhaupt nicht berührt werden.

Hat man  $v$  berechnet, so ergeben sich die Verbesserungen der Logarithmen der Sinus gleich  $v d\alpha_1, v d\alpha_2 \dots$  etc. Diese Logarithmen brauchen also für die verbesserten Winkel zum Zwecke der nunmehr erfolgenden Berechnung der Dreiecksseiten nicht nochmals aufgeschlagen zu werden.

Auf den Fall der Fig. 28 lassen sich, wie bereits im § 11 angedeutet wurde, dieselben Formeln anwenden, doch verdient für diesen Fall das Verfahren des § 26 den Vorzug.

## B. Trigonometrische Punkteinschaltung.

### § 18.

#### Methoden der Punktbestimmung.

Die trigonometrische Punktbestimmung durch Punkteinschaltung setzt voraus, dass bereits andere trigonometrische Punkte, welche als **gegebene** Punkte bezeichnet werden, ihrer Lage nach, also durch ihre Coordinaten bekannt seien. Soll ein neuer Punkt in das Netz der gegebenen Punkte eingeschaltet werden, so geschieht dies nach einer der folgenden Methoden:

**a) Vorwärtseinschneiden:** Die Bestimmung erfolgt lediglich durch Winkelmessung auf **gegebenen** Punkten, und zwar werden auf diesen die Richtungen nach den neuzubestimmenden Punkten hin, sowie auch solche nach anderen gegebenen Punkten beobachtet. Diesen Fall stellt Fig. 35 dar, in welcher  $\varnothing 5$  den neuzubestimmenden Punkt bezeichnet. Dass einzelne der in dieser Figur dargestellten Richtungen, z. B.  $\hat{\odot} 3 - \hat{\odot} 4$ , zur Hälfte punktirt, zur Hälfte voll ausgezogen sind, bedeutet, dass diese Richtungen nur **einseitig** beobachtet wurden, d. h. es ist z. B. auf  $\hat{\odot} 3$  die Richtung nach  $\hat{\odot} 4$ , nicht aber umgekehrt auf  $\hat{\odot} 4$  die Richtung nach  $\hat{\odot} 3$  beobachtet. Danach lehrt ein Blick auf die Figur, dass auf dem neuzubestimmenden Punkte überhaupt keine Beobachtungen ausgeführt sind.

Man erkennt nun sofort, dass zur Bestimmung des Punktes  $\varnothing 5$  die Beobachtungen auf 2 gegebenen Punkten genügen würden, z. B. die Beobachtungen auf  $\hat{\odot} 1$  und  $\hat{\odot} 2$ , denn es sind dadurch die Richtungen  $\hat{\odot} 1 - \varnothing 5$  und  $\hat{\odot} 2 - \varnothing 5$ , also 2 geometrische Oerter für  $\varnothing 5$  bekannt, allein, man hat durch blosse Messung der beiden Winkel an der Basis  $\hat{\odot} 1 - \hat{\odot} 2$  des Dreiecks  $\hat{\odot} 1 \varnothing 5 \hat{\odot} 2$  weder eine Controlle für die Winkelmessung, noch für die richtige Bestimmung der beiden **gegebenen** Punkte. Fehler in diesen Bestimmungselementen stellen sich erst durch Beobachtung **überschüssiger** Richtungen heraus, wie sie die Figur nachweist.

Weitere überschüssige Richtungen würde man erhalten haben, wenn man auch auf  $\varnothing 5$  die Richtungen nach gegebenen Punkten hin\*) gemessen hätte. Um diesen Fall des **combinirten Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens** in unserer Figur darzustellen, würden wir die auf  $\varnothing 5$  beobachteten Richtungen **voll** anzuziehen haben.

**b) Rückwärtseinschneiden.** Es werden nur auf dem zu bestimmenden Punkte  $\varnothing 5$ , Fig. 36, die Richtungen nach gegebenen Punkten beobachtet. Hätte man nur **zwei** Richtungen, z. B.  $\varnothing 5 - \hat{\odot} 1$  und  $\varnothing 5 - \hat{\odot} 2$ , d. h. den Winkel  $\alpha$  gemessen, so hätte man erst **einen** geometrischen Ort für  $\varnothing 5$ , nämlich die Peripherie des den Winkel  $\alpha$  als Peripheriewinkel umfassenden durch  $\hat{\odot} 1$  und  $\hat{\odot} 2$  gelegten Kreises. Man braucht also zur Bestimmung von  $\varnothing 5$  noch mindestens eine 3te Richtung. Im Falle unserer Figur ist also nur **eine** überschüssige, fehlerauflösende und eine **Ausgleichung** derselben ermöglichende Beobachtung vorhanden.

**c) Combinirtes Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden.** Die Beobachtung erfolgt sowohl auf den gegebenen, als auch auf dem zu bestimmenden Punkte. — Vergl. den Schluss zu a).

Weitere Methoden, durch welche mehrere Punkte **gleichzeitig** eingeschaltet werden, die aber bezüglich der Güte der zu erzielenden Resultate den oben er-

\*) Sogen. Rückwärtsrichtungen, im Gegensatz zu den auf den **gegebenen** Punkten beobachteten Vorwärtsrichtungen.

läuterten Methoden nachstehen, das sogen. **Einschalten** und **Einketten**, werden wir in den Paragraphen 28 und 29 kennen lernen.

§ 19.

**Berechnung der Neigungen.\*)**

Unter der **Neigung** einer trigonometrischen Linie verstehen wir denjenigen Winkel, welchen diese Linie mit der positiven Richtung der Abscissenaxe einschliesst, und zwar von dieser aus **rechts** herum zählend. Die Neigung einer Linie,  $P_a P_b$ , Fig. 37, kann in  $P_a$  oder in  $P_b$  gemessen sein, und wird im Folgenden im ersteren Falle mit  $r_a^b$ , im letzteren Falle mit  $r_b^a$  bezeichnet. Es leuchtet ein, dass beide Neigungen um  $180^\circ$  verschieden sind.

Wendet man bei trigonometrischer Punkteinschaltung die Methode des Vorwärts- oder des combinirten Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens an, so ist, wie wir später sehen werden, (§ 20), die Kenntniss der Neigungen aller derjenigen Linien zwischen **gegebenen** Punkten erforderlich, für welche Richtungsbeobachtungen vorliegen. Diese müssen also vorher abgeleitet werden.

Sind  $y_a$  und  $x_a$ ,  $y_b$  und  $x_b$  die Coordinaten der Punkte  $P_a$  und  $P_b$ , Fig. 37, und setzt man  $y_b - y_a = \Delta y$ ,  $x_b - x_a = \Delta x$ , so ist

$$\text{tang } r_a^b = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (105)$$

Zur Controlle bestimmt man die Neigung noch aus einer zweiten Formel. Bekanntlich ist:

$$\text{tang } (\alpha + \beta) = \frac{\text{tang } \alpha + \text{tang } \beta}{1 - \text{tang } \alpha \text{ tang } \beta}$$

also 
$$\text{tang } \left( \frac{\pi}{4} + r \right) = \frac{\text{tang } \frac{\pi}{4} + \text{tang } r}{1 - \text{tang } \frac{\pi}{4} \text{ tang } r} = \frac{1 + \text{tang } r}{1 - \text{tang } r}$$

$$\text{tang } \left( \frac{\pi}{4} + r \right) = \frac{1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}}{1 - \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y}. \quad (106)$$

§ 20.

**Orientirung der beobachteten Richtungen.**

Sind die Neigungen  $r$  der trigonometrischen Linien zwischen den **gegebenen** Punkten nach vorigem § ermittelt, so lassen sich aus diesen und den nach neu zu bestimmenden Punkten ausgeführten Richtungsbeobachtungen die noch unbekanntenen Neigungen  $\varphi$  derjenigen trigonometrischen Linien bestimmen, welche die **gegebenen** Punkte mit den **zu bestimmenden** Punkten verbinden.

Sind auf dem Punkte P, Fig. 38, die Richtungen  $a_1, a_2, a_3$  nach den gegebenen Punkten  $P_1, P_2, P_3$ , und die Richtung  $a_4$  nach dem neu zu bestimmenden

\*) Trigonom. Formul. 8 der pr. Verm.-Anw.

Punkte  $P_4$  beobachtet, so findet man die Neigung  $\varphi_4$  der trigonometrischen Linie  $P - P_4$

$$\varphi_4 = o_0 + \alpha_4 \quad (107)$$

worin  $o_0$ , (Orientierungswinkel), die Neigung der Nullrichtung, (Anfangsrichtung),  $\alpha_0$  bezeichnet. Man findet:

$$\left. \begin{aligned} o_0 &= r_1 - \alpha_1 \\ o_0 &= r_2 - \alpha_2 \\ o_0 &= r_3 - \alpha_3 \\ &\vdots \\ o_0 &= r_n - \alpha_n \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

Wegen der Fehler der Neigungen  $r$  und der Beobachtungen  $\alpha$  werden die aus den Gleichungen (108) ermittelten Werthe für  $o_0$  nicht genau übereinstimmen, und wird daher das arithmetische Mittel

$$o_0 = \frac{r_1 - \alpha_1 + r_2 - \alpha_2 + \dots + r_n - \alpha_n}{n} \quad (109)$$

in die Gleichung (107) zur Berechnung der Neigung  $\varphi_4$  eingeführt.

Addirt man zum Orientierungswinkel  $o_0$  analog (107) der Reihe nach auch die beobachteten Richtungen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \dots$ , (d. i. die auf  $P$  nach den **gegebenen** Punkten beobachteten Richtungen), so werden dadurch die **Beobachtungen**  $\alpha$  nach den gegebenen Neigungen  $r$  orientirt, man erhält die **orientirten** Richtungen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \dots$ , welche indessen wegen der Fehler der Beobachtungen  $\alpha$  etwas von den correspondierenden **gegebenen** Neigungen  $r_1, r_2, r_3, r_4 \dots$  abweichen werden. Bildet man die Differenzen  $v_1 = r_1 - \varphi_1, v_2 = r_2 - \varphi_2$  etc., so gewinnt man ein Urtheil über die Genauigkeit der **Beobachtungen**  $\alpha$ . Man erkennt leicht, dass die Summe der Fehler  $v, = 0$  werden muss, bis auf kleine in der Abrundung begründete Differenzen. Hierin ist eine Probe für die richtige Berechnung des Orientierungswinkels etc. gegeben.

Ein Beispiel für diese Rechnungen giebt die nachstehende Tabelle — trigon. Formul. 5 der preussischen Verm.-Anw., — in welcher § 4 und § 10 **neu** zu bestimmende Punkte sind. Die Neigungen der Linien zwischen dem gegebenen Beobachtungspunkte  $\hat{6}$  einerseits und den weiteren **gegebenen** Punkten 1, 5, 8, 9 andererseits werden in Spalte 2 des Formulars eingetragen. Nach diesen werden die Beobachtungen  $\alpha$  nach **Anleitung** der obigen Formeln\*) orientirt und die orientirten Richtungen in Spalte 5 eingetragen, aus welcher sie zu den späteren Rechnungen entnommen werden.

Sobald man durch die nunmehr vorzunehmenden trigonometrischen Rechnungen, welche in den folgenden Paragraphen behandelt werden, die Coordinaten für die neu zu bestimmenden Punkte ermittelt hat, wird man auch die endgültigen Neigungen  $r$  der diese Punkte mit dem Beobachtungspunkte  $\hat{6}$  verbindenden Linien nach den Formeln (105) und (106) berechnen können, welche von den aus Spalte 5 entnommenen und zur Berechnung benutzten Neigungen  $\varphi$ , wegen der Verbesserungen, welche die letzteren Neigungen durch die Ausgleichung der Fehler nach der Methode der kl. Quadrate erhalten, etwas abweichen werden.

\*) Vergl. den Vordruck im Kopfe des Formulars.

Trigonometr. Formular 5.

Ziel-Punkte	Neigungen $\nu$			Beobachtete Richtungen $\alpha$			Unterschiede $\nu - \alpha$ Orientirungswinkel $\theta_0 = \frac{[\nu - \alpha]}{n}$			Orientirte Richtungen $\varphi = \alpha + \theta_0$			Verbesserungen $\nu = \nu - \varphi$		Bemerkungen	
	°	'	"	°	'	"	°	'	"	°	'	"	+	-		
1	2			3			4			5			6		7	
	Standpunkt $\hat{\odot} 6$ .															
$\hat{\odot} 1$	147	42	37	0	00	00	147	42	37	147	42	50			13	Probe n $\theta_0 = 17' 00''$ [ $\varphi$ ] = 20' 42''
$\nabla 4$				9	26	44				157	09	34			5	
$\hat{\odot} 5$	182	46	47	35	04	02	147	42	45	182	46	52				
$\hat{\odot} 8$	198	46	21	51	03	14	147	43	07	198	46	04		17		
$\nabla 10$				100	10	35				247	53	25				
$\hat{\odot} 9$	273	01	57	125	19	07	147	42	50	273	01	57		0		
					03	42			171	19		20	42	17	18	
				$\theta_0 = \frac{[\nu - \alpha]}{n} =$			147	42	50							

Diese endgültigen Neigungen wird man dann ebenfalls in Spalte 2 eintragen — (an den bisher leer gebliebenen Stellen bei  $\nabla 4$  und  $\nabla 10$ ) — wird die Differenzen  $\nu$  gegen die in Spalte 5 eingetragenen Neigungen, (orientirten Richtungen  $\varphi$ ), bilden und so ein Urtheil über die Genauigkeit der aus den Beobachtungen  $\alpha$  hervorgegangenen, zur Berechnung der Coordinaten benutzten Neigungen  $\varphi$  gewinnen. Nach der pr. Verm.-Anw. darf die Differenz  $\nu = \nu - \varphi$  für Punkte IV. Ordnung nicht den Betrag 25'', für Beipunkte nicht den Betrag 35'' überschreiten.

Wie hier die auf  $\hat{\odot} 6$  beobachteten Richtungen, sind natürlich, ehe die weiteren trigonometrischen Rechnungen vorgenommen werden können, die auf **sämmtlichen** gegebenen Punkten beobachteten Richtungen zu orientiren. Sobald dann ein neu bestimmter Punkt berechnet ist, kann derselbe für die Bestimmung weiterer Punkte als **gegebener** Punkt benutzt werden und sind zu dem Ende die auf demselben ausgeführten Beobachtungen sofort in gleicher Weise zu orientiren.

§ 21.

Vorwärtseinschneiden.

Nachdem alle Richtungen, welche auf gegebenen Punkten nach einem neu zu bestimmenden Punkte hin beobachtet sind, in der im vor. § angegebenen Weise orientirt worden, nachdem also sämtliche von gegebenen Punkten aus nach dem zu bestimmenden Punkte hin ausgehenden Strahlen bezüglich ihrer Neigungen  $\varphi$  gegen die Abscissenaxe bekannt sind, kann zur Coordinatenberechnung geschritten werden. Gemäss § 9, 2) erfolgt zunächst die

Berechnung der genäherten Coordinaten  $\eta$  und  $\xi$ .\*)

Man wählt zu dem Ende unter den vorhandenen Beobachtungen zwei von den gegebenen Punkten  $P_a$  und  $P_b$ , Fig. 39, nach dem gesuchten Punkte  $P$  ausgehende Strahlen aus, welche sich in  $P$  möglichst annähernd rechtwinklig schneiden\*\*),

\*) In Abthl. I des trigon. Formulars 10 der pr. Verm.-Anw.

\*\*) Wegen § 12.

und entnimmt deren Neigungen  $\varphi_a$  und  $\varphi_b$  aus Spalte 5 des im vor. § dargestellten Formulars. Die Winkel  $\delta_a$ ,  $\delta_b$  und  $\delta$  des Dreiecks  $P_a P_b P$  ergeben sich aus den bekannten Neigungen, wie die Figur ergibt:

$$\delta_a = \varphi_a - r_a^b, \quad \delta_b = \varphi_a - \varphi_b \pm 180^\circ, \quad \delta = \varphi_b - \varphi_a. \quad (110)$$

Es ist nun, wenn man die Coordinaten der gegebenen Punkte  $P_a$  und  $P_b$  mit  $y_a, x_a, y_b, x_b$  bezeichnet, im übrigen aber die Bezeichnungen der Figur gelten lässt:

$$a = s \frac{\sin \delta_a}{\sin \delta} = \frac{y_b - y_a}{\sin r_a^b} \cdot \frac{\sin \delta_a}{\sin \delta}$$

$$\frac{a}{\sin \delta_a} = \frac{y_b - y_a}{\sin \delta \sin r_a^b}$$

und analog auch

$$\frac{a}{\sin \delta_a} = \frac{x_b - x_a}{\sin \delta \cos r_a^b}$$

Setzt man  $\frac{a}{\sin \delta_a} = \frac{b}{\sin \delta_b} = m$  (111)

so ist  $m = \frac{y_b - y_a}{\sin \delta \sin r_a^b} = \frac{x_b - x_a}{\sin \delta \cos r_a^b}$  (111a)

Ferner ist

$$\begin{aligned} \Delta y_a &= a \sin \varphi_a & \Delta x_a &= a \cos \varphi_a \\ \Delta y_b &= b \sin \varphi_b & \Delta x_b &= b \cos \varphi_b \end{aligned}$$

also nach (111)

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_a &= m \sin \delta_a \sin \varphi_a & \Delta x_a &= m \sin \delta_a \cos \varphi_a \\ \Delta y_b &= m \sin \delta_b \sin \varphi_b & \Delta x_b &= m \sin \delta_b \cos \varphi_b \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Endlich ist

$$\begin{aligned} \eta &= y_a + \Delta y_a & \xi &= x_a + \Delta x_a \\ &= y_b + \Delta y_b & &= x_b + \Delta x_b \end{aligned} \quad (113)$$

**Aufstellung der Fehlergleichungen:** Wir haben nun weiter mit Hilfe der genäherten Werthe  $\eta$  und  $\xi$  die genäherten Neigungen  $n$  abzuleiten, — vergl. § 9, 2) — und mit den beobachteten Neigungen  $\varphi$  zu vergleichen, und benutzen dazu die Formel (105)

$$\text{tang } n = \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \quad (114)$$

worin  $\Delta \eta = \eta - y$ ,  $\Delta \xi = \xi - x$ . Diese Formel liefert uns die Neigungen  $n_{P_1}^P$ ,  $n_{P_2}^P$  etc., welche, um mit den Neigungen  $\varphi_{P_1}^P$ ,  $\varphi_{P_2}^P$  etc. verglichen werden zu können, um  $180^\circ$  zu ändern sind. Wir erhalten somit, — vergl. (75) — :

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= n_1 - (\varphi_1 \pm \pi) \\ f_2 &= n_2 - (\varphi_2 \pm \pi) \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Es kommt nun weiter darauf an, den Punkt  $P$  durch Aenderung seiner Coordinaten  $\eta$  und  $\xi$  so zu verschieben, dass, wenn wir die Werthe, welche die Neigungen  $n$  durch diese Verbesserung gemäss (114) erhalten, mit  $r$  bezeichnen, und

$$\begin{aligned} r_1 - (\varphi_1 \pm \pi) &= v_1 \\ r_2 - (\varphi_2 \pm \pi) &= v_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

setzen, die Summe der Quadrate der einzelnen  $v$  zum Minimum wird. Bezeichnen wir die uns noch unbekanntenen Koordinatenverbesserungen, durch welche dieser Bedingung genügt wird, mit  $\delta y$  und  $\delta x$ , die durch diese Verbesserungen in den einzelnen Neigungen  $n$  hervorgebrachten Aenderungen mit  $\delta n$ , so ist gemäss (76)

$$\left. \begin{aligned} \delta n_1 &= a_1 \delta x + b_1 \delta y \\ \delta n_2 &= a_2 \delta x + b_2 \delta y \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

worin  $a$  und  $b$  die partiellen Differentialquotienten der Funktion  $\text{tang } n = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  nach  $\Delta y$  und  $\Delta x$  bezeichnen. Indem wir diese Differentiation (nach (24) und (25)) ausführen und die partiellen Differentiale nach (29) addiren, erhalten wir:

$$d \text{ tang } n = - \frac{\Delta y}{\Delta x^2} d(\Delta x) + \frac{d(\Delta y)}{\Delta x}$$

da  $\Delta y = y - \eta$ ,  $\Delta x = x - \xi$ , worin  $y$  und  $x$ , also die Coordinaten der gegebenen Punkte, Constante, und nur  $\eta$  und  $\xi$  veränderlich sind, so ist  $d(\Delta y) = -\delta \eta$ ,  $d(\Delta x) = -\delta \xi$ , und wir erhalten somit nach (41):

$$\begin{aligned} \frac{\delta n}{\cos^2 n} &= \frac{\Delta y}{\Delta x^2} \cdot \delta \xi - \frac{1}{\Delta x} \cdot \delta \eta \\ \delta n &= \frac{\Delta y \cos^2 n \delta \xi}{\Delta x^2} - \frac{\cos^2 n}{\Delta x} \delta \eta. \end{aligned}$$

Bezeichnen nun  $s_1, s_2 \dots$  die Entfernungen des Punktes  $P$  von den gegebenen Punkten  $P_1, P_2 \dots$ , so ist:  $\cos n = \frac{\Delta x}{s}$ , also  $\frac{\cos n}{\Delta x} = \frac{1}{s}$ , und ferner

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tang } n = \frac{\sin n}{\cos n}, \text{ also}$$

$$\delta n = \frac{1}{s} \sin n \delta \xi - \frac{1}{s} \cos n \delta \eta$$

wodurch wir  $\delta n$  in analytischem Winkelmasse erhalten. In Sekunden ausgedrückt ist also:

$$\delta n = \rho'' \frac{\sin n}{s} \delta \xi - \rho'' \frac{\cos n}{s} \delta \eta.$$

Demnach ist in (116)

$$a = \rho'' \frac{\sin n}{s}, \quad b = -\rho'' \frac{\cos n}{s} \quad *) \quad (117)$$

\*) Ein anderer Ausdruck für  $a$  und  $b$  ergibt sich wie folgt: Da  $a \delta x$  die in Sekunden ausgedrückte Aenderung der Neigung  $n$  vorstellt, welche durch Aenderung von  $\Delta x$  um den Betrag  $\delta x$  entsteht, so ist  $a$  nichts Anderes, als die Aenderung von  $n$ , welche einer Aenderung von  $\Delta x$  um 1 (1 m) entspricht. Durch partielle Differentiation der Gleichung  $\log \text{ tang } n = \log \Delta y - \log \Delta x$  nach  $\Delta x$  erhalten wir, wenn wir die Vorzeichen unbeachtet lassen,  $d \log \text{ tang } n = d \log \Delta x$ . Ist nun die Aenderung von  $\Delta x = 1$ , so kann die zugehörige Aenderung von  $\log \Delta x$ , (also  $d \log \Delta x$ ) durch Bildung der Tafeldifferenz erhalten werden. Sie sei  $= D_x$ . Bezeichnet ferner  $D_{\text{tang } n}$  die Tafeldifferenz des  $\log \text{ tang } n$  für  $1''$ , so ist die Aenderung des  $\log \text{ tang } n$  für  $a'' = a D_{\text{tang } n}$ , und es ist nach Obigen:  $a D_{\text{tang } n} = D_x$ , also  $a = \frac{D_x}{D_{\text{tang } n}}$ . Analog findet man  $b = \frac{D_y}{D_{\text{tang } n}}$ . Es erhält nun, wie aus (117) erhellen wird,  $a$  das Vorzeichen von  $\Delta y$ ,  $b$  das umgekehrte Vorzeichen von  $\Delta x$ .

Graphisch kann man  $a$  und  $b$  wie folgt finden: Man trägt die Punkte  $P$  und  $P_1$  mittelst ihrer Coordinaten  $\eta$  und  $y_1$ ,  $\xi$  und  $x_1$  auf, ermittelt nach der Zeichnung die Länge  $s$ , ändert nun die Abscisse  $\xi$  um 1, fällt von dem so erhaltenen Punkte ein Loth  $= h_x$  auf den Strahl  $s$ , so ist  $\frac{h_x}{s} \rho'' = a$ . Entsprechend

Die geänderten Neigungen  $v = n + \delta n$  sind nun nach (116)

$$v = n + a \delta x + b \delta y. \quad (118)$$

Vergleichen wir diese endgültigen Neigungen nach Anleitung des § 9 mit den beobachteten Neigungen  $\varphi$ , so kommen die Verbesserungen  $v$  zum Vorschein. Wir erhalten die Fehlergleichungen (77):

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= a_1 \delta x + b_1 \delta y + f_1 \\ v_2 &= a_2 \delta x + b_2 \delta y + f_2 \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

durch welche wir durch die Minimumsbedingung  $[v v] = \text{minim.}$  zu den Normalgleichungen (79) gelangen, aus denen sich  $\delta y$  und  $\delta x$  nach § 9, 3) ergeben.

Neben den aus Gl. (82) und (83) sich ergebenden Rechenproben verschaffen wir uns eine weitere, die gesammten Ausgleichsrechnungen kontrollirende Probe, indem wir mit Hülfe der endgültigen Coordinaten  $y + \delta y$ ,  $x + \delta x$  die Neigungen  $v$  ableiten und die Verbesserungen  $v = r - (\varphi \pm \pi)$  bilden, welche mit den aus (119) berechneten Werthen  $v$  übereinstimmen müssen.\*)

Der mittlere Fehler der Beobachtungen ist nach (87)

$$m = \sqrt{\frac{[v v]}{n - 2}}.$$

## § 22.

### Rückwärtseinschneiden.\*\*)

Sind zur Beobachtung eines Punktes nur Beobachtungen auf diesem Punkte selbst ausgeführt, so erfolgt die Berechnung der genäherten Coordinaten nach folgenden Formeln:

Gegeben seien die Punkte  $P_a, P_m, P_b$ , Fig. 40, gesucht der Punkt  $P$ , auf welchem die Richtungen nach den gegebenen Punkten, also die Winkel  $a$  und  $\beta$  gemessen sind. Wir finden zunächst die Neigungen  $r_a^m$  und  $r_b^m$  auf bekannte Weise nach den Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \text{tang } r_a^m &= \frac{y_m - y_a}{x_m - x_a} \\ \text{tang } r_b^m &= \frac{y_m - y_b}{x_m - x_b} \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

sowie die Längen  $a$  und  $b$  nach den Formeln:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{y_m - y_a}{\sin r_a^m} = \frac{x_m - x_a}{\cos r_a^m} \\ b &= \frac{y_m - y_b}{\sin r_b^m} = \frac{x_m - x_b}{\cos r_b^m} \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

erhält man durch Aenderung der Ordinate  $y$  um 1, und durch Fällen des Lothes  $h_y : \frac{h_y}{s} \rho'' = b$ . Die Aenderungen der Coordinaten  $y$  und  $x$  um 1 m müssen in grossem, das Abgreifen von Centimetern gestattenden Massstab ausgeführt werden. Sind  $h_x$  und  $h_y$  in cm,  $s$  in Metern ausgedrückt, und setzt man  $\frac{\rho''}{100} = k$ , so ist  $a = h_x \frac{k}{s}$ ,  $b = h_y \frac{k}{s}$ , worin  $\frac{k}{s}$  aus Tabelle III des Anhangs entnommen werden können.

\*) Nach der pr. Verm.-Anw. erhalten die aus (119) gebildeten Werthe die Bezeichnung  $u$ . Die Probe lautet dann:  $u \text{ soll} = v$  sein.

\*\*) Trigon. Formul. 11 der preussischen Verm.-Anw.

Ferner kennen wir:

$$\gamma + \delta = r_a^m = r_b^m. \quad (122)$$

Setzen wir  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\sigma$ , so ist:

$$\varphi + \psi = \pi - \sigma \quad (123)$$

und es kommt uns nun zunächst darauf an,  $\varphi - \psi$  zu berechnen, um mit Hilfe von (123) zu den einzelnen Winkeln  $\varphi$  und  $\psi$  zu gelangen. — Nach dem Sinussatze ist:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{s_m \sin \alpha}{a} \\ \sin \psi &= \frac{s_m \sin \beta}{b} \end{aligned} \right\} \quad (123a)$$

folglich

$$\begin{aligned} \frac{\sin \varphi + \sin \psi}{\sin \varphi - \sin \psi} &= \frac{\frac{s_m \sin \alpha}{a} + \frac{s_m \sin \beta}{b}}{\frac{s_m \sin \alpha}{a} - \frac{s_m \sin \beta}{b}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{a} + \frac{\sin \beta}{b}}{\frac{\sin \alpha}{a} - \frac{\sin \beta}{b}} \\ &= \frac{b \sin \alpha + a \sin \beta}{b \sin \alpha - a \sin \beta}. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir nach einer bekannten goniometrischen Formel, wenn wir Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite durch  $b \sin \alpha$  dividiren:

$$\frac{2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}}{2 \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \sin \frac{\varphi - \psi}{2}} = \frac{1 + \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}}{1 - \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}}$$

oder wenn wir

$$\frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} = \operatorname{tang} \mu \quad (124)$$

setzen:

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi + \psi}{2} \cot \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{1 + \operatorname{tang} \mu}{1 - \operatorname{tang} \mu}$$

$$\cot \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{\operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \mu \right)}{\operatorname{tang} \frac{\varphi + \psi}{2}}$$

oder auch

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{\operatorname{tang} \left( \frac{\varphi + \psi}{2} \right)}{\operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \mu \right)}$$

oder

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tang} \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \cot \left( \frac{\pi}{4} + \mu \right). \quad (125)$$

Als Rechenprobe ergibt sich aus (123a)

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}. \quad (126)$$

Endlich ist nun:

$$\Delta y_a = s_a \sin r_a$$

oder wenn wir  $s_a$  durch den Sinussatz ausdrücken:

und analog

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_a &= \frac{a \sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} \sin r_a \\ \Delta x_a &= \frac{a \sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} \cos r_a \\ \Delta y_b &= \frac{b \sin(\beta + \psi)}{\sin \beta} \sin r_b \\ \Delta x_b &= \frac{b \sin(\beta + \psi)}{\sin \beta} \cos r_b \end{aligned} \right\} \quad (126a)$$

Die Lage des Punktes P bleibt unbestimmt, wenn derselbe in der Peripherie des um die drei gegebenen Punkte beschriebenen Kreises liegt, in welchem Falle  $\alpha$  und  $\beta$  Peripheriewinkel dieses Kreises werden, daher für jeden beliebigen Punkt in der Peripherie gleich bleiben. Hierauf hat man bei der Auswahl der drei zur Berechnung der genäherten Coordinaten zu benutzenden gegebenen Punkte zu achten.

**Aufstellung der Fehlergleichungen:** Wir berechnen zunächst mit Hülfe der genäherten Coordinaten, welche sich analog (113) aus den Formeln (126) ergeben, die genäherten Neigungen  $n_1, n_2 \dots$  nach (114). Ziehen wir von jeder einzelnen der Neigungen  $n_1, n_2 \dots$  den Winkel  $o_0 = n_1 - \alpha_1^*$  ab, so erhalten wir die Werthe:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= n_1 - (n_1 - \alpha_1) = n_1 - o_0 = \alpha_1 \\ w_2 &= n_2 - (n_1 - \alpha_1) = n_2 - o_0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ w_n &= n_n - (n_1 - \alpha_1) = n_n - o_0 \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Die Werthe  $w$  müssten nun, wenn sowohl die genäherten Neigungen  $n$  als die Beobachtungen  $\alpha$  fehlerlos wären, mit den Beobachtungen  $\alpha$  übereinstimmen, wie sofort aus Fig. 38 klar wird, wenn man sich in dieser die Bezeichnungen  $n_1, n_2 \dots$  statt  $r_1, r_2 \dots$  geschrieben denkt. In Wahrheit ergeben sich aber die Widersprüche:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= w_1 - \alpha_1 \\ f_2 &= w_2 - \alpha_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f_n &= w_n - \alpha_n \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

und es kommt nun darauf an, die genäherten Coordinaten  $y$  und  $x$  um die kleinen Beträge  $dy$  und  $dx$  so zu verbessern, dass die Summe der Quadrate der dann noch übrig bleibenden Widersprüche, welche wir jetzt mit  $v$  bezeichnen, ein Minimum werde.

Durch die Aenderungen der Coordinaten um  $dy$  und  $dx$  werden sich die Neigungen  $n$  um  $dn$  ändern, und es ist

$$dn = a dx + b dy$$

worin  $a$  und  $b$  nach Formel (117) zu berechnen sind. Die endgültigen Neigungen  $r$  ergeben sich somit:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= n_1 + a_1 dx + b_1 dy \\ r_2 &= n_2 + a_2 dx + b_2 dy \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

\*) Sind die Beobachtungen  $\alpha$  auf die Anfangsrichtung reducirt, ist also  $\alpha_1 = 0$ , so ist  $o_0 = n_1$ .

Hieraus erhalten wir, indem wir wieder von den Neigungen  $\nu$  den Winkel  $o'_0 = \nu_1 - \alpha_1$  abziehen, die Werthe:

$$\left. \begin{aligned} n_1 + a_1 dx + b_1 dy - o'_0 &= w'_1 \\ n_2 - a_2 dx + b_2 dy - o'_0 &= w'_2 \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

etc.

die nun noch übrig bleibenden Fehler sind analog (128)

$$v_1 = w'_1 - \alpha_1$$

$$v_2 = w'_2 - \alpha_2$$

etc.

oder nach (130), wenn wir das uns noch unbekannte  $o'_0 = o_0 - z^*$  setzen:

$$v_1 = n_1 + a_1 dx + b_1 dy - o_0 + z - \alpha_1$$

$$v_2 = n_2 + a_2 dx + b_2 dy - o_0 + z - \alpha_2$$

etc.

oder da nach (127)  $n_1 - o_0 = w_1$  und nach (128)  $w_1 - \alpha_1 = f_1$ , also  $n_1 - o_0 - \alpha_1 = f_1$  und analog  $n_2 - o_0 - \alpha_2 = f_2$  etc.:

$$v_1 = f_1 + z + a_1 dx + b_1 dy$$

$$v_2 = f_2 + z + a_2 dx + b_2 dy$$

etc.

(131)

Um  $z$  zu eliminiren, bilden wir aus diesen Gleichungen das arithmetische Mittel:

$$\frac{[v]}{n} = \frac{[f]}{n} + z + \frac{[a]}{n} dx + \frac{[b]}{n} dy$$

welches wir mit einfacheren Zeichen schreiben wollen:

$$v_m = f_m + z + a_m dx + b_m dy.$$

Ziehen wir diese Gleichung von den einzelnen Fehlergleichungen (131) ab, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} v_1 - v_m &= f_1 - f_m + (a_1 - a_m) dx + (b_1 - b_m) dy \\ v_2 - v_m &= f_2 - f_m + (a_2 - a_m) dx + (b_2 - b_m) dy \end{aligned} \right\}^{**} \quad (131a)$$

etc.

welche Gleichungen wir, um wieder auf die Form der Gleichungen (77) zu gelangen, unter Einführung einfacherer Zeichen schreiben:

$$v_1 = \bar{f}_1 + a_1 dx + b_1 dy$$

$$v_2 = \bar{f}_2 + a_2 dx + b_2 dy$$

etc.

(132)

Die Bedingung  $[v v] = \text{minim.}$  führt uns dann wieder zu den Normalgleichungen (79), deren Auflösung nach § 9, 3) erfolgt.

Der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen ergibt sich nach (87), da drei Beobachtungen zu einer einmaligen Bestimmung des Punktes P gehören:

$$m = \sqrt{\frac{[v v]}{n - 3}}.$$

\*) Statt  $o'_0 = \nu_1 - \alpha_1$  zu bilden, könnte man auch  $o'_0 = \nu_2 - \alpha_2$ , oder  $o'_0 = \nu_3 - \alpha_3$  etc. bilden. Alle diese Werthe für den Orientierungswinkel  $o_0$  werden etwas differiren und wir müssten eigentlich das arithmetische Mittel  $o_m$  statt  $o'_0$  einsetzen. Indem wir  $o'_0 = o_0 - z$  statt  $o_m = o_0 - z$  setzen, stellen wir in  $z$  zugleich den Fehler des Orientierungswinkels  $o'_0$  dar. Die uns noch Unbekannte  $z$  ist nun zu eliminiren, wie dies in Folgendem geschieht.

\*\*) Die Bildung der Mittel  $a_m, b_m, f_m$  und der Werthe  $a - a_m, b - b_m, f - f_m$  erfolgt in Abth. 3 des trigon. Formul. 11 der pr. Verm.-Anw. Als Rechenprobe hat man gemäss (63)  $[a - a_m] = 0, [b - b_m] = 0, [f - f_m] = 0$ .

Als **Rechenprobe** leiten wir mit Hilfe der endgültigen Coordinaten  $\eta + d y$ ,  $\chi + d x$  die endgültigen Neigungen  $\nu$  ab, bilden die Grössen  $\nu_1 = (\nu_1 - \nu_0) - \alpha_1$ ,  $\nu_2 = (\nu_2 - \nu_0) - \alpha_2$  etc., ziehen das Mittel  $\frac{[\nu]}{n} = \nu_m$  von den einzelnen Grössen  $\nu$  ab\*), so müssen die so erhaltenen Werthe mit den aus (132) sich ergebenden Werthen  $\nu$  übereinstimmen.

§ 23.

**Das combinirte Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden.**

Die Berechnung der genäherten Coordinaten erfolgt nach § 21, die der genäherten Neigungen  $n$  und der Werthe  $a$  und  $b$  nach (114) bis (117). Die Fehlergleichungen für die Vorwärtsbeobachtungen werden nach § 21, für die Rückwärtsbeobachtungen nach § 22 angesetzt, d. h. es werden für die Rückwärtsbeobachtungen die Grössen  $a$ ,  $b$  und  $f$  um ihre arithmetischen Mittel  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $f_m$  gekürzt, dann aber die Quadrate  $a_1 a_1$ ,  $a_2 a_2 \dots$ ,  $b_1 b_1$ ,  $b_2 b_2 \dots$ , und die Produkte  $a_1 b_1$ ,  $a_2 b_2 \dots$ ,  $a_1 f_1$ ,  $a_2 f_2 \dots$ ,  $b_1 f_1$ ,  $b_2 f_2 \dots$  für die Rückwärts- und Vorwärtsrichtungen je in **einer** Summe vereinigt, um die Coefficienten der Normalgleichungen  $[a a]$ ,  $[b b]$  etc. zu erhalten.

§ 24.

**Einschneiden mit graphischer Darstellung der Visirstrahlen.\*\*)**

1) Die Berechnung der genäherten Coordinaten erfolgt nach § 21. Sind Rückwärtsrichtungen vorhanden, so werden diese nach den Vorwärtsrichtungen orientirt, welche Rechnungsoperation ganz nach dem Beispiel des § 20 erfolgt. Es werden nämlich die aus dem trigon. Formular 5 des § 20 entnommenen orientirten Vorwärtsrichtungen  $\varphi$  in ein ähnliches Formular eingetragen, diesen die entsprechenden Rückwärtsrichtungen  $a$  gegenübergestellt, der Orientierungswinkel  $\nu_0 = \frac{[n - a]}{n}$  gebildet und hierzu die Beobachtungen  $a$  der Reihe nach addirt. Die so erhaltenen Neigungen  $\psi$  werden gegen die durch die Vorwärtsbeobachtungen erhaltenen Neigungen  $\varphi$  etwas differiren, und wird daher das arithmetische Mittel  $\mu = \frac{\varphi + \psi}{2}$  in die folgenden Rechnungen eingeführt.

Je weniger Vorwärtsrichtungen vorliegen, um so unsicherer wird die Orientirung der Rückwärtsrichtungen, mit um so grösserer Vorsicht muss das im Folgenden beschriebene, sonst aber sehr gute Resultate liefernde Verfahren angewendet werden.

Seien nun die genäherten Coordinaten des gesuchten Punktes  $P_1 = \chi$  und  $\eta$  aus irgend zwei beobachteten Richtungen berechnet worden, und denken wir uns zur Abscissenaxe in der Entfernung  $\eta$  eine Parallele gezogen, Fig. 41, so können wir den Punkt  $p$ , in welchem diese Parallele von der auf dem Punkte  $P_1$  beobachteten Neigung  $\mu_1$  geschnitten wird, berechnen. Bezeichnen  $x_1 y_1$  die Coordinaten des gegebenen Punktes  $P_1$ ,  $\chi_1$  die gesuchte Abscisse des Punktes  $p$ , so ergibt sich aus der Figur ohne Weiteres:

\*) Behufs Elimination des in der Anmerkung auf Seite 74 gedachten Orientierungsfehlers.

\*\*) Trigon. Formul. 12 der pr. Verm.-Anw.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1 + (x_1 - x_1) \\ \text{Hierin ist der Klammerausdruck:} \\ (x_1 - x_1) &= (y - y_1) \cot \mu_1 \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

aus welchen beiden Gleichungen sich  $x_1$  ergibt.

Wären die genäherten Coordinaten und sämtliche Neigungen  $\mu$  fehlerfrei, so würden die auf sämtlichen gegebenen Punkten nach P beobachteten Richtungen  $\mu$  die Parallele in einem und demselben Punkte, und zwar in P, treffen. Da diese Voraussetzung in Wahrheit nicht zutrifft, so werden die berechneten Axenabstände  $x_1, x_2 \dots$  kleine Differenzen zeigen. Trägt man dieselben in grossem Massstabe, (1:10), auf einer graden Linie, — indem man sie bis auf die Einerstellen und die folgenden Decimalen kürzt, — von irgend einem Punkte aus ab, und trägt in den so gewonnenen Punkten 1, 2, 3, 4, Fig. 42, bezüglich die um  $180^\circ$  geänderten Neigungen  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$  an, so gewinnt man ein übersichtliches Bild der Strahlenschnitte, und es kommt nun darauf an, in dieser Schnittfigur die wahrscheinlichste Lage des Punktes P so zu ermitteln, dass, wenn man die Neigungen  $\mu$  in der Weise ändert, dass sie sämtlich den zu ermittelnden wahrscheinlichsten Punkt P treffen, die Summe der Quadrate dieser Aenderungen ein Minimum werde.

Da die Aenderungen  $d\mu$  sehr kleine Winkel sind, so kann man die Bögen  $d\mu$  gleich den von P auf die einzelnen Strahlen gefällten Lothen setzen, welche wir mit  $h$  bezeichnen. Die Winkel  $d\mu$  sind also, in analytischem Masse ausgedrückt,  $= \frac{h}{s}$ , wenn  $s$  die Länge der einzelnen Strahlen, also  $s_1$  die Länge  $PP_1$ ,  $s_2$  die

Länge  $PP_2$  etc.\*\*) bezeichnet. Die Aufgabe lautet also, es soll  $\left[ \frac{h^2}{s^2} \right]$  zum Minimum werden. Sind die Strahlen zum Theil einseitig, zum Theil zweiseitig beobachtet, so sind ihnen die Gewichte 1, bezw. 2 beizulegen. Setzt man die Strahengewichte =  $t$ , wo also die einzelnen  $t$  entweder = 1 oder = 2 sein müssen, je nachdem die Beobachtungen ein- oder zweiseitig ausgeführt sind, und setzt man  $\frac{t}{s^2} = p$ , so lautet nun die Forderung

$$[p h^2] = \text{minim.}$$

Nach dem Bertot'schen Verfahren findet man die wahrscheinlichste Lage des Punktes P in der Schnittfigur wie folgt: Man schlage um einen durch Schätzung bestimmten, also angenäherten Punkt P einen Kreis, nehme in der Peripherie desselben einen beliebigen Punkt Q an, fälle von Q auf sämtliche Strahlen Lothe, und verlängere dieselben bis zum Durchschnitt mit der Kreisperipherie. Bezeichnen wir diese Durchschnittspunkte mit  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$  etc., die Fusspunkte der Lothe mit  $F_1, F_2$  etc. und ermitteln wir die Coordinaten sämtlicher  $\mathfrak{R}$  und F, tragen mit den arithmetischen Mitteln derselben als Coordinaten die Punkte K und F ein, ziehen nach einander die Linien  $QF T_1$ , Fig. 43,  $T_1 K T_2$ ,  $T_2 M T_3$ ,  $T_3 Q$ , so liegt der zu bestimmende Punkt P auf der Linie  $Q T_3$ , und zwar ist  $QP = \frac{T_2 T_3 Q F}{T_2 K}$ , wonach P gefunden werden kann.\*\*)

\*) Die Längen  $s$  kann man nach der trigonometrischen Netzkarte ermitteln, nachdem man in dieselbe den Punkt P mittelst seiner genäherten Coordinaten eingetragen. Die Grössen  $\frac{1}{s^2}$  liefert sodann Tafel III Anhang.

\*\*) Die bezüglichen Rechnungen werden in Abth. IV des trigon. Formul. 12 ausgeführt.

Den Beweis dieses Satzes werden wir, um den Zusammenhang nicht zu unterbrechen, am Schlusse dieses Paragraphen bringen.

Die Bildung des Mittels der Coordinaten der Punkte  $\mathcal{R}$  und  $F$  erfolgt wegen der verschiedenen Strahlengewichte  $p$  nach (73).

Zur Probe für die Richtigkeit der Construction werden von dem gefundenen Punkte  $P$  auf die einzelnen Strahlen Lothe gefällt, die Coordinaten der Fusspunkte derselben ermittelt, deren (nach (73) zu bildendes) Mittel die Coordinaten des Punktes  $P$  geben muss, wenn die Minimumsbedingung erfüllt sein soll. (Vergl. Thl. I § 37, Beispiel 2)).

Nachdem man die Längen der Lothe  $h$  ermittelt, findet man den mittleren Fehler

$$m = \sqrt{\frac{[p h h]}{n - 2}}$$

Um die Verbesserungen  $d\mu$  in Sekunden auszudrücken, haben wir, wenn  $h$  in Centimetern,  $s$  in Metern ausgedrückt ist

$$d\mu'' = \frac{\varrho'' h}{100 \cdot s}$$

oder für  $\frac{\varrho''}{100} = k$ , und für  $d\mu'' = v$ :

$$v = \frac{k}{s} h.$$

wo die Grössen  $\frac{k}{s}$  aus Tafel III Anhang zu entnehmen sind.

Leiten wir aus den endgültigen Coordinaten die endgültigen Neigungen  $\nu$  ab\*), so werden dieselben gegen die Neigungen  $\mu \pm \pi$  um die Grössen  $v$  differiren, worin eine Probe für die Rechnungen gegeben ist.

Wir müssen noch eines bisweilen vorkommenden Falles Erwähnung thun, dass nämlich irgend einer der Strahlen annähernd der Abscissenaxe parallel,  $\mu$  also nahe  $= 0^\circ$  oder  $180^\circ$  ist, wie in Fig. 42 der Strahl  $a b$ . Hier würde der Axenabstand  $\eta_s$  sich so gross ergeben, dass er auf dem Papierbogen, den man zur Auftragung der Schnittfigur benutzt, nicht Platz findet. In diesem Falle denkt man sich durch den durch die genäherten Coordinaten bestimmten Punkt  $P$  eine Parallele zur **Ordinatenaxe** und berechnet den Schnittpunkt des Strahls mit **dieser** Parallelen, d. h. man bedient sich statt der Formeln (133) der analogen Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \eta_s &= y_s + (y_s - y_s) \\ \eta_s - y_s &= (x - x_s) \operatorname{tang} \mu_s \end{aligned} \right\} \quad (133a)$$

woraus der Axenabstand  $\eta_s$  zu berechnen ist. Da in Fig. 42 die Linie  $XX$  die im Abstand der genäherten Ordinate zur Abscissenaxe gedachte Parallele darstellt, ihre Entfernung von der Abscissenaxe also  $= \eta$  ist, so ist der Abstand des Schnittpunktes  $5$  von dieser Linie  $= \eta_s - \eta$ . Diese Grösse ist auf der Parallelen zur **Ordinatenaxe**,  $YY$ , von der Linie  $XX$  aus nach rechts oder links abzutragen, je nachdem sie positiv oder, wie in der Figur, negativ sich ergibt.

2) **Bertot'sches Problem.\*\*)** In einer Strahlenschnittfigur, Fig. 44, soll ein Punkt  $P$  so bestimmt werden, dass die Summe der Quadrate der von demselben auf die einzelnen Strahlen gefällten Lothe ein Minimum wird.

\*) Abthl. 6 des trigon. Formul. 12 der pr. Verm.-Anw.

\*\*) Nach einem Vortrag von Steuerrath Scherer. Zeitschrift für Vermessungswesen, Band XIII.

Es seien: 1) P der gesuchte Punkt,  
 2) Q ein beliebiger Punkt innerhalb der Schnittfigur. Von Q werden Lothe auf die einzelnen Strahlen gefällt und deren Fusspunkte mit  $F_1, F_2$  etc. bezeichnet. F sei der Schwerpunkt der Fusspunkte, so dass, wenn  $d y_F, d x_F$  die Coordinaten der einzelnen F bezeichnen:

$$a) d y_F = \frac{d y_{F_1} + d y_{F_2} + \dots}{n}$$

$$b) d x_F = \frac{d x_{F_1} + d x_{F_2} + \dots}{n}$$

Ferner werde über QP ein Kreis geschlagen, die Durchschnitte der vorerwähnten Lothe mit demselben mit  $K_1, K_2$  etc. bezeichnet. — Die Coordinaten des Schwerpunktes K der einzelnen Kreisdurchschnitte sind:

$$c) d y_k = \frac{d y_{k_1} + d y_{k_2} + \dots}{n}$$

$$d) d x_k = \frac{d x_{k_1} + d x_{k_2} + \dots}{n}$$

I. Die Schwerpunkte K und F fallen zusammen.

Beweis:

Nach den Bezeichnungen der Fig. ist:

$$1) d y_{F_3} - d y_{k_3} = F_3 c.$$

$$d x_{F_3} - d x_{k_3} = K_3 c.$$

Da  $\angle P K_3 Q = 90^\circ$ , so folgt:

$$\triangle F_3 K_3 c \cong P_3 P d, \text{ also}$$

$$F_3 c = P_3 d$$

$$= d y_{P_3} - d y_P = d y_{P_3} - \eta$$

wenn  $\eta$  die Ordinate des Punktes P bezeichnet.

Analog erhält man:

$$K_3 c = d x_{P_3} - \chi$$

also nach  $1) d y_{F_3} - d y_{k_3} = d y_{P_3} - \eta$

$$d x_{F_3} - d x_{k_3} = d x_{P_3} - \chi$$

und analog:

$$2) d y_{F_n} - d y_{k_n} = d y_{P_n} - \eta$$

$$d x_{F_n} - d x_{k_n} = d x_{P_n} - \chi.$$

Durch Subtraktion der Gleichung c) von a) ergibt sich, wenn man für  $d y_F - d y_k$  etc. die Werthe nach 2) einsetzt:

$$d y_F - d y_k = (d y_{P_1} - \eta) + (d y_{P_2} - \eta) + \dots$$

$$= d y_{P_1} + d y_{P_2} + \dots - n \eta.$$

Nach der Minimumsbedingung für P ist aber, (Thl. I, § 37, Beispiel 2)):

$$d y_{P_1} + d y_{P_2} + \dots = n \eta$$

also  $d y_F - d y_k = 0$ , oder  $d y_F = d y_k$ , und analog  $d x_F = d x_k$ .

II. Wird um den beliebigen Punkt M mit MQ ein Kreis geschlagen, die Perpendikel QF bis zum Durchschnitt mit dessen Peripherie in den Punkten  $\Omega_1, \Omega_2 \dots$  verlängert, so liegen in diesem Kreise die Durchschnitte  $\Omega_1, \Omega_2 \dots$  ihr

Schwerpunkt  $\mathfrak{S}$  und der Mittelpunkt  $\mathfrak{M}$  bezüglich **ähnlich** zu den dem Kreise über  $PQ$  angehörigen Punkten  $K_1, K_2 \dots, F$  und  $M$ .

Beweis:

Das Polygon  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 \dots \mathfrak{S}_n$  ist  $\sim$  dem Polygon  $K_1, K_2 \dots K_n$ , denn die Peripheriewinkel bei  $Q$  sind für beide Kreise gemein, mithin die zugehörigen Centriwinkel gleich. — Denkt man sich nun die beiden Kreise nach Anleitung der Fig. 45 mit ihren Mittelpunkten zusammengelegt, so ist nur noch zu zeigen, dass  $\mathfrak{S}FM$  eine Gerade ist. Es ist aber, da nach I  $dy_F = dy_k$

$$\alpha) ndy_F = dy_{k_1} + dy_{k_2} + \dots$$

$$\beta) ndx_F = dx_{k_1} + dx_{k_2} + \dots$$

und  $\gamma) ndy_{\mathfrak{S}} = dy_{\mathfrak{S}_1} + dy_{\mathfrak{S}_2} + \dots$

$$\delta) ndx_{\mathfrak{S}} = dx_{\mathfrak{S}_1} + dx_{\mathfrak{S}_2} + \dots$$

Bezeichnet man ferner die Neigungswinkel  $HM\mathfrak{S}_1, HM\mathfrak{S}_2 \dots$  mit  $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ , so ist, wenn man die Radien der beiden Kreise  $= r$  und  $R$  setzt:

$$dy_{k_1} = r \sin \alpha_1 \quad \text{und} \quad dx_{k_1} = r \cos \alpha_1$$

$$dy_{k_2} = r \sin \alpha_2 \quad dx_{k_2} = r \cos \alpha_2$$

etc. etc.

$$dy_{\mathfrak{S}_1} = R \sin \alpha_1 \quad dx_{\mathfrak{S}_1} = R \cos \alpha_1$$

$$dy_{\mathfrak{S}_2} = R \sin \alpha_2 \quad dx_{\mathfrak{S}_2} = R \cos \alpha_2$$

etc. etc.

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen  $\alpha)$ — $\delta)$  ein, dividirt  $\alpha)$  durch  $\gamma)$ ,  $\beta)$  durch  $\delta)$ , so findet man:

$$\frac{dy_F}{dy_{\mathfrak{S}}} = \frac{r \sin \alpha_1 + r \sin \alpha_2 + \dots}{R \sin \alpha_1 + r \sin \alpha_2 + \dots} = \frac{r}{R}$$

Ebenso findet man:

$$dx_F : dx_{\mathfrak{S}} = \frac{r}{R}$$

also:  $dy_F : dy_{\mathfrak{S}} = dx_F : dx_{\mathfrak{S}} = r : R = FM : \mathfrak{S}M$

woraus die ähnliche Lage der Punkte  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{M}$  gegen  $F$  und  $M$  folgt.

III. Ist nun  $P$  noch unbekannt, so geben uns diese Aehnlichkeitspunkte das Mittel an die Hand,  $P$  zu construiren. Man verbinde  $Q$  mit  $F$ , Fig. 46, und verlängere  $QF$  nach  $T_1$ , dann sind  $T_1$  und  $\mathfrak{T}_1$  ähnlich gelegen, — wie alle Punkte der beiden Peripherien, welche mit  $Q$  in grader Linie gelegen, (vergl. den Beweis zu II bezüglich der ähnlichen Lage der Punkte  $\mathfrak{S}$  und  $k$ ). — Zieht man weiter  $T_1K$   $T_2$ , dann ist  $T_2$  der Aehnlichkeitspunkt von  $Q$ , denn da  $T_1$  mit  $\mathfrak{T}_1$ , und  $F$  mit  $\mathfrak{S}$  ähnlich liegen, so sind die durch  $\mathfrak{T}_1$  und  $F$  und durch  $T_1$  und  $\mathfrak{S}$  gezogenen Sehnen Aehnlichkeitssehnen, mithin deren Endpunkte  $Q$  und  $T_2$  ähnlich gelegen. Zieht man nun noch den Durchmesser  $T_2M$   $T_3$ , dann ist der ähnlich gelegene Durchmesser  $QP$  und der mit  $T_3$  ähnlich gelegene Punkt  $P$  noch zu bestimmen.

Man verbinde  $Q$  mit  $T_3$ , dann ist  $\triangle T_1 T_2 T_3 = T_1 Q T_3$ . Wegen der ähnlichen Lage von  $\mathfrak{S}, T_2, M$  gegen  $F, Q$  und  $M$  ist weiter  $\angle \mathfrak{S}, T_2 M = FQM$ , folglich auch  $T_1 Q T_3 = FQM$ , also  $QM T_3$  eine Gerade, mithin  $P$  ähnlich zu  $T_3$  gelegen. Es ist somit:

$$\triangle \mathfrak{S} T_2 T_3 \sim FQP$$

also  $QP = \frac{T_2 T_3 \cdot QF}{T_2 \mathfrak{S}}$

3) **Lösung des Problems für drei Strahlen.** Sind nur drei Visirstrahlen vorhanden, so entsteht ein fehlerzeigendes Dreieck, unsere Aufgabe lautet dann also: In einem Dreieck ist ein Punkt P so zu bestimmen, dass die Summe der Quadrate der von ihm auf die Seiten gefällten Lothe ein Minimum wird.

Bezeichnen  $h_a, h_b, h_c$  diese Lothe, so besteht die Bedingung

$$1) a h_a + b h_b + c h_c = 2 F$$

$$2) h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \text{minim.}$$

Durch Differentiation von 1) erhalten wir:

$$3) a d h_a + b d h_b + c d h_c = 0$$

und aus Gl. 2) infolge der Minimumsbedingung:

$$4) h_a d h_a + h_b d h_b + h_c d h_c = 0$$

und aus 3) die Correlatengleichung:

$$5) a k d h_a + b k d h_b + c k d h_c = 0$$

und wenn wir die Coefficienten der  $d h$  in 4) denen in 5) gleichsetzen:

$$5) h_a = a k, \quad h_b = b k, \quad h_c = c k.$$

Wären den Höhen  $h$  verschiedene Gewichte beizulegen, so würde das an der Gl. 1) und daher auch an Gl. 5) nichts ändern, dagegen geht 4) über in:

$$p_a h_a d h_a + p_b h_b d h_b + p_c h_c d h_c = 0$$

woraus wir analog mittelst 5) erhalten:

$$h_a = \frac{a}{p_a} k, \quad h_b = \frac{b}{p_b} k, \quad h_c = \frac{c}{p_c} k.$$

oder 
$$7) h_a : h_b : h_c = \frac{a}{p_a} : \frac{b}{p_b} : \frac{c}{p_c}. \quad *)$$

Man hat daher ein dem fehlerzeigenden Dreiecke ähnliches Dreieck zu construiren, Fig. 47, derart, dass die correspondierenden Seiten beider Dreiecke unter sich bezüglich die parallelen Abstände  $\frac{a}{p_a}, \frac{b}{p_b}, \frac{c}{p_c}$  erhalten, sodann die corre-

spondierenden Ecken der Dreiecke mit einander zu verbinden. Die Verbindungslinien schneiden sich im gesuchten Punkte P, denn fällt man von P die Lothe  $h_a, h_b, h_c$ , so verhalten sich diese wie die Abstände der correspondierenden Dreiecksseiten, d. i. wie  $\frac{a}{p_a} : \frac{b}{p_b} : \frac{c}{p_c}$ , wie Gl. 7) erfordert.

### § 25.

#### Einschneiden für zwei Punkte.

Es sind zwei neu zu bestimmende Punkte  $P_a$  und  $P_b$  durch gegenseitige Visur verbunden und sind weitere Visuren nach **gegebenen** Punkten vorhanden. Die Coordinaten der beiden Punkte  $P_a$  und  $P_b$  sind zu berechnen.

Zu einer **einmaligen** Bestimmung der beiden Punkte sind auf jedem derselben mindestens die Richtungen nach 2 gegebenen Punkten und dem **anderen** neu zu bestimmenden Punkte zu beobachten. Bezeichnen in Fig. 34 A und B die

\*) Die pr. Verm.-Anw. setzt für  $a, b, c$  die Zeichen  $g_a, g_b, g_c$  und für  $\frac{a}{p_a}, \frac{b}{p_b}, \frac{c}{p_c}$  die Zeichen  $m_a, m_b, m_c$ .

zu bestimmenden, C und S die gegebenen Punkte, so kann die Auflösung der Dreiecke ABC und ABS nach Formel (100) und (101) erfolgen, in welcher e als Entfernung der gegebenen Punkte von einander bekannt, und g die Unbekannte ist. Es ist diese Aufgabe bekannt unter dem Namen der **Hansen'schen Aufgabe** oder der **Aufgabe von der unzugänglichen Distanz**.

Hat man **überschüssige** Beobachtungen, so erfolgt die Berechnung der **genäherten Coordinaten** nach § 22, oder, wenn auch Vorwärtsbeobachtungen vorliegen, nach § 21. Sodann berechnet man in bekannter Weise für beide neu zu bestimmenden Punkte die genäherten Neigungen  $n_a$  und  $n_b$ . Letztere sind nun durch Aenderung der genäherten Coordinaten um die Beträge  $dy$  und  $dx$  um die Beträge  $dn_a$ ,  $dn_b$  zu ändern. Diese Aenderungen sind für den Punkt  $P_a$

1) für die Richtung von  $P_a$  nach  $P_b$ , da **beide** Endpunkte dieses Strahls eine Aenderung erleiden:

$$dn_b = a_b dx_a + b_b dy_a + c_a dx_a + d_a dy_b$$

2) für die übrigen den Punkt  $P_a$  bestimmenden Richtungen:

$$dn_1 = a_1 dx_a + b_1 dy_a$$

$$dn_2 = a_2 dx_a + b_2 dy_a$$

etc.

Die Fehlergleichungen werden daher lauten, (unter Berücksichtigung des Orientierungsfehlers z, vergl. § 22):

$$v_b = a_b dx_a + b_b dy_a + c_a dx_b + d_a dy_b + z_a + f_b$$

$$v_1 = a_1 dx_a + b_1 dy_a + f_1$$

$$v_2 = a_2 dx_a + b_2 dy_a + f_2$$

etc.

und analog für den Punkt  $P_b$

$$v_a = a_a dx_b + b_a dy_b + c_b dx_a + d_b dy_a + z_b + f_a$$

$$v_1 = a_1 dx_b + b_1 dy_b + f_1$$

$$v_2 = a_2 dx_b + b_2 dy_b + f_2$$

etc.

(134)

Indem man diese Fehlergleichungen quadriert, addirt, die Summe der Reihe nach nach den vier Unbekannten  $dy_a$ ,  $dx_a$ ,  $dy_b$ ,  $dx_b$  differentiirt, die erhaltenen Differentialquotienten = 0 setzt, erhält man vier Normalgleichungen von der Form des § 9, 4), aus denen sich die vier Unbekannten nach den Formeln (84) und (85) ergeben.

## § 26.

### Einschneiden für zwei Punkte mit graphischer Darstellung der Visirstrahlen.

Sind zwei neu zu bestimmende Punkte durch gegenseitige Visuren verbunden, so kann man deren nach § 24 darzustellenden Schnittfiguren durch gegenseitige Wechselverbesserungen berichtigen, ehe man in denselben die wahrscheinlichste Lage der gesuchten Punkte endgültig ermittelt. Das folgende einfache Beispiel wird das Verfahren verdeutlichen. Die Punkte  $P_a$  und  $P_b$  seien in der in Fig. 48 angedeuteten Weise bestimmt. Man berechne zunächst die genäherten Coordinaten für  $P_a$ , zu dessen Bestimmung, da  $P_b$  noch unbekannt, zunächst nur zwei Strahlen zu Gebote stehen, hierauf berechne man  $P_b$ , unter Einführung des **vorläufig** bestimmten

Punktes  $P_a$  als gegebenen Punkt, so dass also  $P_b$  aus drei Strahlen erhalten wird. Die Schnittfigur für  $P_b$  ist also ein fehlerzeigendes Dreieck, — Fig. 50, Schnittfigur für  $P_b$  —. In einem beliebigen Punkt  $P$  desjenigen Strahls  $a b$ , welcher die Visur nach  $P_a$  darstellt, trage man die zur Bestimmung des Punktes  $P_a$  benutzten Neigungen an, und erhält so die Schnittfigur für  $P_a$ . In der Schnittfigur für  $P_b$  bestimme man nach § 24, 3) die wahrscheinlichste Lage des Punktes  $P_b$ . Man erhält den Punkt  $p_b$ . Zieht man  $p_b a' \parallel b a$ , so erhält man auch in der Schnittfigur für  $P_a$  ein fehlerzeigendes Dreieck, in welchem man den Punkt  $p_a$  in gleicher Weise bestimmt. Die weitere Parallele  $p_a b'$  verbessert das fehlerzeigende Dreieck der Schnittfigur für  $P_b$  und somit die Lage des Punktes  $p_b$ , welcher nach  $p_b'$  rücken wird. Ebenso verbessert die Parallele  $p_b' a''$  das fehlerzeigende Dreieck der Schnittfigur für  $P_a$ . Der Punkt  $p_a$  rückt infolge dieser Verbesserung nach  $p_a''$ . Diese Wechselverbesserungen sind fortzusetzen, bis eine wesentliche Änderung der Punkte  $p$  nicht mehr erzielt wird.

Es versteht sich von selbst, dass man zu der nach jedem Wechsel erforderlich werdenden Neubestimmung der Punkte  $p$  nicht immer wieder das Verfahren des § 24, 3) zu wiederholen braucht. Hat man in dem Dreieck  $A B C$ , Fig. 49, den Punkt  $p$  bestimmt, so findet man die dem Punkte  $p$  ähnlich gelegenen Punkte  $p'$ ,  $p''$  in den Dreiecken  $A B' C'$ ,  $A B'' C''$  in der aus der Figur ohne Weiteres verständlichen Weise.

Das hier dargestellte Verfahren der schrittweisen Annäherung kann man durch folgendes direktere Verfahren umgestalten.

Gesetzt, man habe die Wechselnäherungen so lange fortgesetzt, bis eine weitere Verschiebung der Punkte  $p$  nicht mehr stattfindet, so wird man erkennen, dass die endgültig ermittelten Punkte  $p_a$  und  $p_b$ , Fig. 51, in den verlängerten Basen  $b b$  und  $a a$  der zuletzt erhaltenen fehlerzeigenden Dreiecke liegen müssen. Denn läge z. B.  $p_b$  über oder unter der verlängerten Basis  $b b$ , so würde eben nicht  $b b$  die durch die letzte Verbesserung erhaltene Basis des fehlerzeigenden Dreiecks  $D b b$  bilden, sondern die durch  $p_b$  zu  $b a$  gezogene Parallele. Entsprechend würde sich auch die Lage des Punktes  $p_a$  ändern, mithin auch die Parallele  $p_a a$ , also auch der Punkt  $p_b$  etc. Es würde also bei weiterer Fortsetzung des Verfahrens noch eine Verschiebung der Punkte  $p$  erzielt werden, was der Voraussetzung, dass das Verfahren zu Ende geführt sei, widerspricht.

Zieht man nun durch die Spitze  $A$  des fehlerzeigenden Dreiecks  $A B C$  zu  $a b$  die Parallele  $A E$ , ermittelt in den Dreiecken  $A B C$  und  $D E F$  nach § 24, 3) die Punkte  $P_a$  und  $P_b$ , bezeichnet deren Abstände von den Dreiecksbasen mit  $m$  und  $n$ , die Entfernung der Parallelen  $a a$  und  $b b$  von einander, d. i. den Abstand der den Punkten  $P_a$  und  $P_b$  ähnlich gelegenen Punkte  $p_a$  und  $p_b$  von den Basen ihrer endgültig verbesserten fehlerzeigenden Dreiecke mit  $x$ , die Höhen dieser letzteren Dreiecke mit  $h_a$  und  $h_b$ , die Höhen der Dreiecke  $A B C$  und  $D E F$  mit  $H$ , so ist:

$$1) x : h_a = m : H$$

$$2) x : h_b = n : H$$

also

$$3) h_a : h_b = n : m$$

und weiter:

$$4) h_a + h_b = H + x.$$

Setzt man  $h_a = n y$ , so ist nach 3)  $h_b = m y$ , und man erhält aus 1) und 4)

$$I \quad x = \frac{m n y}{H}$$

$$II \quad m y + n y = H + x.$$

Diese Gleichungen ergeben, nach  $x$  aufgelöst:

$$x = \frac{H}{\frac{m+n}{m n} H - 1}.$$

Ist hieraus  $x$  gefunden, so theilt man  $H + x$  gemäss II nach dem Verhältniss  $m : n$ , um die Höhen  $h_a (= n y)$  und  $h_b (= m y)$  zu erhalten. Mit Hülfe dieser Höhen lassen sich die endgültigen fehlerzeigenden Dreiecke  $A a a$  und  $D b b$  construiren und werden in denselben die gesuchten Punkte  $p_a$  und  $p_b$  nach Anleitung der Fig. 49 erhalten. Eine Probe für die Richtigkeit der Construction gewährt der Satz, dass diese Punkte in den verlängerten Basen  $b b$  und  $a a$  liegen müssen.

§ 27.

**Wiederherstellung verlorener trigonometrischer Punkte durch Rückwärtsvisuren.**

Man ermittelt zunächst die ungefähre Lage des verlorenen Punktes mit Hülfe des vorhandenen Kartenmaterials, bestimmt die Coordinaten dieses vorläufigen Punktes durch Rückwärtseinschneiden nach denselben gegebenen Punkten, welche früher zur Bestimmung des verlorenen Punktes gedient hatten. Aus den Coordinaten des vorläufigen Punktes und denen des verlorenen Punktes lässt sich die Excentricität  $e$ , (d. h. die Entfernung beider Punkte von einander), sowie der Winkel herleiten, den die Strecke  $e$  mit irgend einem der neu beobachteten Strahlen einschliesst, welche Elemente zur Wiederherstellung des gesuchten Punktes auf dem Felde genügen.

Bei der Coordinatenberechnung des **vorläufigen** Punktes können die bekannten Coordinaten des **verlorenen** Punktes als genäherte Coordinaten des ersteren Punktes, die bekannten Neigungen der von dem verlorenen Punkte nach gegebenen Punkten hin ausgehenden Strahlen als genäherte Neigungen benützt werden, so dass sich die Berechnung dieser Elemente, sowie die der Grössen  $a$  und  $b$  nach (117) erübrigt.

§ 28.

**Einschalten.\*)**

Sind in Fig. 29  $a$  und  $o$  gegebene,  $b, c, d, e$  neu zu bestimmende Punkte, so erfolgt die Ausgleichung des Netzes ganz nach § 17. Die Basis  $a o$  ist bekannt, mithin können sämtliche Dreiecke des Netzes, und sodann die Coordinaten nach § 40 berechnet werden. Dass sich auch der Fall der Fig. 28 hiernach behandeln lässt, ist bereits § 11 erwähnt.

Sind in Fig. 52 die Punkte 3, 4 und 1 gegeben, also die Seiten  $A$  und  $E$  bekannt, die Punkte 5, 6, 7, 8 neu zu bestimmen und zu dem Ende sämtliche Winkel des Netzes gemessen, so erfolgt die Ausgleichung des Netzes nach denselben Principien, nur geht die Bedingung zu 2) des § 17 über in

$$[\beta] = \angle \hat{\circ} 3 \hat{\circ} 4 \hat{\circ} 1 = v_4^3 - v_4^1, \tag{135}$$

während die Bedingung zu 3) desselben Paragraphen lautet:

$$\frac{E \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \dots}{A \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \dots} = 1 \tag{135a}$$

wie man leicht nach Analogie des § 10, Formel (89), findet.

\*) Trigon. Formul. 16 der preussischen Verm.-Anw.

**Einketten.\*)**

Das Dreiecksnetz ist so einzurichten, dass wenigstens zwei Punkte desselben mit gegebenen Punkten,  $\hat{\odot} 12$  und  $\hat{\odot} 15$ , — Fig. 53 — zusammenfallen. Ausser den Dreieckswinkeln sind womöglich auf den **gegebenen** Punkten noch die Richtungen nach anderen **gegebenen** Punkten zu beobachten — ( $\hat{\odot} 15-\hat{\odot} 40$  und  $\hat{\odot} 12-\hat{\odot} 41$ ). Die Winkel haben dann folgenden Bedingungen zu genügen:

1) Die Summe der Winkel in den einzelnen Dreiecken muss  $180^\circ$  betragen.

2) In dem Zuge  $\hat{\odot} 40, \hat{\odot} 15, 13, 14, \hat{\odot} 12 \hat{\odot} 41$  muss die Summe der gemessenen Winkel

$$\Sigma = (2n - 4)R - C$$

sein, worin C den Winkel bedeutet, welchen die Dreiecksseiten unter sich bilden, also

$$1) \Sigma = (2n - 4)R - (v_E - v_A).$$

Bezeichnen  $f_1, f_2 \dots f_n$  die gegen die Bedingung zu 1) sich ergebenden Widersprüche, (1), (2) . . . (n) die danach den Winkeln der Dreiecke 1, 2 . . . n zufallenden Verbesserungen, ferner  $f_s$  den Widerspruch gegen die Bedingung zu 2), (s) die den Polygonwinkeln danach zufallenden Verbesserungen, so ist, wenn m die Anzahl der Polygonpunkte,  $z_1, z_2 \dots z_n$  bezüglich die Anzahl der Winkel der Dreiecke 1, 2, . . . n, welche zugleich in dem Polygon liegen, bezeichnen, — (so dass z. B.  $z_2 = 1, z_3 = 2$ ); — so lautet die aus dem Polygonzuge sich ergebende Fehlergleichung:  $2) m(s) + z_1(1) + z_2(2) + \dots + z_n(n) - f_s = 0.$  (136)

Ferner ergeben sich aus den einzelnen **Dreiecken**, wenn  $\frac{1}{p}(s)$  und  $\frac{1}{q}(s)$  die Antheile sind, welche denjenigen Dreieckswinkeln, die zugleich dem Polygonzuge angehören, aus der Polygonverbesserung zufallen:

$$3) \left\{ \begin{array}{l} 3(1) + \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}\right)(s) - f_1 = 0 \\ 3(2) + \left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2}\right)(s) - f_2 = 0 \\ \text{etc.} \end{array} \right. \quad (137)$$

Die Antheile  $\frac{1}{p}(s)$  und  $\frac{1}{q}(s)$  sind verschieden, je nach der Anzahl der die einzelnen Polygonwinkel zusammensetzenden Dreieckswinkel, da jedem Polygonwinkel nur die Verbesserung (s) zukommt, und diese zu gleichen Theilen auf die den Polygonwinkel zusammensetzenden Dreieckswinkel zu vertheilen ist. So ist z. B. im Dreiecke 3 der auf den Winkel  $\beta$  fallende Antheil der Verbesserung (s):  $\frac{1}{p_3}(s) = \frac{1}{3}(s)$ , weil (s) sich auf die Winkel  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  vertheilt, dagegen ist in dem Dreiecke 3 der Antheil des Winkels  $\alpha$ , d. i.:  $\frac{1}{q}(s) = \frac{1}{2}(s)$ , weil sich hier (s) nur auf die Winkel  $\alpha_3$  und  $\beta_4$  vertheilt. Liegt nur ein Dreieckswinkel im Polygon, so ist entweder  $\frac{1}{p}$  oder  $\frac{1}{q} = 0$ .

Die Auflösung der Gleichungen (136) und (137) erfolgt, indem man die Verbesserungen (1), (2) . . . aus den Gleichungen (137) berechnet, sodann bezüglich

\*) Trigon. Formul. 17 der pr. Verm.-Anw.

mit den Zahlen  $z_1, z_2, \dots$  multiplicirt und die Summe der erhaltenen Produkte in (136) einsetzt, wodurch sich (s) ergibt. Wird dieses dann in (137) eingesetzt, so erhält man (1), (2) . . . (n).

Es ist gleichgültig, ob man den Polygonfehler  $f_s$  aus dem Polygon  $\triangle 40, \triangle 15, 14, 13, \triangle 12, \triangle 41$ , oder aus  $\triangle 40, \triangle 15, 10, 11, \triangle 12, \triangle 41$  berechnet, denn wenn neben **einer** Polygonbedingung die Dreiecksbedingungen erfüllt sind, so ist auch die **andere** Polygonbedingung erfüllt.

In dem in unserer Figur dargestellten Beispiele sei der Fehler  $f_s$  aus dem Polygonzuge 40, 15, 14, 13, 12, 41 gebildet. An den  $m, (=4)$  Winkeln desselben participiren:

- 1) der Anschlusswinkel auf  $\triangle 15$
- 2) im Dreiecke 1 die Winkel  $\beta$  und  $\gamma$
- 3) " " 2 " "  $\beta$
- 4) " " 3 " "  $\alpha$  und  $\beta$
- 5) " " 4 " "  $\alpha$  und  $\beta$
- 6) der Abschlusswinkel auf  $\triangle 12$ .

Demnach ist:

$$\begin{array}{l} z_1 = 2 \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{3} \\ z_2 = 1 \quad \frac{1}{p_2} = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{q_2} = 0 \\ z_3 = 2 \quad \frac{1}{p_3} = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{q_3} = \frac{1}{2} \\ z_4 = 2 \quad \frac{1}{p_4} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{q_4} = \frac{1}{2} \end{array}$$

Sei  $f_1 = +28''$ ,  $f_2 = -11$ ,  $f_3 = +28$ ,  $f_4 = -9$ ,  $f_s = +19$ , so lautet die Bedingungsgleichung (136)

$$I \quad 4(s) + 2(1) + (2) + 2(3) + 2(4) - 19 = 0$$

und die Bedingungsgleichungen (137)

$$II \quad \begin{cases} 3(1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)(s) - 28 = 0 \\ 3(2) + \left(\frac{1}{3} + 0\right)(s) + 11 = 0 \\ 3(3) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)(s) - 28 = 0 \\ 3(4) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)(s) + 9 = 0 \end{cases}$$

Löst man die Gleichungen II einzeln nach (1), (2), (3), (4) auf, multiplicirt mit  $z$  und addirt, so ergibt sich:

$$III \quad \begin{cases} 2(1) = -\frac{5}{9}(s) + \frac{56}{3} \\ 1(2) = -\frac{1}{9}(s) - \frac{11}{3} \\ 2(3) = -\frac{5}{9}(s) + \frac{51}{3} \\ 2(4) = -\frac{6}{9}(s) - \frac{18}{3} \\ \hline \text{Summe} = -\frac{17}{9}(s) + \frac{83}{3} \end{cases}$$

Durch Einsetzung dieser Summe in II erhält man:  $(s) = -4,1$   
 und durch Einsetzung von  $(s) = -4,1$  in II oder III:  $(1) = +5$ ,  $(2) = -3,2$ ,  
 $(3) = +10,5$ ,  $(4) = -1,6$ .

Es erhält nun jeder der Dreieckswinkel der Dreiecke 1, 2, 3, 4 bezüglich die Verbesserung  $(1)$ ,  $(2)$ ,  $(3)$ ,  $(4)$ , ausserdem aber diejenigen Dreieckswinkel, welche zugleich Theile der Polygonwinkel bilden, die Verbesserungen  $\frac{1}{p}(s)$  bzw.  $\frac{1}{q}(s)$ .

Nach Verbesserung der Winkel erfolgt die Berechnung der Dreiecksseiten in der Weise, dass zunächst die Anfangsseite  $a = 1000$  angenommen wird. Hierauf erfolgt dann nach § 40 eine **vorläufige** Berechnung der Coordinatenunterschiede.\*) Die Summe derselben dient zur Berechnung der **vorläufigen** Entfernung  $\mathcal{S}$  der **gegebenen** Punkte. Ist die bekannte **wirkliche** Entfernung dieser Punkte  $= S$ , so ist  $q = \frac{S}{\mathcal{S}}$  die Verhältnisszahl, mit welcher die **vorläufigen** Seiten der Dreiecke und die **vorläufigen** Coordinatenunterschiede zu multipliciren sind, um zu den **wahren** Werthen derselben zu gelangen.

Sind die An- und Abschlussneigungen auf den Punkten 12 und 15 nicht beobachtet, so beschränkt sich die Ausgleichung der Winkel nur auf die Vertheilung der Widersprüche  $f_1, f_2, \dots, f_n$  in den einzelnen Dreiecken 1, 2, . . . n. Die Berechnung der vorläufigen Coordinatenunterschiede erfolgt unter Zugrundelegung einer bloss durch Schätzung bestimmten Anfangsneigung. Ausser der vorläufigen Entfernung  $\mathcal{S}$  ist dann aus den vorläufigen Coordinatenunterschieden und den Coordinaten der **gegebenen** Punkte noch der Fehler der Anfangsneigung herzuleiten.\*\*\*) Letztere ist dann um den erhaltenen Betrag zu verbessern, und die Berechnung, nachdem selbstverständlich auch die wahren Werthe der Dreiecksseiten durch Multiplication der vorläufigen Werthe mit  $q$  ermittelt worden, mit den so berichtigten Elementen zu wiederholen.

## IV. Sphärisch trigonometrische Messungen.

§ 30.

### Das Erdsphäroid.

Ein Körper, welcher durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist, heisst Sphäroid. Ein solcher Körper ist bekanntlich die Erde. Die Meridiane, d. i. die durch die Rotationsaxe der Erde gelegten Schnitte, sind also Ellipsen, und es können daher, wo es sich um die Aufnahme ganzer Länder handelt, die Formeln der sphärischen Trigonometrie nicht ohne Weiteres Anwendung finden, bedürfen vielmehr gewisser Correctionen,\*\*\*) welche ihrerseits die Kenntniss der Excentricität der Meridianellipse bzw. der Abplattung erfordern. Wir wollen daher

\*) Im trigon. Form. 19 der pr. Verm.-Anw. Vom § 40 muss hier zum Verständniss des Folgenden vorweg Kenntniss genommen werden.

\*\*) Ist die aus den Coordinaten der gegebenen Punkte abgeleitete Neigung der diese Punkte verbindenden Geraden  $= r$ , die aus den **vorläufigen** Coordinaten sich ergebende Neigung  $= n$ ,  $\left( \text{tang } n = \frac{[\Delta y]}{[\Delta x]} \right)$ , so ist  $n - r$  der Fehler der Anfangsneigung.

\*\*\*) Wenigstens einer strengen Berücksichtigung des mit der geographischen Breite wechselnden Krümmungsradius der Meridianellipse pp.

noch zeigen, wie diese durch bloss Gradmessungen gefunden werden können, (vergl. 4)), zugleich auch einige Formeln entwickeln, welche auch in die niedere Geodäsie Eingang gefunden haben, seitdem bei Aufnahme grösserer Flächen der Anschluss an die Landesaufnahme vorgeschrieben ist.

1) Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Erdoberfläche ist, infolge der sphäroidischen Gestalt der Erde, kein Bogen eines grössten Kugelkreises, liegt also nicht in einer durch den Erdmittelpunkt gelegten Ebene, ja, sie liegt überhaupt nicht einmal in einer Ebene, ist also eine Kurve doppelter Krümmung. Denkt man sich nämlich diese Linie  $AB$ , Fig. 54, durch verticale Signalstangen abgesteckt, so müssten diese, wenn sie in der Ebene des grössten Kugelkreises  $ABC$  lägen, in ihren Verlängerungen den Erdmittelpunkt treffen. Dies ist aber, wie man aus der Figur ersieht, nicht der Fall, vielmehr schneidet ein in einem Punkte der nördlichen Halbkugel auf die Erdoberfläche, (Berührungsebene), errichtetes Loth die kleine Axe südlich vom Erdmittelpunkte, und zwar um so südlicher, je nördlicher der fragliche Punkt gelegen. Alle in verschiedenen Breiten errichteten Lothe müssen sich daher in der Nähe des Erdmittelpunktes **kreuzen**. liegen also nicht in einer Ebene, also auch nicht der durch sie bezeichnete Erdbogen. Letzterer heisst die **geodätische Linie**, welche indessen nicht Gegenstand unserer Erörterungen sein kann. Immerhin erschien es angemessen, derselben mit diesen kurzen Andeutungen Erwähnung zu thun.

2) **Abplattung, Excentricität.** Bezeichnen wir die Abplattung, d. h. die Differenz der grossen und kleinen Halbaxe, ausgedrückt in Theilen der ersteren, d. h. also den Bruch  $\frac{a-b}{a}$  mit  $e$ , die Excentricität der Meridianellipse, ebenfalls in Theilen der grossen Halbaxe ausgedrückt, mit  $\varepsilon$ , also  $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \varepsilon$ , so ist, da  $\frac{a-b}{a} = e$ :

$$b = a - e a = a(1 - e) \quad (138)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - a^2(1 - e)^2}{a^2}} \quad (139)$$

$$\varepsilon = \sqrt{e(2 - e)}. \quad (140)$$

Hierin ist die Abplattung  $e$  durch Gradmessung (vergl. 4)  $= \frac{1}{299,15}$  gefunden.

3) Ziehen wir in  $A$ , Fig. 55, eine Tangente an die Meridianellipse, errichten auf diese in  $A$  ein Loth  $AB$ , so stellt erstere die Horizontale, letzteres die Verticale für den Punkt  $A$  dar. Der Winkel  $\varphi$  heisst die elliptische,  $\psi$  die geocentrische Polhöhe des Ortes  $A$ .

Die Subnormale  $DE$  ist nach (54)

$$DE = \frac{b^2}{a^2} x \quad (141)$$

ferner ist  $\text{tang } \varphi^2 = \frac{AE^2}{ED^2} = y^2 : \frac{b^4}{a^4} x^2$  (nach 141) (142)

endlich nach der Ellipsengleichung:

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (143)$$

also 
$$\operatorname{tang} \varphi^2 = \frac{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}{\frac{b^4}{a^4} x^2}$$

folglich 
$$a^4 = (a^2 + b^2 \operatorname{tang} \varphi^2) x^2 \quad (144)$$

oder 
$$a^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tang} \varphi^2\right) x^2.$$

Da  $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a}} = \varepsilon$ , so ist  $\frac{b^2}{a^2} = (1 - \varepsilon^2)$

also 
$$\begin{aligned} a^2 &= (1 + (1 - \varepsilon^2) \operatorname{tang} \varphi^2) x^2 \\ a^2 &= (1 + \operatorname{tang} \varphi^2 - \varepsilon^2 \operatorname{tang} \varphi^2) x^2 \\ &= (\sec \varphi^2 - \varepsilon^2 \operatorname{tang} \varphi^2) x^2 \\ a^2 \cos \varphi^2 &= (1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2) x^2 \end{aligned}$$

mithin 
$$x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}} \quad (145)$$

Durch Einsetzung dieses Werthes in (142) erhält man leicht, unter Anwendung von (139), da  $y = A E$ ,

$$y = \frac{\frac{b^2}{a^2} \sin \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}} \quad (146)$$

oder auch nach (141), da  $y = D E \operatorname{tang} \varphi$

$$y = \frac{b^2}{a^2} x \operatorname{tang} \varphi.$$

Weiter ist  $\operatorname{tang} \psi = \frac{y}{x}$ , oder nach (145) und (146)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} \psi &= \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tang} \varphi \\ &= (1 - \varepsilon^2) \operatorname{tang} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

3) Aendern sich  $y$  und  $x$  um die sehr kleinen Beträge  $dy$  und  $dx$ , so ändert sich der zum Winkel  $\varphi$  gehörige Bogen um

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Durch Differentiation der Gleichung (143) erhalten wir:

$$2y dy = -\frac{2b^2 x}{a^4} dx$$

$$dy^2 = \frac{b^4 x^2 dx^2}{a^4 y^2}$$

daher 
$$ds = \frac{dx}{a^2 y} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}$$

oder nach (145) und (146)

$$ds = \frac{dx}{a^2 y} \sqrt{\frac{a^2 b^4 \sin^2 \varphi^2 + a^2 b^4 \cos^2 \varphi^2}{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}}$$

$$= \frac{dx}{a^2 y} a b^2 \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi^2 + \cos^2 \varphi^2}{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}}$$

$$ds = \frac{b^2 dx}{a y} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}}.$$

Durch Differentiation von (144) wird erhalten:

$$2x dx (a^2 + b^2 \tan^2 \varphi) + x^2 b^2 2 \tan \varphi d \tan \varphi = 0 \text{ oder nach (41):}$$

$$2x dx (a^2 + b^2 \tan^2 \varphi) + \frac{2b^2 x^2 \tan \varphi d \varphi}{\cos^2 \varphi} = 0$$

woraus man durch Division mit  $2x$  und Multiplication mit  $\cos^2 \varphi$  findet:

$$dx = \frac{-b^2 x \tan \varphi d \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$$

also

$$\frac{dx}{y} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{b^2 \tan \varphi d \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$$

nach (145) und (146) ergibt sich:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^2}{b^2} \cot \varphi$$

also

$$\frac{dx}{y} = -\frac{a^2 d \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$$

oder da  $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$

$$\frac{dx}{y} = -\frac{d \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}$$

der obige Ausdruck für  $ds$  geht daher über in:

$$ds = -\frac{b^2 d \varphi}{a(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

oder wenn wir wieder  $a^2(1 - \varepsilon^2) = b^2$  setzen:

$$ds = -\frac{a(1 - \varepsilon^2) d \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (148)$$

4) **Gradmessungen** bezwecken die Ermittlung der Abplattung des Erdsphäroids. Setzt man in (148)  $d \varphi = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ , so erhält man die Bogenlänge für  $1^\circ$  des Meridians in der Breite  $\varphi$

$$m_\varphi = \frac{a(1 - \varepsilon^2) \pi}{180((1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi))^{\frac{3}{2}}}$$

Hätte man die Bogenlängen für  $1^\circ$  des Meridians unter zwei verschiedenen Breiten  $\varphi$  und  $\varphi'$  gemessen, wären also  $m_\varphi$  und  $m_{\varphi'}$  bekannt, dagegen die Dimensionen des Erdsphäroids, in unserer Formel also  $a$  und  $\varepsilon$ , noch unbekannt, so wären zur Bestimmung dieser Unbekannten zwei Gleichungen, nämlich die beiden Ausdrücke für  $m_\varphi$  und  $m_{\varphi'}$ , gegeben, woraus sich die Unbekannten entwickeln lassen. Es genügt also zur Bestimmung der Dimensionen des Erdsphäroids die Messung zweier Meridiangrade unter möglichst verschiedenen Breiten.\*)

\*) Weitere Mittel zur Bestimmung der Abplattung hat man in Pendelbeobachtungen und in Bestimmungen der Mondbahn, deren Gestalt einen Schluss auf die Gestalt der Erde gestattet. Alle diese verschiedenen Mittel führen zu etwas von einander abweichenden Resultaten. Die Resultate der Pendelbeobachtungen sind schwankende wegen der verschiedenen Dichtigkeit der Erde. Da auch die Resultate verschiedener Gradmessungen nicht so genau unter sich übereinstimmen, als die Schärfe der Messungen erwarten lässt, so ist man zu der Annahme einer mathematisch nicht genauen Sphäroidform der Erde genöthigt.

5) **Krümmungsradien der Meridianellipse.** Der Krümmungsradius des Meridians für die Breite  $\varphi$  ist nach (59)

$$R_m = \frac{ds}{d\varphi}$$

daher nach (148) 
$$R_m = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (149)$$

6) **Der Radius des Parallelkreises** in der Breite  $\varphi$  ist nach (145), da  $r = x$

$$r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} \quad (150)$$

mithin ist A B, Fig. 55, welches wir gleich  $R_n$  setzen wollen:

$$R_n = \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} \quad (151)$$

**Aufgabe:** Wie gross ist der Radius einer Kugel, deren Parallelkreis in der Breite  $\varphi$  dem Parallelkreise des Sphäroids in der Breite  $\varphi$  congruent ist?

Ist  $R$  der Radius der Kugel,  $r$  der Radius des Parallelkreises für die Kugel sowohl, wie für das Sphäroid, so ist für die Kugel  $r = R \cos \varphi$ , wie ohne Weiteres erhellt, für das Sphäroid  $r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$ , also  $R = \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} = R_n$ .

§ 31.

**Sphärische Coordinaten.**

Die niedere Geodäsie, welche sich die Aufnahme von Flächen geringer Ausdehnung zur Aufgabe stellt, kann von der Berücksichtigung der sphäroidischen Gestalt der Erde absehen und die Flächen als **eben** betrachten. Es fragt sich nun, wie weit ein Messungsgebiet ausgedehnt werden darf, wenn man dasselbe noch als eben ansehen will, ohne befürchten zu müssen, dass dadurch ein für die Praxis merkbarer Fehler entsteht.

Denken wir uns senkrecht zum Meridian, den wir als Abscissenaxe eines Coordinatensystems ansehen, in verschiedenen Punkten grösste Kugelkreise gelegt, Fig. 56, so werden diese sich sämtlich in **einem** um  $90^\circ$  vom Meridian entfernten Punkte schneiden, (ebenso wie sich die zum Aequator senkrechten Meridiane sämtlich im Pole schneiden). Die Convergenz der Ordinatenbögen ist indessen in der Nähe des Meridians noch sehr gering, und es fragt sich, bis zu welcher Entfernung von demselben kann dieselbe noch vernachlässigt werden? Denken wir uns in der Entfernung  $a$  vom Meridian zu diesem einen Parallelkreis gezogen, Fig. 56, wo wir den Bogen  $a$  in Theilen des Erdradius ausgedrückt denken wollen, so ist, wenn wir die Bezeichnungen der Figur einführen:

$$b = a \cos a$$

— denn der Radius des Parallelkreises ist, wenn  $R$  den Radius des Meridiankreises bezeichnet,  $r = R \cos a$ . — Nach (48) können wir, wenn wir in dieser Reihe alle Glieder, welche  $a$  in höherer als der 2ten Potenz enthalten, vernachlässigen, diesen Ausdruck schreiben:

$$b = a \left(1 - \frac{a^2}{2}\right).$$

\*)  $R_n$  ist Krümmungsradius des zum Meridian senkrechten grössten Kugelkreises in der Breite  $\varphi$ .

Indem wir nun das Coordinatensystem als eben ansehen, begehen wir den Fehler, dass wir  $b = a$  annehmen. Der Fehler  $a - b$  kann für die Praxis unbeachtet bleiben, wenn derselbe nicht den Betrag  $0,00005 a$  übersteigt, d. h. der Fehler  $a - b$ , oder  $a - a \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)$  darf im äussersten Falle den Werth  $0,00005 a$  erreichen. Wir haben also für diesen Fall die Gleichung

$$a - a \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) = 0,00005 a$$

woraus sich

$$a = 0,001$$

ergiebt. Dieser Werth gilt für den Radius 1. Für den Radius  $R = \text{rtd } 6000000 \text{ m}$  ergibt sich somit

$$a = 60000 \text{ m.}$$

Wir werden also ein Coordinatensystem als eben ansehen können, so lange seine Ordinaten nicht länger als 60 Kilometer sind. Im anderen Falle können die Formeln der ebenen Trigonometrie nicht ohne Weiteres Anwendung finden. Wir betrachten dann die Terrainoberfläche als eine Kugel, welche das Erdsphäroid im Nullpunkte des Coordinatensystems berührt und sich der Oberfläche des Sphäroids möglichst nahe anschmiegt. Der Radius dieser Kugel ist gleich dem geometrischen Mittel des Krümmungsradius der Meridianellipse in der Breite  $\varphi$  des Coordinaten-Nullpunkts und des zum Meridian senkrechten grössten Kugelkreises, also  $R = \sqrt{R_m R_n}$ , (vergl. (149) und (150)).

§ 32.

**Berechnung der sphärischen Coordinaten aus den geographischen Coordinaten, (Länge und Breite).\*)**

Seit Fertigstellung der Landesaufnahme wird der Geometer die Ausführung selbstständiger Triangulationen nur noch selten nöthig haben. Es wird sich in der Regel nur noch darum handeln, der Landesaufnahme einzelne Punkte durch trigonometrische Punkteinschaltung ergänzend hinzuzufügen. Da die trigonometrischen Punkte der Landesaufnahme durch ihre geographische Länge und Breite gegeben sind, so entsteht dem Geometer zunächst die Aufgabe, diese geographischen Coordinaten in rechtwinklig sphärische umzurechnen, wobei der Meridian irgend eines Punktes der Landesaufnahme als Abscissenaxe, und dieser Punkt selbst als Coordinaten-Nullpunkt angesehen wird.

In der preussischen Vermessungs-Anweisung sind für die verschiedenen Kreise der Provinzen ganz bestimmte trigonometrische Punkte als Nullpunkte vorgeschrieben. Da die Lage derselben eine genügend enge ist, die einzelnen Systeme also nur eine geringe Ausdehnung haben, so können dann die sphärischen Coordinaten dieser Systeme als **ebene** behandelt werden.

Sei nun  $P_0$ , Fig. 57, der Nullpunkt des Systems, P ein zweiter Punkt, dessen sphärische Coordinaten, bezogen auf den Meridian des Nullpunktes als Abscissenaxe, gefunden werden sollen, und seien  $\varphi_0$ ,  $\varphi$  und  $\lambda_0$ ,  $\lambda$  bezüglich die geographischen Breiten und Längen der Punkte  $P_0$  und P,  $\varphi_f$  die geographische Breite des Fusspunktes  $P_f$  der Ordinate  $PP_f$ , und setzt man

$$\varphi_f - \varphi = \psi \tag{152}$$

so ist die Abscisse des Punktes P

$$x = P_0 P_f = (\varphi + \psi) - \varphi_0. \tag{152a}$$

\*) Trigon. Formul. 6 der preussischen Verm.-Anw.

Die Ordinate wird, wenn man

$$\lambda - \lambda_0 = \eta \tag{153}$$

setzt, aus dem rechtwinklig sphärischen Dreiecke  $N P P_f$

$$\text{tang } y = \text{tang } \eta \cos \varphi_f \tag{154}$$

gefunden, (nach (4), da  $\sin N P_f = \cos \varphi_f$ ).

Es kommt nun darauf an, den Breitenunterschied  $\varphi_f - \varphi = \psi$  zu finden, wodurch  $\varphi_f$  bekannt wird.

Man lege senkrecht zum Meridian des Punktes  $P_0$ , Fig. 58, den grössten Kugelkreis  $P_f P$ , welcher offenbar die Ebene des Parallels  $B P B'$ , sowie die des Aequators, unter dem Winkel  $\varphi_f$  schneidet, und zwar Erstere in der Kante  $P D$ , auf welcher die Radien  $C B$  des Parallelkreises und  $M P_f$  des Meridians senkrecht stehen. Nach der Scheitelgleichung des Kreises (14) ist dann, wenn  $r$  den Radius  $C B$  des Parallels in der Breite  $\varphi$  bezeichnet:

$$A P^2 = 2 r A B - A B^2.$$

Da der Bogen  $P B$ , — Längenunterschied der Punkte  $P_0$  und  $P$ , — stets ein sehr flacher sein wird, so ist  $A B$  gegen  $r$ , also  $A B^2$  gegen  $2 r A B$ , verschwindend klein, und kann die halbe Sehne  $A P$  ohne Fehler gleich dem Bogen  $B P$  gesetzt werden. Bezeichnet nun  $L$  die Bogenlänge für  $1''$  des Parallels,  $\eta''$  den in Sekunden ausgedrückten Winkel  $B C P (= \lambda - \lambda_0)$ , so ist  $B P = \eta'' L$ , unsere Gleichung geht also über in

$$(\eta'' L)^2 = 2 r A B.$$

Ferner kann man ohne Fehler setzen:

$$\psi = A B \sin P_f \quad A B = A B \sin \varphi_f$$

$$1) \quad \psi = \frac{(\eta'' L)^2 \sin \varphi_f}{2 r}.$$

Ist nun  $r$  der Radius des Parallelkreises in der Breite  $\varphi$ , so ist die Bogenlänge für  $1''$  dieses Parallels  $L = \frac{r}{\rho''}$ , — (denn die Bogenlänge für  $1''$  des mit dem Radius **Eins** beschriebenen Kreises ist nach Thl. I, §31 1) gleich  $\frac{1}{\rho''}$ ). — Nach § 30, 6) ist aber

$$2) \quad r = R_n \cos \varphi$$

also

$$3) \quad L = \frac{R_n}{\rho''} \cos \varphi.$$

Setzen wir 2) und 3) in 1) ein, so erhalten wir:

$$\psi = \frac{\eta'' \eta'' L \sin \varphi_f}{2 \rho''}$$

oder, da  $\varphi_f$  nur um wenige Sekunden von  $\varphi$  verschieden ist, so dass wir ohne merklichen Fehler  $\sin \varphi$  für  $\sin \varphi_f$  setzen können

$$\psi = \frac{\eta'' \eta'' L \sin \varphi}{2 \rho''}.$$

Bezeichnet nun  $R_m$  den Krümmungsradius des Meridians in der Breite  $\varphi$ , und setzt man  $\frac{L \sin \varphi}{2 R_m} = q$  (worin  $q$  aus Tabelle I des Anhangs entnommen werden kann), also  $L \sin \varphi = 2 R_m q$ , so erhalten wir:

$$\psi = \eta'' \eta'' q \frac{R_m}{\rho''}$$

$$\psi \frac{\rho''}{R_m} = \eta'' \eta'' q.$$

Da  $\frac{\psi'}{R_m}$  das analytische Mass für den Winkel  $\psi$ , so ist  $\frac{\psi'}{R_m} \varrho''$  der in Sekunden ausgedrückte Winkel  $\psi$ . Setzen wir denselben gleich  $\psi''$ , so erhalten wir:

$$\psi'' = \eta'' \eta'' q. \quad (155)$$

Die Gleichungen (152)—(155) setzen uns in den Stand, die Bögen  $x$  und  $y$  in Gradmass zu berechnen. Wir werden in § 34 zeigen, wie dasselbe in Metermass auszudrücken ist.

§ 33.

**Additamentenverfahren.**

Drücken wir den Sinus und die Tangente eines Winkels  $\varphi$  nach (47) und (49) durch seinen Bogen aus, wobei wir uns den Winkel  $\varphi$  so klein vorstellen wollen, dass alle Glieder der bezüglichen Reihen, welche  $\varphi$  in höherer als der dritten Potenz enthalten, als verschwindend angesehen werden können, so erhalten wir:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{2 \cdot 3}$$

$$\text{tang } \varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3}$$

und wenn wir  $\frac{\varphi^3}{2 \cdot 3} = a$ ,  $\frac{\varphi^3}{3}$  also  $= 2 a$  setzen:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \sin \varphi = \varphi - a \\ \text{tang } \varphi = \varphi + 2 a. \end{array} \right.$$

Da wir  $\varphi$  als sehr klein annehmen, so wird auch  $a$  eine sehr kleine Grösse (Differential) sein.

Nach (38) ist nun

$$d \log \varphi = M \frac{d \varphi}{\varphi}$$

also für  $d \varphi = a$

$$d \log \varphi = \frac{M a}{\varphi}$$

d. h. lässt man in der Funktion  $\log \varphi$  die Veränderliche  $\varphi$  um den Betrag  $a$  zu- oder abnehmen, so wird  $\log \varphi$  um den Betrag  $\frac{M a}{\varphi}$  zu- oder abnehmen,

also ist  $\log(\varphi - a) = \log \varphi - \frac{M a}{\varphi}$  \*)

oder nach 1):  $\log \sin \varphi = \log \varphi - \frac{M a}{\varphi}$ ,

oder für  $\frac{M a}{\varphi} = A$

$$\left. \begin{array}{l} \log \sin \varphi = \log \varphi - A \\ \log \text{tang } \varphi = \log \varphi + 2 A \end{array} \right\} \quad (156)$$

und ebenso  
woraus weiter folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \log \varphi = \log \sin \varphi + A \\ \log \varphi = \log \text{tang } \varphi - 2 A \\ \log \sin \varphi = \log \text{tang } \varphi - 3 A \end{array} \right\} \quad (156 a)$$

\*) Dies folgt auch ohne Weiteres aus der Taylorschen Reihe (§ 52), wenn in derselben alle Glieder, welche das Differential  $a$ , — einen sehr kleinen Bruch, — in höherer als der 1. Potenz enthalten, als verschwindend angesehen werden.

Kennt man also für einen Bogen  $\varphi$  sein Additament  $A = \frac{M a}{\varphi} = \frac{M \varphi^3}{6}$ , so kann man vom Logarithmus des Bogens  $\varphi$  ohne Weiteres zum Logarithmus irgend welcher Winkelfunktion übergehen und umgekehrt. — Näheres ergeben die Erläuterungen zu Tafel II, Anhang.

§ 34.

**Verwandlung des Gradmasses der kleinen Bögen  $y$  und  $x$  (§ 32) in Längenmass.**

Ist  $n$  die Bogenlänge für  $1''$  des grössten Kugelkreises, so ist die Bogenlänge des in Sekunden ausgedrückten Winkels  $\eta$

$$\eta = \eta'' n$$

also nach (154), da  $\varphi + \psi = \varphi_f$

$$\text{tang } y = \text{tang } \eta'' n \cos \varphi_f.$$

Es ist aber  $n \cos \varphi_f$  nichts anderes, als die Bogenlänge für  $1''$  des Parallelkreises in der Breite  $\varphi_f$ . Bezeichnen wir dieselbe mit  $L_f$ \*, so ist also

$$\text{tang } y = \text{tang } \eta'' L_f$$

also nach (156)

$$\log \text{tang } y = \log \eta'' + 2 A_{\eta} + \log L_f. \quad (157)$$

Ist hieraus  $\log \text{tang } y$  berechnet, so erhalten wir  $y$  aus der Gleichung

$$\log y = \log \text{tang } y - 2 A_y. \quad (158)$$

Hierin ist das Additament  $A_y$  der Tafel II des Anhangs mit dem Argument  $\log \text{tang } y (= \log s)$  zu entnehmen.

Für die Abscisse haben wir nach (152a) und (152)

$$x = \varphi_f - \varphi_0.$$

Tafel I des Anhangs giebt die Länge  $B$  der Erdbögen  $\varphi$  in Metern. (Spalte  $B = \text{Breite}$ ). Wir erhalten  $x$  in Metermass

$$x = B_f - B_0. \quad (159)$$

Wir können auch  $x$  wie folgt finden: Bezeichnet  $m$  die Bogenlänge für  $1''$  des Meridians in der Breite  $\frac{\varphi_0 + \varphi_f}{2}$ \*\*, so ist, wenn  $\xi''$  den in Sekunden ausgedrückten Breitenunterschied  $\varphi_f - \varphi_0$  bezeichnet,

$$y = \xi'' m. \quad (160)$$

Der Gang der Rechnungen gestaltet sich nach diesen Formeln wie folgt: \*\*\*)

Man bildet  $\eta'' = \lambda - \lambda_0$ , entnimmt mit Argument  $\varphi$  aus Tafel I des Anhangs die Grösse  $q$  und findet  $\psi''$  nach (155). Somit kennt man  $\varphi_f$  nach (152). Entnimmt man mit Argument  $\varphi_0$  und  $\varphi_f$  die Länge der Bögen  $\varphi_0$  und  $\varphi_f = B_0$  u.  $B_f$ , so ergiebt sich die Abscisse nach (159). Zur Berechnung der Ordinate entnimmt man mit Argument  $\log \eta''$  das Additament  $A_{\eta''}$  aus Tafel II des Anhangs, ferner aus Tafel I die Länge  $L_f$  mit Argument  $\varphi_f$ , und findet  $\log \text{tang } y$  nach (157). Mit  $\log \text{tang } y$  als Argument entnimmt man aus Tafel II, (Eingang in Spalte  $\log s$ ), das Additament  $A_y$  und findet dann endlich  $\log y$  nach (158).

\*) Auf dem Erdsphäroid ist der Parallelkreis  $\varphi_f$  congruent mit dem Parallelkreise  $\varphi_f$  einer Kugel mit dem Radius  $R_n$  — vergl. § 30, 6) —, also ist  $\frac{n}{R_n}$  das analytische Mass für den Winkel  $1''$ . Da man die Sekundenzahl eines in analytischem Masse gegebenen Winkels durch Multiplication mit  $q''$  erhält, so ist also  $\frac{n q''}{R_n} = 1$ , also  $n = \frac{R_n}{q''}$ , folglich  $L_f = \frac{R_n}{q''} \cos \varphi_f$ .

\*\*)  $m$  ist  $= \frac{R m}{q''}$  und kann mit Argument  $\frac{\varphi_0 + \varphi_f}{2}$  aus Tafel I des Anhangs entnommen werden.

\*\*\*) Im trigon. Formul. 6 der pr. Verm.-Anw.

§ 35.

**Berechnung geographischer Coordinaten aus den sphärischen Coordinaten.**

Gegeben seien die sphärischen Coordinaten  $y$  und  $x$  des Punktes  $P$ , die Breite und Länge des Coordinaten-Nullpunkts,  $\varphi_0$  und  $\lambda_0$ , gesucht die Breite  $\varphi$  und Länge  $\lambda$  des Punktes  $P$ .

Man findet  $\xi'' = \varphi_f - \varphi_0$  nach (160):

$$\xi'' = \frac{m}{x}. \quad (160b)$$

Hierin ist  $m$  zunächst **vorläufig** mit Argument  $\varphi_0$  aus Tafel I des Anhangs zu entnehmen, wodurch mittelst (160b) ein **angenäherter** Werth für  $\xi''$ , und sodann für  $\varphi_f = \varphi_0 + \xi''$  erhalten wird. Dieser angenäherte Werth für  $\varphi_f$  ist genau genug

zur Bildung des Arguments  $\frac{\varphi_0 + \varphi_f}{2}$ , mit welchem  $m$  nochmals derselben Tafel entnommen wird, worauf nun (160b) den genauen Werth für  $\xi''$  liefert. Somit kennt man nun  $\varphi_f = \varphi_0 + \xi''$ , also auch  $L_f$  (nach Tafel I) und findet nach (157)

$$\begin{aligned} \log \eta'' + 2 A_{\eta''} &= \log \tan y - \log L_f \\ &= \log y + 2 A_y - \log L_f. \end{aligned} \quad (161)$$

Hiermit hat man den Längenunterschied  $\eta = \lambda - \lambda_0$ .

Um weiter den Bogen  $\psi$  zu berechnen entnimmt man in Formel (155) den Werth  $q$  **vorläufig** mit Argument  $\varphi_f$ , berechnet damit einen **vorläufigen** Werth für  $\psi''$  und nach (152) einen vorläufigen Werth für  $\varphi$ , welcher als Argument zur nochmaligen Entnahme von  $q$  dient, worauf aus (155) der endgültige Werth für  $\psi''$ , und sodann aus (152) der endgültige Werth für  $\varphi$  erhalten wird.

§ 36.

**Berechnung geodätischer Dreiecke.**

1) **Additamentenmethode.** In einem sphärischen Dreiecke, dessen Seiten im Verhältniss zum Kugelradius sehr klein sind, (geodätisches Dreieck), sei die Seite  $a$  und die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  gegeben,  $b$  sei zu berechnen.

Es ist  $\sin a : \sin \alpha = \sin b : \sin \beta$

also  $\log \sin b = \log \sin a + \log \sin \beta - \log \sin \alpha.$

Der Bogen  $a$  ist in Metermass gegeben,  $b$  in gleichem Masse zu ermitteln. — Man entnimmt aus Tafel II des Anhangs das zu  $\log \sin a$ , (Eingang in Spalte  $\log s$ ), gehörige Additament  $A_a$  und erhält  $\log \sin a = \log a - A_a$ , also  $\log \sin b = \log a + A_a + \log \sin \beta - \log \sin \alpha.$

Ist hieraus  $\log \sin b$  gefunden, so entnimmt man aus Tafel II das zugehörige Additament  $A_b$  und findet  $\log b = \log \sin b - A_b.$

2) **Lehrsatz von Legendre.** Sind die Seiten eines sphärischen Dreiecks im Verhältniss zum Radius sehr klein, so kann man das Dreieck als **ebenes** Dreieck behandeln, nachdem man die drei Winkel je um  $\frac{1}{3}$  des sphärischen Excesses vermindert hat.\*)

Ist die Summe der gemessenen Winkel eines sphärischen Dreiecks

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ + E',$$

\*) Der Beweis dieses Satzes liegt zwar keineswegs ausserhalb des Rahmens dieses Buches, bietet aber kein besonderes Interesse, weshalb wir glauben, denselben übergehen zu können.

so bedeutet  $E'$  noch nicht den sphärischen Excess, sondern es setzt sich  $E'$  vielmehr aus diesem und den Beobachtungsfehlern zusammen. Man wird also den Excess auf anderem Wege ermitteln müssen, und erhält, wenn man denselben mit  $E$  bezeichnet, die Summe der Beobachtungsfehler

$$f = E' - E.$$

Diese Summe ist nach den Gesetzen der Ausgleichsrechnung zu vertheilen, die so verbesserten Winkel sind je um  $\frac{1}{3} E$  zu vermindern, worauf das Dreieck nach den Formeln der ebenen Trigonometrie zu berechnen ist.

Zur Berechnung des sphärischen Excesses hat man nach (10)

$$E'' = \frac{648000}{\pi} \frac{F}{r^2}$$

oder nach Theil I, § 31 1)  $E'' = \varrho'' \frac{F}{r^2}$ .

Der Flächeninhalt  $F$  wird genau genug erhalten, indem man das Dreieck als eben betrachtet, also nach den Formeln der ebenen Trigonometrie rechnet.

### § 37.

#### Berechnung sphärischer Coordinaten (nach Soldner).\*)

1) **Gegeben** seien die Coordinaten  $x_a, y_a$  des Punktes  $P_a$ , Fig. 59, der Neigungswinkel  $\nu_a$  des Erdbogen  $P_a P_b$ , die Entfernung  $P_a P_b = s$ , welche aus den Dreiecksberechnungen bekannt ist, — **gesucht** die Coordinaten  $x_b, y_b$  des Punktes  $P_b$  und die Neigung  $\nu_b$  — (Letztere wird gebraucht, um die Neigung des an die Dreiecksseite  $P_a P_b$  sich anschliessende Seite des folgenden Dreiecks zu berechnen, zum Zwecke der Berechnung der Coordinaten des folgenden Punktes).

Nach (47) ist

$$1) y_b = \sin y_b + \frac{1}{6} \sin^3 y_b$$

die folgenden Glieder kann man wegen der Kleinheit des Bogens  $y_b$  vernachlässigen.

Weiter ist nach (8) im sphärischen Dreiecke  $P_a P_b O$

$$2) \sin y_b = \cos s \sin y_a + \sin s \cos y_a \sin \nu_a$$

$$\text{und } 3) \sin y_a = y_a - \frac{y_a^3}{6} \text{ und } \sin s = s - \frac{s^3}{6}$$

$$\cos y_a = y_a + \frac{y_a^2}{2} \quad \cos s = 1 - \frac{s^2}{2}.$$

Setzen wir die Werthe 3) in 2) ein und vernachlässigen alle sich ergebenden Glieder von höherer als der 3ten Potenz, so erhalten wir:

$$4) \sin y_b = y_a + s \sin \nu_a - \frac{1}{6} y_a^3 - \frac{1}{2} y_a s^2 + \frac{1}{2} y_a^2 s \sin \nu_a - \frac{1}{6} s^3 \sin \nu_a.$$

Dieser Werth für  $\sin y_b$  in Gleichung 1) rechts eingesetzt ergibt, wenn wir wieder alle Glieder von höherer als 3ter Ordnung streichen:

$$5) y_b = y_a + s \sin \nu_a + \frac{1}{2} y_a s^2 \cos^2 \nu_a - \frac{1}{6} s^3 \cos^2 \nu_a \sin \nu_a.$$

Diese Gleichung gilt für den Radius 1. Für den Halbmesser  $r$ , (Halbmesser der Berührungskugel  $r = \sqrt{R_m R_n}$  — § 32 —), sind die Bögen  $y_a, y_b$  und  $s$  mit  $r$

\*) Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde.

zu dividiren. Führen wir diese Division aus, und multipliciren gleichzeitig die ganze Gleichung mit  $r$ , so erhalten wir:

$$y_b = y_a + s \sin v_a - \frac{y_a s^2}{2 r^2} \cos^2 v_a - \frac{s^3}{6 r^2} \cos^2 v_a \sin v_a$$

oder wenn wir  $s \sin v_a = \eta$ ,  $s \cos v_a = \xi$  setzen: (163)

$$y_b = y_a + \eta - \frac{y_a \xi^2}{2 r^2} - \frac{\eta \xi^2}{6 r^2}.$$
 (164)

Nach dem Sinussatze ist, wenn wir in demselben sphärischen Dreiecke für den Winkel bei O den Bogen  $\Delta x = x_b - x_a$  setzen\*)

$$\sin \Delta x = \frac{\sin s \cos v_a}{\cos y_b}$$

woraus sich durch ganz analoge Entwicklung ergibt:

$$\Delta x = \xi + \frac{\xi y^2}{2 r^2} - \frac{\xi \eta^2}{6 r^2}$$
 (164a)

$\eta$  und  $\xi$ , ( $= s \sin v_a$  und  $s \cos v_a$ ), sind die nach den Formeln der ebenen Trigonometrie berechneten Coordinatenunterschiede, — vergl. (174). — Die Brüche in den Gleichungen (164) und (164a) stellen also die Correctionen dar, welche den ebenen Coordinaten hinzuzufügen sind, um zu den sphärischen Coordinaten überzugehen. Bezeichnen wir diese Correctionsglieder der Reihe nach mit A, B, C, D, also

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_a \xi^2}{2 r^2} &= A \text{ und } \frac{\xi y^2}{2 r^2} = C \\ \frac{y \xi^2}{6 r^2} &= B \quad \text{„} \quad \frac{\xi \eta^2}{6 r^2} = D \end{aligned} \right\}$$
 (165)

so erhalten wir aus (163) und (164):

$$\left. \begin{aligned} y_b &= y_a + \eta - (A + B) \\ x_b &= x_a + \xi + (C - D) \end{aligned} \right\}$$
 (166)

2) In dem sphärischen Viereck, welches von den Bögen  $\Delta x$ ,  $y_a$ ,  $y_b$  und  $s$  eingeschlossen ist, ist, wie man sofort erkennt, die Winkelsumme  $= 2 \times 90^\circ + (90 + v_a) + (3 \times 90^\circ - v_b)$ . Dieselbe Winkelsumme ist aber auch, wenn E den sphärischen Excess des Vierecks bezeichnet,  $= 4 \times 90^\circ + E$ . Man hat also

$$4 \times 90^\circ + E = 6 \times 90^\circ + v_a - v_b$$

und hieraus  $v_b = v_a + 180^\circ - E$ . (167)

Zur Berechnung von E hat man, wenn F den Flächeninhalt des Vierecks bezeichnet, — vergl. (162):

$$E = \frac{F \rho''}{r^2} = \frac{\rho''}{2 r^2} \xi \cdot 2 y_a + \frac{\rho''}{2 r^2} \xi \eta.$$
 (167a)

§ 38.

**Berechnung der sphärischen Entfernungen und Neigungen aus den sphärischen Coordinaten.\*\*)**

Nach den Gleichungen (166) erhalten wir die ebenen Coordinatenunterschiede

$$\left. \begin{aligned} \eta &= y_b - y_a + A + B \\ \xi &= x_b - x_a + (C - D) \end{aligned} \right\}$$
 (168)

\*) Es leuchtet ein, dass die zwischen den Kreisen  $P_a O$  und  $P_b O$  liegenden Bögen aller zum Meridian parallelen Kreise, in Winkelmaß ausgedrückt, dem Winkel bei O gleich sind.

\*\*) Trigon. Formul. 7 der preussischen Verm.-Anw.

Zur Berechnung von A, B, C, D setzen wir in die Gleichungen (165) für die Unbekannten  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  die bekannten Grössen  $\Delta x$  und  $\Delta y$ , was ohne merklichen Fehler geschehen kann, und erhalten:

$$\left. \begin{aligned} A &= y_a \Delta x^2 \frac{1}{2 r^2} \\ 3 B &= \Delta y \Delta x^2 \frac{1}{2 r^2} \\ C &= y^2 \Delta x \frac{1}{2 r^2} \\ 3 D &= \Delta x \Delta y^2 \frac{1}{2 r^2} \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

Nachdem wir  $\bar{y}$  und  $\bar{x}$  gefunden, ergibt sich aus (163), wonach:

$$\bar{y} = s \sin \nu_a$$

$$\bar{x} = s \cos \nu_a,$$

$$1) \quad \tan \nu_a = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}, \quad \left( \text{nämlich } \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{s \sin \nu_a}{s \cos \nu_a} = \tan \nu_a \right)$$

und  $2) \quad s = \frac{\bar{y}}{\sin \nu_a} = \frac{\bar{x}}{\cos \nu_a}.$

Die Neigung  $\nu_b$  ergibt sich sodann nach (167) und (167a).

## V. Polygonometrische Arbeiten.

### § 39.

#### Polygonmessung.

Sind zwei trigonometrische Punkte A und E, Fig. 60, durch einen Streckenzug verbunden, welcher durch die Coordinaten seiner Brechpunkte 1, 2, 3 . . . . bestimmt werden soll, so sind zu messen:

- 1) die Brechungswinkel  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots$
- 2) die Winkel  $\beta_A$  und  $\beta_E$ , welche die Anfangs- und Endseite des Polygons mit irgend einer Dreiecksseite einschliessen.
- 3) Die Strecken  $s_1, s_2, s_3 \dots$

### § 40.

#### Berechnung der Polygone.

1) **Neigungen.** Unter der Neigung  $\nu$  einer Strecke  $s$  versteht man den Winkel, welchen diese mit der positiven Richtung der Abscissenaxe einschliesst, und zwar von dieser aus rechts herum zählend, Fig. 61. Kennt man die Neigung  $\nu_1$  einer Strecke  $s_1$ , so findet man die Neigung  $\nu_2$  der sich daran anschliessenden folgenden Strecke  $s_2$  aus der Gleichung (Fig. 61)

$$\beta + (\nu_1 - \nu_2) = 180^\circ$$

woraus  $\nu_2 = \nu_1 + \beta - 180^\circ. \quad (170)$

Ist die Summe  $\nu_1 + \beta < 180^\circ$ , so vermeidet man den nach der letzten Gleichung sich ergebenden negativen Winkel, indem man dieser Summe  $360^\circ$  hin-

zufügt, d. h. man schreibt statt  $\nu_1 + \beta - 180^\circ$  einfach  $\nu_1 + \beta + 180^\circ$ . Ist  $\nu_1 + \beta - 180 > 360^\circ$ , so streicht man den überschüssigen Vollkreis, d. h. man schreibt  $\nu_1 + \beta - 540^\circ$  statt  $\nu_1 + \beta - 180^\circ$ .

2) **Winkelfehler.** Berechnet man, von der aus den trigonometrischen Rechnungen bekannten Neigung der Dreiecksseite BA, Fig. 60, ausgehend, nach und nach die Neigungen der Strecken  $s_1, s_2, s_3 \dots$ , und schliesslich die der Dreiecksseite ED, so muss der so erhaltene Werth der letzteren Neigung  $\nu_E$  mit der aus den trigonometrischen Rechnungen bekannten Neigung  $\nu_E^{D^{**}}$  der Dreiecksseite ED übereinstimmen. Hieraus folgt nach 1), wenn  $n$  die Anzahl der gemessenen Winkel  $\beta$ ,  $\nu_A$  die bekannte Anfangsneigung,  $\nu_E$  die ebenfalls bekannte Abschlussneigung,  $k$  die Anzahl der sich ergebenden überschüssigen, bezw. zur Erlangung positiver Winkelausdrücke hinzuzuzählenden Vollkreise bezeichnen:

$$\nu_A + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n - n 180^\circ \pm k = \nu_E^{D^{**}} \quad (171)$$

Infolge der Beobachtungsfehler wird diese Gleichung in den seltensten Fällen erfüllt werden. Ist  $W$  der sich ergebende Widerspruch, so ist nach § 7 der mittlere Fehler der Brechungswinkel  $\beta$ :  $m = \frac{W}{\sqrt{n}}$ . Nach der preussischen Vermessungs-Anweisung darf  $m$  den Betrag 1,5 Min. nicht überschreiten. Der Widerspruch  $W$  wird zu gleichen Theilen auf die Winkel  $\beta$  vertheilt und dadurch die Winkelfehler ausgeglichen.

3) **Berechnung der Neigungen.** Nachdem die Winkelfehler ausgeglichen, werden nach und nach die Neigungen sämtlicher Strecken  $s$ , und als Rechenprobe schliesslich die bekannte Abschlussneigung  $\nu_E$  nach (170) abgeleitet. Letztere muss nun genau den aus den trigonometrischen Rechnungen bekannten Werth  $\nu_E$  ergeben, wenn kein Fehler in der Ableitung der Neigungen oder schon in der Ausgleichung der Winkel  $\beta$  vorgekommen ist.

4) **Berechnung der Coordinaten.** Bei Einführung der aus Fig. 62 sich ergebenden allgemein gebräuchlichen Bezeichnungen ergeben sich unmittelbar aus der Figur folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} y_A &= y_A \\ y_1 &= y_A + \Delta y_1 \\ y_2 &= y_A + \Delta y_1 + \Delta y_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y_E &= y_A + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots + \Delta y_E \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

folglich  $y_E - y_A = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots + \Delta y_E$

oder nach üblicher Schreibweise:

$$\left. \begin{aligned} y_E - y_A &= [\Delta y]^{***} \\ \text{und analog } x_E - x_A &= [\Delta x]^{***} \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

\*) Wäre  $\nu_E^D$  aus den trigonometrischen Rechnungen (Formular 5, § 21) nicht direkt zu entnehmen, so ist diese Neigung aus den Coordinaten der trigon. Punkte E und D herzuleiten, — nach (105). —

\*\*) In geschlossenen Polygonen, d. h. solchen Zügen, welche wieder auf den Anfangspunkt zurückkehren, sind  $\nu_A$  und  $\nu_E$  identisch. Bezeichnen  $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$  die **inneren** Winkel des Polygons, so wird  $k = 360^\circ$  und man erhält die bekannte Formel der Planimetrie:  $[\beta] = (2n - 4)$  Rechte.

\*\*\*) Im geschlossenen Polygon sind  $y_A$  und  $y_E$  identisch, daher  $y_E - y_A = [\Delta y] = 0$ , und ebenso  $[\Delta x] = 0$ .

Zur Berechnung der  $\Delta y$  und  $\Delta x$  hat man:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_1 &= s_1 \sin v_1 & \Delta x_1 &= s_1 \cos v_1 \\ \Delta y_2 &= s_2 \sin v_2 & \Delta x_2 &= s_2 \cos v_2 \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (174)$$

§ 41.

**Fehler der Coordinatenunterschiede.**

1) Wegen der Beobachtungsfehler werden die Gleichungen (173) nicht erfüllt werden, sondern es werden sich Fehler  $f_y$  und  $f_x$  herausstellen, welche durch Verbesserung der Coordinatenunterschiede  $\Delta y$  und  $\Delta x$  zu beseitigen sind, ehe diese zur Berechnung der Coordinaten in die Gleichungen (172), bezw. in die analogen Abscissengleichungen eingesetzt werden können.

Die Fehler  $f_y$  und  $f_x$  sind theils durch Fehler der Neigungen  $v$ , theils durch Fehler der Strecken  $s$  entstanden. Bezeichnen wir die durch die Fehler der Winkel entstandenen Theile der Grössen  $f_y$  und  $f_x$  bezüglich mit  $W_y$  und  $W_x$ , die durch die Streckenfehler entstandenen Theile derselben mit  $w_y$  und  $w_x$ , so wird sein:

$$\left. \begin{aligned} f_y &= W_y + w_y \\ f_x &= W_x + w_x \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

Dürfen wir nun, wie dies bei Bussolenmessungen der Fall ist,<sup>\*)</sup> den Neigungen  $v$  gleiche Genauigkeit zuschreiben, so entsteht bezüglich der **Winkelfehler** die Aufgabe, die einzelnen Coordinatenunterschiede  $\Delta y_1, \Delta y_2$  etc. so zu verbessern, dass 1) die durch diese Verbesserungen verursachten Aenderungen der Neigungen der einzelnen Strecken unter sich sämmtlich gleich, 2) dass die Summe der Verbesserungen der einzelnen  $\Delta y$  und  $\Delta x$  gleich  $W_y$  und  $W_x$  werden.

Aendert man die Neigungen um den kleinen Betrag  $\varphi$ , so findet man die dadurch erzeugte Aenderung der Coordinatenunterschiede durch Differentiation von (174):

$$dy = s \cos v \cdot \varphi \quad dx = -s \sin v \cdot \varphi$$

oder nach (174)

$$dy = \varphi \Delta x \quad dx = -\varphi \Delta y. \quad (176)$$

Im Polygon ist daher die Summe der Aenderungen der Coordinatenunterschiede, welche wir gleich  $W_y$  und  $W_x$  zu setzen haben:

$$[dy] = W_y = \varphi [\Delta x], \text{ und } [dx] = W_x = -\varphi [\Delta y]. \quad (177)$$

Bezüglich der **Streckenfehler** entsteht die Aufgabe, die einzelnen Coordinatenunterschiede so zu ändern, dass 1) die dadurch entstehenden Aenderungen der einzelnen Strecken den Strecken selbst proportional werden, 2) dass die Summe der Coordinatenverbesserungen, d. i. die Summe der Aenderungen der einzelnen  $\Delta y$  und  $\Delta x$ , gleich  $w_y$  und  $w_x$  werde.

Aendern wir die Strecken  $s_1, s_2 \dots$  um die noch unbekanntten Beträge  $ds_1, ds_2 \dots$ , so ist die Aenderung der Coordinatenunterschiede  $\Delta y_1, \Delta y_2 \dots$  und  $\Delta x_1, \Delta x_2 \dots$ , wie die Differentiation der Gleichungen (174) nach  $s$  ergibt:

<sup>\*)</sup> Mit der Bussole werden direkt die Neigungen gegen den magnetischen Meridian gemessen, der Fehler jeder Neigung ist unabhängig von dem Fehler der vorhergehenden Neigungen. Bei Theodolitaufnahmen wird nach (170) jede Neigung durch Addition der vorangehenden Neigungen und des Brechungswinkels  $\beta$  erhalten. Der Fehler jeder Neigung ist daher gleich der Summe der Fehler aller vorangehenden Brechungswinkel, er wächst daher mit der Anzahl derselben, wird also von den Enden des Polygons nach der Mitte hin allmählich grösser.

$$\begin{aligned} \delta y &= \sin \nu \, ds & \delta x &= \cos \nu \, ds \\ \text{oder} \quad \delta y &= \Delta y \frac{ds}{s} & \delta x &= \Delta x \frac{ds}{s} \\ \text{oder einzeln} & & & \\ \left. \begin{aligned} \delta y_1 &= \Delta y_1 \frac{ds_1}{s_1} & \delta x_1 &= \Delta x_1 \frac{ds_1}{s_1} \\ \delta y_2 &= \Delta y_2 \frac{ds_2}{s_2} & \delta x_2 &= \Delta x_2 \frac{ds_2}{s_2} \\ & \text{etc.} & & \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (177a) \end{aligned}$$

Da nun die Aenderungen  $ds$  den Strecken  $s$  selbst proportional sein sollen, so ist  $\frac{ds_1}{s_1} = \frac{ds_2}{s_2} = \frac{ds_3}{s_3} \dots$ . Setzen wir dafür einfach  $\frac{ds}{s}$ , so ergibt sich die Summe der Aenderungen der Coordinatenunterschiede, welche wir gleich  $w_y$  und  $w_x$  zu setzen haben:

$$[\delta y] = w_y = [\Delta y] \frac{ds}{s}, \quad [\delta x] = w_x = [\Delta x] \frac{ds}{s}. \quad (178)$$

Die Werthe der  $W$  und  $w$  aus (177) und (178) in (175) eingesetzt, ergeben:

$$\begin{aligned} f_y &= \varphi [\Delta x] + [\Delta y] \frac{ds}{s} \\ f_x &= -\varphi [\Delta y] + [\Delta x] \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

woraus sich durch Auflösung nach den Unbekannten  $\varphi^*)$  und  $\frac{ds}{s}$  ergibt:

$$\varphi = \frac{f_y [\Delta x] - f_x [\Delta y]}{[\Delta y]^2 + [\Delta x]^2} \quad (179)$$

$$\frac{ds}{s} = \frac{f_y [\Delta y] + f_x [\Delta x]}{[\Delta y]^2 + [\Delta x]^2}. \quad (179a)$$

Setzt man das Verhältniss der geänderten Länge  $s + ds$  zur ungeänderten Länge  $s$  gleich  $q$ , also

$$\frac{s + ds}{s} = q,$$

so ist  $\frac{ds}{s} = q - 1.$

Nach (176) erhalten wir nun, wenn wir nunmehr, gemäss der preussischen Vermessungsanweisung,  $\varepsilon$  für  $\varphi$  schreiben, die Winkelverbesserungen

$$dy = \varepsilon \Delta x \quad dx = -\varepsilon \Delta y$$

und nach (177a), wenn wir  $e$  statt  $\frac{ds}{s}$  ( $= q - 1$ ) schreiben:

$$\delta y = e \Delta y \quad \delta x = e \Delta x$$

also die Gesamtverbesserungen der Coordinatenunterschiede einzeln:

$$\left. \begin{aligned} v_{y_1} &= e \Delta y_1 + \varepsilon \Delta x_1 & v_{x_1} &= e \Delta x_1 - \varepsilon \Delta y_1 \\ v_{y_2} &= e \Delta y_2 + \varepsilon \Delta x_2 & v_{x_2} &= e \Delta x_2 - \varepsilon \Delta y_2 \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

\*) Es braucht nicht nochmals erwähnt zu werden, dass  $\varphi$  das **analytische** Mass der Aenderung der Neigungen  $\nu$  bezeichnet.

2) Bei Theodolitaufnahmen kann man den einzelnen Neigungen  $\nu$  nicht gleiches Gewicht beimessen, da der Fehler derselben nach der Mitte hin zunimmt. Hier sind nicht direkt die **Neigungen** gemessen, wie bei Bussolenzügen, sondern die einzelnen **Brechungswinkel** des Polygons. Die Coordinatenverbesserungen werden daher so auszuführen sein, dass die **Letzteren** gleiche Aenderungen erleiden. Aendert man die Brechungswinkel sämmtlich um den Betrag  $\nu$ , so werden sich die durch successive Aufsummierung derselben hergeleiteten Neigungen der Reihe nach um die Beträge  $\nu, 2\nu, 3\nu$  etc. ändern. Damit nun aber der Gleichung (171) genügt bleibe, wird man die Verbesserung  $\nu$  der Brechungswinkel ebenso oft positiv als negativ ausfallen lassen müssen. Will man die  $n$  Brechungswinkel derart ändern, dass auf die erste Hälfte derselben, (der Zahl nach  $= \frac{n}{2}$ ), je die Verbesserung  $\nu$ , auf die anderen  $\frac{n}{2}$  Winkel die Verbesserung  $-\nu$  entfalle\*), so werden die Neigungen der Reihe nach die Verbesserungen

$$\nu, 2\nu, 3\nu \dots \left(\frac{n}{2} - 1\right)\nu, \frac{n}{2}\nu, \left(\frac{n}{2} - 1\right)\nu \dots 3\nu, 2\nu, \nu$$

erhalten. Die Verhältnisszahlen der Verbesserungen der **Neigungen** sind also  $1, 2, 3 \dots \frac{n}{2} \dots 3, 2, 1$ .

Wir wollen dieselben, der preussischen Vermessungs-Anweisung entsprechend, mit  $z_1, z_2, z_3 \dots z_n$  bezeichnen. Sollen nun die Verbesserungen der Neigungen in dem durch die Zahlen  $z$  ausgedrückten Verhältniss zu einander stehen, so werden die dem Winkelfehler entsprechenden Ordinatenverbesserungen nicht mehr, wie in (180), den Abscissenunterschieden **proportional** zu nehmen sein, sondern den der Reihe nach mit den Zahlen  $z_1, z_2, z_3$  etc. **multiplicirten** Abscissenunterschieden. Ebenso sind die Verbesserungen der Abscissenunterschiede den mit den Zahlen  $z$  multiplicirten negativen Ordinatenunterschieden proportional zu nehmen. Bezeichnen wir die Summe der mit den Zahlen  $z$  multiplicirten Coordinatenunterschiede mit  $Y$  bzw.  $X$ , so geht (177) über in:

$$W_y = \varphi X, \quad W_x = -\varphi Y$$

während (178) natürlich unverändert bleibt. Durch Einsetzen dieser Werthe in (175) erhält man so statt der Gleichungen (179), wenn wiederum  $e$  und  $\varepsilon$  statt  $\frac{ds}{s}$  und  $\varphi$  gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{f_y Y + f_x X}{Y [\Delta y] + X [\Delta x]} \\ \varepsilon &= \frac{f_y [\Delta x] - f_x [\Delta y]}{Y [\Delta y] + X [\Delta x]} \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

\*) Um sich die Wirkung einer derartigen Ausgleichung zu veranschaulichen, stelle man sich vor, das Polygon sei in der Mitte in zwei Theile,  $AM'$  und  $BM''$ , Fig. 154, zerlegt, und sei die Hälfte  $AM'$  vom Anschlusspunkte  $A$ , die Hälfte  $BM''$  vom Punkte  $B$  als Anschlusspunkt aus berechnet. Man wird wegen der Winkelfehler statt des Punktes  $M$  die beiden Punkte  $M'$  und  $M''$  erhalten. Soll nun  $M'$  nach  $M$  hin rücken, so wird man, wie aus der Figur verständlich, die Brechungswinkel  $\beta_a$  des Zuges  $AM'$  vergrößern müssen, dagegen werden die Winkel  $\beta_b$  des an  $B$  angeschlossenen Zuges zu **vermindern** sein, wenn  $M''$  nach  $M$  hin rücken soll. Es entsteht so das zusammenhängende Polygon  $AMB$ .

Die Gleichungen (180) erhalten dann folgende Form:

$$\left. \begin{aligned} v_{y_1} &= e \Delta y_1 + \varepsilon z_1 \Delta x_1 & v_{x_1} &= e \Delta x_1 - \varepsilon z_1 \Delta y_1 \\ v_{y_2} &= e \Delta y_2 + \varepsilon z_2 \Delta x_2 & v_{x_2} &= e \Delta x_2 - \varepsilon z_2 \Delta y_2 \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (182)$$

3) **Graphische Darstellung der Grössen  $q - 1$ ,  $\varphi$ ,  $e$ ,  $\varepsilon$ .** Trägt man, Fig. 63, den Anfangs- und Endpunkt A und E des Polygons nach ihren Coordinaten auf, und ebenso den Punkt P mit den um die Fehler  $f_y$  und  $f_x$  geänderten Coordinaten des Punktes E, zieht  $PF \perp AE$ , so ist  $\frac{PF}{EA} = \varphi$ ,  $\frac{FE}{AE} = q - 1$ . Trägt man weiter mit Hilfe der Coordinaten Y und X den Punkt A' auf, zieht  $PF' \perp A'E$ , so ist  $\frac{PF'}{A'E} = \varepsilon$ ,  $\frac{EF'}{AE} = e$ . Um die Längen PF, EF, PF', EF' mit genügender Schärfe abgreifen zu können, müssen die Fehler  $f_y$  und  $f_x$  von E aus in grossem Massstabe, etwa 1 : 10, abgesetzt werden, während zur Auftragung der Punkte A und E ein kleiner Massstab, (1 : 20000), genügt. (Näheres hierüber des Verfassers Coordinatentafeln).

4) Aus Fig. 64 wird leicht einleuchten, dass in krummen Zügen die Grösse  $\varphi$  nicht allein durch Winkelfehler, sondern auch durch Streckenfehler, hier durch Fehler der Strecken AB und CP, beeinflusst werden kann. Aus diesem Grunde ist das unter 1) und 3) geschilderte Fehlervertheilungsverfahren bei krummen Zügen nicht am Platze, da man bei Anwendung desselben den **Winkeln** Fehler zuschreiben würde, welche in Wirklichkeit in den **Strecken** liegen. Man vertheilt in solchen Fällen die Fehler  $f_y$  und  $f_x$  am einfachsten nach Verhältniss der Strecken auf die einzelnen Coordinatenunterschiede  $\Delta y$  und  $\Delta x$ , vermeidet aber im Uebrigen derartige Züge nach Möglichkeit, indem man an den Stellen der schärfsten Biegungen möglichst trigonometrische Punkte, — Beipunkte — einschaltet, welche gelegentlich der Polygonwinkelmessung durch Rückwärtseinschneiden auf einige trigonometrische Punkte bestimmt werden, wenn deren Nothwendigkeit nicht schon bei der Dreiecksnetzlegung erkannt wurde, so dass sie gelegentlich der Dreieckswinkelmessung durch Vorwärtschnitte von anderen trigonometrischen Punkten aus festgelegt werden konnten.

§ 42.

**Polygonanschluss an unzugängliche Punkte.**

Ist irgend eine Polygonseite nicht direkt messbar, z. B. 5—6, Fig. 65, so misst man eine beliebige Basis, 5—5a und die Winkel des Dreiecks 5, 5a, 6, wodurch 5—6 bekannt wird. Dieser Fall kommt häufig vor, wenn man einen trigonometrischen Punkt anschliesst, welcher durch eine Kirchthurmspitze markirt wird. Man kann dann auch den An- oder Abschlusswinkel nicht direkt messen und muss denselben indirekt bestimmen. Im Falle der Fig. 66 wäre z. B. der Abschlusswinkel  $\alpha + \beta$  für das Polygon ACE aus den Dreiecken CDE und BDE zu berechnen, wenn in denselben die Winkel auf B, C und D gemessen werden können. Der Winkel auf B ist auch entbehrlich, da die Längen BE und DE, erstere aus den Coordinaten der trigonometrischen Punkte B und E, letztere aus  $\triangle CDE$  bekannt sind, so dass  $\alpha$  berechnet werden kann. — Ist eine solche Bestimmung des Winkels  $\alpha$  nicht zu erreichen, und schliesst sich an das Polygon AC ein weiteres Polygon CB, so sind die Winkel dieser Züge im Zusammenhange auszugleichen, indem man dieselben zu **einem** Zuge zusammenstellt. Immerhin ist aber der Punkt E, nach dem man die

Seite CE aus  $\triangle CDE$  berechnet, zur Ausgleichung der **Coordina-  
tenunterschiede** für jeden **einzelnen** Zug zu benutzen.

§ 43.

### Knotenpunkte.

1) Treffen mehrere Züge in einem Punkte E, Fig. 67, zusammen, so kann man die Neigung irgend einer der bei E zusammenstossenden Strecken, z. B. EF, nach (171) aus jedem einzelnen der Zweigzüge AEF, BEF, CEF, DEF berechnen. Infolge der Beobachtungsfehler erhält man in vorliegendem Falle vier verschiedene Werthe für die fragliche Neigung, aus welchen das arithmetische Mittel zu bilden ist. Der mittlere Fehler der aus den einzelnen Zügen sich ergebenden Werthe ist, wenn  $n_1, n_2, n_3, n_4$  die Anzahl der Winkel der Züge 1, 2, 3, 4 bezeichnet, proportional den Quadratwurzeln  $\sqrt{n_1}, \sqrt{n_2}, \sqrt{n_3}, \sqrt{n_4}$ , also ist das Gewicht der einzelnen Neigungen  $n_1, n_2, n_3, n_4$  bezüglich  $p_1 = \frac{1}{n_1}, p_2 = \frac{1}{n_2}$  etc. (§ 7 und 8). Unter Einführung dieser Gewichte erfolgt die Bildung des Mittels nach (73), und hierauf die Rechenprobe nach (73a). Das Mittel wird nun als Abschlussneigung für jeden einzelnen der Züge betrachtet und danach die Winkel derselben ausgeglichen. Nachdem man sodann die Coordinatenunterschiede berechnet, erhält man die Coordinaten des Punktes E aus den einzelnen Zügen nach (173):  $y_E = y_A + [\Delta y]_1 = y_B + [\Delta y]_2$  etc. Die sich ergebenden Werthe werden unter Einführung der Gewichte  $p = \frac{1}{[s]}$  gemittelt und schliesslich auf die so erhaltenen Coordinaten des Punktes E, als Coordinaten des Endpunktes, die Coordinatenunterschiede in den einzelnen Zweigzügen ausgeglichen.

Trifft ein verhältnissmässig langer Zug CD, Fig. 68, annähernd rechtwinklig auf einen gestreckten kurzen Zug AB, so darf das eben erörterte Verfahren nicht Platz greifen, da die Streckenfehler des langen Zuges CD die Lage des Punktes C allzusehr beeinflussen, und also eine Ausbiegung des Zuges ACB verursachen würde. Hier muss man in gewöhnlicher Weise zuerst den Zug AB berechnen, worauf der Zug DC an C als Anfangs- bzw. Endpunkt an-, bzw. auf denselben abzuschliessen ist.

2) In sehr ungünstigem Terrain sind die Fehler der Streckenmessung im Allgemeinen grösser, als die der Winkelmessung, und mag es sich in solchem Falle empfehlen, den Einfluss der Streckenfehler auf die Bestimmung des Knotenpunktes möglichst zu beseitigen, oder doch mit geringerem Gewichte in das Ausgleichungsverfahren einzuführen. Ich möchte zu diesem Zwecke folgendes Verfahren in Vorschlag bringen:

Man bestimme zunächst aus **einem** Zuge angenäherte Coordinaten des Knotenpunktes, und trage nun die letzteren, **samt den gegebenen** Punkten auf ein Blatt Millimeterpapier, in kleinem Massstabe, etwa 1:10000, auf, wodurch man die Hauptrichtungen aller Züge auf dem Papier erhält, Fig. 151a. Nunmehr bestimme man den gesuchten Punkt aus **allen** vorhandenen Zügen, trage die sich ergebenden Punkte, in der Figur 1, 2, 3, 4, mittelst ihrer bis auf die Einerstellen und die folgenden Decimalen gekürzten Coordinaten, nach entsprechender Bezifferung der Papiertheilung, im Massstab 1:10 auf das Blatt, und ziehe durch dieselben Parallelen zu den Hauptrichtungen der zugehörigen Züge. (In der Figur die stark

ausgezogenen Linien.) Man erhält so eine Schnittfigur, in welcher der gesuchte Punkt nach den Principien des § 24, jedoch durch blosse Schätzung, unter möglichster Würdigung der Zuggewichte, zu bestimmen ist. Der so erhaltene Punkt  $P_a$  ist von der Streckenmessung fast unabhängig. Um auch diese nicht fallen zu lassen, ziehe man weiter durch die Punkte 1, 2, 3, 4, welche wir in Fig. 151b noch einmal dargestellt haben, **Senkrechte** zu den Hauptrichtungen der Züge, wodurch man eine zweite Schnittfigur, und in dieser den zweiten Punkt  $P_b$  erhält. In Wirklichkeit wird man beide Schnittfiguren zweckmässiger in einer **einzig**en Zeichnung darstellen, und zwar etwa die Parallelen zu den Hauptrichtungen der Züge schwarz, die Senkrechten roth. Zieht man nun von den ermittelten Punkten in beiden Schnittfiguren Lothe auf die einzelnen Strahlen, so wird deren für jede Figur besonders zu ermittelnde Summe ( $\Sigma H$  in Fig. 151b und  $\Sigma h$  in Fig. 151a), — oder auch das arithmetische Mittel dieser Lothe, — einen Schluss auf die Genauigkeit der Punktbestimmung in den einzelnen Schnittfiguren ermöglichen, und wir nehmen, — wenn auch etwas willkürlich, — an, dass sich die Gewichte der erhaltenen beiden Punktbestimmungen umgekehrt wie die Quadrate der zugehörigen Lothsummen verhalten. (Vergl. § 7.) Da wir hier beide Figuren der Deutlichkeit wegen getrennt dargestellt haben, so übertragen wir nun noch Punkt  $P_b$  aus Fig. 151b in Fig. 151a, verbinden ihn mit dem daselbst schon vorhandenen Punkte  $P_a$ , tragen in der in der Figur angedeuteten Weise die Quadrate der Lothsummen, (oder Verhältnisszahlen derselben), in  $P_a$  und  $P_b$  unter beliebigen Winkel, aber unter sich parallel, an die Verbindende  $P_a P_b$ , verbinden die Endpunkte der angetragenen Schenkel mit einander, so gewinnen wir im Durchschnitt dieser Verbindenden mit der Geraden  $P_a P_b$  den endgültigen Punkt  $P$ .

Dass ein etwaiger constanter Fehler der Längenmessung unschädlich gemacht sei, — (vergl. darüber § 45) — wird hierbei nothwendig vorausgesetzt.

3) Sollen in Fig. 69, in welcher  $P_1, P_2, P_3, P_4$  bekannte Punkte sind, die Punkte  $A$  und  $P$  **gleichzeitig** als Knotenpunkte bestimmt werden, so stelle man die Züge 1 und 2, 3 und 4, 1, 5 und 4, zu je **einem** Zuge zusammen. Wir bezeichnen diese drei Züge mit Zug  $A$ , Zug  $B$ , Zug  $C$ , die Winkelwidersprüche in denselben mit  $w_a, w_b, w_c$ , die infolge dieser Widersprüche in jedem Zug auf die einzelnen Winkel zu legenden noch unbekanntenen Verbesserungen mit  $a, b$ , und  $c$ , die Anzahl der Winkel in den Zügen 1, 2, 3, 4,  $A, B$ , und  $C$  mit  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_a, n_b, n_c$ , so erhalten zunächst die Winkel des Zuges  $A$ , ( $= 1 + 2$ ), einmal die Verbesserungen  $a$ , ausserdem erhalten aber die im Zuge 1 gelegenen Winkel des Zuges  $A$  noch die Verbesserungen  $c$ , da Zug 1 gleichzeitig ein Theil des Zuges  $C$  ist. Nur der Punkt  $A$  des Zuges 1 erhält **letztere** Verbesserung nicht mehr, da der auf  $A$  für den Zug  $A$  gemessene Winkel nicht mit dem auf demselben Punkte für den Zug  $C$  gemessenen Winkel identisch ist. Es ergibt sich daher für den Zug  $A$  die Fehlergleichung:

$$\left. \begin{aligned} n_a a + (n_1 - 1) c &= w_a \\ \text{und analog für die Züge } B, (= 3 + 4) \text{ und } C, (= 1 + 5 + 4) \\ n_b b + (n_4 - 1) c &= w_b \\ n_c c + (n_1 - 1) a + (n_4 - 1) b &= w_c \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

aus welchen Gleichungen sich die Unbekannten  $a, b$  und  $c$  ergeben.

Sind weiter  $L_1, L_2 \dots L_a, L_b, L_c$  die Längen der Züge 1, 2 . . .  $A, B, C$ , und  $v_{y_1}, v_{y_2} \dots v_{y_a}, v_{y_b}, v_{y_c}$  die in den einzelnen Zügen auf die **Längeneinheit**

entfallenden Ordinatenverbesserungen, — (wobei angenommen wird, dass die Coordinatenfehler auf die einzelnen Coordinatenunterschiede nach Verhältniss der Streckenlängen vertheilt werden sollen), — so hat man folgende Fehlergleichungen:

$$\left. \begin{aligned} L_a v_{y_a} + L_1 v_{y_c} &= f_{y_a} \\ L_b v_{y_b} + L_4 v_{y_c} &= f_{y_b} \\ L_c v_{y_c} + L_1 v_{y_a} + L_4 v_{y_b} &= f_{y_c} \end{aligned} \right\} \quad (184)$$

Analog lauten die Gleichungen für die Verbesserungen  $v_{x_a}$ ,  $v_{x_b}$ ,  $v_{x_c}$ , welche sich nun aus diesen drei Gleichungen ergeben.

Der Fall der Fig. 70 ist auf den eben behandelten Fall ohne Weiteres zurückzuführen.

Stellt Fig. 71 ein geschlossenes Polygon dar, in welchem nur der Punkt A gegeben ist, an welchen das Polygon zugleich an- und abschliesst, so können die Züge 1 und 3, und 2 und 3 zu je einem Zuge zusammengestellt werden, wodurch dieser Fall ebenfalls auf den eben behandelten Fall zurückgeführt ist, einfacher ist aber der Punkt B aus den drei Zügen 1, 2 und 3 als Knotenpunkt nach Theil 1) dieses § zu behandeln.

#### § 44.

### Auffinden grober Messungsfehler.

1) Ob ein grober **Winkelfehler** vorhanden, lässt Gleichung (171) sofort erkennen. Tragen wir das Polygon mittelst der gemessenen Strecken und Winkel, von beiden Endpunkten anfangend, je einmal auf, so werden die beiden so erhaltenen Polygone sich in einem Punkte C schneiden, Fig. 72. In diesem Punkte ist der Fehler begangen, denn ist im Polygon A C B' der Theil A C, im Polygon B C A' der Theil B C fehlerfrei, so wird für C aus beiden Polygonen ein und derselbe Punkt gefunden werden. Man kann das Polygon auch vor- und rückwärts **berechnen**, und wird einen Punkt finden, dessen Coordinaten in beiden Berechnungen annähernd übereinstimmen. In diesem Punkte ist der Fehler begangen.

2) Ist ein Fehler bei der **Streckenmessung** unterlaufen, so wird sich beim Auftragen des Polygons statt des Punktes P, Fig. 73, auf den das Polygon abschliessen soll, der Punkt P' ergeben. Der Fehler liegt in derjenigen Polygonstrecke, welche sich mit P P' parallel erweist. Berechnet man aus den Coordinaten des Punktes P und denen des dafür erhaltenen Punktes P' die Neigung der Verbindenden P P', so wird diese annähernd mit der Neigung irgend einer Strecke übereinstimmen. Sind **mehrere** Strecken der fehlerhaften parallel, so bleibt es unentschieden, in welcher dieser parallelen Strecken der Fehler zu suchen ist.

#### § 45.

### Genauigkeit der Polygone.

Ein Criterium für die Genauigkeit der Polygonmessung erhält man 1) durch Bildung des mittleren Fehlers der Brechungswinkel  $m = \frac{w}{\sqrt{n}}$ , 2) durch Berechnung der Grössen  $(q - 1)$  und  $\varphi$ . Bildet man aus sämtlichen Grössen  $m$ ,  $(q - 1)$  und  $\varphi$  eines Polygonnetzes das arithmetische Mittel, so hat man einen Massstab für die Güte des Netzes.

Zeigen die Grössen  $(q-1)$  im Wesentlichen ein constantes Vorzeichen, so lässt dies auf einen constanten Fehler der Streckenmessung schliessen, welcher durch Verbesserung der Strecken, ihrer Logarithmen, bzw. der Coordinatenunterschiede, unschädlich gemacht werden muss. In **graden** Zügen kommt ein solcher Fehler durch die Fehlervertheilung zum Ausgleich, ist also hier nicht von Belang. Darum berechnet man auch zunächst alle in günstigem Terrain liegenden, womöglich beiderseits an trigonometrische Punkte angeschlossenen **graden** Züge des Netzes, ermittelt für dieselben die Grössen  $q-1$ , mittelt diese Grössen und erhält so den constanten Fehler der Längeneinheit,  $\frac{ds}{s} (= q-1)$ , mit welchen die Strecken aller krummen Züge, bzw. die Coordinatenunterschiede, zu multipliciren sind, um deren Verbesserungen zu erhalten.

Zur Erlangung der grösstmöglichen Genauigkeit hat man in Zügen, welche mittelst des Theodoliten aufgenommen werden sollen, möglichst lange Strecken zu wählen. Hierdurch wird nicht nur der Einfluss der Ziel- und Centrirungsfehler auf die Winkelmessung möglichst herabgedrückt, sondern es werden auch die Neigungen um so genauer sich ergeben, je geringer die Anzahl der Brechungswinkel, durch deren Addition dieselben gebildet werden, denn der mittlere Fehler einer Neigung ist der Quadratwurzel aus der Anzahl der Brechungswinkel, durch deren Addition sie entstanden, proportional. Je länger man aber die Strecken nimmt, um so geringer fällt naturgemäss die Anzahl der Brechungswinkel aus.

Das Hauptaugenmerk bei der Auswahl der Polygonpunkte hat man indessen darauf zu richten, dass stets der Fuss der Signale anvisirt werden kann, da durch schiefen Stand derselben bedeutende Zielfehler verursacht werden können.

Bei Bussolenzügen kommen Ziel- und Centrirungsfehler gegenüber den sonstigen Fehlern der Beobachtung nicht in Betracht, auch ist die Genauigkeit der Neigungen von der Anzahl der Brechpunkte unabhängig, — vergl. die Anmerkung auf Seite 100. — In Bussolenzügen sind daher die Strecken möglichst **kurz** zu wählen, wie aus Folgendem hervorgeht:

Ein Fehler der Neigung wird einen Ausschlag des Endpunktes der Strecke erzeugen, welcher der Länge dieser Strecke proportional ist. Bezeichnet  $a$  den Ausschlag pr. Längeneinheit, ist die Gesamtlänge eines Polygons  $= S$ , und  $n$  die Anzahl seiner Strecken, welche wir sämmtlich als **gleich** annehmen wollen, so ist  $\frac{S}{n}$  die Länge jeder einzelnen Strecke, also der seitliche Ausschlag für jede Strecke  $= \frac{aS}{n}$ , daher der Ausschlag des ganzen Polygons  $= \frac{aS}{n} \sqrt{n} = \frac{aS}{\sqrt{n}}$ . Dieser ist also der Quadratwurzel  $\sqrt{n}$  indirekt proportional, woraus folgt, dass man  $n$  möglichst gross, die Streckenlänge also möglichst kurz zu wählen hat. Man geht in der Praxis nicht über 100 m hinaus.

#### § 46.

### Bussolenmessungen.

Die Winkelmessung mit der Bussole besitzt zwar nur einen geringen Grad von Schärfe, da indessen jede Neigung ganz unabhängig von den Neigungen der vorangehenden Strecken bestimmt wird, so dass sich also die Fehler der vorangehenden Neigungen nicht auf alle folgenden übertragen, wie bei Theodolitauf-

nahmen, so ist die Bussole überall, wo es nicht auf grosse Genauigkeit ankommt, sehr wohl brauchbar, und wegen der Bequemlichkeit ihres Gebrauchs ein nicht unbeliebtes Instrument. Man begreift leicht, dass man bei der Messung der Neigungen in einem Polygon nur auf jedem zweiten Punkt Aufstellung zu nehmen braucht, da man von einem Punkte aus die Neigungen **beider** in demselben zusammen-treffender Strecken messen kann. Da sich die beobachteten Neigungen auf den **magnetischen** Meridian beziehen, während die Neigungen aller trigonometrischen Linien und derjenigen Polygonstrecken, welche mittelst des Theodolits bestimmt sind, auf den Meridian des Coordinatennullpunkts bezogen werden, so ist sämtlichen Bussolenneigungen noch eine Correktion hinzuzufügen. Sind die bekannten An- und Abschlussneigungen eines Polygons  $= r_A$  und  $r_E$ , die mit der Bussole beobachteten Neigungen derselben Linien  $\mu_A$  und  $\mu_E$ , so ist das arithmetische Mittel der Unterschiede  $\frac{(\mu_A - r_A) + (\mu_E - r_E)}{2}$  die Correktion, welche sämtlichen Bussolenneigungen hinzuzufügen ist, um die wirklichen Neigungen gegen die Ab-scissenlinien zu erhalten.

Im Uebrigen wolle man § 41, 1) und § 45 vergleichen.

§ 47.

**Kleinpunkte.**

1) Ist eine grade Linie durch die Coordinaten ihrer Endpunkte gegeben, und auf derselben ein oder mehrere Punkte durch Längenmessung bestimmt, so lassen sich die Coordinaten der letzteren nach den Formeln berechnen: (Fig. 74)

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_1 &= s_1 \cos a, & \Delta x_1 &= s_1 \sin a \\ \Delta y_2 &= s_2 \cos a, & \Delta x_2 &= s_2 \sin a \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

Hierin ist

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \frac{y_E - y_A}{[s]} \\ \sin a &= \frac{x_E - x_A}{[s]} \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

Rechenproben:  $[\Delta y] = y_E - y_A$ ;  $[\Delta x] = x_E - x_A$ . (186a)

2) Ist ein Punkt P, Fig. 74, durch den rechtwinkligen Abstand P—2 auf-genommen, so berechnet man zunächst die Coordinaten des Fusspunktes 2, und findet dann, wenn man die Ordinate P—2 mit ord. bezeichnet,

$$y_P = y_2 + \Delta y_P \quad x_P = x_2 + \Delta x_P \quad (187)$$

worin  $\Delta y_P = \text{ord.} \sin a$   $\Delta x_P = \text{ord.} \cos a$ . (188)

Hierin sind  $\sin a$  und  $\cos a$  schon bei Berechnung der Coordinaten des Fuss-punktes 2, nach den Formeln (185) und (186), ermittelt.

Damit die Messungsfehler ohne Weiteres zur Vertheilung gelangen, und also Gl. (186a) ohne Weiteres erfüllt werde, ist in (186) für  $[s]$  die **gemessene** Länge A E, nicht etwa die aus den Coordinaten der Punkte A und E hergeleitete Länge  $s$  zu setzen. Letztere wird gleichwohl auf bekannte Weise hergeleitet und mit der ge-messenen Länge verglichen, um festzustellen, ob die Differenz nicht etwa das zu-lässige Mass überschreitet.

3) Sind zwei sich schneidende Linien durch die Coordinaten ihrer Endpunkte gegeben, so können die Coordinaten des Durchschnittspunktes nach Theil I, § 9,

gefunden werden. Man kann indessen auch die Neigungen der durch die Coordinaten ihrer Endpunkte gegebenen Linien berechnen und die Gleichungen (111) bis (113) anwenden.

4) Sind zur Bestimmung des Punktes P, Fig. 75, die Entfernungen b und c nach zwei gegebenen Punkten A und E gemessen, so berechnet man im Dreieck APE die Höhenabschnitte p und q und die Höhe h, worauf die Coordinaten für P nach 2) dieses § gefunden werden können. Zur Berechnung von p, q und h hat man die mit Hülfe des verallgemeinerten Pythagoras leicht herzuleitenden Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p+q}{2} &= \frac{a}{2} & h &= \sqrt{b^2 - p^2} = \sqrt{(b+p)(b-p)} \\ \frac{p-q}{2} &= \frac{(b+c)(b-c)}{2a} & &= \sqrt{c^2 - q^2} = \sqrt{(c+q)(c-q)} \end{aligned} \right\} \quad (189)$$

Sind die Entfernungen nach mehreren gegebenen Punkten  $= s_1, s_2 \dots s_n$  gemessen, so kann eine Fehlerausgleichung nach der Methode der kl. Quadrate vorgenommen werden.

Nachdem man die genäherten Coordinaten nach (189) hergeleitet, berechnet man die genäherten Längen  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \dots$  nach der Formel

$$\mathcal{S} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

bildet, gemäss § 9, 2) die Fehler

$$f = \mathcal{S} - s.$$

Durch Differentiation der Formel  $\mathcal{S}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$  erhält man

$$d s = \frac{\Delta x}{\mathcal{S}} d x + \frac{\Delta y}{\mathcal{S}} d y$$

wofür wir schreiben

$$d s = a d x + b d y$$

um nach Anleitung des § 9 zu den Normalgleichungen von der Form (79) zu gelangen. Da indessen den Strecken verschiedene Gewichte,  $p = \frac{1}{s}$  beizulegen sind, so sind die einzelnen Quadrate und Produkte  $a a, a b, a f$  etc. mit den ihnen zukommenden Gewichten p zu multipliciren, (vergl. (88a)), was am bequemsten geschieht, indem man die Faktoren a, b, u, f selbst mit  $\sqrt{p}$  multiplicirt und also die Quadrate und Produkte folgendermassen ansetzt:

$$a \sqrt{p} \ a \sqrt{p}, \ a \sqrt{p} \ b \sqrt{p}, \ a \sqrt{p} \ f \sqrt{p} \ \text{etc.}$$

#### § 48.

### Umformung der Coordinaten.

Sind an der Grenze zweier verschiedener Coordinatensysteme eine Anzahl von Punkten zum Theil durch die Coordinaten  $x_A, y_A$  (Fig. 76) des Systems A, zum Theil durch die Coordinaten  $x_B, y_B$  des Systems B gegeben, so entsteht die Aufgabe, die Coordinaten der Punkte des einen Systems, z. B. des Systems A auf das andere System B umzuformen, so dass sich die Coordinaten sämtlicher Punkte auf ein und dasselbe System beziehen. Es müssen zu dem Ende wenigstens zwei Punkte durch die Coordinaten beider Systeme gegeben sein. Dieser Forderung wird natürlich meistens nicht ohne Weiteres genügt sein, man kann dann aber zwei Punkte des Systems A von den gegebenen Punkten des Systems B aus neu bestimmen, sei es durch trigonometrische Messungen, oder durch Polygon- oder Linienmessung.

(Sind die beiden fraglichen Punkte des Systems A durch ihre geographische Länge und Breite bekannt, wie z. B. die trigonometrischen Punkte der Landesaufnahme, so werden dieselben nach den Formeln des § 33 auf das System B zu beziehen sein, wenn der Nullpunkt des letzteren Systems ebenfalls durch Länge und Breite gegeben sind).

Sind nun in Fig. 76 die Punkte 1 und 4 durch die Coordinaten **beider** Systeme gegeben, und seien 2 und 3 durch die Coordinaten des Systems A gegeben und letztere auf das System B umzuformen, so bilden wir die Coordinatendifferenzen:

$$\Delta y_{A_1}, \Delta x_{A_1}, \Delta y_{A_2}, \Delta x_{A_2} \text{ etc.}$$

und haben die Rechenprobe:  $[\Delta y_A] = y_{A_4} - y_{A_1}$  und  $[\Delta x_A] = x_{A_4} - x_{A_1}$ .

Wären die Abscissenachsen beider Systeme parallel, so würde  $y_{A_4} - y_{A_1} = y_{B_4} - y_{B_1}$ , und  $x_{A_4} - x_{A_1} = x_{B_4} - x_{B_1}$ , oder es würde sein:

$$[\Delta y_A] = y_{B_4} - y_{B_1}, \text{ und } [\Delta x_A] = x_{B_4} - x_{B_1}.$$

Wegen der gegenseitigen Neigung der Abscissenachsen zu einander werden sich gegen diese Gleichung Widersprüche  $f_y$  und  $f_x$  ergeben, grade so, als wären die Differenzen  $\Delta y_A$  und  $\Delta x_A$  nach den Formeln des § 40 mit einem Fehler in den Neigungen gegen die Abscissenaxe des Systems B berechnet, und zwar ist dieser Neigungsfehler gleich der gegenseitigen Neigung der beiden Abscissenachsen. Es werden daher die Fehler

$$\left. \begin{aligned} f_y &= [\Delta y_A] - (y_{B_4} - y_{B_1}) \\ f_x &= [\Delta x_A] - (x_{B_4} - x_{B_1}) \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

genau nach § 40, 1) zu behandeln sein. Die danach verbesserten  $\Delta y_A$  und  $\Delta x_A$  geben uns die Unterschiede  $\Delta y_B$  und  $\Delta x_B$ , durch deren successives Aufaddiren wir die auf das System B bezogenen Coordinaten der fraglichen Punkte erhalten.

## VI. Detailaufnahme und Flächenberechnung.

### § 49.

#### Stückvermessung.

1) **Grenzen.** Ehe zur Einzelaufnahme eines Objectes geschritten werden kann, sind die Umgrenzungen derselben an der Hand vorhandener Karten festzustellen und dauernd zu vermarken, sodann von den interessirten Grenznachbarn und Vorstehern der betreffenden Gemeinden, (bei Kreisgrenzen vom Landrathe), anzuerkennen. Finden sich Abweichungen von den vorhandenen Grundsteuerkarten, welche nicht auf offenbaren Fehlern der letzteren Karten beruhen, wollen die Interessenten aber die **örtlich** vorgefundenen Grenzen beibehalten wissen, so ist denselben die Erklärung abzunehmen, dass sie mit der Uebernahme der Grenze, wie sie von beiden Seiten als gültig anerkannt wird, in die Katasterkarten einverstanden sind. Ist in solchen Fällen die Grenze streitig, und eine Einigung der Parteien nicht zu erzielen, so ist die Entscheidung im geordneten Wege\*) herbeizuführen. Stimmt die örtliche Grenze mit der Grundsteuerkarte überein, ist aber gleichwohl streitig, so entscheidet die Karte.

\*) Durch Vermittelung des Landraths.

Die gepflogenen Verhandlungen sind zu Protocoll zu nehmen. In den Protocollen sind die Grenzen durch Zeichnung und Schrift genau zu erläutern, zu dem Ende sind in ersteren die Grenzzeichen, von einem Dreiortsmale\*) beginnend, bis zum nächsten Dreiortsmale fortlaufend zu numeriren, Kulturarten und Namen der angrenzenden Besitzer in dieselben einzutragen, besonders auch, wo Wege, Gräben und dergl. die Grenze bilden, zu vermerken, ob dieselben zu beiden aneinander grenzenden Bezirken gemeinschaftlich, bezw. zu welchem Bezirke sie gehören.

Trifft bei Grenzstreitigkeiten die Entscheidung nicht rechtzeitig ein, so ist der streitige Gegenstand einstweilen nach bestem Ermessen aufzunehmen und ev. später zu berichtigen.

Jede Abänderung der bestehenden Bezirksgrenzen ist genau zu erläutern und die Bestätigung derselben im geordneten Wege herbeizuführen.

2) **Liniennetz.** Die Aufnahme der Terraingegenstände erfolgt von den Polygonseiten aus durch Abscissen- und Ordinatenmessung, wie dies in Fig. 77 am Grenzzuge A B veranschaulicht ist. Zur Controlle für die Richtigkeit der Abscissen- und Ordinatenmessung sind die Entfernungen der einzelnen Grenzzeichen zu messen. Wo das Polygonnetz zur Aufnahme des Details nicht ausreicht, sind weitere Messungslinien zu bestimmen, deren Endpunkte in Polygonseiten oder bereits vorher ähnlich bestimmte Messungslinien eingebunden werden, (d. h. es wird der durch genaues Ausfluchten bestimmte Schnittpunkt (Bindepunkt), der zu bestimmenden Linie mit der Polygonseite durch einen Pfahl bezeichnet). Die Coordinaten der Bindepunkte, z. B. a und c für die Messungslinie a c werden nach § 47, 1 berechnet. Indem man die Linie a c, von a beginnend, misst, werden die weiteren Bindepunkte b und d bekannt. Die Messung darf aber nicht etwa bei d abbrechen, ist vielmehr bis zum Endpunkte c fortzusetzen, damit die Differenz der Messung gegen die aus den Coordinaten von a und c abgeleitete Länge a c durch Vergleichen der letzteren Länge mit dem direkten Messungsergebniss festgestellt und ausgeglichen werden kann. Hierdurch wird zugleich eine Controlle für die richtige Bestimmung der Bindepunkte a und c gewonnen, insofern die berechnete Länge a c mit der gemessenen Länge a c bis auf die in der Ungenauigkeit der Längenmessung begründete kleine Differenz übereinstimmen muss. Trifft indessen eine Linie f b annähernd **rechtwinklig** auf a c, so wird durch die Messung von f b eine genügende Controlle für die richtige Bestimmung des Punktes b noch nicht gewonnen, denn es ist z. B. die Länge f b' nahezu gleich der Länge f b, wird daher mit der berechneten Länge f b' noch innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen übereinstimmen. Es muss daher in solchen Fällen noch eine weitere Controlle geschaffen werden, z. B. durch Messung der Linie g h oder dadurch, dass man den Schnittpunkt v der verlängerten Linie a b auf irgend einer anderen Messungslinie, hier c d, bei der Messung der letzteren notirt. Die Bindepunkte e und d sind durch die Messung der Linie e d genügend controllirt. Wäre z. B. irrthümlich der Punkt d' statt des Punktes d notirt worden, so würde die Vergleichung der **berechneten** (falschen) Länge e d' mit der **gemessenen** Länge e d sofort den Fehler nachweisen.

Zur Controlle der Gradlinigkeit und auch der richtigen Einbindung der langen Linien a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>, a<sub>4</sub>, a<sub>5</sub> ist die Linie a<sub>6</sub> a<sub>7</sub> gemessen.

\*) D. h. Grenzmale, in denen 3 verschiedene Gemarkungen a, b, c zusammenstossen:  $\frac{a}{c} \mid \frac{b}{c}$ .

3) **Längenmessung.** Bei dem uns vorschwebenden Grundsatz, uns in diesem Buche mit den einfachen Operationen, die jeder Landmesser-Eleve nicht nur sehr bald kennen lernt, sondern auch ohne Weiteres versteht, nicht aufzuhalten, würden wir uns auch über die Längenmessung mittelst des Messbandes ausschweigen können, wenn es uns nicht darauf ankäme, ein von Wilski angegebenes Verfahren zum Ersatz der ungenauen und zeitraubenden Staffelmessung, (in etwas abgeänderter Form), allgemeiner bekannt zu machen.

Man lasse um die Kettenstöcke in Höhe von 1,50 m je einen Oelfarbenstrich ziehen und theile die Stöcke von dieser Marke aus abwärts nach folgender Scala: 63, 90, 110, 127, 142 cm. Die einzelnen Theilstriche erhalten die Nummern 0, 1, 2, 3, 4, 5. Weiter braucht man ein Instrumentchen für Handnivellement, — (wir empfehlen als solches die kreisförmige Canalwage, Band XIV der Zeitschrift für Vermessungswesen, zu beziehen von Glastechniker Haak in Jena, Preis 3 Mark), — mittelst dessen durch den Nullpunkt der Scala des unteren Kettenstocks, Fig. 155, eine Horizontale bestimmt wird. Erscheint nun z. B. in dieser Horizontalen der Theilstrich 3 der Scala des oberen Stockes, so bedeutet dies, „die auf die Horizontale projecirte Länge des 20 m-Bandes ist um 3 cm kürzer, als das Band, also = 19,97.“ Der vordere Kettenzieher hat also seine Markirnadel 3 cm über seinen Kettenstock hinaus einzusetzen.

Für steileres Terrain muss man die nachfolgende Tabelle in ein auf dem Felde mitzuführendes Notizbuch eintragen, mit Fortlassung der Spalten V, (Verhältnisszahlen, deren Bedeutung wir weiter unten kennen lernen werden). Man lässt durch einen Arbeiter denjenigen Punkt des Bandes markiren, welcher in der in Augenhöhe des am unteren Kettenstocke stehenden Beobachters gelegten Horizontalen erscheint, Fig. 156. Die Entfernung dieses Punktes vom unteren Kettenstocke wird am Messbande abgelesen. Sei die Bandablesung = 5,90 m, so findet man aus der Tabelle die zugehörige Reduktionsgrösse = 65 cm. Um soviel ist die Horizontalprojektion des ganzen Messbandes kürzer, als das Band. Die Tabelle ist für eine Augenhöhe von 150 cm berechnet. Wäre die wirkliche Augenhöhe des Beobachters = 155 cm, also 5 cm grösser, als die der Tabelle zu Grunde liegende, so wären die gesammten Zahlen in den Spalten „Bandablesung“ umzurechnen, indem man die Zahlen in Spalte V mit 5 multiplicirt und die so erhaltenen Centimeterzahlen den zugehörigen Bandablesungen hinzuzählt. Statt der Ablesung 18,3 hätte man also z. B. zu schreiben:  $18,3 + 5 \times 12,2 \text{ cm} = 18,91$ .

Liegt das Band nicht in **stetiger** Neigung, Fig. 157, so wird man doch die zwischen dem Beobachter und dem abgelesenen Punkte des Messbandes liegende Strecke als stetig geneigt annehmen können. Sei die Kettenablesung = 6,20 m, so ist die Reduktionsgrösse für die **ganze** Bandlänge nach der Tabelle = 60 cm, also für 5 m = 15 cm. Nunmehr gehe man auf den Kettenpunkt 5 m\*), wiederhole das Verfahren, und sei die Kettenablesung = 18 m, also die Entfernung des in der Horizontalen erscheinenden Punktes vom Beobachter =  $18 - 5 = 13$  m, so findet man die Reduktionsgrösse für das ganze Band = 13 cm, also für die Länge von  $15 \text{ m} = \frac{13}{4} \times 3 = 10 \text{ cm}$ , mithin die Gesamt-Reduktionsgrösse =  $15 + 10 = 25 \text{ cm}$ .

\*) Will man die Tabelle nicht auf Augenhöhe umrechnen, so kann man durch Beugen der Kniee seine Augenhöhe auf 1,50 m bringen, zu welchem Zwecke man den vom Bande losgelösten unteren Kettenstock, dessen Scalen-Nullpunkt 1,50 m hoch liegt, auf den Kettenpunkt 5 m mit zu nehmen hat.

Man berechnet also die Reduktionsgrößen für einzelne Theile des Messbandes, und bestimmt die einzelnen Theilstücke desselben dadurch, dass man die abgelesenen Entfernungen, der leichteren Kopfrechnung wegen, auf ein Vielfaches von 5 abrundet, da  $5\text{ m} = \frac{1}{4}$  der ganzen Bandlänge, (oder auch auf ein Vielfaches von 4, da  $4\text{ m} = \frac{1}{5}$  der ganzen Bandlänge, also ebenfalls für die Kopfrechnung bequem).

Band- Ablesung	V.	Reduktions- größe	Band- Ablesung	V.	Reduktions- größe	Band- Ablesung	V.	Reduktions- größe	Band- Ablesung	V.	Reduktions- größe	Band- Ablesung	V.	Reduktions- größe
			10,8	7,2	20	7,57	5,1	40	6,20	4,1	60	5,38	3,6	80
			10,5	7,0	21	7,48	5,0	41	6,15	4,1	61	5,34	3,6	81
			10,2	6,8	22	7,40	4,9	42	6,09	4,1	62	5,29	3,5	82
			10,0	6,6	23	7,31	4,9	43	6,05	4,0	63	5,26	3,5	83
			9,8	6,5	24	7,23	4,8	44	6,00	4,0	64	5,23	3,5	84
			9,6	6,4	25	7,15	4,8	45	5,94	3,9	65	5,20	3,5	85
19,5	13,0		9,4	6,3	26	7,07	4,7	46	5,89	3,9	66	5,17	3,5	86
18,3	12,2	6	9,3	6,2	27	7,00	4,7	47	5,85	3,9	67	5,14	3,4	87
17,2	11,5	7	9,1	6,1	28	6,93	4,6	48	5,82	3,9	68	5,11	3,4	88
16,3	10,4	8	9,0	6,0	29	6,86	4,6	49	5,79	3,9	69	5,08	3,4	89
15,4	10,3	9	8,8	5,8	30	6,78	4,5	50	5,74	3,8	70	5,06	3,4	90
14,7	10,0	10	8,6	5,7	31	6,72	4,5	51	5,70	3,8	71	5,04	3,4	91
14,1	9,4	11	8,5	5,6	32	6,66	4,4	52	5,66	3,8	72	5,02	3,4	92
13,5	9,0	12	8,3	5,5	33	6,60	4,4	53	5,62	3,7	73	4,99	3,3	93
12,9	8,6	13	8,2	5,5	34	6,54	4,4	54	5,58	3,7	74	4,96	3,3	94
12,5	8,3	14	8,1	5,4	35	6,48	4,3	55	5,55	3,7	75	4,93	3,3	95
12,1	8,1	15	8,0	5,3	36	6,42	4,3	56	5,51	3,6	76	4,91	3,3	96
11,7	7,8	16	7,9	5,3	37	6,36	4,2	57	5,47	3,6	77	4,89	3,3	97
11,4	7,6	17	7,8	5,2	38	6,30	4,2	58	5,44	3,6	78	4,86	3,3	98
11,1	7,4	18	7,7	5,1	39	6,25	4,2	59	5,41	3,6	79	4,84	3,3	99
10,8	7,2	19	7,6	5,1	40	6,20	4,1	60	5,38	3,6	80	4,81	3,3	100
10,5	7,0	20	7,5	5,0		6,15	4,1		5,34	3,6		4,79	3,3	

Die Formel, nach welcher obige Tabelle berechnet ist, wird keiner Erörterung bedürfen.

§ 50.

**Fortschreibungsvermessungen.**

Ursprünglich nur zu Grundsteuerregulierungszwecken wurden in den Katasterämtern Karten und Besitzstandsverzeichnisse des gesammten Grundbesitzes angefertigt. Die einzelnen Grundstücke sind nach der Reihenfolge ihrer Lage im Felde in den Flurbüchern gemarkungsweise nach Fläche und Bonität nachgewiesen. Diese Flurbücher bilden die Grundlage der Mutterrollen, welche alle Besitzstände, die einem und demselben Besitzer gehören, in getrennten Artikeln nachweisen. Später wurde das so hergestellte werthvolle Material auch zur Regulierung des Grundbuchwesens verwendet, und hat damit eine eminente Bedeutung für den gesammten Grundbesitz erlangt.

Um den Karten und Flurbüchern ihren Werth dauernd zu erhalten, sind alle eintretenden Aenderungen, Besitzwechsel, Grenzverlegungen, Neuanlagen, (z. B. von

Bahnen, Wegen, Canälen), in die Karten und Register nachzutragen, und hat zu dem Ende das Grundbuchamt dem Katasteramte von jeder eingetretenen Eigenthumsänderung Kenntniss zu geben. Der Katastercontroleur übernimmt die Aenderungen in das sogen. Fortschreibungsprotocoll und giebt dem Grundbuchamte Kenntniss von den etwa neu entstandenen Parzellennummern, Artikeln der Mutterrolle etc.

Bei freiwilligen Veräusserungen dürfen die Berichtigungen des Katasters **nur** auf Grund der Benachrichtigung seitens des Grundbuchamtes vorgenommen werden, oder auf Vorlegung einer Urkunde über die erfolgte Grundbuchberichtigung, (Auflassung), durch die Betheiligten. — Bei Gemeinheitstheilungen, Erwerb durch Erbgang, durch Subhastation oder Enteignungsbeschluss, (Expropriation), darf die Fortschreibung ohne vorgängige Eintragung des Eigenthumsüberganges in das Grundbuch erfolgen. Ebenso kann die Berichtigung materieller Irrthümer, soweit dieselben lediglich auf falscher Darstellung der Grenzen in den Karten beruhen, ohne Weiteres vorgenommen werden. Ist aber ein Grundstück einem falschen Eigenthümer zugeschrieben, so bedarf es der vorgängigen Berichtigung des Grundbuchs, falls dieses denselben Fehler enthält. Von jeder vorgenommenen Aenderung, mag dieselbe auf Grund einer Benachrichtigung durch das Grundbuchamt, oder ohne eine solche erfolgt sein, ist den betheiligten Grundbesitzern Nachricht zu geben.

Bei Theilungen von Grundstücken, Grenzverlegungen, Neuanlagen pp. bedarf es örtlicher Messungen, um die Ergänzung der Karten herbeiführen zu können. Die Eintragungen in das Fortschreibungsprotocoll erfolgen dann erst **vorläufig** in rother Tinte. Aus diesem Protocoll erhalten die Betheiligten einen Auszug nebst Handzeichnung über die vorgenommenen Veränderungen, behufs Einleitung der Auflassung. Nachdem diese erfolgt ist, werden die vorläufigen Eintragungen schwarz unterstrichen, bezw. auf Grund der Grundbucheintragungen vervollständigt.

Nach den Fortschreibungsprotocollen sind alljährlich die Flurbücher, Mutterrollen etc. zu berichtigen und die Karten durch Eintragung des neuen Verhältnisses zu ergänzen. Damit die Karteneintragungen leicht und sicher erfolgen können, ist bei den erforderlichen Messungen folgendes zu beachten:

Allen Fortschreibungsvermessungen sind Auszüge aus den Grundsteuerurkarten — Urkarten — zu Grunde zu legen. An der Hand derselben sind die Grenzen im Felde genau zu prüfen, verloren gegangene Grenzzeichen in Gegenwart der Interessenten und ihrer Grenznachbarn herzustellen, und mit diesen Verhandlungen aufzunehmen, durch welche die Grenzen als richtig anerkannt werden. Finden sich gegen die Karten Differenzen, so ist zu prüfen, ob diese auf fehlerhafter kartographischer Darstellung in den Karten, oder auf eingetretenen Veränderungen beruhen. Ist Letzteres der Fall, und wollen die Interessenten die verschobenen Grenzen beibehalten wissen, so kann die dadurch nöthig werdende Fortschreibung nur nach vorangegangener Berichtigung des Grundbuchs erfolgen. Aus den Grenzverhandlungen muss daher ersichtlich sein, ob ein materieller Irrthum, oder eine örtliche Verschiebung der Grenzen Ursache der vorgefundenen Differenz gewesen.

Damit die Messungslinien, welche zur Aufnahme des neuen Verhältnisses dienen, in die Karten eingetragen werden können, ist es nöthig, dieselben entweder direkt an sichere, in den Karten genau verzeichnete feste Punkte anzuschliessen — als Grenzsteine und dergl., — oder dieselben in andere, bereits an solche Punkte angeschlossene Linien einzubinden. Alle Linien sind ihrer ganzen Länge nach

durchzumessen, damit die wegen des Karteneinsprungs sich ergebenden Differenzen richtig vertheilt werden können. Ordinaten über 10 m Länge sind durch Winkelmessung zu bestimmen, über 40 m Länge durch Hypotenusenmessung zu sichern. So lange Ordinaten sind indessen überhaupt thunlichst zu vermeiden bzw. (ev. unter gehöriger Verlängerung), in bereits fest bestimmte Linien einzubinden und bis zum Bindepunkte durchzumessen, so dass in jeder einzelnen längeren Linie die Kartendifferenz zur Erscheinung und Vertheilung gelangen kann. — Bei Aufnahmen von Gebäuden sind die Verlängerungen der Fundamentlinien in das Liniennetz einzubinden und zu messen, auch die Dimensionen der Gebäude zu ermitteln.

Sind ausnahmsweise statt der graden Linien Polygone nöthig, so sind diese beiderseits an feste Punkte anzuschliessen, die Coordinaten, bezogen auf die gradlinige Verbindungslinie dieser festen Punkte als Abscissenaxe zu berechnen, und die Coordinatenfehler nach Verhältniss der Streckenlängen auf die einzelnen Coordinatenunterschiede zu vertheilen. Da Anfangs- und Endpunkt des Polygons in der Abscissenaxe liegen, so muss die Summe der Ordinatenunterschiede = 0 werden, die der Abscissenunterschiede aber gleich der nach der Karte zu ermittelnden Entfernung der beiden festen Punkte, an welche das Polygon angeschlossen ist. Lässt sich die Neigung der ersten und letzten Strecke gegen die Abscissenaxe, d. i. die Verbindungslinie des Anfangs- und Endpunktes des Polygons, nicht messen, weil man von einem zum anderen dieser Punkte nicht sehen kann, so kommt das am Schlusse des § 29 geschilderte Verfahren zur Anwendung.

Findet eine vollständige Neumessung des fraglichen Complexes oder eines Theiles desselben statt, dessen Umgrenzungen sich nicht mit denen der Katasterkarten in Uebereinstimmung befinden, und sollen die örtlich vorgefundenen Grenzen beibehalten werden, so genügt es nicht, die fragliche Grenze nur von den neu gelegten Polygonen der Neumessung aus aufzunehmen, sondern der fragliche Grenzzug ist auch von festen Punkten der Katasterkarte aus aufzunehmen, so dass die an das Neumessungsgebiet angrenzenden Kartenblätter der Grundsteuerkarten berichtigt werden können, d. h. also, damit die Congruenz der an das neu zu kartirende Blatt anschliessenden Grenzen der bestehen bleibenden Karten mit denen des neuen Blattes hergestellt werden kann.

Wenn von einer Parzelle eine oder mehrere Theilparzellen abgezweigt werden, so ist auch die Restparzelle vollständig mit aufzumessen. Nur wenn die Theilparzellen zusammen nicht  $\frac{1}{10}$  der Stammparzelle überschreiten, ist es statthaft, den Flächeninhalt der Restparzelle durch Abzug der Theilparzellen von dem Flächeninhalte der Stammparzelle zu ermitteln.

Die Vermessungsergebnisse sind in ein Feldbuch einzutragen, und zwar vorhandene Terraingegenstände schwarz, neu entstandene roth. Das Feldbuch ist zu paginiren und die Originalität desselben zu bescheinigen. Hierauf werden die Ergänzungen roth in die Karten eingetragen und etwa fortfallende Grenzlinsen roth in derselben durchkreuzt. Auch die Messungslinien und Messungszahlen sind roth in die Ergänzungskarte mit aufzunehmen, bzw. ist bezüglich der Zahlen, — bei mangelndem Raum —, auf das Feldbuch zu verweisen.

Jede neu entstandene Parzelle erhält eine neue Nummer, in Anschluss an die letzte alte Nummer des Blattes. Die bestehen bleibende alte Nummer der neuen Parzelle ist in Bruchform unter die neue Nummer zu setzen.

Die Flächenberechnung erfolgt zweimal und muss bei Parzellen unter 1 Ar nach Originalzahlen ausführbar sein. Die Flächen sind auf den Integralinhalt des alten Katasters zu reduciren, falls die gefundene Differenz die zulässigen Grenzen\*) nicht überschreitet. Ist dies der Fall, so ist das neue Resultat beizubehalten.

Werden die Fortschreibungsvermessungen nicht durch den Katastercontroleur ausgeführt, so unterliegen doch die Arbeiten der Revision durch denselben.

§ 51.

**Flächenberechnung.**

1) Ein Polygon aus den Coordinaten seiner Eckpunkte zu berechnen:

Aus Fig. 78 ergeben sich ohne Schwierigkeit die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} 1) 2F &= y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + \dots + y_{n-1}(x_{n-2} - x_n) + y_n(x_{n-1} - x_1) \\ 2) 2F &= x_1(y_n - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + \dots + x_{n-1}(y_{n-2} - y_n) + x_n(y_{n-1} - y_1) \end{aligned} \right\} (191)$$

d. h. man multiplicirt jede Ordinate mit dem Unterschiede der Abscissen des vorhergehenden und folgenden Punktes, oder jede Abscisse mit dem Unterschiede der Ordinaten dieser Punkte, und addirt die Produkte.

Rechenprobe: 1) Summe der Abscissen- (bezw. Ordinaten-) Unterschiede = 0, 2) Resultat der Formel 1) = dem der Formel 2).

Geht eine der Axen mitten durch das Polygon, so vergrößert man die Ordinaten, (bezw. Abscissen), um einen constanten Betrag, derart, dass man lauter positive Ordinaten (bezw. Abscissen) erhält.

2) Die Berechnung der Flächen erfolgt durch Zerlegung der Figur in Dreiecke oder Trapeze, deren Grundlinien und Höhen nach der Karte ermittelt werden.

Bei sehr langgestreckten gradlinig begrenzten Figuren, Fig. 79, sind die Kopfbreiten a und b durch Messung auf dem Felde zu ermitteln, die Figur ist in der angedeuteten Weise in Dreiecke zu zerlegen und deren Höhen nach der Karte zu ermitteln. Die Ermittlung der Kopfbreiten nach der Karte ist in solchen Fällen nicht zulässig, da ein geringer Fehler der schmalen Kopfbreiten, mit der verhältnissmässig grossen Höhe multiplicirt, eine zu erhebliche Flächendifferenz ergeben würde.

§ 52.

**Polarplanimeter.**

Die Einrichtung dieses allgemein verbreiteten Instruments, Fig. 80, wird jeder Anfänger sehr bald aus eigener Anschauung kennen zu lernen Gelegenheit haben, und brauchen wir daher nur noch die Theorie desselben in Kürze zu besprechen.

1) Es bezeichnen F die Länge des Fahrarms,  $\rho$  die Entfernung der Laufrolle von der Axe C des Fahrarms, Fig. 81a, P den Pol, R dessen Entfernung von der Axe C,  $F_1$  sei der Anfangspunkt der Umfahrung. Ist nun die zu berechnende Fläche von  $F_1$  bis  $F_2$  umfahren, so ist  $C_2 F_2$  eine neue Lage des Fahrarms, und wir können uns vorstellen, dass diese entstanden sei a) durch parallele Verschiebung des Arms aus der Lage  $C_1 F_1$  in die Lage  $C_2 F_1'$ , wobei die Rolle einen Bogen von der Länge  $h_1$  abwickeln wird, sodann b) durch Drehung des Arms aus der Lage  $C_2 F_1'$  in die Lage  $C_2 F_2$ , wobei der Arm einen Kreissektor mit dem Centriwinkel  $\alpha_1$

\*) Es sind zulässig bei Flächen unter 1 Ha. pr. Ar 1,4 qm, bei Flächen von 1—10 Ha. pr. Ar 0,8, bei grösseren Flächen 0,7 qm. Die Berechnung erfolgt nach folgendem Beispiel: Auf 3,50 Ha. ist zulässig eine Differenz a) pr. 1. Ha. = 140 qm, für den Rest  $2,50 \times 80 = 200$  qm, zusammen 340 qm.

beschreibt, wo  $\alpha_1$  durch die Länge des Bogens für den Radius 1 ausgedrückt sein soll. Während dieser Drehung wird die Rolle einen Bogen  $\varrho \alpha_1$  abwickeln. Die gesammte Abwicklung der Rolle beim Uebergange aus der Lage  $C_1 F_1$  in die Lage  $C_2 F_2$  ist also

$$A_1 = h_1 + \varrho \alpha_1. \quad (192)$$

Die dabei von dem Fahrarm bestrichene Fläche, d. h. die Fläche, welche von der 1. und 2. Lage des Fahrarms und von den von seinen Endpunkten F und C zurückgelegten Wegen  $F_1 F_2$  und  $C_1 C_2$  begrenzt wird, ist, wenn wir den Sektor mit dem Centriwinkel  $\alpha_1 = s_1$  setzen:

$$J_1 = F h_1 + s_1. \quad (192a)$$

Setzt man die Umfahrung bis  $F_2$  fort, so ist die weitere Abwicklung der Rolle

$$A_2 = h_2 + \varrho \alpha_2, \quad (193)$$

und die vom Fahrarme bestrichene Fläche

$$J_2 = F h_2 + s_2. \quad (193a)$$

So geht die Sache weiter, bis der Fahrstift in  $B_1$  angekommen ist. Von hier an findet Rückwärtsbewegung der Rolle statt; die Abwicklung der Rolle ist also negativ, und ist also bei Umfahrung von  $B_1$  nach  $B_2$ :

$$A' = -(h' + \varrho \alpha') \quad (194)$$

und die vom Fahrarm bestrichene Fläche

$$J' = (F h' + s'). \quad (194a)$$

Wird die Umfahrung bis auf den Anfangspunkt  $F_1$  fortgesetzt, so ist also die gesammte Abwicklung der Rolle

$$\Sigma A = \Sigma h + \Sigma(\varrho \alpha) - (\Sigma h' + \Sigma(\varrho \alpha')).$$

Offenbar ist aber nach einer vollen Umfahrung

$$\Sigma(\varrho \alpha) = \Sigma(\varrho \alpha')$$

also  $\Sigma A = \Sigma h - \Sigma h'. \quad (195)$

Die Fläche der umfahrenen Figur ist nun:

$$Fl. = \Sigma J - \Sigma J' \quad (196)$$

oder nach (192a, 193a, 194a)

$$Fl. = F \times \Sigma h + \Sigma s - (F \times \Sigma h' + \Sigma s')$$

oder da  $\Sigma s = \Sigma s'$

$$Fl. = F \times (\Sigma h - \Sigma h')$$

oder nach (195)  $Fl. = F \times \Sigma A. \quad (197)$

Die umfahrene Figur ist also gleich einem Rechtecke, welches die Länge des Fahrarmes zur Grundlinie, den von der Rolle abgewickelten Bogen zur Höhe hat.

**Aufgabe:** Der Umfang der Rolle sei = 5 cm, die Nonieneinheit betrage  $\frac{1}{1000}$  des Umfanges, also = 0,05 mm. Wie lang muss der Fahrarm sein, wenn bei einer Umfahrung einer Fläche von 1 □ mm die Rolle sich um eine Nonieneinheit, d. h. um 0,05 mm, abwickeln soll?

Es ist  $F \times 0,05 \text{ mm} = 1 \text{ □ mm}$

$$F = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ mm.}$$

Sei nun beispielsweise eine Karte im Massstab 1:2000 gezeichnet, so entspricht eine Fläche von 1 □ mm einer Fläche von 4 qm des verjüngten Kartenmasses. Bei einer Fahrarmlänge von 20 mm ist also der Werth der Nonieneinheit für den Massstab 1:2000 = 4 □ m. Sollte der Fahrarm nun so eingestellt werden, dass der Werth der Nonieneinheit 10 □ m betrage, (=  $2,5 \times 4 \text{ □ m}$ ), so wird die Fahrarmlänge  $2,5 \times 20 \text{ mm}$ , = 50 mm zu nehmen sein.

In der Regel ist der Fahrarm nicht mit Millimetertheilung versehen, sondern nur mit einzelnen Marken, welche die Bezeichnungen 2 □ mm, 2,5 □ mm, 5 □ mm etc. tragen. Dieselben bedeuten, dass der Werth der Nonieneinheit bei der betreffenden Einstellung = 2, 2,5, 5 etc. □ mm sei. Um daraus den Werth der Nonieneinheit für ein verjüngtes Kartenmass zu erhalten, wird man also nur zu berechnen haben, wieviele Quadratmeter des verjüngten Masses in einem Quadratmillimeter natürlichen Masses ent-

halten sind. Ist z. B. der Fahrarm auf die Marke 5 □ mm eingestellt, und will man eine im Massstabe 1:2000 gezeichnete Figur berechnen, so ist der Werth der Nonieneinheit = 20 □ m, da 20 □ m des verjüngten Masses in 5 □ mm natürlichen Masses enthalten sind. Ist demnach die Abwicklung der Rolle bei Umfahung einer gewissen Fläche = x Nonieneinheiten, so weiss man, dass diese Fläche einen Inhalt von 20 x qm enthält.

2) Steht der Pol innerhalb der zu umfahrenden Figur, so wird der Fahrarm während der Umfahung nach und nach die Lagen  $F_1 C_1$ ,  $F_2 C_2$  etc., Fig. 82, einnehmen und endlich wieder in die Lage  $F_1 C_1$  zurückkehren. Die beim Uebergange von einer in die andere Lage abgewickelten Bögen werden sein:  $h_1 + \varrho a_1$ ,  $h_2 + \varrho a_2$  etc., und ihre Summe, d. h. der während der ganzen Umfahung sich abwickelnde Bogen:

$$\Sigma A = \Sigma h + \Sigma \varrho a. \quad (198)$$

Da sich der Arm nach einer vollen Umfahung einmal um seine Axe C gedreht haben wird, so ist  $\Sigma \varrho a$  gleich dem Umfange eines Kreises mit dem Radius  $\varrho$ , also  $\Sigma \varrho a = 2 \varrho \pi$ , mithin

$$\Sigma A = \Sigma h + 2 \varrho \pi. \quad (199)$$

Die vom Fahrarm bestrichene Fläche ist

$$J = \Sigma h \cdot F + F^2 \pi$$

oder nach (199)

$$\begin{aligned} J &= (\Sigma A - 2 \varrho \pi) F + F^2 \pi \\ &= (\Sigma A) F + F^2 \pi - 2 \varrho \pi F. \end{aligned} \quad (200)$$

Zu dieser Fläche ist, um die Gesamtfläche der umfahrenden Figur zu erhalten, die vom Radius  $PC = R$  beschriebene Kreisfläche  $R^2 \pi$  hinzuzufügen. Es ist also

$$Fl. = (\Sigma A) F + R^2 \pi + F^2 \pi - 2 \varrho \pi F$$

oder wenn man  $(R^2 + F^2) \pi - 2 \varrho \pi F = c^2$  setzt:

$$Fl. = (\Sigma A) F + c^2, \quad (201)$$

d. h. die umfahrene Fläche ist gleich dem Rechtecke aus dem abgewickelten Bogen und der Fahrarmlänge, vermehrt um eine von den Dimensionen des Instruments abhängige Constante  $c^2$ .

3) Wir wollen noch eines bisweilen plötzlich auftretenden Fehlers des Instruments gedenken, der sich darin äussert, dass die Instrumentenangaben bei wechselnder Polstellung schwankende sind. Die Ursache dieser Erscheinung ist in einer schiefen Axenstellung der Laufrolle zu suchen. Die Laufrollenaxe soll der durch die Polarmaxe C und die Fahrstiftspitze F gelegten Geraden **parallel** sein. Ein Blick auf Fig. 81b lehrt, dass, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, bei einer parallelen Verschiebung des Fahrarmes aus der Lage CF in die Lage C'F' nicht die Bogenlänge h, wie es sein sollte, sondern die Bogenlänge h' abgewickelt wird. Das Verhältniss  $h : h'$  ist nun nicht constant, sondern schwankt mit dem Winkel PCF, den Pol- und Fahrarm einschliessen, und den wir mit  $\alpha$  bezeichnen wollen. Es ist nun, wenn wir uns den Bogen CC' = s sehr klein denken, so dass CC'  $\perp$  PC angenommen werden kann, dass also  $\sin FCC' = \cos \alpha$ ,

$$h = s \cos \alpha. \quad (a)$$

Enthält nun der Winkel  $\alpha$ , in Folge schiefer Axenstellung der Laufrolle, gewissermassen einen kleinen Fehler  $d\alpha$ , so finden wir den dadurch in der Rollenabwicklung h entstehenden Fehler durch Differentiation von (a)

$$dh = -s \sin \alpha d\alpha. \quad (b)$$

Da nach der Einrichtung des Instruments Winkel  $\alpha$  nur im ersten und zweiten Quadranten liegen kann, so ist  $\sin \alpha$  stets positiv, also  $dh$  stets negativ,

(d. h.  $h$  ist abnehmend bei zunehmenden Winkel  $\alpha$ ). Dagegen ist nach (a) die Abwicklung  $h$  für  $\alpha > 90^\circ$  **negativ**. Es ist also 1) bei spitzwinkliger Armstellung, ( $\alpha < 90^\circ$ ),

$$h' = h - d \alpha$$

und bei stumpfwinkliger Polstellung, ( $\alpha > 90^\circ$ )

$$- h' = -(h + d \alpha).$$

Dem absoluten Werthe nach ist also im ersten Falle  $h' < h$ , im zweiten Falle  $h' > h$ , und wir erhalten den Satz:

I. Bei spitzwinkliger Polarmstellung werden durch positive Rollenschiefe die Rollenabwickelungen vermindert, bei stumpfwinkliger Stellung vergrössert, und zwar ist die Differenz in beiden Fällen um so grösser, je mehr sich der Winkel zwischen Pol- und Fahrarm dem Rechten nähert, — denn nach Gl. (b) ist der Fehler der Rollenabwicklung dem  $\sin \alpha$  proportional, erreicht also sein Maximum für  $\alpha = 90^\circ$ .

Weiter erkennen wir aus Fig. 81a folgenden Satz:

II. Während der Umfahung einer Figur liegt der Winkel  $\alpha$  dem Rechten, ( $90^\circ$ ), bei rückläufiger Rollenbewegung, d. h. bei der Umfahung in der Richtung  $B_1 - F_1$ , näher, als bei rechtläufiger.\*)

Aus diesen beiden Sätzen lassen sich nun folgende Schlüsse ziehen:

**Fall 1).** Die zu umfahrende Figur liegt ganz innerhalb des mit der Hypotenuse  $P F_1$  um  $P$  beschriebenen Kreises, wo also  $C F_1$  die rechtwinklige Fahrarmstellung bezeichnet, Fig. 81b. Hier ist die Polarmstellung während der ganzen Umfahung spitzwinklig, die Rollenabwickelungen werden nach Satz I **vermindert**, und zwar um so mehr, je mehr Winkel  $\alpha$  sich dem Rechten nähert, also nach Satz II mehr bei rückläufiger, als bei rechtläufiger Rollendrehung. Die Gesamtabwicklung der Rolle giebt also den gesuchten Flächeninhalt **zu gross**. (Denn die rückläufigen, — negativen — Rollenabwickelungen werden im Verhältniss zu den positiven zu klein, die algebraische Summe der positiven und negativen Abwickelungen also zu gross gefunden.)

**Fall 2).** Die zu umfahrende Figur liegt ausserhalb des gedachten Kreises, die Polarmstellung ist durchweg stumpfwinklig. Man findet durch analoge Schlussfolgerung, dass der Flächeninhalt der Figur sich zu **klein** ergibt.

Hierbei ist immer ein positives  $d \alpha$  vorausgesetzt. Bei negativem  $d \alpha$  ist das Resultat das umgekehrte.

**Fall 3).** Die Figur wird von der Peripherie des gedachten Kreises durchschnitten, Fig. 82b. Hier wird man den Theil innerhalb des Kreises zu gross, den Theil ausserhalb zu klein finden. In der Summe beider Theile heben sich also die Fehler ganz oder theilweise auf.

Hieraus die wichtige Regel:

Man wähle die Polstellung stets so, dass der mit der Hypotenuse  $P F_1$  um  $P$  beschriebene Kreis die zu umfahrende Figur mitten durchschneidet.\*\*)

\*) Experimentell zeigt sich die Richtigkeit dieses Satzes darin, dass man bei rechtläufiger Umfahung einer Figur stets positive Gesamtabwickelungen der Rolle erhält, woraus folgt, dass die rückläufigen Rollendrehungen im Ganzen kleiner sein müssen, als die rechtläufigen. Nach Gl. (a) finden aber die kleinsten Rollenabwickelungen statt für  $\alpha = 90^\circ$ , wo die Rollenbewegung lediglich eine gleitende ist.

\*\*) Bei dieser Stellung wird der von den Armen eingeschlossene Winkel stets nahe bei  $90^\circ$  liegen, der Fehler  $d h$  also nahe constant bleiben, denn durch Differentiation von (b) findet man:  $d d h = -s \cos \alpha d \alpha^2$ . Die Aenderung des Fehlers  $d h$  ist also für  $\alpha = 90^\circ$  gleich 0, da  $\cos 90^\circ = 0$ .

Die Prüfung des Instruments auf die Richtigkeit der Rollenaxe erfolgt durch Umfahren einer Figur aus verschiedenen Polstellungen. Man wird nach Obigem leicht entscheiden, ob der Fehler der Axenstellung positiv oder negativ ist.

Bei den meisten Instrumenten lässt sich entweder die Axe selbst, oder die durch CF gelegte Gerade, durch Verschiebung des Fahrstifts F, justiren.

§ 53.

**Linearplanimeter.**

Eine der vorzüglichsten Einrichtungen dieser Instrumentengattung haben wir im Kugelrollplanimeter von Coradi, Fig. 83. Vorzüge desselben sind besonders: Fortfall der zu mancherlei Fehlerquellen Anlass gebenden Gleitbewegung der Rolle, grössere Unabhängigkeit von der Beschaffenheit der Papierfläche.

Wir wollen die Construction dieses Instruments in rohen Zügen vortragen, wobei man Figur 84 vergleichen wolle:

Das ganze Instrument wird von 2 auf dem Papier laufenden Rollen R getragen, durch deren Drehung das Rädchen r und mit ihm eine durch eine horizontale Axe mit demselben in Verbindung stehende Kugelkalotte K in Umdrehung versetzt wird. Letztere bewirkt durch Reibung die Rotation des um seine Axe drehbaren Cylinders C, welcher mit dem Fahrarm F in der aus Fig. 85 ersichtlichen Weise verbunden ist. An diesem Cylinder ist die Rolle J befestigt, deren Theilung mittelst eines feststehenden Nonius ablesbar ist. Während der Bewegung des Instruments beschreibt die Axe des Fahrarms eine grade Linie CX, Fig. 86. Liegt der Fahrarm selbst in dieser Linie, so berührt der Cylinder C die Kugelkalotte K in der Verlängerung ihrer Axe. Die Drehung des Cylinders C ist dann, trotz der Bewegung des Instruments und der Drehung der Kalotte = 0. Bildet der Fahrarm mit der Axe CX den Winkel  $\alpha$ , so schliesst auch derjenige Kugelradius der Kalotte, welcher deren Mittelpunkt mit dem Berührungspunkte des Cylinders verbindet, mit der Axe der Kalotte den Winkel  $\alpha$  ein, und das von diesem Berührungspunkte auf die Axe der Kalotte gefällte Loth  $a$  ist, wenn  $\rho$  den Kugelradius bezeichnet:

$$a = \rho \sin \alpha.$$

Die Drehung des Cylinders C, d. i. die Abwicklung der Rolle J ist gleich dem vom Berührungspunkte des Cylinders und der Kalotte infolge Drehung der Letzteren beschriebenen Kreisbogen, ist also proportional dem Radius  $a$  dieses Kreises, und andererseits auch proportional der Drehung der Kalotte K, also der Abwicklung der Rolle R. Bewegt sich nun der Fahrstift von A nach A', so ist die Abwicklung der Rolle R gleich dem Abschnitte  $dx$  auf der Linie CX, die Abwicklung der Rolle J ist also, wenn  $k$  einen von den Dimensionen des Instruments\*) abhängigen Coefficienten bezeichnet:

$$A_1 = k dx \sin \alpha$$

oder, da  $\sin \alpha = \frac{AB}{F} = \frac{y}{F}$ , worin F die Länge des Fahrarms bezeichnet:

$$A_1 = k dx \frac{y}{F}$$

\*) In Betracht kommen das Verhältniss des Radius der Rolle R zu dem der Rolle r, und der Kugelradius  $\rho$ .

oder für  $\frac{k}{F} = c$ :

$$A_1 = c y \, dx$$

und bei Fortsetzung der Umfahrung von  $A'$  nach  $A''$ ,

$$A_2 = c y' \, dx',$$

also ist die Abwicklung der Rolle bei Umfahrung der ganzen Figur:

$$\Sigma A = c \Sigma (y \, dx). \quad (202)$$

$\Sigma (y \, dx)$  setzt sich aus positiven und negativen Flächenelementen zusammen, weil  $dx$  bei Rückwärtsbewegung des Instruments negativ wird.  $\Sigma (y \, dx)$  ist offenbar gleich der umfahrenen Figur, (wie man sofort einsieht, wenn man sich  $dx$  unendlich klein vorstellt), also ist die Abwicklung der Rolle proportional der umfahrenen Figur. Hieran wird nichts geändert, wenn die Letztere von der Geraden  $CX$  durchschnitten wird, Fig. 87. Hat nämlich die Umfahrung bei  $A$  begonnen und ist bis  $B$  fortgesetzt, so tritt zwar bei noch weiterer Umfahrung Rückwärtsbewegung des Instruments ein, die Abwicklung der Rolle ist aber nur so lange negativ, als der Fahrstift noch nicht auf der Axe  $CX$  angelangt ist. In dem Moment, wo derselbe die Axe  $CX$  erreicht, ist die Drehung der Rolle  $= 0$ , und geht wieder in **positive** Drehung über, wenn der Fahrstift die Axe  $CX$  überschreitet, weil dann der Berührungspunkt des Cylinders  $C$  über die Axe der Kalotte tritt, wo die Bewegung die entgegengesetzte ist. Der in der Figur rechts von  $CX$  liegende Theil der umfahrenen Fläche wird also von der Rolle, trotz der Rückbewegung des Instruments, gleichwohl im **positiven** Sinne angegeben.

#### § 54.

### Flächenberechnung grösserer Complexe.

Besteht ein Complex aus mehreren einzelnen Parzellen, so darf man seinen Inhalt nicht durch Summiren des ermittelten Inhaltes der einzelnen Parzellen berechnen, weil dadurch unzulässige Fehleranhäufungen entstehen könnten. Es ist vielmehr der Gesamtinhalt des ganzen Complexes unbekümmert um die darin enthaltenen Parzellen zu berechnen, und sind demnächst die Flächen der Parzellen auf den so ermittelten Flächeninhalt des ganzen Complexes zu reduciren, indem man die Differenz der Summe der Parzellen gegen den Inhalt des ganzen Complexes proportional auf die einzelnen Parzellen vertheilt. (Grosse Massenberechnung.)

Weiter sind sodann durch Zusammenstellen mehrerer zusammenhängender Parzellen verschiedene Gruppen zu bilden, der Gesamtinhalt der einzelnen Gruppen, unbekümmert um die dieselben bildenden Parzellen, also im **Ganzen** zu berechnen, und die so gefundenen Flächen der Gruppen mit denjenigen Flächen zu vergleichen, welche durch Summiren der die Gruppe bildenden Parzellen, (nach deren Reduction auf die grosse Massenberechnung), erhalten wird. (Kleine Massenberechnung.) Nur so vermag man sich gegen das Anhäufen von Fehlern zu schützen.

Ist die Karte, auf welcher diese Rechnungen vorgenommen werden, mit Quadratnetz versehen, so gewinnt man den Gesamtinhalt des ganzen Kartenblattes durch Zusammenzählen der Quadrate, deren Inhalt bekannt ist. In den am Rande der Zeichnung liegenden Quadraten, welche nur **theilweise** mit Kartenbezeichnung bedeckt sind, sind sowohl die Theile **mit**, als auch die Theile **ohne** Zeichnung zu berechnen und die Flächen beider Theile auf den Sollinhalt des Quadrats zu reduciren, hierauf die so corrigirte Fläche des **bezeichneten**, zur Karte gehörigen

Theils in Rechnung zu stellen. Hierdurch werden die durch etwaigen Karteneinsprung entstehenden Fehler vollkommen ausgeglichen.

§ 55.

Theilung der Grundstücke.

A. nach der Fläche.

a) **Theilung von gegebenem Punkte aus.** 1) Von einem Dreiecke  $abc$ , Fig. 88, mit dem Flächeninhalte  $Q$ , soll eine Fläche  $F$  so abgeschnitten werden, dass die Theilungslinie  $de$  durch den gegebenen Punkt  $d$  geht.

Es ist  $F : Q = ae \cdot h : ab \cdot h_c$   
 $ae = \frac{F}{Q} \cdot ab \cdot \frac{h_c}{h}$

oder da  $h_c : h = ac : ad$

$$ae = \frac{F \cdot ab \cdot ac}{Q \cdot ad} \quad (203)$$

2) Im Viereck  $abcd$ , Fig. 89, soll die die Fläche  $F$  abschneidende Theilungslinie  $mf$  durch den gegebenen Punkt  $m$  gehen.

Es ist  $2F = ae \times ed + (ef + fg)(ed + gm) - fg \cdot gm$

woraus folgt:  $ef = ae + \frac{2F - de \cdot ag}{gm}$  (204)

3) Im Falle der Fig. 90, in welcher  $PP'$  die durch den gegebenen Punkt  $P$  gehende Theilungslinie bezeichnet, hat man:

$$2F = mn + (n + y)(s - m - x) + yx.$$

$$2F = ns - nx + ys - my.$$

Hierin ist

$$y = u \sin \beta$$

$$x = u \cos \beta$$

$$m = v \cos a$$

$$n = v \sin a$$

also  $2F - vs \sin a = \left( s - v \frac{\sin a}{\sin \beta} \cos \beta - v \cos a \right) u \sin \beta$   
 $\frac{2F - vs \sin a}{s \sin \beta - v \sin(a + \beta)} = u.$  (205)

Sind mehrere Flächen,  $F_1, F_2 \dots F_n$ , derart abzuschneiden, dass die Theilungslinien sämtlich durch gegebene Punkte  $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$  gehen, so setzt man in die Formel (205) für  $F$  der Reihe nach die Werthe  $F_1, F_2 \dots F_n$ , um die Längen  $u_1, u_2 \dots u_n$  zu erhalten.

b) **Paralleltheilung.** 4) Die Theilungslinie  $de$ , Fig. 91, soll parallel zu  $bc$  sein.

Es ist  $F : Q = ad^2 : ac^2$

$$ad^2 = \frac{F}{Q} ac^2, \text{ also } ad = ac \sqrt{\frac{F}{Q}} \left. \vphantom{\frac{F}{Q}} \right\} \quad (206)$$

$$\text{und analog } ae = ab \sqrt{\frac{F}{Q}} \left. \vphantom{\frac{F}{Q}} \right\}$$

5) Die Theilungslinie  $ef$ , Fig. 92, soll  $\parallel ab$  sein.

$$\begin{aligned} 1) & 2F = (s+x)y \\ 2) & y(\cot \alpha + \cot \beta) = s-x. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} 2F &= \frac{s^2 - x^2}{\cot \alpha + \cot \beta} \\ x &= \sqrt{s^2 - 2F(\cot \alpha + \cot \beta)} \\ y &= \frac{2F}{s+x} \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

Sind mehrere Flächen nach einander abzuschneiden, so ist folgende Formel sehr geeignet:

Man messe, Fig. 93, die Parallele  $s_1$  im Abstände  $m$  von der Basis, so ist  $s - s' = a + b = m(\cot \alpha + \cot \beta)$ , also  $\cot \alpha + \cot \beta = \frac{s - s_1}{m}$ , folglich nach (207)

$$x = \sqrt{s^2 - 2F \frac{s - s_1}{m}}. \quad (208)$$

6) Soll vom Polygon, Fig. 94, die Fläche  $F$  so abgeschnitten werden, dass die Theilungslinie parallel zu  $ABCD$  wird, so ist, wenn man die Polygonseiten mit  $a, a_1, a_2$ , den Abstand der Theilungslinie von den Seiten mit  $y$  bezeichnet, im Uebrigen die Bezeichnungen der Figur gelten lässt:

$$\begin{aligned} a &= x + y \cot A + y \cot \frac{B}{2} \\ a_1 &= x_1 + y \cot \frac{B}{2} + y \cot \frac{C}{2} \\ a_2 &= x_2 + y \cot \frac{C}{2} + y \cot D \end{aligned}$$

$$1) \Sigma a = \Sigma x + y \cdot \Sigma \cotang.$$

Weiter ist

$$2) 2F = (\Sigma a + \Sigma x)y.$$

Multipliziert man 1) mit 2), so erhält man:

$$\begin{aligned} (\Sigma a)^2 - (\Sigma x)^2 &= 2F \cdot \Sigma \cotang \\ \Sigma x &= \sqrt{(\Sigma a)^2 - 2F \cdot \Sigma \cotang} \end{aligned}$$

also nach 1)

$$y = \frac{2F}{\Sigma a + \Sigma x}. \quad (209)$$

Die Cotangenten der Winkel  $A, B, C, D$  ergeben sich ohne Weiteres aus den Coordinaten.

**e) Normaltheilungen.** 7) Die Theilungslinie  $de$ , Fig. 95, soll  $\perp ab$  sein.

Man schneidet nach  $b$ ), 4) die Fläche  $F$  derart von  $\triangle acf$  ab, dass  $de \parallel cf$ .

Im Falle der Fig. 96 berechne man das rechtwinklige Dreieck  $acd = \triangle$ , und schneide zu diesem dann noch die Differenz  $F - \triangle$  nach 5).

**d) Proportionaltheilung.** 8) In Fig. 97 soll die Theilungslinie so gelegt werden, dass  $v_1 : v = u_1 : u$ .

$$\text{Es ist} \quad ax + (x+z)(s-a-b) + bz = 2F.$$

Setzt man  $v_1 : v = u_1 : u = m$ , so folgt:

$$\begin{aligned} m^2 v^2 (\sin \alpha + \cos \alpha) + m(v \sin \alpha + u \sin \beta) (s - m v \cos \alpha - m u \cos \beta) \\ - m^2 u^2 \sin \beta \cos \beta = 2F. \end{aligned}$$

$$m = \frac{v s \sin \alpha + u s \sin \beta}{2 u v \sin(\alpha + \beta)} \pm \sqrt{\left( \frac{v s \sin \alpha + u s \sin \beta}{2 u v \sin(\alpha + \beta)} \right)^2 - \frac{2F}{u v \sin(\alpha + \beta)}}.$$

Der Wurzel Ausdruck ist positiv oder negativ, je nach dem  $(\alpha + \beta) >$  oder  $< 180^\circ$ . Setzt man

$$A = u v \sin(\alpha + \beta), \quad B = -v \sin \alpha - u \sin \beta, \quad \frac{B}{2A} = M, \quad \frac{2F}{A} = N,$$

so lautet der Ausdruck für m:

$$m = M \pm \sqrt{M^2 - N}. \quad (210a)$$

Setzt man Viereck ABCD = V, so hat man die Rechenprobe:

$$A + B = -2V. \quad (210b)$$

Sind mehrere Flächen,  $F_1, F_2 \dots$  abzuschneiden, so setze man für die weiteren Rechnungen

$$\frac{2(F + F_1)}{A} = N, \quad \frac{2(F + F_1 + F_2)}{A} = N \dots \text{etc.}$$

Hat man m, so ist

$$v_1 = m v, \quad u_1 = m u.$$

9) Soll im Polygon Fig. 98  $r_1 : r = u_1 : u = v_1 : v = w_1 : w = m$  sein, so setze man in (210a)

$$A = r u \sin(\alpha + \beta) + u v \sin(\alpha_1 + \beta_1) + v w \sin(\alpha_2 + \beta_2)$$

$$B = -r s \sin \alpha - u s \sin \beta - u s_1 \sin \alpha_1 - v s_1 \sin \beta_1 - v s_2 \sin \alpha_2 - w s_2 \sin \beta_2.$$

10) Complicirtere Figuren theilt man am schnellsten durch **Probiren** auf der Karte und überträgt die ermittelte Theilungslinie von der Karte auf das Feld.

### B. nach dem Werthe.

Der Werth W einer Fläche F ist gleich dem Produkt aus dem Werthe der Flächeneinheit und der Fläche. Haben die Bodenklassen I, II, III, Fig. 99, pr. Quadratmeter den Werth  $w_1, w_2, w_3$ , und soll von dem in der Figur dargestellten Grundstücke eine Fläche von dem Werthe W abgeschnitten werden, so zieht man nach Schätzung, oder auf Grund einer überschläglichen Berechnung, die Versuchslinie ab, ermittelt die Flächen  $f_1, f_2, f_3$  der Bonitätsabschnitte I, II, III, multiplicirt sie mit den Werthen der Flächeneinheit  $w_1, w_2, w_3$ , so stellt die Summe  $\Sigma$  dieser Produkte den Werth der durch die Versuchslinie abgeschnittenen Fläche dar. Ist  $W - \Sigma = w$ , so ist der abgeschnittene Werth  $\Sigma$  noch um den Betrag w zu verbessern. Multiplicirt man die nach der Karte zu ermittelnden Längen  $l_1, l_2, l_3$ , d. h. die in den Bodenklassen I, II, III liegenden Theile der Versuchslinie a b, bezüglich mit  $w_1, w_2, w_3$ , so ist die Summe dieser Produkte gleich dem Werthe eines längs a b sich hinziehenden Streifens von 1 m Breite. Ist derselbe = v, so ist, wenn x die Breite des noch abzuschneidenden Streifens mit dem Werthe w bezeichnet,  $w = x v$ , also  $x = \frac{w}{v}$ . Man hat nun noch in dem Abstände x zu a b die Parallele a' b'

zu ziehen, wodurch man a' b' als die gesuchte Theilungslinie erhält. Die ursprünglich abgeschnittenen Flächen  $f_1, f_2, f_3$  ändern sich dadurch um die Beträge  $l_1 x, l_2 x, l_3 x$ , welche mit  $w_1, w_2, w_3$  multiplicirt, zusammen die Correktion w ergeben müssen.

Dies Verfahren setzt voraus, dass die Grenzen des Grundstücks, wie auch die Bonitirungsgrenzen, annähernd **rechtwinklig** durch die Theilungslinie geschnitten werden. Ist dies nicht der Fall, so ermittelt man nun die Längen  $l_1, l_2, l_3$  nochmals, indem man dieselben jedoch nicht auf der Versuchslinie a b, sondern in der Mitte zwischen a b und a' b' abgreift, sonst aber wieder wie oben verfährt, wodurch man einen genaueren Werth für x erhält, welcher wieder von a b aus, nicht etwa von

a' b' aus, abgetragen wird. Bei sehr unregelmässigen Begrenzungen, bezw. sehr spitzen Schnitten der Grenzen und der Theilungslinie, wird man indessen die von der Linie a' b' abgeschnittene Fläche nochmals ordnungsmässig berechnen, und den sich ergebenden Fehlbetrag in derselben Weise beseitigen, indem man jetzt a' b' als Versuchslinie ansieht.

### C. Grenzregulirung.

1) Soll die krumme Grenzlinie a b c d e f g, Fig. 100, in eine Gerade verwandelt werden, welche durch den Punkt g geht und am Flächeninhalt der aneinander grenzenden Grundstücke nichts ändert, so messe man die Grenze von der Messungslinie a g aus auf, berechne die Flächen a b c d und d e f g, ziehe letztere von der ersteren ab, dividire den doppelten Rest durch a g, so erhält man die Höhe a h des Dreiecks a g h, mit a g als Grundlinie. Die Linie g h ist die gesuchte Grenze.

2) Zeigt die zu regulirende Grenze nur **einen** Bruch, so kann man die Aufgabe mit genügender Schärfe durch blosse Construction auf dem Felde lösen: Man steckt die Linie c d  $\parallel$  a b, Fig. 101, ab, so ist d b die gesuchte Grenzlinie.

Soll die Grenze a b, Fig. 102, so verlegt werden, dass sie durch den Punkt c geht, so stecke man a d  $\parallel$  b c ab, und gewinnt c d als gesuchte Grenze.

3) Soll die neue Grenze parallel zu einer vorhandenen Grenze a b, Fig. 103, gehen, so messe man sie von einer zu a b parallelen Messungslinie c d aus auf, berechne die Flächenabschnitte zu beiden Seiten derselben und beseitige die Differenz D der letzteren durch parallele Verschiebung der angenommenen Messungslinie um den Betrag  $x = \frac{D}{c d}$ . Ist indessen eine **erhebliche** Verschiebung erforderlich, und sind die Grenzen a c und b d nicht parallel, so muss die Verschiebung nach (207) erfolgen, zu welchem Ende die Cotangenten der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  durch Coordinatenmessung zu bestimmen sind.

4) Die Mittellinie eines krummen Baches bildet die Grenze zwischen zwei Grundstücken. Der Bach soll durch einen Durchstich regulirt werden, so dass das durch die Verkürzung der Grabenstrecke entstehende Plus an Land beiden aneinander grenzenden Grundstücken gleichmässig zu Gute kommt.

Man nimmt die fragliche Strecke des Grabens auf, kartirt sie, ermittelt durch Probiren auf der Karte eine passende Linie als Mittellinie des Durchstichs so, dass die Flächenabschnitte 1 + 2, Fig. 104, den Abschnitten 3 + 4 gleich werden, überträgt die so ermittelte Linie ins Feld, und trägt von derselben rechts und links die halbe Breite des Durchstichs ab.

Um die Linie von der Karte ins Feld übertragen zu können, ist es nöthig, einige Punkte A, B und C genügend dauerhaft auf dem Felde zu vermarken, mit aufzumessen und auf die Karte zu bringen, damit man später, bei Uebertragung der Kartenlinie ins Feld, sichere Punkte zur Verfügung hat, von denen aus die nöthigen Abmessungen erfolgen können.

### D. Planabsteckung.

Ist eine Flächentheilung nach der Karte vorgenommen worden, und sind die Theilungslinien, welche man im Allgemeinen unter sich parallel machen wird, ins Feld zu übertragen, so wird man die rechtwinkligen Abstände der Theilungslinien, — Planbreiten, — nach der Karte ermitteln, und dieselben auf dem Felde der

Reihe nach abmessen, wodurch die Theilungslinien auf dem Felde bestimmt sind. Bei verhältnissmässig **langen** Plänen darf man indessen die Planbreiten nicht mittelst Zirkel und Massstab nach der Karte ermitteln, da kleine Fehler der Planbreiten verhältnissmässig grosse Fehler der Flächen verursachen würden, sondern man ermittelt in solchen Fällen die **Längen** der Pläne, — arithmetisches Mittel der beiden parallelen Grenzl意思, — und erhält die Breite durch Division der Planlänge in die Fläche. Sind die Kopfseiten der Pläne unregelmässig begrenzt, so hat man zuvor die krummen Grenzen auf der Karte in grade zu verwandeln.

Bei nicht parallel begrenzten Plänen wird man die Kopfbreiten zwar durch Abgreifen mittelst Zirkel und Massstab ermitteln müssen, wird dann aber gleichzeitig auch die zugehörigen Höhen, nach Anleitung der Fig. 79, abgreifen und sich durch Multiplication der ermittelten Höhen und Grundlinien überzeugen, ob diese Masse den Sollinhalt der Fläche ergeben. Anderenfalls sind die abgegriffenen Kopfbreiten entsprechend zu corrigiren, ehe sie zur Absteckung auf dem Felde benutzt werden dürfen.

## VII. Linienabsteckung.

### § 56.

#### Abstecken grader Linien.

1) **Aufgabe.** Zwei Punkte, welche eine derartige Lage haben, dass dieselben von keinem Standpunkte aus gleichzeitig gesehen werden können, durch eine grade Linie zu verbinden.

Man verbindet beide Punkte, A und B, Fig. 105, durch ein Polygon, misst Strecken und Winkel desselben, berechnet die Coordinaten des Punktes B für eine beliebige, durch A als Nullpunkt gehende Abscissenlinie A X, indem man eine ganz willkürliche Anfangsneigung  $\nu$  annimmt, berechne aus den Coordinaten der Punkte A und B, (die des ersteren Punktes sind = 0), den Winkel  $\alpha$ , vergl. die Figur, und trage den Winkel  $\beta = \nu - \alpha$  an die Anfangsstrecke des Polygons an\*), so hat man die Richtung der gesuchten Geraden, die gehörig verlängert durch B treffen muss, ev. noch etwas zu corrigiren ist, (vergl. 4).

2) Hat man eine Karte, in welcher ausser den beiden Punkten A und B noch irgend zwei andere, im Felde scharf markirte Punkte, z. B. C und D, Fig. 106, verzeichnet sind, so verlängere man auf derselben die Linien AB und CD bis E, berechne aus den aus der Karte zu entnehmenden Seiten des Dreiecks BEC den Winkel E, construire sodann den Punkt E auch im Felde, durch Verlängerung der Linie CD um die aus der Karte zu entnehmende Strecke DE, und trage in E den berechneten Winkel an.

3) Man kann auch mittelst der Bussole die Neigung der Linie CD gegen den magnetischen Meridian bestimmen, letzteren in die Karte eintragen, sodann auf

\*) Um einen Winkel **genau** abzustecken, wird man den zunächst mittelst einfacher Nonieneinstellung **roh** abgesteckten Winkel repetiren, wobei sich gegen das Soll eine Differenz  $\delta''$  herausstellen wird. Um diese zu beseitigen, errichtet man in einer abgemessenen Entfernung  $s$  vom Scheitel ein Loth  $h = \frac{s}{\rho''} \delta''$ , oder wenn man  $h$  in cm erhalten will, während  $s$  in m ausgedrückt ist:  $h = \frac{100 s}{\rho''} \delta''$ , oder für  $\frac{\rho''}{100} = k$ ,  $h = \delta'' : \frac{k}{s}$ , worin  $\frac{k}{s}$  aus Tafel III des Anhangs entnommen werden kann.

derselben die Neigung der Linie A B gegen diesen ermitteln, und letztere Neigung mit der Bussole ins Feld übertragen.

Wo es auf grosse Genauigkeit nicht ankommt, ist die Bussole besonders im Walde das geeignetste, am wenigsten schwerfällige Instrument. Trifft z. B. die Linie auf einen starken Baum, den man nicht beseitigen möchte, etwa weil die Linie, wie bei generellen Wege- oder Eisenbahnprojekten noch nicht einmal endgültig feststeht, so braucht man die Bussole nur jenseits des Hindernisses neu aufzustellen, und die Arbeit geht ungestört weiter.

4) Steht im Falle der Fig. 108 nur ein **schmales** Hinderniss im Wege, so legt man eine beliebige Linie A C an diesem Hinderniss vorbei, misst A C und das Loth B C, und kann dann für eine beliebige Anzahl von Punkten,  $a_1, a_2, a_3 \dots$  der Geraden A B die Abscissen  $A a_1', A a_2', A a_3' \dots$  und die Ordinaten  $a_1 a_1', a_2 a_2', a_3 a_3' \dots$  mit Hilfe des Proportionsatzes berechnen, mithin die Punkte  $a_1, a_2, a_3 \dots$  im Felde construiren.

Dies Verfahren kann auch Anwendung finden, um, wenn die Schenkel der nach 1) und 2) angetragenen Winkel den Punkt B nicht genau treffen, die nöthige Korrektur auszuführen.

§ 57.

**Kurvenabsteckung.**

**a. Kreis.**

1) **Aufgabe.** Gegeben der Brechungswinkel  $\alpha$  zweier Linien. Es soll ein Kreisbogen mit dem Radius R abgesteckt werden, der die gegebenen Linien berührt. Es ist in Fig. 107

$$\begin{aligned} \angle M &= 180^\circ - \alpha \\ A C &= R \tan \frac{1}{2} M. \end{aligned} \quad (211)$$

Mithin sind die Punkte B und C bekannt. Die Tangenten B A und C A werden als Abscissenlinien angesehen. Die Coordinaten der Punkte 1, 2, 3 . . . ergeben sich, wenn man in die Scheitelgleichung des Kreises (14b) der Reihe nach verschiedene Werthe für x einsetzt, (z. B.  $x = 2, 4, 6, 8 \dots m$ ) und die zugehörigen Werthe y berechnet.

Man kann auch leicht den Punkt S, Fig. 112, durch Berechnung der Länge A S und Halbierung des Winkels  $\alpha$  abstecken, und die Tangente S B in derselben Weise benutzen. (Es ist  $A S = \frac{R}{\sin \frac{1}{2} \alpha} - R$ ).

2) Sollen die abgesteckten Bogenstücke unter sich gleich, und zwar = b sein, so ergibt sich der Centriwinkel

$$\varphi = \frac{b}{R} \rho. \quad (212)$$

Setzt man weiter die Sehne C = 1, Fig. 107, gleich  $s_1$ , so hat man:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= s_1 \cos A C 1 & y_1 &= s_1 \sin A C 1 \\ &= 2 R \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} & &= 2 R \sin \frac{\varphi^2}{2} \\ x_1 &= R \sin \varphi & y_1 &= 2 R \sin \frac{\varphi^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (213)$$

und analog  $x_2 = R \sin 2 \varphi$   $y_2 = 2 R \sin \varphi^2$   
 etc. etc.

3) Das in Fig. 109 dargestellte Verfahren hat den Vorzug, dass die Grössen  $b a'$  und  $a' b'$ ,  $b' a''$  und  $a'' b''$  etc. einander gleich sind, daher nur einmal berechnet zu werden brauchen. Die Grössen  $B a$  und  $a b$  sind nach (212) und (213) zu berechnen. Zur Berechnung der Abscisse  $b a'$  hat man

$$b a' = B a' - s$$

$$B a' = B b' \cos \frac{\varphi}{2} = 2 R \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2},$$

also

$$b a' = 2 R \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2} - s.$$

Die Ordinate  $a' b'$  ist

$$a' b' = B b' \sin \frac{1}{2} \varphi = 2 R \sin \varphi \sin \frac{1}{2} \varphi.$$

(214)

Wegen der ungünstigen Fehlerfortpflanzung bei diesem Verfahren wird man zum Schluss nicht genau auf A abschliessen, und muss die Curve nach dem Augemass corrigiren.

4) Man kann sich auch mit Vortheil der Polarcoordinaten bedienen. Fig. 110. Will man  $n$  Punkte der Curve bestimmen, so dividirt man den Winkel  $M$  durch  $n$ , setzt  $\frac{M}{n} = \varphi$  und berechnet die zu den Winkeln  $\varphi, 2\varphi, \dots, n\varphi$  gehörigen Sehnen  $s_1, s_2, \dots, s_n$  und trägt dieselben der Reihe nach unter den Winkeln  $\frac{1}{2}\varphi, \varphi, \frac{3}{2}\varphi$  etc. an die Tangente  $BA$  an.

Kann man das ganze Terrain von  $B$  bis  $C$  nicht übersehen, so bricht man bei dem zuletzt sichtbaren Punkte, z. B. 3, Fig. 111, ab, stellt das Instrument in 3 auf, stellt die Tangente 3—D durch Antragen des Winkels  $\frac{3}{2}\varphi$  an die Sehne 3—B her, bringt dann das Fernrohr des Instruments durch blosses Durchschlagen in die Lage 3—E, und trägt an die Tangente 3—E wiederum der Reihe nach die Winkel  $\frac{1}{2}\varphi, \varphi, \frac{3}{2}\varphi$  etc.

Die Länge der ganzen Curve ist  $= \frac{M}{\varrho} R$ .

#### b. Parabel.

5) **Aufgabe.** Statt des Kreisbogens der Aufgabe 1) einen Parabelbogen mit dem kleinsten Krümmungsradius  $r$  abzustecken.

Nach Theil I, § 44, 3) Zusatz ist der kleinste Krümmungsradius der Parabel  $= p$ . Die Gleichung der abzusteckenden Parabel lautet also

$$y^2 = 2 r x.$$

Die Ordinate des Berührungspunktes  $P$ , Fig. 112, ist

$$Y = r \cot \frac{1}{2} \alpha$$

und die Tangente  $AP$

$$AP = \frac{Y}{\sin \frac{1}{2} \alpha}$$

(215)

Die Entfernung des Scheitels  $s$  vom Tangentendurchschnittspunkte  $A$  ist

$$AS = SF = X = \frac{Y^2}{2r}$$

oder auch  
Ferner ist

$$AS = \frac{1}{2} Y \cot \frac{1}{2} \alpha.$$

$$SB = \frac{1}{2} Y.$$

(215b)

Es hat nun keine Schwierigkeit, den Berührungspunkt  $P$  und die Ordinatenaxe  $SB$  abzustecken. Die Ordinaten für bestimmte Abscissenwerthe, z. B. 2, 4, 6 etc.  $m$ , ergeben sich durch Einsetzen dieser Werthe in die Gleichung  $y^2 = 2 r x$ .

c. Uebergangskurve.

In Eisenbahnkurven wird die äussere Schiene um einen bestimmten Betrag\*) höher gelegt, als die innere Schiene, um die Wirkung der Schwungkraft aufzuheben. Die Schwungkraft kommt im Anfangspunkte der Kreiskurve sofort zur vollen Wirkung, es muss daher auch die Ueberhöhung der äusseren Schiene schon im Anfangspunkte des Kreisbogens ihre volle Höhe besitzen. Gleichwohl darf der Uebergang auf die höhere Schiene kein plötzlicher sein. Wollte man nun vor Beginn der Kreiskurve, im letzten Theile der noch gradlinigen Strecke, der äusseren Schiene schon eine allmälige Steigung geben, so würde auf dieser gradlinigen Uebergangsstrecke ein ähnlicher Nachtheil geschaffen, wie der, welcher in der Kurve durch die Schienenüberhöhung beseitigt werden soll, nämlich Störung des Gleichgewichts. Der Uebergang muss daher durch eine Kurve bewirkt werden, deren Krümmungsradius im Anfangspunkte, wo die Ueberhöhung beginnt,  $= \infty$  ist, und proportional der zunehmenden Ueberhöhung abnimmt, bis er im Endpunkte der Uebergangskurve, d. i. im Berührungspunkte derselben, mit der nun beginnenden Hauptkurve, (Kreisbogen), dem Radius  $r$  der letzteren gleich wird. Soll die Aufsteigung der Schiene eine gleichmässige sein, so muss auch die Abnahme des Krümmungsradius gleichmässig erfolgen, d. h. die Krümmungsradien in beliebigen Punkten der Uebergangskurve müssen sich umgekehrt wie die Ueberhöhungen in diesen Punkten verhalten, denn je kleiner der Radius, um so grösser muss die Ueberhöhung sein, wenn der Gleichgewichtszustand erhalten bleiben soll, und umgekehrt. Bezeichnen nun  $r$  den Radius der Hauptkurve, also auch den der Uebergangskurve in ihrem Endpunkte E,  $S$  die Länge der Uebergangskurve,  $H$  die Ueberhöhung in E,  $\rho$  den Krümmungsradius der Uebergangskurve in einem beliebig angenommenen Punkte P,  $h$  die Ueberhöhung in P,  $s$  die Entfernung des Punktes P vom Anfangspunkte A der Uebergangskurve, so muss also die Proportion stattfinden:

$$h : H = r : \rho$$

\*) 1) Ist  $v$  die Tangentialgeschwindigkeit des fahrenden Wagens,  $b$  die Spurbreite,  $p$  das Gewicht des Wagens, so ist, wie wir sogleich zeigen werden, (Absatz 2 dieser Anmerkungen), die Centrifugalkraft  $K = \frac{v^2}{r} \cdot \frac{p}{g}$ . Die infolge der Schienenüberhöhung  $H$  der Schwungkraft entgegenwirkende Kraft ist, (vergl. Absatz 3 dieser Bemerkungen), — wenn  $\alpha$  die Neigung der die Oberkante der Schienen in der Richtung des Radius verbindenden Graden bezeichnet,  $Q = p \tan \alpha = p \frac{H}{b}$ . Da  $Q = K$  sein soll, so folgt hieraus für die Ueberhöhung:  $H = \frac{b v^2}{r g}$ .

2) Ist, Fig. 113,  $v$  die Geschwindigkeit des Wagens, d. h. der in einer Sekunde zurückgelegte Weg, so stellt die Strecke  $a$  den Weg dar, welchen die Centripetalkraft  $K$  den Wagen in einer Sekunde zurücklegen lässt. Der Weg, den ein frei fallender Körper infolge der Schwere  $p$  in einer Sekunde zurücklegt, ist bekanntlich  $= \frac{1}{2} g$ . Da der  $p$  in einer Sekunde zurückgelegte Weg der bewegenden Kraft proportional ist, so ist also  $k : p = a : \frac{1}{2} g$ , also  $k = \frac{2 a p}{g}$ . Nach bekanntem Satze der Planimetrie ist aber  $a(a + 2r) = v^2$ , also  $a = \frac{v^2}{a + 2r}$ . Da  $a$  im Verhältniss zu  $r$  sehr klein ist, so kann man diese kleine Grösse im Nenner des Bruchs  $\frac{v^2}{a + 2r}$  vernachlässigen, und erhält  $a = \frac{v^2}{2r}$ , also  $K = \frac{v^2}{r} \cdot \frac{p}{g}$ .

3) Zerlegt man, Fig. 114, die den Wagen in verticaler Richtung herabtreibende Kraft  $AB = p$  nach dem Gesetze des Kräfteparallelogramms in zwei Componenten,  $AC$  und  $AD$ , von welchen  $AC$  senkrecht zur Verbindungslinie der Schienenoberkanten gerichtet ist, also durch den Widerstand der Schienen aufgehoben wird, während  $AD$  in der Richtung der Horizontalen dem Drucke gegen die äussere Schiene, d. i. der Schwungkraft  $K$ , entgegenwirkt, so findet man ohne Weiteres aus der Figur:  $AD = p \tan \alpha$ .

und, da die Aufsteigung der Schiene eine gleichmässige sein soll:

$$h : H = s : S.$$

Da die Kurve eine sehr flache ist, so können wir statt der Längen  $s$  und  $S$  ohne Fehler die Abscissen der Punkte  $P$  und  $E$  setzen, bezogen auf die an die Kurve im Anfangspunkt  $A$  gelegte Tangente, mit  $A$  als Coordinatennullpunkt. Sind  $a$  und  $x$  bezüglich die Abscissen der Punkte  $E$  und  $P$ , so lautet demnach die letztere Proportion

$$\begin{aligned} x : a &= r : \rho \\ \rho &= \frac{a r}{x}. \end{aligned} \quad (216)$$

Wir haben nun im Theil I, § 44, 2) Beispiel, eine Kurve kennen gelernt, deren Krümmungsradius für  $x=0$  unendlich ist und mit wachsendem  $x$  abnimmt. Schreiben wir die Gleichung derselben in der Form

$$\begin{aligned} \text{so ist} \quad & y = \frac{x^3}{c} \\ & \frac{d y}{d x} = \frac{3 x^2}{c} \\ \text{und} \quad & \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{6 x}{c} \end{aligned} \quad (216a)$$

Ist hierin  $c$  gegen  $x$  sehr gross, so wird die quadrirte Abgeleitete  $\left(\frac{d y}{d x}\right)^2 = \frac{9 x^2}{c^2}$  ein sehr kleiner Bruch, den wir in der Gleichung für den Krümmungsradius (60):

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d x^2}}$$

ohne grossen Fehler vernachlässigen können, so dass dieselbe lautet:

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2 y}{d x^2}} = \frac{1}{\frac{6 x}{c}} = \frac{c}{6 x}. \quad (217)$$

Setzen wir hierin für  $\rho$  unseren Werth aus (216), so finden wir die Constante  $c$  unserer Kurvengleichung:

$$c = 6 a r. \quad (217a)$$

Aus Gl. (217) ersehen wir, dass die Werthe  $\rho$  und  $x$  zu einander im umgekehrten Verhältniss stehen. Setzen wir nun noch in dieser Gleichung  $x = a$ , und für  $c$  den Werth aus (217a), so erhalten wir  $\rho = r$ . Die Gleichung  $y = \frac{x^3}{6 a r}$  stellt also eine Kurve dar, welche die oben geforderten Eigenschaften einer Uebergangskurve besitzt.

Wie gross man die Länge  $a$  dieser Kurve annehmen will, ist ziemlich willkürlich. Bei Radien über 600 m pflegt man  $a = 20$  m anzunehmen. Bei kleineren Radien, welche eine grössere Schienenüberhöhung erfordern, nimmt man  $a$  dem Radius umgekehrt proportional, also  $a = \frac{k}{r}$ , worin  $k$  eine Constante, (in der Regel 12000 m), bezeichnet.

Zur Absteckung der Kurve bedarf es noch der Kenntniss weiterer Eigenschaften derselben. Zieht man, Fig. 115, in  $E$  an dieselbe eine Tangente,  $ED$ , so

ist die trigonometrische Tangente des Winkels  $\tau$  gleich dem Differentialquotienten der Kurvengleichung, in welcher für den Punkt E  $x = a$ ,  $y = b$ , zu setzen ist, also nach (216)

$$\text{tang } \tau = \frac{db}{da} = \frac{3a^2}{6ar} = \frac{a}{2r} \quad (218)$$

mithin die Subtangente BD:

$$BD = \frac{2br}{a},$$

oder, da nach der Kurvengleichung

$$b = \frac{a^3}{6ar} = \frac{a^2}{6r} \quad (219)$$

$$BD = \frac{1}{3} a. \quad (220)$$

Zieht man  $EM = r \perp ED$ , schlägt um M den Kreisbogen EF, zieht  $FG \parallel AB$ , so hat man, da ED gleichzeitig Tangente an den Kreis um M, also, wie sofort erhellt,  $\angle EMC = \tau$  ist

$$BC = EH = r \sin \tau. \quad (221)$$

Da  $\tau$  ein sehr kleiner Winkel ist, (denn  $\text{tang } \tau = \frac{a}{2r}$ , (218)), so kann man ohne Fehler  $\sin \tau = \text{tang } \tau = \frac{a}{2r}$  setzen, und erhält, wenn man  $BC = a'$  setzt, nach (221)

$$a' = r \frac{a}{2r} = \frac{a}{2} \quad (222)$$

d. h. die Abscisse  $a$  wird durch das Loth  $MC$  halbirt. — Ferner ist

$$EG = b' = r - MH$$

$$b' = r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}$$

oder, wenn man die Wurzel zieht:

$$b' = r - r + \frac{a^2}{8r} \dots$$

alle folgenden sehr kleinen Glieder können wir vernachlässigen. Es ist also

$$b' = \frac{a^2}{8r}$$

also nach (219)

$$b' = \frac{3}{4} b \quad (223)$$

folglich  $FC = b - b'$ :

$$FC = \frac{1}{4} b = \frac{a^2}{24r}. \quad (224)$$

**Absteckung.** Fig. 118. Man berechnet  $FC$  nach (224), ferner den Halbierungspunkt  $C$  der Länge  $a$  aus der Gleichung  $TC = (r + FC) \cot \frac{1}{2} a$ , sodann den Punkt  $A$  aus  $TA = TC + \frac{1}{2} a$ . Man hat nun den Coordinaten-Nullpunkt  $A$  und findet eine beliebige Anzahl Punkte der Kurve, wenn man in die Gleichung derselben für  $x$  der Reihe nach verschiedene Werthe einsetzt und die zugehörigen Werthe  $y$  berechnet. Endlich findet man aus der Scheitelgleichung des in  $E$  an die Kurve sich anschliessenden Kreises die Coordinaten für eine Reihe von Punkten der Hauptkurve, bezogen auf die Tangente  $FG$  dieser letzteren Kurve. Um diese Coordinaten auf die Abscissenaxe  $AF$  mit  $A$  als Nullpunkt umzuformen, sind den Abscissen der Kreispunkte je die Constante  $\frac{1}{2} a$ , den Ordinaten die Constante  $\frac{1}{4} b$  hinzuzufügen. Somit sind alle Elemente, welche zur Absteckung der Kurve von der Abscissenaxe  $AT$  aus nöthig sind, ermittelt.

d. Vermittlung des Gefällwechsels.

Bei Eisenbahnen ist auch der Uebergang von geringerem Gefälle in ein stärkeres durch eine Kurve zu vermitteln. Die Neigung einer Strecke gegen die Horizontale wird durch das Verhältniss des Höhenunterschiedes  $h$  zweier Punkte dieser Strecke zu deren Horizontalentfernung  $l$ , also durch den Bruch  $\frac{h}{l}$  ausgedrückt, d. i. durch die trigonometrische Tangente der Neigung gegen den Horizont. Diese Neigungen sind bei Eisenbahnen, da hier starkes Gefälle nicht statthaft, sehr kleine Winkel, so dass der Bruch  $\frac{h}{l}$ , ohne dass dadurch ein für die Praxis unzulässiger Fehler begangen würde, als analytisches Mass der Neigung gegen die Horizontale betrachtet werden kann.

In Fig. 116 ist in der Strecke  $A C B$  bei  $C$  ein Uebergang von schwächerem in stärkeres Gefälle. Soll dieser durch eine Kurve mit dem Radius  $R$ , (gewöhnlich = 10000), vermittelt werden, so kann man die Länge dieser Kurve ohne Fehler gleich der Summe der Tangenten  $a C + b C$  setzen. Der Centriwinkel  $M$  ist also in analytischem Masse

$$1) M = \frac{2 \times \text{Tangente}}{R}$$

Es ist aber auch

$$M = \angle B C D = B C H' - D C H' \\ = \angle B C H' - A C H$$

also in analytischem Masse, wenn  $\frac{1}{l_1}$  und  $\frac{1}{l_2}$  bezüglich das relative Gefälle der Strecken  $A C$  und  $B C$  bezeichnen:

$$2) M = \frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1}$$

Aus 1) und 2) folgt die Länge der Tangente

$$\text{Tang.} = \frac{R}{2} \left( \frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1} \right)$$

Bezüglich des Weiteren kann auf die bisherigen Erörterungen dieses Paragraphen verwiesen werden.

Die Absteckung der in verticaler Ebene liegenden Kurve erfolgt mit Hilfe des Nivellir-Instruments.

## J. Nivellements.

### Trigonometrisches Höhenmessen.

## Theil III.

### Vertical-Messungen.

### Refraction.

Faint, illegible text at the top of the page, possibly bleed-through from the reverse side.

Faint, illegible text in the middle section of the page.

# Teil III Vertical-Messungen

Faint, illegible text in the lower middle section of the page.

Faint, illegible text at the bottom of the page.

# I. Nivellements.

## § 1.

### Trigonometrisches Höhenmessen.

Aufgabe des Nivellements ist die Ermittlung des Höhenunterschiedes zwischen zwei oder mehreren Punkten, d. h., — die Erde als Kugel betrachtet —, der Differenz ihrer Entfernungen vom Meeresniveau.

Ist  $s$  die Horizontalentfernung zweier Punkte A und B,  $h$  der Höhenunterschied derselben, und  $\alpha$  der in A gemessene Elevationswinkel, so ist, wenn die Entfernung  $s$  so gering ist, dass man den Erdbogen  $s$  als mit dem scheinbaren Horizonte zusammenfallend ansehen kann, —

$$h = s \operatorname{tang} \alpha. \quad (225)$$

Indessen darf die Krümmung der Erdoberfläche schon bei einer Entfernung von nur wenigen hundert Metern nicht mehr vernachlässigt werden. Ist in Fig. 119 A E der scheinbare Horizont des Punktes A, so kann  $\triangle A E B$  selbst bei grossen Entfernungen noch ohne Einfluss auf das Resultat als rechtwinklig angesehen werden, auch kann man die Länge A E ohne Fehler  $= s$  setzen, und erhält

$$h = D E + s \operatorname{tang} \alpha. *)$$

Hierin bedeutet D E die Correktion wegen der Erdkrümmung. Bezeichnen wir dieselbe mit  $c$ , den Erdradius mit  $r$ , so ist  $A E^2 = (2 r + c) c$ , oder ohne merklichen Fehler  $s^2 = 2 r c$ , \*\*) also:

$$c = \frac{s^2}{2 r}. \quad (226)$$

Ausser der Correktion wegen der Erdkrümmung bedarf es noch einer zweiten Correktion, der Correktion wegen der Strahlenbrechung. Da nämlich der Lichtstrahl B A, Fig. 120, von B ausgehend, in immer dichtere Luftschichten gelangt, so wird derselbe infolge der Refraktion nicht eine grade Linie, sondern eine Kurve durchlaufen. Ist A F die in A an diese Kurve gezogene Tangente, so wird dem Beobachter in A der Punkt B in B' zu liegen scheinen. Der Elevationswinkel  $\alpha$  wird daher durch die Messung zu gross gefunden werden, und ist um einen Betrag  $\varrho$  zu verbessern, worüber im folgenden § die Rede sein wird.

## § 2.

### Refraktion.

Lassen wir die Bezeichnung der Fig. 120 gelten, so ist, unter der Voraussetzung, dass die Lichtkurve A B ein Kreisbogen sei,

$$\varrho = \frac{1}{2} M,$$

\*) Oder auch  $h = s \operatorname{tang} (\alpha + \frac{1}{2} C)$ , worin  $C' = \frac{s}{r} \varrho'$ .

\*\*) Vergl. Absatz 2 der Anmerkung auf Seite 129.

oder wenn wir als Winkelmaß das Verhältniss des Bogens zum Radius einführen

$$\varrho = \frac{A B}{R}$$

Dagegen ist der Winkel C

$$C = \frac{s}{r}$$

oder ohne merklichen Fehler

$$C = \frac{A B}{r}$$

$$A B = r C$$

mithin

$$\varrho = \frac{r}{2 R} C.$$

oder wenn man  $\frac{r}{2 R} = k$  setzt:

$$\varrho = k C.$$

Hierin ist C in Sekunden

$$C'' = \frac{s}{r} \varrho''.$$

(227)

Die Gleichung (225) wird nun, bei Berücksichtigung der Erdkrümmung und Refraktion lauten

$$h = s \operatorname{tang} (\alpha - \varrho) + c.$$

Wäre hierin h durch ein Nivellement bekannt, so liesse sich die Refraktion  $\varrho$  berechnen und demnach der Coefficient k in (227) aus der Gleichung  $k = \frac{\varrho}{C}$  finden.

Messungen dieser Art sind von verschiedenen Forschern ausgeführt, haben aber für k schwankende Resultate ergeben. Danach bewegt sich k zwischen den Werthen 0,06 bis 0,10. Bei kleinen Entfernungen ist eine kleine Ungenauigkeit des Coefficienten k ohne Belang, und kann für k ein Mittelwerth, etwa  $k = 0,08$  gesetzt werden.

Die Schwankungen von k erklären sich durch die Veränderlichkeit der Dichtigkeit der Luft, und hat man in neuerer Zeit sich bemüht, dieselbe gebührend in Rechnung zu ziehen. Wir können indessen in diesem Buche keine der neueren Formeln zur Darstellung bringen, und wollen uns damit begnügen, eine ältere Formel von Grunert, (Grunert, Mathematik und Physik), wiederzugeben, welche zwar keineswegs Alles hier in Betracht kommende erschöpft, immerhin aber doch schon einen Schritt weiter geht, als die in der Praxis auch heute meist noch benutzte Formel (227) mit constantem Coefficienten.

Die Krümmung der Lichtkurve ist, wie schon erwähnt, abhängig von der Dichtigkeit der Luft und ist dieser proportional. Demnach ist der Krümmungsradius R der Luftdichtigkeit **umgekehrt** — (Thl. I, § 44), der Bruch  $\frac{r}{2 R} = k$  derselben also wieder **direkt** proportional. Nach dem mariotteschen Gesetze ist nun die Dichtigkeit der Luft proportional dem auf der betreffenden Luftschicht lastenden Drucke, d. i. dem beobachteten Barometerstande. Bezeichnet daher k den bei mittlerem Barometerstand 760 mm gültigen Coefficienten,  $k_1$  den Coefficienten für den Barometerstand b, so ist  $k : k_1 = 760 : b$ , also

$$k_1 = k \frac{b}{760}.$$

Die Dichtigkeit der Luft ist nun weiter abhängig von ihrer Temperatur. Da sich die Luft bei steigender Temperatur ausdehnt, so wird ihre Dichtigkeit abnehmen. Die Ausdehnung der Luft beträgt für  $1^{\circ}\text{C}$   $\frac{1}{273}$  ihres Volumens. Ist demnach die Dichtigkeit für die Temperatur  $0^{\circ} = 1$ , so ist dieselbe, da sie dem Volumen umgekehrt proportional ist, für die Temperatur  $t^{\circ}$  gleich  $\frac{1}{1 + \frac{t}{273}} = \frac{1}{1 + 0,0037 t}$ . Be-

zeichnet demnach  $k$  den Refraktionscoefficienten für die Temperatur  $0^{\circ}$ ,  $k_1$  für die Temperatur  $t$ , so ist  $k : k_1 = 1 : \frac{1}{(1 + 0,0037 t)}$ , also

$$k_1 = \frac{k}{1 + 0,0037 t}$$

Wir erhalten demnach die Refraktion für den Barometerstand  $b$  und die Temperatur  $t$ :

$$e = k \frac{b}{760 (1 + 0,0037 t)} \cdot C^* \quad (228)$$

Hierin ist  $k = 0,08$  zu setzen. Dies die Formel nach Grunert. Für die Rechnung etwas bequemer kann man dieselbe gestalten, indem man mit 273 erweitert, nämlich  $\frac{0,08 \times 273}{760} = 0,03$ , und  $(1 + 0,0037 t) 273 = 273 + t$ , also:

$$e = \frac{0,03 b}{273 + t} \cdot C \quad (229)$$

Setzen wir, Fig. 118, die Correktion der Höhe  $h$ , d. i.  $BB' = c'$ , so ist, wenn  $e$  und  $c$  durch das Verhältniss der Bögen zu den Radien ausgedrückt werden:  $e = \frac{c'}{s}$

und  $C = \frac{s}{r}$ , also nach (229)

$$\begin{aligned} \frac{c'}{s} &= \frac{0,03 b}{273 + t} \cdot \frac{s}{r} \\ c' &= \frac{0,03 b}{273 + t} \cdot \frac{s^2}{r} \end{aligned} \quad (230)$$

Um den Betrag  $c'$  wird die beobachtete Höhe  $h$  zu gross gefunden,  $c'$  ist der Höhe  $h$  also in **negativem** Sinne hinzuzufügen.

Man kann die Gleichung (230), wenn wir  $\frac{0,03 b}{273 + t} = k$  setzen, (wo nun also  $k$  keine Constante, sondern eine nach der Temperatur und Barometerstand schwankende Grösse darstellt), auch schreiben:

$$c' = 2k \frac{s^2}{2r}$$

und erhält so die Höhe  $h$  nach (225), (226) und (231)

$$h = s \operatorname{tang} \alpha + \frac{s^2}{2r} (1 - 2k) \quad (232)$$

\*) Von noch grösserem Einfluss auf die Refraktion, als der Luftdruck und die Temperatur, ist die **Aenderung** der Temperatur mit der Höhe, wie neuere Untersuchungen dargethan haben. Hieraus erklären sich die täglichen Schwankungen der Refraktion, ihre Abnahme des Vormittags und Zunahme des Nachmittags, da bei stark erwärmtem Erdboden die Abnahme der Temperatur nach der Höhe eine stärkere sein wird, als bei kaltem Boden. Bei starker Erhitzung des Bodens kann die Refraktion ganz aufhören, ja ins Negative übergehen, (Luftspiegelung!), denn hier ist die Luftdichtigkeit in den **unteren**, erheblich wärmeren Schichten die geringere.

Ist  $s$  in der Höhe des Meeresspiegels gemessen, so ist die Länge  $s$  auf die Höhe  $\frac{H+H'}{2}$  zu reduciren, wenn  $H$  und  $H'$  die Meereshöhen der Punkte  $B$  und  $A$  bezeichnen. Bezeichnet  $a$  die reducirte Entfernung, so ist offenbar

$$s : r = a : \left( r + \frac{H+H'}{2} \right)$$

$$a = s \left( 1 + \frac{H+H'}{2r} \right)$$

also

$$a \operatorname{tang} \alpha = s \operatorname{tang} \alpha \left( 1 + \frac{H+H'}{2r} \right)$$

oder genau genug

$$a \operatorname{tang} \alpha = h \left( 1 + \frac{H+H'}{2r} \right)$$

$$= (H-H') \left( 1 + \frac{H+H'}{2r} \right)$$

$$= H-H' + \frac{H^2-H'^2}{2r}$$

$$= s \operatorname{tang} \alpha + \frac{H^2-H'^2}{r^2}.$$

(233)

Setzen wir also in (232)  $a$  für  $s$ , und für  $a \operatorname{tang} \alpha$  den Werth aus (233), so erhalten wir

$$h = s \operatorname{tang} \alpha + \frac{H^2-H'^2}{2r} + \frac{s^2}{2r} (1-2k). \quad (234)$$

Hierin brauchen die Meereshöhen  $H$  und  $H'$  nur ganz roh bekannt zu sein, etwa aus Barometerbeobachtungen. Bei nicht allzugrossen Höhendifferenzen kann der Bruch  $\frac{H^2-H'^2}{2r}$  ganz vernachlässigt werden.

Der so gefundene Höhenunterschied ist noch um die Höhe des anvisirten Signals und um die Instrumentenhöhe zu verbessern, wozu es keiner Anleitung bedarf.

Sind **gleichzeitig** in  $A$  die Elevation  $\alpha$  und in  $B$  die Depression  $-\alpha'$  beobachtet, so ist  $\alpha$  um den Refraktionswinkel zu gross,  $\alpha'$  um denselben Winkel zu klein gefunden\*). Man hat dann, ohne sich um die Refraktion und Erdkrümmung weiter zu kümmern, den Werth  $\frac{\alpha+\alpha'}{2}$  in Formel (125) für  $\alpha$  einzuführen, wie leicht verständlich.

### § 3.

#### Trigonometrisch-nivellitisches Netz.

Vom trigonometrischen Nivelliren macht man vorzugsweise Gebrauch, um bei ausgedehnten Flächennivellements eine Anzahl von Punkten ihrer Höhe nach zu bestimmen, um daran später die Nivellementszüge zweiter Ordnung, — barometrische Nivellements, (vergl. § 6), — oder Tachymeteraufnahmen\*\*) anschliessen zu können. Man legt über die aufzunehmende Fläche ein Dreiecksnetz, misst dessen Horizontal- und Elevations- bzw. Depressionswinkel, sowie eine Basis, von welcher ausgehend man die Längen  $s$  der Dreiecksseiten nach und nach berechnet. Die Berechnung der Höhen kann dann nach folgendem Beispiel erfolgen. Sei  $H_A$  die Höhe des Punktes  $A$ , Fig. 121,  $\triangle h_A^d$ ,  $\triangle h_d^E$  etc. die Höhenunterschiede der Punkte  $A$  und  $D$ ,  $d$  und  $E$ , etc., so findet man die Höhe des Punktes  $E$

$$H_{E_1} = H_A + \triangle h_A^d + \triangle h_d^E$$

oder auch

$$H_{E_2} = H_A + \triangle h_A^a + \triangle h_a^b + \triangle h_b^E$$

oder

$$H_{E_3} = H_A + \triangle h_A^e + \triangle h_e^f + \triangle h_f^E.$$

\*) Streng genommen sind die Refraktionen auch bei gleichzeitiger Beobachtung auf beiden Stationen nicht gleich, da die Refraktion mit der Höhe abnimmt.

\*\*) Vergl. § 8.

Die drei von einander etwas abweichenden Werthe werden gemittelt, wobei den Werthen  $H_{E_1}$ ,  $H_{E_2}$ ,  $H_{E_3}$  die Gewichte  $\frac{1}{s_1}$ ,  $\frac{1}{s_2}$ ,  $\frac{1}{s_3}$  beizulegen, worin  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  die Längen der Züge A d E, A a b E und A e f E bezeichnen. Hat man so die Höhe  $H_E$  gefunden, so findet man

$$\begin{aligned} H_{d_1} &= H_A + \Delta h_A^d \\ H_{d_2} &= H_E + \Delta h_E^d \\ H_{d_3} &= H_A + \Delta h_A^a + \Delta h_a^d \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

woraus wiederum das Mittel zu bilden ist. In dieser Weise fährt man fort, bis das ganze Netz berechnet ist.

Wo es auf weniger genaue Bestimmung ankommt, kann man ganz wie bei Polygonberechnungen verfahren. Danach wird man beispielsweise die Höhen der in einem Zuge liegenden Punkte A, e, f wie folgt finden:

Es muss sein

$$\Delta h_A^e + \Delta h_e^f + \Delta h_f^e = H_E - H_A.$$

Den gegen diesen Sollbetrag sich ergebenden Widerspruch  $f$  wird man nach Verhältniss der Strecken A e, e f, f E auf die einzelnen Höhenunterschiede  $\Delta h$  vertheilen, und schliesslich die so verbesserten Höhenunterschiede successive addiren, denn es ist

$$\begin{aligned} H_e &= H_A + \Delta h_A^e \\ H_f &= H_e + \Delta e^f = H_A + \Delta h_A^e + \Delta e^f \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Bei grosser Ausdehnung des Netzes empfiehlt es sich, um dasselbe einen Nivellementszug zu legen, welcher mit dem Nivellirinstrumente zu nivelliren ist, z. B. den Zug A a b E C i h g, bezw. das Netz noch mit mehreren solchen Zügen quer zu durchschneiden. An die so mit grosser Genauigkeit bestimmten Punkte werden sodann die trigonometrischen Nivellementszüge in der oben erörterten Weise angeschlossen.

Die Längen der Dreiecksseiten des Netzes nimmt man nicht gern über 1000 m, denn es gilt bezüglich der Genauigkeit der einzelnen Züge Aehnliches, wie bezüglich der Genauigkeit von Bussolenzügen, vergl. § 45. Wie dort die Neigungen gegen den magnetischen Meridian, so werden hier die Neigungen gegen die Horizontale, d. i. die Elevationen und Depressionen **direkt** beobachtet, jede Elevation wird unabhängig von der Elevation der vorhergehenden Strecke gefunden.

#### § 4.

### Barometrisches Höhenmessen.

Denken wir uns eine Luftsäule von der Höhe  $h$  in  $h$  gleiche Theile zerlegt, Fig. 122, so ist die Dichtigkeit der einzelnen Luftschichten proportional dem auf denselben lastenden Druck, also proportional den in den einzelnen Schichten beobachteten Barometerständen. Das Gewicht der einzelnen Luftschichten ist der Dichtigkeit derselben proportional, mithin ist, wenn  $p_1$ ,  $p_2$  etc. die Gewichte der einzelnen Schichten,  $b_1$ ,  $b_2$  etc. die in denselben beobachteten Barometerhöhen bezeichnen:

$$p_1 : p_2 : p_3 \dots = b_1 : b_2 : b_3 \dots$$

Die Gewichte  $p$  werden gemessen durch die Differenz der an der Grundfläche und Oberfläche der einzelnen Schichten beobachteten Barometerhöhen. Es ergibt sich demnach

$$(b_0 - b_1) : b_1 = (b_1 - b_2) : b_2 \dots = \dots (b_{h-1} - b_h) : b_h$$

oder

$$b_0 : b_1 = b_1 : b_2 = b_2 : b_3 \dots = b_{h-1} : b_h$$

also

$$\log b_0 - \log b_1 = \log_{b_1} - \log_{b_2} = \dots = \log_b b_{h-1} - \log b_h$$

d. h. die Logarithmen der beobachteten Barometerhöhen bilden eine arithmetische Reihe, wenn die Höhen, in welchen die Beobachtungen vorgenommen wurden, eine arithmetische Reihe bilden. Sind diese Höhen  $h_1, h_2, h_3, \dots$  und setzt man die Differenz der Reihe  $h_2 - h_1 = h_3 - h_2 \text{ etc.} = \Delta h$ , die Differenz der Reihe  $\log b_0, \log b_1,$

$\log b_2 \dots = \Delta \log b$ , das Verhältniss  $\frac{\Delta h}{\Delta \log b} = k$ , also  $\Delta h = k \Delta \log b$ , so ist,

wenn  $h$  und  $h_n$  irgend zwei Glieder der Reihe  $h_1, h_2, h_3, \dots$ ,  $\log b$  und  $\log b_n$  zwei entsprechende Glieder der Reihe  $\log b_0, \log b_1 \dots$  bezeichnen:

$$h - h_n = k (\log b - \log b_n) \tag{235}$$

d. h. man findet den Höhenunterschied zweier Punkte, wenn man die Differenz der Logarithmen der in den beiden Punkten beobachteten Barometerhöhen mit dem noch näher zu bestimmenden Coefficienten  $k$  multiplicirt.

Dieser Coefficient ist, (abgesehen von der Basis des Logarithmensystems), abhängig von der Dichtigkeit der Luft, von ihrem Gewicht pr. Raumeinheit. Die Formel (235) erleidet daher, da die Dichtigkeit der Luft durch verschiedene Verhältnisse beeinflusst wird, noch einige, diesen Verhältnissen Rechnung tragende Correctionen:

**1) Temperaturcorrection:** Die Dichtigkeit der Luft, also auch ihr spezifisches Gewicht, ist abhängig von der Temperatur. Die Luft wird, da bei steigender Temperatur Ausdehnung eintritt, bei zunehmender Temperatur an spezifischem Gewicht verlieren, mithin wird auch die Differenz der in der oberen und unteren Station beobachteten Barometerhöhen abnehmen. — Beobachtet man bei einer Temperatur von  $0^\circ \text{C}$ . in zwei Punkten mit dem Höhenunterschiede  $\Delta h$  die Barometerhöhen  $b$  und  $b'$ , so ist die Differenz  $b - b'$  ein Mass für das Gewicht der auf dem Quecksilber lastenden Luftsäule von der Höhe  $\Delta h$ . Diese Luftsäule wird, da der Ausdehnungscoefficient für  $1^\circ \text{C} = 0,0037$  ist, unter gleichbleibendem Druck bei einer Temperatur  $t$  die Höhe  $\Delta h (1 + 0,0037 t)$  annehmen müssen, wenn ihr Gewicht ungeändert bleiben soll. Dieselbe Barometerdifferenz, welche bei der Temperatur  $0^\circ$  eine Höhendifferenz  $\Delta h$  anzeigt, wird also bei der Temperatur  $t$  eine Höhendifferenz  $\Delta h (1 + 0,0037 t)$  anzeigen. Die Differenz  $\Delta h$  der arithmetischen Reihe  $h_1, h_2, h_3 \dots$  geht also, wenn die in den verschiedenen Höhen  $h$  abgelesenen Barometerstände  $b$  unverändert bleiben sollen, über in  $\Delta h (1 + 0,0037 t)$ . Ist also  $k = \frac{\Delta h}{\Delta \log b}$  für die Temperatur  $0^\circ$  bekannt, so lautet dieser Coefficient für die Temperatur  $t$

$$k_t = \frac{\Delta h (1 + 0,0037 t)}{\Delta \log b} = k (1 + 0,0037 t).$$

Der Coefficient wächst also proportional mit der Temperatur.

Da das spezifische Gewicht der Luft der Temperatur umgekehrt proportional ist, so folgt hieraus der Satz:

Der Coefficient  $k$  ist dem Gewichte der Luft umgekehrt proportional.

Die Temperatur der Luft nimmt mit zunehmender Höhe ab. Da man das Gesetz dieser Abnahme noch nicht kennt<sup>\*)</sup>, so ist man darauf angewiesen, das arithmetische Mittel der auf der oberen und unteren Station beobachteten Temperaturen als Durchschnittstemperatur der Luftsäule anzusehen. Bezeichnet  $t$  die Temperatur der unteren,  $t'$  die der oberen Station, so lautet also der Coefficient:  $k \left( 1 + 0,0037 \frac{t+t'}{2} \right)$ .

**2) Höhengcorrection:** Die Schwere nimmt bekanntlich im Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde ab. Ist die Schwere in der Meereshöhe gleich 1, so ist dieselbe also in der Höhe  $H = \frac{r^2}{(r+H)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{H}{r}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{2H}{r} + \frac{H^2}{r^2}}$ ,

worin  $r$  den Erdradius bezeichnet. Vernachlässigt man den sehr kleinen Bruch  $\frac{H^2}{r^2}$ , so erhält man die Schwere in der Höhe  $H = \frac{1}{1 + \frac{2H}{r}}$ . Die Aenderung des Ge-

wichts der Luft ist der Aenderung der Schwere proportional, die Aenderung des Coefficienten  $k$  also derselben umgekehrt proportional. Der für die Höhe des Meeresspiegels gültige Coefficient  $k$  ist daher für die Meereshöhe  $H$  zu multipliciren mit  $\left(1 + \frac{2H}{r}\right)$ . Hierin ist für  $H$  das arithmetische Mittel der Meereshöhen der oberen und unteren Station zu setzen. Man findet die Meereshöhe eines Ortes genau genug nach Gl. (235), wenn man für  $b$  den mittleren Barometerstand für den Meeresspiegel, d. i. 760 mm, für  $b_n$  den mittleren Barometerstand der Beobachtungsstation einsetzt.

**3) Breiten correction.** Wird die Schwere in der Breite  $45^\circ = 1$  gesetzt, so ist dieselbe in der Breite  $\varphi = 1 - 0,0027 \cos \varphi^{**})$ . Der Barometercoefficient ist also zu multipliciren mit  $(1 + 0,0027 \cos \varphi)$ .

<sup>\*)</sup> Beiläufig beträgt die Abnahme der Temperatur  $1^\circ \text{C}$  pr. 200 m Höhe.

<sup>\*\*)</sup> Der Schwere wirkt infolge der Axendrehung der Erde die Schwingkraft entgegen. Ist diese am Aequator  $= s$ , so ist dieselbe in der Breite  $\varphi = s \cos \varphi$ , (da nämlich der Radius des Parallels in der Breite  $\varphi = r \cos \varphi$ ). Die Kraft  $s \cos \varphi$  wirkt aber in der Ebene des Parallels, arbeitet also nicht in vollem Umfange der nach dem Mittelpunkte der Erde gerichteten Schwerkraft entgegen. Zerlegt man die Kraft  $a b$ , Fig. 117, nach dem Gesetze des Kräfteparallelogramms in zwei Componenten, deren eine,  $a c$ , der Schwere direkt entgegenarbeitet, so ist  $a c = a b \cos \varphi = s \cos^2 \varphi$ . Es ist nun

$$\begin{aligned} \cos 2 \varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \\ &= \cos^2 \varphi - (1 - \cos^2 \varphi) \\ \cos 2 \varphi &= 2 \cos^2 \varphi - 1 \\ \cos^2 \varphi &= \frac{\cos 2 \varphi + 1}{2} \end{aligned}$$

mithin die in der Breite  $\varphi$  der Schwerkraft entgegenwirkende Schwingkraft

$$a c = s \frac{\cos 2 \varphi + 1}{2}. \quad \text{a)}$$

Bezeichnet nun  $G$  die Schwere, wie sich dieselbe äussern würde, wenn die Schwingkraft nicht vorhanden wäre, so ist die um die Schwingkraft **verminderte** Schwere in der Breite  $\varphi$

$$\begin{aligned} g_\varphi &= G - s \frac{\cos 2 \varphi + 1}{2} \\ &= G - \frac{s}{2} \cos 2 \varphi - \frac{s}{2}. \quad \text{b)}$$

Setzen wir die Schwere in Breite  $45^\circ = 1$ , also, (da  $\cos 2 \times 45^\circ = 0$ )

$$g_{45} = G - \frac{s}{2} = 1$$

4) **Correktio n der Quecksilbersäule.** Wegen Abnahme der Schwere mit der Höhe wird der Barometerstand der oberen Station, in Vergleich zu dem der unteren Station, zu gross gefunden, weil das Gewicht des Quecksilbers in der oberen Station leichter ist, so dass eine höhere Quecksilbersäule durch die Atmosphäre getragen wird. Man hat daher die Barometerhöhe der unteren Station zu multipliciren mit  $\frac{(r + \Delta h)^2}{r^2} = \left(1 + \frac{\Delta h}{r}\right)^2$ , wo  $\Delta h$  den Höhenunterschied beider Stationen bezeichnet, d. h. man hat statt  $\log b$  zu setzen  $\log b + 2 \log \left(1 + \frac{\Delta h}{r}\right)$ .

Für Metallbarometer kommt diese Correktio n natürlich in Fortfall.

Nach Theil I, Gl. (38), ist nun  $d \log x = \frac{M dx}{x}$ , d. i.  $\log(x + dx) - \log x = \frac{M dx}{x}$ . Setzt man hierin  $x = r$ ,  $dx = \Delta h$ , so ergibt sich

$$\log \left(1 + \frac{\Delta h}{r}\right) = \frac{M \Delta h}{r}.$$

Man hat also statt  $\log b$  zu setzen:  $\log b + \frac{2 M \Delta h}{r}$ .

Den noch unbekannt en Höhenunterschied  $\Delta h$  erhält man hierin genau genug nach Formel (235).

5) **Feuchtigkeitscorrektio n.** Die Spannung des Wasserdampfes wird, wie die der Luft, ausgedrückt durch die Höhe der Quecksilbersäule, welche der Dampf zu tragen vermag. Das Gewicht des Wasserdampfes ist  $= \frac{5}{8}$  eines gleichen Volumens Luft von gleicher Spannung. Ist dagegen die Spannung des Wasserdampfes nur  $\frac{1}{n}$  der Luftspannung, so ist auch sein Gewicht nur  $\frac{5}{8n}$  des Gewichts eines gleichen Luftvolumens. Setzt man das Gewicht eines gewissen Luftvolumens von der Spannung  $b$  gleich  $P$ , so ist also das Gewicht eines gleichen Dampf- volumens von der Spannung  $\beta$ , wenn  $\beta = \frac{1}{n} b$ , also  $n = \frac{b}{\beta}$ :

$$p = \frac{5 \beta}{8 b} P.$$

so geht Gl. b) über in

$$g_q = 1 - \frac{s}{2} \cos 2q. \quad d)$$

Die Schwungkraft  $s$  ist am Aequator, (vergl. die Bemerkung auf Seite 141, Absatz 2)  $= \frac{v^2}{2r}$ , wenn  $v$  den Weg bezeichnet, den ein Punkt des Aequators infolge der Erdaxendrehung pr. Sekunde zurücklegt. In derselben Zeit legt ein fallender Körper am Aequator den Weg  $\frac{1}{2} g$  zurück, wo  $g$  die Beschleunigung der Schwere, also 9,8 m bezeichnet. Die Schwungkraft am Aequator ist also, da eine leichte Rechnung  $\frac{v^2}{2r} = 0,017$  m ergibt, gleich  $\frac{1}{289}$  der Schwerekraft, also wenn man diese = 1 setzt,  $s = 0,0034$ , mithin  $\frac{1}{2} s = 0,0017$ , daher nach d)

$$g_q = 1 - 0,0017 \cos 2q. \quad e)$$

Da aber ein Körper mit zunehmender Breite dem Mittelpunkte der Erde sich nähert, so nimmt die Schwere auch aus diesem Grunde mit der Breite zu, und ist daher der Coefficient 0,0017 in der Formel e) noch entsprechend zu vergrössern. Durch Pendelversuche hat sich derselbe = 0,0027 ergeben, so dass wir die Schwere in der Breite  $q$  erhalten

$$g_q = 1 - 0,0027 \cos 2q.$$

Hat man nun einen Raumtheil Wasserdampf von der Spannung  $\beta$  und einen gleichen Raumtheil Luft von der Spannung  $b$ , so ergeben beide Gase im Gemisch, in denselben Raum eingengt, die Spannung  $\beta + b$ , welche wir gleich  $B$  setzen wollen. Ist das Gewicht desselben Raumtheils **trockener** Luft von der Spannung  $B$  gleich 1, so ist das Gewicht der Luft von der Spannung  $b$ , — da sich die Gewichte gleicher Luftvolumina wie ihre Spannungen verhalten, — gleich  $\frac{b}{B}$ , das Gewicht des Volumens Wasserdampf von der Spannung  $\beta = \frac{5}{8} \frac{\beta}{B}$ .

Das Gewicht des Gemenges ist also  $P = \frac{5}{8} \frac{\beta}{B} + \frac{b}{B}$ , oder, da  $b + \beta = B$ , also

$$b = B - \beta: P = \frac{5}{8} \frac{\beta}{B} + \frac{B - \beta}{B} = \frac{5}{8} \frac{\beta}{B} + 1 - \frac{\beta}{B} = 1 + \frac{\beta}{B} \left( \frac{5}{8} - 1 \right) = 1 - \frac{3}{8} \frac{\beta}{B}$$

Der Barometercoefficient  $k$  ist also zu multipliciren mit  $\left( 1 + \frac{3}{8} \frac{\beta}{B} \right)$ .<sup>\*)</sup>

Die vollständige Barometerformel wird nun also lauten, wenn wir in (235)  $\Delta h$  für  $h - h_n$ ,  $B$  und  $b$  für  $b$  und  $b_n$  schreiben:

$$\Delta h = k \left( 1 + 0,0037 \frac{t + t'}{2} \right) \left( 1 + \frac{2H}{r} \right) (1 + 0,0027 \cos \varphi) \left( 1 + \frac{3}{8} \frac{\beta}{B} \right) \times \left( \log B - \log b + \frac{2M \Delta h}{r} \right). \quad (236)$$

Ist  $\Delta h$  durch ein Nivellement bekannt, so lässt sich hieraus  $k$  berechnen, und ist auf diesem Wege für Metermass = 18400 gefunden.

**6) Reduktion der Barometerhöhe auf 0°.** Die abgelesenen Barometerhöhen sind, bevor sie in obige Gleichung (236) eingeführt werden dürfen, auf 0° zu reduciren, um die Ausdehnung der Scala und des Quecksilbers durch die Wärme unschädlich zu machen. Für Barometer mit Holzscala beträgt die Correktion — 0,00018 B t, für Messingscala — 0,000162 B t.

Bei Barometern mit ungleich weiten Schenkeln kommt hierzu noch die Correktion wegen Capillardepression. Hierüber wird jedem derartigen Instrumente eine Tabelle beigegeben.

\*) Die Ermittlung der Dunstspannung ist Aufgabe der Hygrometrie.

Bringt man Wasser in luftleeren Raum, so beginnt dasselbe alsbald zu sieden, bis die sich entwickelnden Dämpfe eine bestimmte, von der Temperatur des siedenden Wassers, bezw. der sich bildenden Dämpfe, abhängige Spannung erreicht haben. Diese Dampfspannungen sind für die verschiedenen Temperaturgrade folgende:

Temperatur	Spannung	Temperatur	Spannung	Temperatur	Spannung
— 10° C	2,09 mm	+ 0 C	+ 4,60 mm	+ 10 C	9,17
— 9	2,27	1	4,95	11	9,32
— 8	2,45	2	5,30	12	10,46
— 7	2,67	3	5,70	13	11,08
— 6	2,88	4	6,10	14	11,91
— 5	3,10	5	6,55	15	12,70
— 4	3,37	6	7,00	16	13,54
— 3	3,43	7	7,50	17	14,44
— 2	3,49	8	8,02	18	15,36
— 1	3,55	9	8,60	19	16,37
0	4,60	10	9,17	20	17,39

Höhere Spannungen, als die hier angegebenen, sind bei unveränderter Temperatur nicht zu erzielen, sie erfolgt erst bei erhöhter Erwärmung. Umgekehrt geht bei erfolgreicher Abkühlung ein Theil der entwickelten Dämpfe wieder in flüssigen Zustand zurück. Es erfolgt also ein Niederschlag, bis die Spannung des zurückbleibenden Dampfes wieder die der erniedrigten Temperatur entsprechende ist. Im Luft erfüllten Raume bleibt das Verhältniss ein ähnliches, da die Dampfmoeküle zwischen den Luftmoekülen reichlich

**Aneroidbarometer.**

Zu barometrischen Nivellements bedient man sich heute vorzugsweise der Aneroidbarometer. Das Naudet'sche Aneroid hat folgende Einrichtung:

Die luftleere Büchse B, Fig. 123, trägt auf ihrem elastischen, wellenförmig gebogenen Deckel das Sälchen s, welches eine breite Stahlfeder F durchdringt und dieselbe mittelst einer Schneide niederdrückt. Die Bewegungen des Deckels der Büchse B werden somit auf diese Feder, und von dieser durch den Arm A auf den um eine horizontale Axe drehbaren Winkelhebel w w übertragen. Am Ende des verticalen Schenkels des letzteren ist eine feine Kette befestigt, welche, um die Axe des Zeigers Z geschlungen, auf diesen die Bewegung überträgt. Die Kette wird durch eine um die Axe des Zeigers gewundene Spiralfeder in Spannung erhalten. Aus der Figur ist leicht erkenntlich, wie durch die Correktionsschraube C auf die Feder F, also auch auf den Stand des Zeigers Z eingewirkt werden kann, welche Vorrichtung zur Justirung des Instruments dient. Die Theilung des Kreises, über welcher der Zeiger schwebt, ist derart ausgeführt, dass die Theilungseinheit demjenigen Ausschlag des Zeigers entspricht, welcher dieser bei einer Luftdruckänderung von 1 mm des Quecksilberbarometers erleidet.

Die Angaben des Instruments stimmen nicht ohne Weiteres mit den auf 0° reducirten Angaben des Quecksilberbarometers überein, es sind vielmehr folgende Correktionen anzubringen:

**1) Temperaturecorrection.** (Reduktion auf 0°.) Infolge der Dehnung der Metalltheile des Instruments durch die Wärme wird jede Temperaturänderung einen

Raum haben, um den luftgefüllten Raum ungehindert ebenso zu occupiren, wie den luftleeren (Dalton'sches Gesetz), nur findet hier kein Sieden des Wassers statt, sondern die Dampfbildung erfolgt nur an der Oberfläche des Wassers, wo der sofortige Eintritt zwischen die Luftmoleküle möglich ist. Jedes sonst sich bildende Dunstbläschen ist dem überwiegenden Drucke der Atmosphäre nicht gewachsen. Es wird sofort im Entstehen wieder condensirt. Erst wenn die Dampfspannung dem Drucke der Atmosphäre gleich ist, d. i. bei 760 mm Luftspannung bei einer Temperatur von 100 C., kann das Sieden des Wassers beginnen.

Nach vorstehender Tabelle kann man nun beispielsweise bei einer Temperatur von +10° eine Dunstspannung von 9,17 mm erzielen. Hat der Dampf in der Luft diese Spannung thatsächlich erreicht, so ist eine weitere Verdunstung nicht mehr möglich. Die Luft ist mit Dampf gesättigt. Die weitere Dampfbildung beginnt erst wieder bei steigender Temperatur. Dagegen bewirkt die geringste Abkühlung Niederschläge. Ist aber bei einer Temperatur von 10° etwa nur eine Dunstspannung von 7,00 mm vorhanden, so vermag die Luft noch weitere Dampfmengen aufzunehmen. Die relative Feuchtigkeit der Luft ist  $\frac{7}{9,17} = 77,4\%$ . Sollen Niederschläge stattfinden, so bedarf es nach obiger Tabelle einer Abkühlung bis auf 6°. Dieser Temperaturgrad heisst der Thaupunkt. Kennt man den Thaupunkt, (hier 6°), so lässt sich aus der Tabelle die vorhandene Dunstspannung (hier 7,00 mm) entnehmen. Alsdann findet man die relative Feuchtigkeit der Luft durch Division der bei der vorhandenen Temperatur möglichen Maximaldunstspannung in die vorhandene Dunstspannung. Hierauf beruht das Daniell'sche Hygrometer. Da bei jeder Verdunstung ein Verbrauch von Wärme, also eine Abkühlung stattfindet, so wird man durch rasch verdunstende Flüssigkeiten, (Aether), eine Glasröhre soweit abkühlen können, bis dieselbe beschlägt. In dem Moment, wo der Niederschlag erfolgt, wird ein in der Glasröhre befindliches Thermometer abgelesen, und der Thaupunkt ist gefunden.

Allgemeiner gebräuchlich, als das Daniell'sche Hygrometer, ist das August'sche Psychrometer. Wasser verdunstet um so schneller, je trockner die Luft. Da mit der Verdunstung eine Temperaturerniedrigung verbunden ist, so wird man somit von dem Grade der Temperaturerniedrigung auf die Feuchtigkeit der Luft schliessen können. Beim August'schen Psychrometer findet die Verdunstung auf der Kugel eines Thermometers statt, welches mit einem trockenen Thermometer verglichen, die Temperaturerniedrigung anzeigt. Multiplicirt man Letztere mit dem zeitigen Barometerstande  $\times 0,00063$ , zieht das Produkt von dem zum feuchten Thermometerstande gehörigen Dunstspannung der obigen Tabelle ab, so wird die zeitige Dunstspannung erhalten.

Ausschlag des Zeigers verursachen. Bringt man das Instrument aus der Temperatur  $t$  bei **unverändertem** Luftdruck in die Temperatur  $t'$ , und ist der dabei erfolgende Ausschlag des Zeigers gleich  $a$ , so ist die Correktion für jeden Temperaturgrad

$$c = \frac{a}{t - t'}. \quad (237)$$

Ist nun das Instrument bei einer Temperatur  $t_0$  justirt, ist also  $t_0$  die Temperatur, bei welcher die Angaben des Instruments mit denen des Quecksilberbarometers übereinstimmen, so ist die bei der Temperatur  $t$  anzubringende Correktion, wie sofort klar sein wird,

$$k_1 = c(t - t_0).$$

**2) Standcorrection.** Infolge Aenderung der Elasticität der Metalltheile zeigt der Zeiger Schwankungen, so dass die Uebereinstimmung mit dem Quecksilberbarometer, (auch nach Anbringung der Temperaturcorrection), nicht bestehen bleibt.

Das Barometer ist daher während des Gebrauchs bei jeder Gelegenheit mit dem Quecksilberbarometer zu vergleichen und die gefundene Differenz bei jeder folgenden Ablesung zu berücksichtigen. Die Standcorrection wird gemeinschaftlich mit einer dritten Correktion ermittelt, nämlich

**3) der Theilungscorrektion.** Es entspricht nämlich die Theilungseinheit nicht immer genau einer Druckdifferenz von 1 mm. Ist  $a$  der Fehler der Theilungseinheit, und ist 760 mm der Barometerstand, bei welchem, nach Anbringung der Temperaturcorrection, Uebereinstimmung des Quecksilber- und Aneroidbarometers stattfindet, so ist beim Barometerstand  $b$  die anzubringende Correktion

$$k_2 = a(760 - b). \quad (238)$$

Bezeichnet nun  $k_2$  die Standcorrection, so bestimmt man diese und die Theilungscorrektion gleichzeitig wie folgt: Quecksilber- und Aneroidbarometer werden mindestens zweimal, nachdem beide auf  $0^\circ$  reducirt worden, mit einander verglichen, und zwar müssen diese beiden Beobachtungen bei möglichst verschiedenem Luftdruck ausgeführt werden. Die Angaben des Quecksilberbarometers seien  $B$  und  $B'$ , die des Aneroids  $b$  und  $b'$ , so findet man die beiden Correktionen aus den Gleichungen

$$B = b + k_2 + a(760 - b)$$

$$B' = b' + k_2 + a(760 - b')$$

woraus  $k_2$  und  $a$  sich ergeben. — Hat man mehrere derartige Beobachtungen bei verschiedenem Luftdruck ausgeführt, so kann  $k_2$  und  $a$  nach der Methode der kl. Quadrate, (Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen), gefunden werden.

Der Theilungsfehler  $a$  ist ein für allemal zu ermitteln, während die Ermittelung der Correktion  $k_2$ , wie oben erwähnt, häufig zu wiederholen ist. Bei diesen späteren Bestimmungen der Standcorrection  $k_2$  bedarf es natürlich, da  $a$  bekannt ist, nur einer Vergleichung mit dem Quecksilberbarometer, denn es ist

$$k_2 = B - (b + k_1 + k_3), \quad (239)$$

nämlich die Differenz des Quecksilberbarometers gegen das um Temperatur- und Theilungscorrektion berichtigte Aneroidbarometer.

## § 6.

### Messungen mit dem Aneroidbarometer.

1) Bei Aneroidmessungen bedient man sich zumeist der abgekürzten Formel

$$\Delta h = k \left( 1 + 0,0037 \frac{t + t'}{2} \right) (\log B - \log b) \quad (240)$$

worin  $k = 18400$  m.

Um mit dem Aneroid ein Flächennivellement auszuführen, geht man mit demselben von Station zu Station, liest in jeder Station Barometer, Thermometer und die Zeit der Beobachtung ab, während ein zweiter Beobachter auf einem festen Punkte unausgesetzt die Barometerschwankungen an einem Quecksilberbarometer, (Standbarometer), beobachtet und ebenfalls die Zeiten seiner Beobachtungen notirt, damit die stattgehabten Schwankungen in Rechnung gestellt werden können. Vor und nach den Beobachtungen werden beide Barometer, behufs Ermittlung der Standcorrektio, mit einander verglichen und eine etwa vorgefundene Standveränderung proportional den Zwischenzeiten zwischen den Beobachtungen auf die letzteren vertheilt und in Rechnung gestellt, und nach Anbringung aller dieser Correktionen die Höhen der einzelnen Stationen über dem Standort des Standbarometers berechnet. Die Entfernung des Standbarometers vom Wanderbarometer darf nicht über 2 Meilen betragen.

2) Sind einzelne Punkte der aufzunehmenden Fläche ihrer Höhe nach, — etwa durch trigonometrisches Nivellement, — bereits bekannt, so kann man das Standbarometer entbehren und folgendes Verfahren, — (Interpolation), — anwenden:

Man beginnt die Beobachtungen bei einem der Punkte von gegebener Höhe, nimmt in möglichst kurzer Zeit eine Reihe von anderen Punkten auf, (d. h. beobachtet in denselben das Barometer), welche man so zu wählen hat, dass man sich, indem man dieselben der Reihe nach durchläuft, irgend einem anderen **gegebenen** Punkte nähert, auf welchem man schliesslich die Reihe der Beobachtungen abschliesst. Seien nun  $H$  und  $H'$  die Höhen der bekannten Punkte,  $B$  und  $B'$  die auf denselben beobachteten Barometerstände in mm ausgedrückt, so ist  $\frac{H - H'}{B - B'}$  die Höhendifferenz, welche einer Barometerdifferenz von 1 mm entspricht. Multiplicirt man mit diesem Quotienten die Differenzen der auf den Zwischenstationen beobachteten Barometerhöhen,  $B - b_1$ ,  $b_1 - b_2$  etc., so erhält man die Höhenunterschiede  $\Delta h_1$ ,  $\Delta h_2$  . . . etc., deren Summe die Differenz  $H - H'$  ergeben muss.

Natürlich darf man zwischen den Beobachtungen auf den gegebenen Punkten nicht zu lange Zeit verstreichen lassen, damit nicht inzwischen eintretende Barometer- und Temperaturschwankungen die Güte der Arbeit beeinträchtigen. Auch dürfen die Höhendifferenzen nicht allzugrosse sein, da dieselben sonst nicht mehr als den Barometerdifferenzen proportional angesehen werden dürfen.

Durch Differentiation der Gleichung

$$\Delta h = k (\log B - \log b) \left( 1 + 0,0037 \frac{t + t'}{2} \right)$$

nach der Veränderlichen  $b$  erhält man nämlich:

$$\delta h = - \frac{M \delta b}{b} k \left( 1 + 0,0037 \frac{t + t'}{2} \right) \quad (241)$$

Hierin bedeutet  $\delta h$  die Höhendifferenz, welche der Barometerdifferenz  $\delta b$  entspricht. Die Aenderung der Höhe für eine bestimmte Aenderung der Barometerhöhe, z. B. 1 mm, ist also dem Barometerstande umgekehrt proportional, daher in verschiedenen Höhen verschieden. Kennt man  $\delta h$  für die Barometerdifferenz 1 mm, so hat man nur noch mit der in mm ausgedrückten Barometerdifferenz  $B - b$  zu multipliciren, um den Höhenunterschied der Beobachtungsstationen zu erhalten.

Nach Gl. (241) ist die Barometertafel, Tafel IV Anhang, berechnet, worin  $\delta b = 1$  mm angenommen ist.

Bei Anwendung dieser Tafel kann man auch, wenn keine gegebenen Punkte vorhanden sind, das Standbarometer entbehren, wenn man nur möglichst oft auf den Ausgangspunkt zurückkehrt, bzw. auf einen Punkt, auf welchem man schon einmal beobachtet hat, um die Schwankungen des Luftdrucks zu controlliren. Etwa gefundene kleine Druckdifferenzen werden nach Verhältniss der Zwischenzeiten zwischen den Beobachtungen vertheilt und in Rechnung gestellt.

§ 7.

**Nivellement mit Niveau.**

Wir setzen den Gebrauch des Nivellirinstrumentes als bekannt voraus und erwähnen nur Folgendes:

Um die Correktionen wegen Erdkrümmung und Strahlenbrechung zu erübrigen und gleichzeitig einen etwaigen Zielfehler des Instruments unschädlich zu machen, ist jede Station aus der Mitte zu nivelliren. Die Correktionen der Lattenablesungen werden unter dieser Bedingung für die Vor- und Rückvisur gleich, fallen also bei Bildung der Lattendifferenzen fort, brauchen daher überhaupt nicht berücksichtigt zu werden,  $([H + c_1 + c_2 + c_3] - [H' + c_1 + c_2 + c_3]) = H - H'$ .

Jedes Nivellement ist doppelt, entweder mit 2 Latten mit verschiedenen Wechsellpunkten, oder vor- und rückwärts auszuführen.

Schliesst ein Nivellement beiderseits an bereits bekannte Punkte an, so kann eine Ausgleichung desselben vorgenommen werden, indem man die gegen den bekannten Höhenunterschied der gegebenen Punkte gefundene Differenz auf die einzelnen Stationen, nach Verhältniss der Stationslängen, vertheilt. Treffen mehrere Züge in einem Punkte zusammen, so kann dieser nach Analogie der Knotenpunkte bei Polygonmessungen behandelt werden, (cfr. Thl. II, § 43 1) u. 3)). Die dabei in Rechnung zu stellenden Gewichte sind, wenn  $S$  die Länge eines Nivellements-zuges bezeichnet,  $p = \frac{1}{S}$ . Denn ist  $m$  der mittlere Fehler der Längeneinheit, so ist der mittlere Fehler des ganzen Nivellements-zuges  $= m\sqrt{S}$ . Die Gewichte sind aber den Quadraten der mittleren Fehler umgekehrt proportional.

Eine ähnliche Betrachtung wie die in Thl. II, § 45, über Bussolenzüge angestellte, führt zu der Regel, dass man die Stationslängen nicht zu gross nehmen darf, — in der Regel = 50 m. —

Die Nivellements-zahlen werden in eine Tabelle etwa von der beistehenden Einrichtung eingetragen. Spalte 3 und 5 sind für die Visuren nach den Wechsellpunkten bestimmt, Spalte 4 für Zwischenvisuren. In Spalte 6 werden die Differenzen der Lattenablesungen gebildet, und zwar werden die negativen Unterschiede in Form dekadischer Ergänzungen eingetragen, wenn man es nicht vorzieht, Spalte 6 in zwei Unterabtheilungen zu theilen, eine für positive, (Steigungen), die andere für negative, (Fallen), Differenzen. Als Probe für die richtige Bildung der Unterschiede  $\Delta h$  hat man: Summe der Spalte 3 weniger Summe der Spalte 5 = Summe Spalte 6. Als Probe für die richtige Summirung der Differenzen in Spalte 7 bildet man den Unterschied zwischen der letzten und ersten Höhe, welche mit der Summe der Spalte 6 übereinstimmen muss. Für doppeltes Nivellement sind die Spalten 3—6 zu wiederholen, und zwischen Spalte 6 und 7 eine weitere Spalte, — „Mittel der Höhenunterschiede aus Nivellement I und II“, — einzu-

schalten. Ist das Nivellement beiderseits an bekannte Punkte angeschlossen, so kommt dazu noch eine fernere Spalte: „Verbesserte Höhenunterschiede.“

No. der Station	Länge der Station	Visur			Unterschiede $\Delta h$	Höhe h	Bemerkungen
		Rückwärts	zwischen	Vorwärts			
1	2	3	4	5	6	7	8
0		0,953				22,550	
1	50			1,762	$\times$ 9,191	21,741	
1	50	2,426					
2	50		2,012		0,414	22,155	
3	50			1,202	0,810	22,965	
3	50	0,448					
4	50		2,131		$\times$ 8,317	21,282	
5	50			2,026	0,105	21,387	
		3,827		4,990	$\times$ 8,837	$\times$ 8,837	
				3,827			
				$\times$ 8,837			

Die Nivellementsline ist gelegentlich der Eintheilung in Stationen durch Ordinatenmessungen nach festen Punkten, — Grenzsteinen, Häuserecken —, oder nach eigens zu dem Zwecke vermarkten Punkten derart festzulegen, dass sie mit Sicherheit jederzeit wieder hergestellt werden kann. In Abständen von 500 bis 1000 m sind derartige Punkte mit einzunivelliren und zu dem Ende durch Einlassen von sogen. Nivellementsbolzen in einer für diesen Zweck geeigneten Weise herzurichten.

### § 8.

#### Terraindarstellung.

Denkt man sich einen Berg durch äquidistante Horizontalebenen durchschnitten, Fig. 124, und die Schnittlinien dieser Ebenen mit der Terrainoberfläche, (Horizontalkurven), auf eine horizontale Ebene projicirt, so werden die so erhaltenen Kurven um so näher bei einander liegen, je steiler der Berg ist, wie aus der Fig. einleuchten wird. Man kann also von der Entfernung der projicirten Kurven auf den Böschungsgangrad des Terrains schliessen. Die Kurven stellen das Terrain für den im Lesen derselben Geübten in übersichtlicher Weise dar, und es sind daher Karten, welche mit Horizontalkurven versehen sind, nicht nur für topographische Zwecke, sondern auch als Unterlagen für Projekte, bei welchen die Terraingestaltung in Frage kommt, von hohem Werthe.

Zur Anfertigung solcher Karten kann man die Kurven entweder im Felde mit Hilfe des Nivellirinstrumentes abstecken und sodann aufmessen und in die Karten eintragen, — natürlich eine sehr zeitraubende Arbeit, welche nur da zur Ausführung kommen wird, wo es sich um wenige Kurven, die sich möglichst genau dem Terrain anschmiegen sollen, handelt —, oder man verfährt wie folgt:

Man bezeichnet zunächst alle für die Terraingestaltung charakteristischen Punkte, d. h. alle Punkte, in denen ein in die Augen fallender Gefällswechsel stattfindet, mit Pfählen, so dass also das von drei benachbarten Pfählen eingeschlossene Terrain eine Ebene darstellt, misst diese Pfähle auf, nivellirt sie, und trägt sie nebst ihren Höhenzahlen in die Karte. Alsdann kann man die Horizontalkurven auf der

Karte construiren. Seien beispielsweise in Fig. 125 die Höhen der Punkte a und b = 8,4 und 4,4 m, so ist es nicht schwierig, diejenigen Punkte der von a bis b stetig aufsteigenden Linie a b zu finden, welchen die Höhen 5, 6, 7, 8 m zukommen. Man hat diese Linie nur in dem Verhältniss 0,6 : 1 : 1 : 1 : 0,4 zu theilen. In analoger Weise werden die Linien c d, e f, etc. getheilt, und sodann alle Punkte, für welche man eine gleiche Höhe gefunden hat, durch eine aus freier Hand zu ziehende Kurve verbunden. Die angedeutete Theilung erfolgt am schnellsten mit Hilfe eines Diagramms, Fig. 126. Man trägt die Linie a b auf der Zeigerlinie 8,4 derselben von der Abscissenlinie aus ab, verbindet den Punkt b mit dem Punkte 4,4 der Abscissenlinie, (durch blosses Anlegen der Kante eines Zeichendreiecks), und trägt die zwischen der Linie b c und der Abscissenlinie liegenden Abschnitte der Zeigerlinien 5, 6, 7, 8 auf der Linie a b in der Karte, Fig. 123, von b aus ab, wodurch diese, wie sofort verständlich, in der angedeuteten Weise getheilt ist.

Kommt es auf möglichst genaue kartographische Terraindarstellung an, so wird man die zu nivellirenden Punkte auf dem Felde in grosser Anzahl wählen müssen. Man kommt in solchen Fällen am schnellsten zum Ziele, wenn man das Terrain mit einem Quadratnetze überspannt, und die Quadratecken nivellirt. Je kleiner man die Quadratseiten wählt, um so genauer, um so mehr wird sich die Terrainoberfläche in jedem Quadrate der Ebene nähern. Wo dieselbe in einem oder dem anderen Quadrate noch erheblich von der Ebene abweicht, sind innerhalb des Quadrats noch weitere Punkte besonders zu bestimmen. Derartige Quadratnetzaufnahmen gewähren auch sonst mancherlei Vortheile, wie wir später sehen werden.

In neuerer Zeit bedient man sich zu Terrainaufnahmen mit grosser Zeitersparniss des Tachymeters, eines Theodolits mit Horizontal- und Verticalkreis und distanzmessendem Fernrohr. Durch ein solches Instrument wird gleichzeitig die Lage und Höhe der Punkte, erstere durch Distanz- und Horizontalwinkelmessung, (Polarcoordinaten!), letztere durch Verticalwinkelmessung bestimmt. Wird der Träger der Distanzlatte durch einen zweiten Geometer geführt, so ist das Abpfählen der Punkte erübrigt.

1) **Aufgabe:** In einem Schichtenplane, Fig. 129, ist eine Linie a b gegeben. Es soll das Profil derselben gezeichnet werden.

Die Auflösung geht aus der Figur hervor.

2) **Aufgabe:** In einem Schichtenplan, Fig. 127, eine bei a beginnende Linie mit einer stetigen Steigung von 1% zu zeichnen.

Auch diese Auflösung wird aus der Figur verständlich werden, aus welcher auch erkenntlich ist, dass man die verschiedensten Linien von der vorgeschriebenen Eigenschaft, z. B. a b c d e, a b c' d' e', a b c' d' e'' und ähnliche construiren kann.

3) **Aufgabe:** Zwei Punkte A und B, Fig. 128, durch eine stetig aufsteigende Linie von 1% Steigung zu verbinden.

Man trägt nach voriger Aufgabe von A aus die Linie A C A', von B aus die Linie B C B' von 1% Steigung ein. Beide schneiden sich im Punkte C. Die Linie A C B ist eine Linie von der verlangten Eigenschaft.

4) **Aufgabe:** Die Höhe eines auf einem Schichtenplane gegebenen Punktes, welcher zwischen zwei Höhengurven liegt, zu bestimmen.

Man ziehe durch den gegebenen Punkt senkrecht zu den benachbarten Kurven eine Linie, ermittle das Verhältniss, nach welchem der zwischen den beiden benachbarten Kurven liegende Abschnitt derselben durch den gegebenen Punkt ge-

theilt wird, und theile den bekannten Höhenunterschied der benachbarten Kurven nach demselben Verhältniss.

Soll durch den gegebenen Punkt eine neue Horizontalkurve construirt werden, so ziehe man in angemessenen Abständen zwischen den benachbarten Horizontalcurven mehrere zu diesen senkrechte Linien, theile dieselben nach demselben Verhältniss, und verbinde die Theilungspunkte.

5) **Aufgabe:** Eine Wasserleitung A B, Fig. 130, liegt bei A 1 m tief und besitzt ein Gefälle von 1‰. Wie tief durchschneidet dieselbe den Berg bei C?

Die Aufgabe ist durch Rechnung leicht zu lösen. Ist aber auf der Linie A B eine grössere Anzahl von Punkten gegeben, deren Tiefe unter der Terrainoberfläche ermittelt werden soll, so zeichne man für die Linie A B das Profil nach Aufgabe 1), trage in dieselbe auch die Leitung A B nach den dieselbe bestimmenden Daten ein, so kann man dieser Zeichnung die Tiefe für jeden beliebigen Punkt der Linie A B direkt durch Abgreifen mit dem Zirkel entnehmen.

6) **Aufgabe:** In einen Schichtenplan die Durchschnittslinie der Böschungen eines Grabens mit der Terrainoberfläche einzuzeichnen, wenn die Mittellinie, (Trace), des Grabens, sein Profil, Gefälle, und seine Tiefe in A, Fig. 130, gegeben sind.

Man ermittelt nach Aufgabe 5) die Grabentiefen an verschiedenen Punkten der Grabenlinie, trägt diese Tiefen in das in grossem Massstabe gezeichnete Grabenprofil ein, in Fig. 131 also die Tiefen  $A a_1$ ,  $A a_2$ ,  $A a_3$  etc., zieht die Horizontalen\*)  $a_1 b_1$ ,  $a_2 b_2$ ,  $a_3 b_3$  etc., ermittelt die Längen dieser horizontalen Linien und trägt sie im Massstabe der Karte von der gegebenen Grabenlinie aus zu beiden Seiten derselben ab, und zwar natürlich in denjenigen Punkten der letzteren, für welche die betreffenden Grabentiefen ermittelt sind.

Nach dem hier Gesagten wird es an Mitteln zur Lösung ähnlicher Aufgaben nicht fehlen.

## II. Erdbau.

### § 9.

#### Massenberechnung und Terrainumformung.

1) **Massenberechnung:** Der Schichtenplan eines Grundstücks, Fig. 132, ist gegeben. Durch den niedrigsten Punkt A des Grundstücks wird eine horizontale Ebene gedacht. Es soll der cubische Inhalt der über dieser Ebene in dem Grundstück lagernden Erdmasse berechnet werden.

Man bestimmt zunächst die Höhe des niedrigsten Punktes A nach § 8, Aufgabe 4), berechnet die Fläche G des Grundstücks, und die Flächen  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  etc., welche die Horizontalkurven 1, 2, 3 etc. mit den Grenzen des Grundstücks einschliessen. Ist  $h_1$  der Vertikalabstand der durch A gedachten Kurve von der nächst höheren Kurve 1,

so ist der cubische Inhalt der Erdschicht zwischen beiden Kurven  $J_0 = \frac{G_1 + g_1}{2} \cdot h_1$ . Bezeichnet weiter h die Aequidistanz der übrigen Kurven, so sind die in den einzelnen

\*) Ist das Terrain rechtwinklig zur Grabenrichtung stark geneigt, wie dies z. B. der Fall wäre, wenn in Fig. 128 BCB' die gegebene Grabentrace vorstellte, so sind statt der Horizontalen die entsprechenden Terrain-Querprofile in das Normalprofil des Grabens zu zeichnen. Dieselben werden nach Aufgabe 1 gewonnen.

Schichten, d. h. zwischen den Ebenen der einzelnen Horizontalkurven lagernden Erdmassen:  $J_1 = \frac{g_1 + g_2}{2} h$ ,  $J_2 = \frac{g_2 + g_3}{2} h$  etc. Ist endlich  $h_2$  die Höhe des Punktes B über der **letzten** Kurve, so ist die Erdmasse der obersten Schicht, welche sich hier der Gestalt einer Pyramide nähert:  $J_3 = \frac{g_3}{3} h_2$ . Die Summe der einzelnen Schichten liefert den gesuchten Erdmasseninhalt.\*)

2) **Planirung.** Soll die Oberfläche eines Grundstücks durch Umbau in eine horizontale Ebene planirt werden, so berechne man den cubischen Inhalt der Erdmasse nach 1), dividire denselben durch die Fläche des Grundstücks, so erhält man die Höhe H der durch den Umbau herzustellenen Terrainoberfläche. Construiert man in dieser Höhe nach Aufgabe 4) des vorigen § eine Horizontalkurve, so stellt diese die Grenze zwischen Auf- und Abtrag dar. Berechnet man die über dieser Horizontalkurve lagernde Erdmasse, so erhält man die Abtragsmasse, welche durch Erdtransport fort zu bewegen ist. Auf dem Felde steckt man die horizontale Ebene in der Höhe H mittelst des Nivellirinstrumentes ab, indem man eine genügende Anzahl von Pfählen so tief in die Erde treiben lässt, dass die Köpfe derselben sämtlich in der gleichen Höhe H liegen. Im Abtrage müssen dieselben natürlich unter die Erde versenkt werden. Die Pfähle müssen zweckmässig in graden Linien stehen. Es werden sodann im Abtrage von Pfahl zu Pfahl Gräben bis zur Tiefe der Pfahlköpfe ausgehoben und im Auftrage in entsprechender Höhe Dämme aufgeschüttet, (sogen. Lehrpfade), wodurch den Erdarbeitern die von ihnen auszuführende Arbeit genau vorgezeichnet ist.

Soll nicht eine **horizontale**, sondern irgend eine andere Oberfläche, z. B. ein gleichzeitig ansteigender Hang von bestimmtem Gefälle geschaffen werden, so stelle man die zu bildende Oberfläche durch Horizontalkurven dar, berechne die über dem Horizont, auf welchen sich die Höhen der Kurven beziehen, lagernden Erdmassen nach 1), und zwar einmal unter Zugrundelegung der **projektirten** Kurven, und sodann unter Zugrundelegung der **natürlichen** Terrainkurven. Das Resultat der ersteren Berechnung sei  $K_1$ , das der zweiten  $K_2$ . Je nachdem der Unterschied  $K_1 - K_2$  positiv oder negativ ausfällt, wird man bei der Planirung Erde übrig behalten, oder es wird Erde fehlen. Um dies zu vermeiden, wird man im ersteren Falle die **projektirte** Terrainhöhe um den Betrag  $\frac{K_1 - K_2}{G}$  **vergrössern**, im anderen Falle **vermindern** müssen. — Wäre z. B. das Grundstück Fig. 133 in einen Hang von 1% Gefälle umzubauen, so wird man die Horizontalen a b,  $a_1 b_1$ ,  $a_2 b_2$  etc., bei einer Aequidistanz von 1 m\*\*, in Entfernungen von 100 m in die Karte einzeichnen haben. Die Höhe der untersten Horizontale a b werde zu 1 m über dem Horizont angenommen. Ergiebt nun die Massenberechnung einen Ueberschuss von Erde, so ist der ganze Hang zu tief projektirt. Hat man auf dem oben ange deuteten Wege gefunden, dass der projektirte Hang um 0,2 m zu heben ist, damit ein Ausgleich der Auf- und Abtragsmassen stattfindet, so ist also der Horizontalen a b die Höhe 1,2 m statt 1 m beizuschreiben. Die Horizontale von der Höhe 1 m liegt

\*) Die zwischen dem Horizont der Aufnahme und der durch A gelegten Horizontalebene ist, wenn H die Höhe des Punktes A bezeichnet, = G H.

\*\*) Diese Aequidistanz nehmen wir der Einfachheit wegen an. In Wirklichkeit muss natürlich Schichtenplänen, welche derartigen Zwecken dienen sollen, eine viel geringere Aequidistanz zu Grunde liegen, um so geringer, je weniger geneigt das Terrain ist. (0,1 — 0,5 m.)

also 0,2 m tiefer als a b. Da nun das Terrain 1% Steigung erhalten soll, so wird also die Horizontale von 1 m Höhe in einer Entfernung von 20 m, (nämlich 1:100 = 0,2:20), parallel zu a b, d. i. in A B zu zeichnen sein. Entsprechend sind die Horizontalen  $a_1 b_1$ ,  $a_2 b_2$  etc. um je 20 m zu verschieben.

Will man die Grenze zwischen Auf- und Abtrag in die Karte eintragen, so hat man die Schnittpunkte der Horizontalen des natürlichen Terrains mit den gleichnamigen Horizontalen des projektierten Terrains zu verbinden.

Um den Hang auf dem Felde abzustecken, überträgt man die Linien A B,  $A_1 B_1$  etc. ins Feld und treibt die Absteckpfähle so tief in die Erde, dass die Köpfe derselben die den einzelnen Linien A B,  $A_1 B_1$  etc. entsprechenden Höhen über dem Horizont der Aufnahme erhalten. (Mit Hülfe des Nivellirinstrumentes.)

3) **Quadratnetzaufnahme.** Fig. 134. Hat man über die umzubauende Fläche ein Quadratnetz gelegt und die Höhen der Quadratecken ermittelt, so erhält man die in jedem Quadrate über dem Horizonte lagernde Erdmasse, wenn man die Höhen der vier Ecken addirt, durch 4 dividirt und mit der Grundfläche des Quadrats multiplicirt. An der Umgrenzung des Grundstücks hat man nur Theile von Quadraten, deren Grundflächen man durch Schätzung als Bruchtheile des ganzen Quadrats ermitteln wird. Bei Berechnung der in den vollen Quadraten lagernden Erdmassen wird die Höhe jeder Ecke so oft in Ansatz kommen, wie die Anzahl der Quadrate, denen sie gemeinschaftlich gehört, angiebt, also die Höhen der Quadratecken m, (in der Mitte des Netzes), je viermal, die Höhen der Ecken r, (am Rande), je zweimal, die Höhen der Ecken a, (ausspringende Ecken), je einmal, und die Höhen der Ecken e, (einspringende Ecken), je dreimal. Man wird also die Summe der Erdmassen der vollen Quadrate erhalten, wenn man die Summe der Höhen der Ecken a durch 4, die der Ecken e durch 3, die der Ecken r durch 2, die der Ecken m durch 1 dividirt, (d. h. letztere wie sie sind, in Rechnung stellt), die Quotienten addirt, und die Summe mit der Fläche des vollen Quadrats multiplicirt.

Soll die Terrainoberfläche in eine horizontale Ebene umgebaut werden, so erhält man die Höhe dieser Ebene, wenn man die berechnete Erdmasse mit der Fläche des Grundstücks dividirt. Zieht man diese Höhe von den Höhen der Quadratecken ab, so erhält man die Höhen der Abträge (+) und der Aufträge (—) an den einzelnen Netzpunkten. Fertigt man nun einen Plan, in welchen man die so ermittelten Auf- und Abtragshöhen für jeden Netzpunkt einträgt, so wird jeder Schachtmeister, nach gehöriger Instruktion, leicht danach arbeiten können.

Um die zu transportirenden Erdmassen, (Abtragungsmassen), zu berechnen, hat man die Abtragshöhen an den einzelnen Ecken zu addiren, wobei jedoch die Höhen an den Ecken a, r und e wieder nur mit  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{3}{4}$  ihres Werthes in Rechnung zu stellen sind, und die Summe mit der Quadratfläche zu multipliciren. Die in den nicht vollen Quadraten vorhandenen Abtragungsmassen sind wieder für sich zu berechnen.

Zur Controlle wird man in derselben Weise die Aufträge berechnen, welche den ermittelten Abträgen gleich sein müssen.

Soll durch den Umbau nicht eine Horizontale, sondern irgend eine andere Terrainform geschaffen werden, so ist es nicht schwer, diese durch Höhenzahlen auszudrücken. In Fig. 135 stellen z. B. die fetten Zahlen die Höhen der Netzpunkte, wie diese durch Nivellement ermittelt sind, dar. Soll das Terrain in einen

Hang mit 2% Gefälle in der Richtung a b, und auch mit 2% Gefälle in der Richtung a c umgeformt werden, so wird man die Höhen des projektirten Hanges etwa so anzusetzen haben, wie die kleinen Zahlen, 9,5, 9,3 etc., angeben, wobei die Quadratseite zu 10 m Länge angenommen ist, denn der Hang soll auf 100 m 2 m Gefälle, also auf 10 m 0,2 m Gefälle haben, die projektirten Höhen müssen also von Station zu Station um je 0,2 m kleiner werden. Zieht man diese projektirten Höhen von den Terrainhöhen ab, so erhält man die Abtragstiefen bezw. Auftragshöhen für die einzelnen Netzpunkte. Ermittelt man weiter den cubischen Inhalt der Auf- und Abtragsmassen auf dem oben angedeuteten Wege, vergleicht beide mit einander, so ergibt sich der Bodenüberschuss, bezw. das Bodenmanko, welches man durch die Fläche des Grundstücks zu dividiren hat, um diejenige Höhe zu erhalten, um welche die projektirte Terrainoberfläche noch höher oder tiefer zu legen ist, wenn die Abträge in den Aufträgen aufgehen sollen. Um diesen Betrag sind sämtliche Höhen des Projekts zu vergrößern, bezw. zu vermindern, worauf Auf- und Abtragshöhen noch einmal zu ermitteln und sodann in den Arbeitsplan des Schachtmeisters einzutragen sind. \*)

4) **Auflockerung des Bodens.** Hat man die Auf- und Abträge zum Ausgleich gebracht, so wird sich wegen der Auflockerung der abgetragenen Erdmassen bei der praktischen Ausführung des Baues ein Bodenüberschuss ergeben. Derselbe beträgt

- 1) im Sandboden 1% des abzutragenden Bodens
- 2) im Lehm Boden 3—5% „ „ „
- 3) im Thonboden 4—6% „ „ „

Um diesen Bodenüberschuss zu vermeiden, wird man von vorn herein die **projektirte** Terrainfläche etwas höher anlegen, als die oben angedeuteten Bodenberechnungen ergeben. Hat man z. B. im Sandboden einen Abtrag von 10000 cbm, so werden diese wegen der Auflockerung einen Bodenüberschuss von 100 cbm liefern. Dividirt man diese Kubikmeterzahl durch die Fläche des Grundstücks, so erhält man die Höhe, um welche die projektirte Terrainoberfläche noch höher anzulegen ist, als die bisherigen Bodenausgleichsrechnungen ergaben.

5) **Lang gestreckte Erdbauten.** Bei langgestreckten Erdbauten schlägt man zur Berechnung der Bodenmassen einen anderen Weg ein. Soll z. B. ein Graben mit bestimmtem Profil und einem gegebenen Gefälle angelegt werden, so nimmt man durch Nivellement das Längenprofil der Grabenlinie, (in Stationslängen von 50 m), auf, und desgleichen an jedem Stationspunkte ein Querprofil des Terrains, von etwas grösserer Ausdehnung, als die durchschnittliche Grabenbreite, (in der Regel mit Hilfe von Setzwage und Richtscheit). Längenprofil und Querprofile werden aufgetragen, in ersteres die projektirte Grabensohle eingezeichnet, Fig. 136a, die Ordinaten derselben für die einzelnen Stationspunkte ermittelt, und unter Zugrundelegung der letzteren das projektirte Normalprofil des Grabens in die einzelnen Terrainquerprofile eingetragen, nach Anleitung der Fig. 136b. Damit sind nun die Querschnitte des auszuhebenden Erdkörpers dargestellt, deren Flächen nun zunächst zu berechnen sind. Um nun die in einer Station auszuhebenden Erdmassen zu berechnen, bildet man aus den Flächen der Querschnitte im Anfangs- und Endpunkte

\*) In Fig. 135 ergibt die Rechnung ein Bodenmanko von 870 cbm. Die Fläche des Grundstücks ist = 3000 qm, mithin sind sämtliche Ordinaten des Projekts um  $\frac{870}{3000} = 0,29$  m zu kürzen.

der Station das arithmetische Mittel und multiplicirt dasselbe mit der Länge der Station, (in der Regel also mit 50 m).\*)

Fig. 137 stellt ein Wegeprojekt durch seine Profile dar. Hier wird man in der eben angedeuteten Weise die Auf- und Abtragsmassen in den einzelnen Stationen berechnen, dieselben vergleichen und durch Heben oder Senken der ursprünglich projektirten Wegehöhe zu erwirken suchen, dass Auf- und Abträge sich innerhalb nicht allzulanger Strecken ausgleichen, damit allzuweite Bodentransporte vermieden werden (vergl. die Massenberechnung zu Fig. 137).

§ 10.

**Kostenveranschlagung.\*\*)**

Je nach der Schwierigkeit der Bodenbearbeitung unterscheiden wir folgende Bodenklassen:

- I. Mit Schaufeln und Spaten leicht zu bearbeitender Boden, (Sand, lockerer Ackerboden).
- II. Böden, die sich mit Spaten noch stechen lassen, (leichter Lehm, feiner Kies, Torf).
- III. Böden, welche, ehe sie geladen werden können, gelockert werden müssen, (Thon, mit Steinen durchsetzter Boden).
- IV. Böden, die mit Spitzhacke gelockert werden müssen, (Gerölle).
- V. Felsarten, die mit Brechstange und Keilen zu bearbeiten sind.
- VI. Felsarten, die gesprengt werden müssen.
- VII. Schwierig zu sprengende Felsarten, (Gneis, Granit, Porphyr).

Die Kosten zerfallen in: 1) Kosten für Lösen und Laden des Bodens, 2) Transportkosten. Letztere sind gleich dem Produkt aus der Anzahl der Kubikmeter  $\times$  Transportweite,  $\times$  einem Transportfaktor, welcher die Kosten des Transports pr. Kubikmeter 1 m weit angiebt.

Für Schiebkarrentransport\*\*\*) gilt nach Gieseler folgende Tabelle:

Boden-Klasse	Lösen, Laden und Leeren erfordert Stunden pr. cbm	Transportfaktor 1 cbm 1 m weit
I	0,85— 1,4	0,0082
II	1,4 — 2,0	0,0085
III	2,0 — 2,8	0,0094
IV	2,8 — 3,6	0,0100
V	3,6 — 4,4	0,0102
VI	4,0 — 6,5	0,0105
VII	6,4 —10,5	0,0108

Für Unterhaltung der Geräte wird ein Pauschsatz von 10% der übrigen Kosten angesetzt.

\*) Ist h die Länge der Station, G und g ihre Endprofile, V das Erdvolumen, so lautet also die Formel  $V = \frac{G+g}{2}h$ . Diese Näherungsformel hat sich weniger durch ihre Güte, als durch ihre Bequemlichkeit Eingang verschafft. Der der Stereometrie kundige Leser kennt die Formel für den Inhalt des Prismatoids  $V = \frac{h}{6}(G + 4m + g)$ , worin m die Fläche des in der halben Höhe h gemessenen Querschnitts bezeichnet.

\*\*\*) Giesler, Erdbau.

\*\*\*) Wegen der Kosten bei Handkarrentransport vergl. die Formel am Schluss dieses Paragraphen.

Bei Steigungen sind pr. 1 m Steigung der wirklichen Transportweite 20—25 m hinzu zu setzen.

**Nebendarbeiten** erfordern Arbeitsstunden:

1) Auftrag zu stampfen pr. cbm	0,5,
2) Planiren und Umgraben pr. qm	0,05—0,11,
3) Rasen schälen pr. qm	0,05—0,15,
4) Rasen eindecken und klatschen pr. qm	0,08—0,20,
5) Böschungen planiren, mit Ackererde bekleiden und ansäen pr. qm	0,50—0,75,
6) Boden von Sträuchern reinigen pr. qm	0,50,
7) Baumstämme ausrodern, pr. m Stamm-Stärke	30,0.

**Ermittelung der Transportweite:** Man erwägt, in welche Theile der Auftragsfläche eine zum Abtrag kommende Erdmasse zweckmässig zu vertheilen ist, und ermittelt durch Schätzung die Schwerpunkte der Abtragsmassen und der Auftragsräume, welche durch die betreffenden Abtragsmassen ausgefüllt werden sollen. Die Entfernung dieser Schwerpunkte wird als Transportweite in Rechnung gestellt. Bei langgestreckten Erdbauten, bei welchen die Bodentransporte alle nach einer Richtung hin erfolgen, hat dies keine Schwierigkeiten. Bei Flächenumbauten begnügt man sich mit einem mehr summarischen Verfahren, welches im Folgenden erläutert werden soll:

**Massennivellement.** Wir verstehen unter Transportgrösse das Produkt aus Erdmasse und Transportweite, welches als Rechteck leicht graphisch dargestellt werden kann. Es sei, Fig. 138, eine Abtragsmasse dazu bestimmt, eine Vertiefung auszufüllen. Wir denken uns die Abtragsmasse in verschiedene Theile,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  . . . zerlegt, und nehmen an, dass dieselben in die gleichbezeichneten Theile der Vertiefung transportirt werden sollen. Alsdann ergibt sich die Transportgrösse

$$T = m_1 w_1 + m_2 w_2 + m_3 w_3 + \dots$$

wenn  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  etc. die Transportweiten bezeichnen. Graphisch wird diese Transportgrösse durch die Summe der Rechtecke, Fig. 138a, dargestellt. Setzen wir statt der gebrochenen Grenzlinie der durch diese Rechtecke gebildeten Fläche eine Kurve, (Massennivellementscurve), wie solche entstehen würde, wenn wir die Massen  $m_1$ ,  $m_2$  etc. uns unendlich klein dächten, so ist jede Ordinate dieser Kurve gleich der Summe aller rückwärts liegenden Ab- und Aufträge, wenn letztere mit negativem Vorzeichen gedacht werden. Man erhält also Punkte der Kurve, wenn man die Entfernungen 0—1, 0—2, 0—3 etc. auf einer Abscissenlinie 0x, Fig. 137a, von 0 aus abträgt und die senkrechten Ordinaten 0,  $m_1$ ,  $m_1 + m_2$ ,  $m_1 + m_2 + m_3$  etc. errichtet.

Stellen wir in dieser Weise die in Fig. 139 dargestellten Erdtransporte durch eine Massennivellementscurve dar, so erkennen wir sofort folgende Eigenschaften derselben:

- 1) Die Kurve ist absteigend im Abtrag, aufsteigend im Auftrag, horizontal, wo kein Umbau stattfindet.
- 2) Die Kurve ist um so steiler, je grösser die Auf- bzw. Abtragsmassen.
- 3) Wo die Kurve die Abscissenaxe schneidet, gleichen sich die rückwärts liegenden Auf- und Abträge aus.
- 4) Die Summe der von der Abscissenaxe und der Kurve begrenzten Flächenabschnitte ist gleich der Transportgrösse aller vorkommenden Erdtransporte.

Stellt nun in Fig. 142 der schraffierte Theil den Erdabtrag eines Flächenumbaus dar, der nicht schraffierte die Auftragsfläche, so kann man sich vorstellen, dass alle Erdtransporte nur in der Richtung a b und in der Richtung a c vorgenommen werden, so dass man z. B., anstatt von a direkt nach d zu transportieren, den Weg a b d zurücklegt. Um die Transportgrösse für die in der Richtung a c vorzunehmenden Erdtransporte zu finden, zerlegt man das Grundstück rechtwinklig zu a c in parallele Streifen a a und ermittelt in jedem Streifen den cubischen Inhalt der Auf- und Abträge. Es wird nun in jedem Streifen so lange in der Richtung a b transportirt, bis der Auftragsraum ausgefüllt ist. Der Ueberschuss der Abtragsmassen kommt für die Transportrichtung a c in Betracht. Die Ueberschüsse in den einzelnen Streifen, — welche auch negativ sein können, wenn nämlich der Auftragsraum grösser als die Abtragsmasse, — liefern uns die Ordinaten der Massennivellementscurve für die Transportrichtung a c. Ebenso findet man die Massennivellementscurve für die Transportrichtung a b, indem man die Fläche in Streifen b b senkrecht zu a b zerlegt. Die Flächen  $F_1$  und  $F_2$  beider Curven stellen die Transportgrössen für beide Transportrichtungen dar. Ist nun T die Transportgrösse für die gesammten Erdbewegungen, so ist, da man in Wirklichkeit auf direktem Wege transportiren wird, jedenfalls

$$T < F_1 + F_2. \quad \text{a)}$$

Dagegen ist, da  $F_1$  und  $F_2$  nur Theile des gesammten Erdtransports darstellen

$$T > F_1 \quad \text{b)}$$

und

$$T > F_2. \quad \text{c)}$$

Man wird also annähernd T gleichsetzen können entweder dem Mittel aus a) und b), oder dem Mittel aus a) und c), oder dem Mittel aus beiden Mitteln. Es ist also entweder

$$T = F_1 + \frac{F_2}{2} \quad \text{d)}$$

oder

$$T = F_2 + \frac{F_1}{2} \quad \text{e)}$$

oder endlich

$$T = \frac{3}{4}(F_1 + F_2). \quad \text{f)}$$

Ist  $F_1$  gegen  $F_2$  sehr gross, so wird  $F_1$  schon der gesammten Transportgrösse nahe kommen. Man wird daher der Grösse  $F_1$  ein grösseres Gewicht einräumen müssen und daher T nach Gleichung d) berechnen. Im umgekehrten Falle wird man T nach Gl. e), und, wenn  $F_1$  und  $F_2$  annähernd gleich sind, nach f) zu bestimmen haben.

**Notizen für Erdarbeiten.** Die Wahl der Transportart richtet sich nach Entfernung und Menge der zu transportirenden Erde. Bis 5 m transportirt man durch Schaufelwurf, bis 120 m mittelst Schiebkarren, bis 400 m mit Handkarren, (zweirädrige, von 2 Arbeitern gezogene Kippkarren), bis 1500 m mit Pferdekippkarren. Die Anwendung von Feldeisenbahnen setzt voraus, dass grössere Abtragsmassen auf einer Stelle liegen.

**Hohe Aufträge,** (Dämme), sind, weil sich der Boden setzt, von vorn herein höher zu schütten, als das Projekt angiebt. Die Ueberhöhung beträgt in Sandboden  $\frac{1}{25}$ , in Dammerde  $\frac{1}{15}$ , in Lehm und Thon  $\frac{1}{12}$  der beabsichtigten Höhe.

**Böschungen** sind anzulegen:

In losem Humus oder Sand	2fach
" " Lehm	$1\frac{1}{2}$ fach
" " Thon	$1-1\frac{1}{4}$ fach
" " Torf	$\frac{1}{2}-2$ fach.

In quelligen Stellen ist Thon sehr flach (3fach) zu böschen oder besser zu drainiren.

**Transportkosten.** Für Schiebkarrentransport vergl. die Tabelle auf Seite 154. Handkarrentransport erfordert pr. Kubikmeter an Zeit: a) für Entleeren und Umpfen pr. Karrenladung (3 Ladungen auf 1 cbm) 8 Min., b) pr. Meter Transportweite, incl. Rückweg, 2 Sekunden. Mit Rücksicht darauf, dass zu einem Handkarren 2 Arbeiter gehören, findet man also den Zeitaufwand pr. cbm Erde, bei einer Transportentfernung von  $w$  Meter in Arbeitsstunden:

$$\text{Zeit pr. cbm} = \left(0,8 + \frac{1}{300} w\right) \text{ Arbeitsstunden.}$$

Bei schwerem und nassem Boden ist die Arbeitszeit etwas höher zu nehmen. Bei Steigungen rechnet man der wirklichen Transportweite 20—25 m pr. Meter Steigung, bei Gefälle 10—15 m pr. Meter Fall hinzu.

Teil IV.

Hydrometrische Arbeiten

---

Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page. The text is arranged in several paragraphs and appears to be a formal document or report.

## Strömungsverhältnisse.

1. Die Geschwindigkeit der Strömung.  
2. Die Länge der Strömung.  
3. Die Richtung der Strömung.  
4. Die Wassermenge der Strömung.

### Theil IV.

## Hydrometrische Arbeiten.

1. Die Bestimmung der Wassermenge.  
2. Die Bestimmung der Geschwindigkeit.  
3. Die Bestimmung der Richtung.

Die Bestimmung der Wassermenge erfolgt durch die Messung des Querschnitts der Strömung und der Geschwindigkeit der Strömung. Die Bestimmung der Geschwindigkeit erfolgt durch die Messung der Zeit, die ein Schwimmer benötigt, um eine bestimmte Strecke zu durchqueren.

Die Bestimmung der Richtung erfolgt durch die Messung der Ablenkung der Strömung von der geraden Linie. Die Ablenkung wird durch die Messung der Zeit, die ein Schwimmer benötigt, um eine bestimmte Strecke zu durchqueren, und durch die Messung der Zeit, die ein Schwimmer benötigt, um eine bestimmte Strecke zu durchqueren, wenn er sich in die gleiche Richtung wie die Strömung bewegt.

Die Bestimmung der Wassermenge erfolgt durch die Messung des Querschnitts der Strömung und der Geschwindigkeit der Strömung. Die Bestimmung der Geschwindigkeit erfolgt durch die Messung der Zeit, die ein Schwimmer benötigt, um eine bestimmte Strecke zu durchqueren.

Die Bestimmung der Richtung erfolgt durch die Messung der Ablenkung der Strömung von der geraden Linie. Die Ablenkung wird durch die Messung der Zeit, die ein Schwimmer benötigt, um eine bestimmte Strecke zu durchqueren, und durch die Messung der Zeit, die ein Schwimmer benötigt, um eine bestimmte Strecke zu durchqueren, wenn er sich in die gleiche Richtung wie die Strömung bewegt.

Thell IV.  
Hydrometrische Arbeiten.

## § 1.

### Stromnivellement.

Ein Flussnivellementsplan hat darzustellen:

- 1) das Längenprofil eines oder beider Ufer,
- 2) " " der Sohle,
- 3) " " des Wasserspiegels, womöglich niedersten Wasserstand, Mittel- und Hochwasser,
- 4) sind alle in der betreffenden Flussstrecke vorhandenen Wasserbauten, Brücken, Wehre, Schleusen, (deren Fachbäume), etc. zur Darstellung zu bringen.

Wegen der Veränderlichkeit des Wasserspiegels sind beim Nivellement des letzteren besondere Vorsichtsmassregeln zu beobachten. Man nivellirt nicht den Wasserspiegel selbst, sondern die Köpfe in das Wasser eingeschlagener Pfähle, und lässt alsdann die Abstände vom Wasserspiegel durch mehrere Gehilfen möglichst gleichzeitig messen, indem man jedem derselben eine nicht allzulange Strecke anweist, welche dieser von oben nach unten zu durchlaufen hat, da sich Unregelmässigkeiten des Wasserstandes, — wenn nicht Stauungen die Ursachen derselben sind, in der Regel von oben nach unten fortpflanzen. Der Fortgang solcher Störungen darf den der Arbeiten nicht überholen.

Das Profil des Flussbetts muss durch Peilung ermittelt werden. Die Punkte, in denen die Tiefenmessungen vom Kahne aus vorgenommen werden, können vom Ufer aus durch zwei gleichzeitig arbeitende Theodolite bestimmt werden, zu welchem Ende im Kahne eine Signalstange errichtet wird, oder vom Kahne aus mittelst eines Spiegelsextanten.

In der Regel wird das Flussbett durch in gewissen Abständen aufzunehmende Querprofile zu bestimmen sein. Man bezeichnet die Richtungen der Profile an den Ufern durch Signale und richtet den Kahn in die so bestimmten Linien ein, was vom Kahne selbst aus geschehen kann, ev. mit Hilfe des Prismenkreuzes. Zur Bestimmung desjenigen Punktes des Profils, in welchem jedesmal die Peilung stattfindet, genügt dann ein am Ufer, ausserhalb der Profilsrichtung, auf einem in der Stromkarte verzeichneten Punkte stehender Theodolit. Kann man ein Seil über den Fluss spannen, so können die nöthigen Abmessungen auch an diesem erfolgen, zu welchem Ende dasselbe durch rothe Lämpchen in gleiche Theile, etwa von 5 zu 5 m, zu theilen ist.

Die ermittelten Profile werden in der Regel in die Stromkarte eingezeichnet,\*) Fig. 140. Letztere muss überhaupt Alles darstellen, was für den Zweck, welchem sie dient, von Interesse sein kann, in erster Linie die Hochwasserufer, Deiche, angrenzende Bauten, und selbstverständlich die Situation aller im Nivellementsplan dargestellten Terraingegenstände.

\*) Statt durch Profile, pflegt man das Flussbett auch wohl durch Tiefenlinien darzustellen, d. i. Kurven, welche alle Punkte von gleicher Tiefe, nach Art der Horizontalkurven, verbinden.

### Geschwindigkeitsmessungen.

Die gebräuchlichsten Instrumente zum Messen der Geschwindigkeit fliessender Gewässer sind:

1) **Der Schwimmer**, eine Hohlkugel, der man durch Einschütten von Schrot nahezu das spezifische Gewicht des Wassers ertheilt, so dass dieselbe beim Gebrauche nur mit einem kleinen oben angebrachten Halse aus dem Wasser hervorschaut, also vor dem Einfluss der Luftströmungen möglichst geschützt ist. Die Geschwindigkeit des Schwimmers wird ausgedrückt durch den in einer Sekunde durch denselben zurückgelegten Weg. Man steckt senkrecht zur Stromrichtung in durch Messung zu bestimmender Entfernung zwei Profilsrichtungen ab, legt den Schwimmer ca. 10 Schritt oberhalb des oberen Profils ins Wasser, und beobachtet die Zeiten, in welchen derselbe erst das obere, sodann das untere Profil passirt. Da die Geschwindigkeit des Wassers keine gleichmässige ist, vielmehr nach den Ufern hin abnimmt, so muss man die Messungen in verschiedenen Entfernungen vom Ufer ausführen. Da eine Abnahme der Geschwindigkeit auch nach der **Tiefe** hin erfolgt, so bedient man sich besser

2) **des Schwimmstocks**, eines an seinem unteren Ende beschwerten, daher aufrecht schwimmenden Stabes, dessen Länge so zu bemessen ist, dass sein Aufstossen auf die Sohle nirgends zu befürchten steht.

3) **Die Pitot'sche Röhre**, Fig. 141, ist eine an ihrem unteren Ende rechtwinklig umgebogene Röhre. Hält man den rechtwinkligen Ansatz gegen den Strom ins Wasser, so wird das Niveau in der Röhre sich etwas über das des Flusses erheben. Ist  $h$  der gemessene Niveauunterschied, so ist nach einem bekannten Gesetze der Hydraulik, wenn  $k$  einen von der Beschaffenheit der Röhre abhängigen, durch Versuche in Gewässern von bekannter Geschwindigkeit ein für allemal zu ermittelnden Coefficienten bezeichnet: die Stromgeschwindigkeit  $v = k \sqrt{2gh}$ , oder für  $k \sqrt{2g} = c$ :  
$$v = c \sqrt{h}.$$

Um die Niveaudifferenz  $h$  bequem messen zu können, ist neben der erwähnten Röhre auf derselben Scala eine zweite, unten nicht gebogene Röhre angebracht, in welcher sich das Niveau dem des Flusses gleichstellen wird. Beide Röhren münden oben in ein durch einen Hahn verschliessbares Röhr. Aus diesem wird nach Oeffnung des Hahns die Luft so weit ausgesogen, dass sich das Niveau in beiden Röhren zu einer für die Ablesung bequemen Höhe erhebt. Sodann wird der Hahn wieder geschlossen, der Nullpunkt der verschiebbaren Scala auf das tiefere Niveau eingestellt und das höhere Niveau in der anderen Röhre abgelesen.

Findet die Geschwindigkeitsmessung in so grosser Tiefe statt, dass das ganze Instrument unter das Wasser versenkt werden muss, so werden die unteren Enden beider Röhren mittelst einer über das Wasserniveau herausreichenden Schnur durch einen gemeinsamen Hahn geschlossen und sodann das Instrument, behufs Ablesung des Niveauunterschiedes, aus dem Wasser gehoben.

4) **Der Woltman'sche Flügel**, Fig. 145. Die Flügelebenen sind schräg gegen den Stromstrich geneigt. Die Geschwindigkeit der Umdrehungen, deren Zahl durch Zählräder gezählt wird, ist proportional der Stromgeschwindigkeit. Das Instrument kann mit Hilfe einer Schnur, welche über die Oberfläche des Wassers hinaus reicht, beliebig in und ausser Thätigkeit gesetzt werden. Die Zeitdauer der Thätigkeit

wird an einer Uhr beobachtet. Kennt man die Zahl  $k$  der Umdrehungen, welche ein das Instrument passirender Wasserfaden von 1 m Länge verursacht, so ist, wenn man  $n$  Umdrehungen in der Minute beobachtet hat, die Geschwindigkeit des Wassers, d. h. sein Weg pr. Sekunde,  $v = \frac{n}{60k}$ , oder, wenn man  $\frac{1}{60}k = c$  setzt

$$v = c n.$$

Die Constante  $c$  ist durch Versuche ein für allemal zu ermitteln, und zwar am besten in **stehenden** Gewässern, indem man das Instrument an einen Kahn befestigt, diesen mit beliebiger Geschwindigkeit eine genau abgesteckte Strecke weit fortbewegt und die Zahl der dabei erfolgten Umdrehungen abliest. Ist die durchlaufene Strecke = 100 m, die Zahl der Umdrehungen =  $x$ , so ist  $k = \frac{x}{100}$ , also  $c = \frac{x}{6000}$ .

Bei der Ausführung der Messungen setzt man zu Anfang die Zählräder durch Herablassen der Schnur eine Zeit lang ausser Thätigkeit, bis die Flügel die der Geschwindigkeit des Wassers entsprechende Geschwindigkeit der Umdrehung erreicht haben. Zugleich mit dem Anziehen der Schnur, und nach einer Weile mit dem Wiedernachlassen derselben, erfolgen die Beobachtungen an der Uhr.

Für sehr geringe Geschwindigkeiten, welche eben genügen, die Flügel in Bewegung zu setzen, ist der Coefficient  $c$  besonders zu bestimmen.

### § 3.

#### Bewegung des Wassers in Canälen.

Die theoretische Geschwindigkeit des Wassers ist, wenn  $H$  das Gesamtgefälle des Flussbetts bezeichnet:

$$1) v = \sqrt{2gH}.$$

Durch die Reibungswiderstände wird indessen die Geschwindigkeit vermindert, und wir können uns vorstellen, dass durch dieselben ein Theil der Druckhöhe  $H$  aufgehoben wird. Ist dieser Theil =  $h$ , — sogenannte Widerstandshöhe —, so ist

$$2) v = \sqrt{2g(H-h)}.$$

Der Reibungswiderstand wächst, wie man beobachtet zu haben glaubt, proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit, indem bei  $n$ facher Geschwindigkeit  $n$  mal so viele Theilchen vom Flussbette, und jedes mit  $n$ facher Geschwindigkeit losgerissen werden müssen. Ferner muss der Reibungswiderstand proportional der Länge  $L$  des Wasserlaufs, proportional dem benetzten Umfange des Profils =  $p$ , und umgekehrt proportional dem Flächeninhalte  $F$  des Profils sein. Demnach ist der Reibungswiderstand oder die Widerstandshöhe  $h$ , wenn  $a$  einen von der Beschaffenheit des Betts abhängigen Reibungscoefficienten bezeichnet:

$$3) h = a \frac{L p v^2}{F}.$$

In regelmässigen Flussbetten beobachtet man nun, dass die Geschwindigkeit am oberen Ende der regelmässigen Strecke des Flusses ebenso gross ist, als am unteren Ende dieser Strecke. Demnach muss das ganze Gefälle  $H$  lediglich zur Ueberwindung der Reibungswiderstände verbraucht sein, da sonst nach den Gesetzen des Falls eine Beschleunigung der Bewegung stattfinden müsste. Demnach ist das

ganze Gefälle  $H$  der Flussstrecke als Widerstandshöhe anzusehen, und es ist also nach 3)

$$H = a \frac{L p v^2}{F}$$

also

$$v = \sqrt{\frac{H \cdot F}{a L p}}$$

Setzt man  $\frac{H}{L} = J$ , — relatives Gefälle der Flussstrecke von der Länge  $L$ , — und  $\frac{F}{p} = R$ , sogenannter mittlerer Radius des benetzten Profils,  $\frac{1}{\sqrt{a}} = k$ , so ergibt sich

$$v = k \sqrt{R J}. \tag{242}$$

Eytelwein setzte den Coefficienten  $k$  constant = 50 m. Die Untersuchungen von Ganguillet und Kutter haben die Abhängigkeit desselben von der Beschaffenheit des Betts, (Rauhigkeit), und vom Verhältniss  $\frac{F}{p}$  dargethan. Kutter unterscheidet folgende Rauigkeitskategorien:

- I. Gehobeltes Holz. Glatter Cement,
  - II. rohe Bretter,
  - III. behauene Quadern. Ziegeln,
  - IV. Bruchsteine,
  - V<sub>1</sub>. Erde ohne Wasserpflanzen,
  - V<sub>2</sub>. „ mit Pflanzen, Steinwürfen,
  - V<sub>3</sub>. „ wie in natürlichen Bächen und Flüssen,
  - VI. Gewässer mit vielen Pflanzen, Geschiebe, schlechte Unterhaltung,
- und giebt folgende Werthe für  $k$ :

$\frac{F}{p}$	Werthe $k$ für die Kategorien:							
	I	II	III	IV	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	VI
0,01	45,5	27,0	23,2	15,2	9,7	7,6	5,6	3,9
0,03	59,0	30,0	33,1	23,6	15,7	12,4	9,4	6,6
0,05	65,1	45,3	39,0	28,6	19,4	15,5	11,8	8,4
0,07	68,8	49,5	43,1	32,1	22,2	17,8	13,7	9,8
0,10	72,5	53,9	47,5	36,1	25,4	20,6	15,9	11,5
0,13	74,7	56,9	50,5	39,0	27,8	22,7	17,7	12,8
0,15	76,3	58,9	52,5	40,9	29,4	24,1	18,9	13,7
0,20	78,8	62,3	56,1	44,4	32,4	26,8	21,1	15,5
0,25	80,4	64,7	58,6	47,0	34,8	28,9	22,0	17,0
0,30	82,0	67,0	61,0	49,5	37,1	31,0	24,7	18,4
0,40	84,0	70,1	64,4	53,0	40,4	34,1	27,5	20,6
0,50	85,5	72,4	66,9	55,8	43,2	36,7	29,7	22,5
0,60	86,6	74,2	68,9	58,1	45,5	38,9	31,7	24,1
0,80	88,2	76,8	71,9	61,5	49,0	42,3	34,9	26,8
1,00	89,3	78,7	74,0	64,1	51,8	45,0	37,5	29,1
1,50					56,1	49,4	41,7	32,0
2,00					60,3	53,7	45,9	36,7
3,00					65,0	58,7	50,9	41,5
4,00					68,3	62,1	54,5	45,0
5,00					72,5	66,8	59,5	50,1

Die Wassermenge, welche ein Canal von dem Querschnitte  $F$  bei dem Gefälle  $J$  pr. Sekunde führt, ist, wie leicht verständlich:

$$M = v F = k \sqrt{R J} \times F. \quad (243)$$

Umgekehrt ergibt sich aus dieser Gleichung der Flächeninhalt des Profils, welches man bei gegebenem Gefälle einem Graben geben muss, um eine bestimmte Wassermenge  $M$  pr. Sekunde abzuführen

$$F = \frac{M}{k \sqrt{R J}}. \quad (244)$$

Hierin ist  $R$  vorläufig durch Schätzung zu bestimmen, das zugehörige  $k$  aus obiger Tabelle zu entnehmen und damit ein vorläufiger Werth von  $F$  zu berechnen, worauf man ein angemessen geformtes Profil mit dem Flächeninhalte  $F$  construiren, den benetzten Umfang  $p$  ermitteln und also  $R = \frac{F}{p}$  genauer berechnen kann, worauf  $k$  nochmals der obigen Tabelle zu entnehmen und die Rechnung nach Formel (244) zu wiederholen ist. Weicht das neu gefundene Resultat wesentlich von dem aus der ersten Berechnung ermittelten Werthe  $F$  ab, so ist eine nochmalige Wiederholung der Rechnung erforderlich.

#### § 4.

### Bewegung des Wassers in Röhren.

Bei Rohrleitungen haben zunächst die Gleichungen 1)–3) des vorigen § und Alles dazu Gesagte ebenfalls Gültigkeit. Wir können dagegen nicht, wie im vorigen Paragraphen für Canäle geschehen ist, die Widerstandshöhe  $h$  der ganzen vorhandenen Druckhöhe  $H$  gleichsetzen, da die Beobachtung zeigt, dass nicht die ganze Höhe  $H$  zur Ueberwindung der Reibungswiderstände verbraucht wird. Aus Gl. 2) des vorigen Paragraphen folgt:

$$h = H - \frac{v^2}{2g}$$

und da nach Gl. 3) des vorigen § auch

$$h = a \frac{L p v^2}{F}$$

so folgt

$$a \frac{L p v^2}{F} = H - \frac{v^2}{2g}$$

oder, wenn wir  $a g = c$ , also  $a = \frac{c}{g}$  setzen:

$$c \frac{L p v^2}{g F} = H - \frac{v^2}{2g}$$

und hieraus

$$v = \sqrt{\frac{2g H F}{2c L p + F}}$$

oder wenn man den Durchmesser des Rohrs  $= d$  setzt:

$$v = \sqrt{\frac{2g H \frac{\pi}{4} d^2}{2c L \pi d + \frac{\pi}{4} d^2}}$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit  $\pi d$  dividirt:

$$v = \sqrt{\frac{1/2 g H d}{2 c L + 1/4 d}} = \sqrt{\frac{2 g H d}{8 c L + d}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 g H d}{8 c \left(L + \frac{d}{8c}\right)}} = \sqrt{\frac{2}{8 c} \left(\frac{G H d}{L + \frac{d}{8c}}\right)}$$

Ist  $L$  im Verhältniss zum Röhrendurchmesser  $d$  sehr gross, so wird man den Bruch  $\frac{d}{8c}$  im Nenner gegen  $L$  vernachlässigen können. Jedenfalls kann man in diesem Bruch, wenn auch der Reibungscoefficient  $c$  je nach der Geschwindigkeit und der Rauigkeit der Röhren variiert, für diesen Coefficienten einen Mittelwerth einführen, den man durch Versuche = 0,0034 gefunden hat, und erhält:

$$v = \sqrt{\frac{1}{4 c} \left(\frac{g H d}{L + 36 d}\right)} \quad (245)$$

Will man sich auch in dem Faktor  $\frac{1}{4c}$  mit dem Mittelwerthe  $c = 0,0034$  begnügen, so erhält man:

$$v = 8,57 \sqrt{\frac{g H d}{L + 36 d}} \quad (246)$$

Sonst ist  $c$  für glatte Röhren bei einer Geschwindigkeit:

$v = 0,1 \text{ m}$	$0,2 \text{ m}$	$1,0 \text{ m}$	$2,0 \text{ m}$
$c = 0,005$	$0,0045$	$0,0035$	$0,0026$

Man hat zunächst  $v$  nach (246) zu berechnen, sodann das zugehörige  $c$  in (245) einzusetzen.

Bei Holzröhren sind die Werthe  $c$  1,75 bis 3 mal-grösser als hier für glatte Röhren angegeben.

### § 5.

#### Wassermengen.

1) **Direkte Messung.** Die durch ein Flussprofil in der Zeiteinheit fliessende Wassermenge ist, wenn  $F$  den Flächeninhalt des Profils,  $v$  die in demselben gemessene Geschwindigkeit bezeichnet,

$$M = F \cdot v.$$

Wegen der verschiedenen Geschwindigkeiten in den verschiedenen Punkten des Profils wird man letzteres in verschiedene Theile mit den Flächen  $f_1, f_2, f_3 \dots$  zerlegen, Fig. 143, und in den ungefähren Schwerpunkten der einzelnen Theile die Geschwindigkeiten  $v_1, v_2, v_3 \dots$  messen. Die das ganze Profil in der Zeiteinheit passirende Wassermenge ist dann:

$$M = f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 + \dots$$

2) **Ueberfall:** Bei sehr kleinen, in unregelmässigem Bett fliessenden Gewässern stellen sich der Ermittlung der Geschwindigkeit Schwierigkeiten entgegen. Man sperrt dann den Bach durch ein Brett mit rechtwinkligem Ausschnitt, Fig. 144, und misst die Höhe  $H$  des durch denselben fliessenden Wassers. Denkt man sich die durchfliessende Wasserschicht in  $n$  gleiche horizontale Schichten zerlegt, deren

Tiefen unter dem Niveau =  $h_1, h_2 \dots h_n$  seien, so ist die Geschwindigkeit in den einzelnen Schichten:

$$v_1 = \sqrt{2g h_1}, v_2 = \sqrt{2g h_2} \dots \text{etc.}$$

Denkt man sich die Grössen  $h$  als Abscissen,  $v$  als Ordinaten einer Kurve, Fig. 144a, so ist diese nach Thl. I, § 15, eine Parabel. Die letzte Abscisse  $h_n$  des dargestellten Parabelbogens ist =  $H$ , die zugehörige Ordinate =  $\sqrt{2g H}$ , mithin ist der Flächeninhalt des Parabelabschnitts nach Thl. I, § 42

$$1) Q = \frac{2}{3} H \sqrt{2g H}$$

Bezeichnet nun  $\Delta h$  die Höhe der einzelnen Schichten, also  $\Delta h = h_2 - h_1 = h_3 - h_2$  etc., so ist, wenn man sich  $\Delta h$  nur genügend klein denkt

$$Q = \Delta h (v_1 + v_2 + v_3 + \dots)$$

oder da  $\Delta h = \frac{H}{n}$

$$2) Q = H \frac{(v_1 + v_2 + v_3 + \dots)}{n}$$

Aus 1) und 2) folgt:

$$\frac{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n}{n} = \frac{2}{3} \sqrt{2g H}$$

Das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten  $v$  sehen wir als mittlere Geschwindigkeit der ganzen durch den Ausschnitt fließenden Wasserschicht an, und erhalten also diese

$$v = \frac{2}{3} \sqrt{2g H} \quad (247)$$

mithin, wenn  $F$  den benetzten Flächeninhalt des Ausschnitts, (Breite  $\times$  Höhe  $H$ ),  $k$  einen Contraktionscoefficienten — (da sich die Ausflussgeschwindigkeit infolge der Contraction vermindert), — und  $M$  die durch den Ausschnitt fließende Wassermenge bezeichnet:

$$M = \frac{2}{3} k F \sqrt{2g H} \quad (248)$$

worin man durch Versuche  $\frac{2}{3} k = 0,42$  ermittelt hat.

Die Druckhöhe  $H$  darf, da das Wasser unmittelbar im Ausschnitt eine Senkung erleidet, nicht direkt in diesem gemessen werden, sondern ist durch Vergleichung der Sohle des Ausschnitts mit der ca. 1 m oberhalb des Staus stattfindenden Niveauhöhe zu ermitteln, wozu man sich eines Richtscheits bedienen kann, das über zwei genau bis zur Niveauhöhe eingeschlagene Pfähle gelegt wird, derart, dass ein Ende in den Ausschnitt hineinragt.

Die Stauung muss so hoch bewirkt werden, dass sich das Wasser unmittelbar oberhalb des Ueberfalls horizontal stellt.

3) **Niederschlagsgebiet.** Kennt man den Flächeninhalt des Niederschlagsgebiets eines Wasserlaufs, sowie die durchschnittliche Regenhöhe in diesem Gebiet\*) für die einzelnen Monate, so ist es nicht schwierig, die in den Flusslauf in einem

\*) Regenhöhen in mm.

Station	Januar	Febr.	März	April	Ma	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dec.	Summa
Berlin	36	36	32	43	53	70	80	56	35	37	39	41	558
Cöln	41	36	39	48	55	59	63	66	46	47	41	46	587
Hannover	35	30	43	37	52	61	73	61	39	30	44	31	536
Königsberg	40	37	32	26	40	63	61	77	77	61	51	42	610
Stuttgart	35	29	39	44	65	68	70	71	50	40	49	38	608

Monate gelangende Wassermenge zu berechnen. Derartige Ermittlungen sind nothwendig, wenn es sich um Neuanlage eines Grabens oder Canals handelt, um die von demselben abzuführenden Wassermengen annähernd kennen zu lernen und danach das Profil des Grabens nach (244) zu bestimmen. Sollte z. B. die im Winter in Form von Schnee sich ansammelnde Wassermenge in einer Zeit von 14 Tagen abgeführt werden, so muss man die monatliche Niederschlagshöhe der Wintermonate für die betreffende Gegend kennen. Damit kennt man die pr. Hektar in 14 Tagen, also auch die in einer Sekunde abzuführende Wassermenge, welche man mit der Hektarenzahl des Sammelgebiets zu multipliciren hat. Da indessen ein grosser Theil der Niederschläge verdunstet, der Rest aber im Allgemeinen sich nicht so rasch im Graben sammelt, als dieser das Wasser abführt, so braucht man nur die Hälfte der gesammten Niederschläge in Ansatz zu bringen.

Das Niederschlagsgebiet ermittelt man durch Feststellung der Wasserscheiden nach den Generalstabskarten. Zur Feststellung der Wasserscheiden hat man die Richtung der in den Karten verzeichneten Wasserläufe zu ermitteln, event. die Horizontalkurven zu Hülfe zu nehmen.

Nach Franzius führen deutsche Flüsse pr. Quadratkilometer Niederschlagsgebiet pr. Sekunde folgende Wassermengen in cbm:

Lage	bei niedrigem Wasser	bei hohem Wasser	Bemerkungen
In der Nähe der Quellen	0,002 — 0,004	0,35 — 0,60	
in bergiger Gegend	0,002	0,18 — 0,23	starker Zufluss
in hügeliger Gegend	0,0018	0,12 — 0,18	mittelstarker Zufluss
in flacher Gegend	0,0016	0,06 — 0,12	schwacher Zufluss
in flacher, sandiger und mooriger Gegend	0,0012 — 0,0015	0,035 — 0,06	langsam das Wasser abgebender Boden.

§ 6.

**Wasserkraft.**

Die Wasserkraft eines gestauten Wassers ist, wenn  $h$  die Höhendifferenz des Ober- und Unterwasserspiegels,  $P$  das Gewicht der Raumeinheit Wassers,  $M$  die pr. Sekunde durch das Flussprofil fliessende Wassermenge bezeichnet:

$$k = P M h. \quad (249)$$

Die Wasserkraft eines ungestauten Wassers findet man nach derselben Formel, wenn man für  $h$  den aus der bekannten Formel  $h = \frac{v^2}{2g}$  sich ergebenden Werth einsetzt. Man hat also die Geschwindigkeit  $v$ , am besten durch direkte Messung, zu ermitteln.

Um  $k$  in Pferdewerken auszudrücken, ist, da das Gewicht eines cbm Wassers = 1000 Kilogramm, ein Pferdewerk = 75 Meterkilo, wenn  $h$  in Metermass ausgedrückt ist:

$$k = \frac{1000}{75} M h. \quad (249a)$$

Von der theoretischen Wasserkraft werden durch ein oberflächliches Wasserrad oder eine Turbine 75—80%, durch ein unterschlächtiges Wasserrad nur etwa 33% nutzbar gemacht.

§ 7.

**Höhe von Stauanlagen.**

Soll ein fließendes Wasser bis zur Höhe  $h$  gestaut werden, wo  $h$  also den Unterschied zwischen Ober- und Unterwasser bezeichnet, so fragt es sich, welche Höhe muss das Stauwerk erhalten, welches diese Stauung hervorbringt?

Ist  $b$  die Länge des Wehrs,  $M$  die über dasselbe fließende sekundliche Wassermenge,  $x$  die Höhe des gestauten Wassers über der Wehrkrone, so ist, da der Flächeninhalt des Querschnitts der über das Wehr fließenden Wasserschicht  $= b x$ , nach (248):

$$M = \frac{2}{3} k b x \sqrt{2 g x} \quad (250)$$

worin man  $\frac{2}{3} k = 0,57$  zu setzen hat. Hieraus findet man

$$x = \sqrt[3]{\frac{M^2}{2 g (0,57 b)^2}} \quad (251)$$

Ergibt sich  $x < h$ , so ist das anzulegende Wehr ein Ueberfallwehr, d. h. ein Wehr, dessen Krone über dem Niveau des Unterwassers liegt, Fig. 146. Ist  $H$  die beabsichtigte Stauhöhe über der Sohle des Flusses, so ergibt sich die Wehrhöhe für diesen Fall

$$W = H - x.$$

Ist dagegen  $x > h$ , Fig. 147, so wird das Wehr ein Grundwehr. In diesem Falle zerfällt die über das Wehr fließende Wassermenge in zwei Theile, von welchen der über dem Unterwasserspiegel liegende nach obiger Formel (250) sich berechnet, wenn man in derselben  $h$  für  $x$  einsetzt. Findet man die Wassermenge dieses Theils  $= m_1$ , so ist der zwischen Wehrkrone und Unterwasserspiegel sich bewegende Theil  $m_2 = M - m_1$ , und man hat, wenn  $a$  die Höhe dieser Wasserschicht, also die Höhe des Unterwassers über der Wehrkrone bezeichnet:

$$m_2 = 0,62 a b \sqrt{2 g h}$$

und hieraus

$$a = \frac{m_2}{0,62 b \sqrt{2 g h}} \quad (252)$$

Hat das Wasser vor dem Wehre die Geschwindigkeit  $v$ , so entspricht dieser eine Druckhöhe  $k = \frac{v^2}{2 g}$ , welche der Höhe  $h$  in den Formeln (251) und (252) hinzuzusetzen ist.

§ 8.

**Berechnung der Staukurve.**

Ehe man sich zur Anlage eines Stauwerks in einem Gewässer entschliesst, wird man sich, — besonders wegen der Vorfluth der oberhalb liegenden Ländereien, — zu überzeugen haben, wie weit aufwärts der Rückstau reichen, und wie hoch sich derselbe in jedem Punkte des Staubereichs stellen wird. Das Niveau des gestauten Wassers fällt oberhalb der Stauanlage keineswegs, wie es auf den ersten Anblick scheinen möchte, mit der Horizontalen zusammen, sondern dasselbe bildet eine Kurve, welche wir zunächst, in vollem Bewusstsein der Willkür dieser Annahme, als Kreisbogen ansehen wollen, welcher den ungestauten Wasserspiegel im Punkte  $a$ , Fig. 148, und über dem Stauwerke die in der Stauhöhe gezogene Horizontale in  $s$  berührt. Die Richtigkeit dieser Annahme vorausgesetzt, ergibt

sich daraus ohne Weiteres, dass die Stauweite  $S$  gleich der doppelten hydrostatischen Stauweite sein muss, so dass also, wenn  $J$  das relative Gefälle des ungestauten Wassers,  $h$  die Stauhöhe bezeichnen:

$$S = \frac{2h}{J}. \quad (253)$$

Die Erfahrung lehrt, dass diese Formel in Gewässern von geringem Gefälle ganz brauchbare Resultate liefert. Anspruch auf Genauigkeit können aber nur solche Formeln machen, welche alle die Bewegung des Wassers beeinflussenden Faktoren, als Rauigkeit des Betts, mittlerer Radius des Profils etc. berücksichtigen.

Um eine bestimmte Wassermenge  $M$  in der Zeiteinheit ein bestimmtes Profil  $F$  passiren zu lassen, bedarf es einer bestimmten Geschwindigkeit

$$v = \frac{M}{F}.$$

Nimmt man die Querprofile des Flussbetts  $F_1, F_2, F_3$  etc., Fig. 149, in angemessenen Entfernungen auf, stellt dieselben graphisch dar, Fig. 150, trägt in das am Stauwerke aufgenommene Profil  $F_1$  die beabsichtigte Stauhöhe  $h$  ein, so kann man zunächst den Flächeninhalt des benetzten Profils  $F_1$ , sowie den benetzten Umfang ermitteln, und kennt, wenn man auch die Wassermenge  $M$  gemessen hat, die Geschwindigkeit in der Nähe des Profils  $F_1$

$$v_1 = \frac{M}{F_1}$$

und findet hieraus das Gefälle  $J_1$  in der Nähe des Profils nach (242)

$$J_1 = \frac{v_1^2}{R_1 k^2}.$$

Ist nun die Entfernung der Profile  $F_1$  und  $F_2$  von einander  $= L_1$ , so ergibt sich das absolute Gefälle des gestauten Wassers, d. h. der Niveauunterschied in den Profilen  $F_1$  und  $F_2$

$$\Delta h_1 = J_1 L_1$$

und die Stauhöhe im Profil  $F_2$ :

$$h_2 = h_1 + \Delta h_1.$$

Diese wird nun in das Profil  $F_2$ , Fig. 149, eingetragen, worauf man in derselben Weise die Stauhöhe im Profil  $F_3$ , und sodann im Profil  $F_4, F_5$  etc. ermittelt, bis man an ein Profil  $F_n$  gekommen ist, in welchem das gestaute Niveau mit dem ungestauten zusammenfällt.

Zur Berechnung der Wassermenge  $M$  kann man sich derselben Formel, —  $M = F k \sqrt{R J}$ , (243) bedienen. Kennt man  $M$  durch direkte Messung, (§ 5), so kann man nach derselben Gleichung den Coefficienten  $k$  berechnen, wodurch dieser jedenfalls sicherer erhalten wird, als aus der Tabelle im § 3, da die Bestimmung der Rauigkeitskategorie immerhin einer gewissen Willkür Raum lässt. Hat man  $k$  nach dieser Formel gefunden, so ist dessen Werth für die weiteren Rechnungen dieses Paragraphen bei zu behalten.

Anhang.  
Mathematische Tabellen.

Die Bestimmung der Wassermenge  $M$  erfolgt nach demselben Verfahren, das  
oben beschrieben wurde, wobei die beiden in Fig. 100 gezeigten Punkte der  
Kurve  $K$  die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  sind.

(231)

Die Bestimmung der Wassermenge  $M$  erfolgt nach demselben Verfahren, das  
oben beschrieben wurde, wobei die beiden in Fig. 100 gezeigten Punkte der  
Kurve  $K$  die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  sind.

Die Bestimmung der Wassermenge  $M$  erfolgt nach demselben Verfahren, das  
oben beschrieben wurde, wobei die beiden in Fig. 100 gezeigten Punkte der  
Kurve  $K$  die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  sind.

Die Bestimmung der Wassermenge  $M$  erfolgt nach demselben Verfahren, das  
oben beschrieben wurde, wobei die beiden in Fig. 100 gezeigten Punkte der  
Kurve  $K$  die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  sind.

Die Bestimmung der Wassermenge  $M$  erfolgt nach demselben Verfahren, das  
oben beschrieben wurde, wobei die beiden in Fig. 100 gezeigten Punkte der  
Kurve  $K$  die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  sind.

Die Bestimmung der Wassermenge  $M$  erfolgt nach demselben Verfahren, das  
oben beschrieben wurde, wobei die beiden in Fig. 100 gezeigten Punkte der  
Kurve  $K$  die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  sind.

Die Bestimmung der Wassermenge  $M$  erfolgt nach demselben Verfahren, das  
oben beschrieben wurde, wobei die beiden in Fig. 100 gezeigten Punkte der  
Kurve  $K$  die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  sind.

Die Bestimmung der Wassermenge  $M$  erfolgt nach demselben Verfahren, das  
oben beschrieben wurde, wobei die beiden in Fig. 100 gezeigten Punkte der  
Kurve  $K$  die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  sind.

Die Bestimmung der Wassermenge  $M$  erfolgt nach demselben Verfahren, das  
oben beschrieben wurde, wobei die beiden in Fig. 100 gezeigten Punkte der  
Kurve  $K$  die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  sind.

## Vorbemerkungen zu den Tabellen.

### Tabelle I.

Die Tabelle enthält die Sinuswerte, nach Bessel. Die einzelnen Werte sind im Text der Tabelle erklärt. Zur Erläuterung des Verfahrens ist ein Beispiel beigegeben.

Beispiel: Die Breite  $\alpha = 30^\circ 30'$  ist gegeben.

Gegeben die Seiten  $B = 1000$ ,  $C = 1000$ .

1) Man findet in der Tabelle die Werte für  $30^\circ 30'$ . Die beiden gegenüberliegenden Werte sind nach der Zahl 3 verzeichnet, welche das ursprüngliche Maß  $\alpha$  in der 2. Spalte  $30^\circ$  verzeichnet wurde. In der Spalte  $30'$  sind die Werte  $0,51763806$  und  $0,51763806$  verzeichnet. Diese sind die gesuchten Werte für  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$ .

# Anhang.

## Mathematische Tabellen.



Anhang.

Mathematische Tabellen.

---

## Erläuterungen zu den Tabellen.

### Tafel I.

Die Tafel enthält die Erddimensionen nach Bessel. Die einzelnen Bezeichnungen sind im Titel der Tabelle erläutert. Zur Erläuterung des Gebrauchs diene folgendes Beispiel.

Gegeben die Breite  $\varphi = 52^{\circ} 32' 34,364''$ .

Gesucht die Grössen B. L. q.  $R_m$ , m.  $R_n$ , n.

1) Man findet B in Abthl. A der Tafel direkt für  $52^{\circ} 30'$ . Den daselbst angegebenen Werthen ist noch die Zahl 5 vorzusetzen, welche des engen Raumes wegen nur in der 1. Spalte  $49^{\circ}$  vorgesetzt worden ist. In den Spalten  $54^{\circ}$  und  $55^{\circ}$  ist, wo die erste Zahlenstelle überstrichen worden ist, den vorgefundenen Zahlen die Zahl 6 vorzusetzen. Man findet also den direkten Tafelwerth, der mit  $B_t$  bezeichnet werde, für  $52^{\circ} 30'$

$$B_t = 5\ 818\ 380,341.$$

Es bleibt nun noch der Bogen  $2' 34,364''$ , oder  $154,364''$ , welcher mit  $\Delta \varphi''$  bezeichnet werde, in Metermass auszudrücken und dem Werthe  $B_t$  hinzuzufügen. Man findet  $\Delta \varphi$  in Metern:

$$\Delta \varphi \text{ m} = \Delta \varphi'' \cdot \Delta 1'' \text{ (worin } \Delta 1'' \text{ in Metern ausgedrückt ist)}$$

$$\text{also} \quad \log \Delta \varphi \text{ m} = \log \Delta \varphi + \log \Delta 1'' \\ = \log 154,364'' + \log \Delta 1''.$$

Log  $\Delta 1''$  findet man in der Tafel Abthl. A mit Argument  $52^{\circ}, 32'$ :

$$\log \Delta 1'' = 1,4900536.$$

Hierzu aus der Hülftafel rechts mit Argument  $30''$

$$\Delta'' = 3.$$

Mithin  $\log \Delta 1'' = 1,4900539.$

Hierzu  $\log 154,364'' = 2,1885460$

$$\log \Delta \varphi \text{ m} = 3,6785999$$

$$\Delta \varphi \text{ m} = 4770,897$$

Hierzu  $B_t = 5818380,341$

$$B = 5823151,238.$$

2) Da L mit zunehmender Breite abnimmt, so nehme man den **nächst grösseren** Tafelwerth aus Abthl. II

$$\log L_t = 1,2739323$$

bilde die Differenz  $\varphi_t - \varphi = 52^{\circ} 40' - 52^{\circ} 32' 34,364''$

$$\text{oder: } \Delta \varphi = 7' 25,636$$

$$\Delta \varphi'' = 445,636''.$$

Man findet nun in der Tafel mit Argument  $52^{\circ}$

$$\Delta 32' = 1,43888$$

$$+ \Delta 30'' = 7$$

$$+ \Delta 4'' = 0,9$$

$$\log \Delta 1'' = 1,43896.$$

Hierzu  $\log \Delta \varphi'' = 2,64898$

$$\log \Delta \log L = 4,08794$$

$$\Delta \log L = 12244.$$

} aus der Hülftafel rechts

Nach Obigen ist  $\log L_t = 1,2739323$   
 Hierzu  $\Delta \log L = 12244$   
 $\log L = 1,2751567.$

3) Der nächst niedere Tafelwerth für  $\log q$  ist

$\log q_t = 4,06954.$

Hiervon ist abzuziehen

$\Delta 2' = 13$

$\Delta 30'' = 3,3$

$\Delta 4'' = 0,4$

} Eingang in die Tafel **rechts.**

$\Delta \log q = 17.$

Mithin  $\log q = \log q_t = 4,06954$   
 $-\Delta \log q = 17$   
 $\log q = 4,06937.$

4) Der Tafelwerth für  $\log R_m$  ist

$\log R_t = 6,8044406.$

Hierzu  $\Delta 30' = 368,0$

$\Delta 2' = 24,54$

$\Delta 30'' = 6,0$

$\Delta 4'' = 0,8$

$\log R_m = 6,8044805.$

Ebenso findet man  $\log m$ ,  $\log R_n$ , und  $\log n$ . Bemerket sei noch, dass man  $\log L$  auch nach der Formel  $L = n \cos q$ , also  $\log L = \log n + \log \cos q$  finden könnte.

**Tafel II.**

Die Tafel enthält Additamente, welche man, so lange man es mit sehr kleinen Winkeln zu thun hat, dem Logarithmus irgend einer Winkelfunktion nur zuzulegen braucht, um den Logarithmus irgend einer anderen Funktion zu erhalten, und zwar nach Anleitung der folgenden Formeln und beigegeführten Erläuterungen:

Es bezeichne  $\varrho$ , wie allgemein, den Bogen, welcher gleich dem Radius ist, so ist:

1)  $\log \text{arc } a = \log a'' + \text{copl } \log \varrho''$ , }  
 2)  $\log a'' = \log \text{arc } a + \log \varrho''$ . } Thl. I § 31.

Ferner bedeute A das aus der Tafel zu entnehmende Additament, dann ist (vergl. § 33):

3)  $\log \text{tang } a = \log \text{arc } a + 2 A$

$= \log \sin a + 3 A$

4)  $\log \sin a = \log \text{arc } a - A$

$= \log \text{tang } a - 3 A$

5)  $\log \cos a = \text{cpl } 3 A$

6)  $\log \text{arc } a = \log \sin a + A$

$= \log \text{tang } a - 2 A$

7)  $\log a'' = \log \sin a + \log \varrho'' + A$

$= \log \text{tang } a + \log \varrho'' - 2 A$

$= \log \text{arc } a + \log \varrho''.$

Beispiel 1) Gegeben  $\log \text{arc } a$ .

Gesucht a)  $\log a''$ . Auflösung folgt aus Formel 1),

b)  $\log \sin a$ .

Da  $\log a''$  das Argument der Tafel, so hat man zunächst dieses nach Formel 1 zu berechnen, geht mit  $\log a''$  als Argument in die Tafel, entnimmt A und wendet Formel 4) an.

Gesucht c)  $\log \operatorname{tang} a$ .

Auflösung analog dem Beispiel zu b) mit Anwendung der Formel 3).

Beispiel 2) Gegeben  $\log \sin a$

a) gesucht  $\log \operatorname{arc} a$ .

Aus Formel 7) folgt, wenn man das verhältnissmässig kleine Additament A einstweilen vernachlässigt:

$$\log a'' = \log \sin a + \log e''.$$

Man kennt somit das Argument der Tafel,  $\log a''$ , entnimmt das zugehörige Additament und wendet Formel 6) an

b) gesucht  $\log \operatorname{tang} a$ .

Auflösung analog a) mit Anwendung der Formel 3).

Alle anderen Fälle werden ähnlich behandelt, indem es immer nur darauf ankommt,  $\log a''$ , das Argument der Tafel, zu ermitteln, wobei ein angenäherter Werth für  $\log a''$  genügt, so lange eben  $\log a''$  lediglich als Argument dienen soll. Wie man den **genauen** Werth für  $\log a''$  erhalten kann, lehrt folgendes

Beispiel 3) Gegeben  $\log \sin a''$

Gesucht  $\log a''$ .

Man ermittelt nach Beispiel 2) einen vorläufigen Werth für  $\log a''$  als Argument, entnimmt der Tafel das zugehörige Additament und wendet Formel 7) an.

Die Tafel giebt ferner noch den Logarithmus des Erdbogens  $s$  in Metern, für den Winkel  $a''$ . Als Erdradius ist für die Berechnung von  $s$  der mittlere Krümmungsradius  $\sqrt{R_m R_n}$  für die Breite  $51^\circ$  zu Grunde gelegt. Für diesen Radius ist der Logarithmus der Bogenlänge für  $1'' = 1,49052$ , (vergl. Tafel I D,  $\frac{\log m + \log n}{2}$  für  $\varphi = 51^\circ$ ), folglich  $\log s = \log a'' + 1,49052$ .

### Tafel III.

Ist in einem rechtwinkligen Dreiecke eine Kathete  $h$  in Vergleich zur anderen Kathete  $s$  sehr klein, so kann  $\frac{h}{s}$  als analytisches Mass des der Kathete  $s$  anliegenden sehr kleinen Winkels  $a$  angesehen werden. Um diesen in Sekunden zu erhalten, hat man also

$$a'' = e'' \frac{h}{s}$$

oder, wenn  $s$  in Metern,  $h$  in Centimetern ausgedrückt ist

$$a'' = e'' \frac{h}{100 s}$$

oder für  $\frac{e''}{100} = k$

$$a'' = h \frac{k}{s}$$

Die Grössen  $\frac{k}{s}$  können aus Tafel III mit  $s$  als Argument entnommen werden, (vergl. Thl. II § 24).

Die Tafel giebt ferner die Gewichte der Visirstrahlen  $s$  für trigonometrische Rechnungen nach Thl. II § 24.

Diese sind nach diesem § gleich  $\frac{1}{s^2}$ . Da dieselben aber nur **Verhältnisszahlen** vorstellen, so steht nichts im Wege, die Strahlengewichte durch  $\left(\frac{k}{s}\right)^2$ , statt durch  $\frac{1}{s^2}$  auszudrücken, wie in der Tafel geschehen.

#### Tafel IV.

Die Tafel dient zur Berechnung des Höhenunterschiedes zweier Punkte aus den in denselben beobachteten Barometer- und Thermometerständen.

Beispiel: Sei  $B = 774,6$  mm     $t = +15^\circ$  Cels.

$B' = 780,4$  mm     $t' = +17^\circ$  Cels.

also:  $B' - B = 15,8$  mm

$\frac{B + B'}{2} = 772,5$  mm     $\frac{t + t'}{2} = 16^\circ$  Cels.

Man findet die Höhendifferenz für 1 mm Barometerdifferenz in der Tafel für  $\frac{t + t'}{2} = 16^\circ$  und für  $\frac{B + B'}{2} = 770$  mm:

$$\Delta = 11,00 \text{ m.}$$

Hiervon geht ab die aus der Hülftafel P. P. unter 760—780 für die Barometerdifferenz 2,5 mm zu entnehmende Höhendifferenz

1) für 2 m = 2,8 cm

   für 0,5 m = 0,7 cm

   Sa. 3,5 cm.

Folglich die Höhendifferenz für 1 mm Barometerdifferenz

$$\Delta 1 \text{ mm} = 11,00 - 0,035 = 10,965 \text{ m.}$$

Mithin die Höhendifferenz für die Barometerdifferenz

$$B' - B = 15,8 \text{ mm} : \Delta h = 15,8 \times 10,965 = 173,27 \text{ m}$$

#### Tafel V

giebt die zulässigen Fehler berechneter Flächen und gemessener Längen.

A) Ist  $F$  die berechnete Fläche, so ermittelt man den zulässigen Fehler  $a$  nach folgenden Beispielen:

1)  $F$  sei in Aren ausgedrückt.

a) die Arenzahl ist **einstellig**, z. B.  $F = 9$  Ar. Man liest die zur Abscisse 9 gehörige Ordinate der mit 1 Ar bezeichneten Kurve ab und erhält  $a = 2,4$ . Die Einheit der abgelesenen Ordinate hat den Werth 10 □m, daher  $a = 24$  qm.

b) Die Arenzahl ist **zweistellig**, z. B.  $F = 90$  Ar. Die Ablesung erfolgt an der 10 Arenkurve, also  $a = 75$  qm.

2)  $F$  ist in Hektaren gegeben, z. B. 9 hekt. Die Ablesung erfolgt an der 1 Hektarenkurve. Die Einheit der abgelesenen Ordinate hat den Werth von 1 Ar, also  $a = 2,6$  Ar.

Ist die Hektarenzahl **zweistellig**, also  $F = 90$  hekt, so erfolgt die Ablesung an der 10 Hektarenkurve. Man findet  $a = 14,7$  Ar.

Ist die Hektarenzahl **dreistellig**, so erfolgt die Ablesung an der 100 Hektarenkurve, und zwar sind die Ordinatenziffern **links** abzulesen, z. B.  $F = 300$  hekt,  $a = 45$  Ar.

B) Sei  $s = 600$  m gemessen, so ist der zulässige Längenfehler 1) bei günstigem Terrain, (Kurve I),  $a = 65$  cm, 2) bei mittlerem Terrain, (Kurve II),  $a = 79$  cm, 3) bei ungünstigem Terrain, (Kurve III),  $a = 92$  cm.

Ist  $s > 1000$  m, so kommt die Hilfstafel links in Betracht. Für  $s = 2500$  m findet man z. B. nach Kurve I  $a = 2,2$  m, für Kurve II  $a = 2,5$  m, für Kurve III  $a = 2,8$  m.

**Tafel VI**

dient zum quadriren und radiciren.

Beispiele:

1)  $1778,46^2 = 3161284$

1430	}	aus der Hilfstafel P. P.
214,5		
3162928		

2) Die Tafel reicht nur bis 2000, . . . Wäre zu quadriren 2454,22, so zerlegt man diese Zahl in

a	b	
1954,22	+ 500	
a <sup>2</sup> = 3818116		
	785	}
	78,5	
+ b <sup>2</sup> = 250000		
+ 2 a b = 1954220		
(a + b) <sup>2</sup> = 6023199.		

Einfacher und für die meisten Zwecke der Praxis genau genug, würde man dies Quadrat auf der zweiten Seite der Tafel = 6022756 erhalten.

3)  $\sqrt{271341}$ . Die nächst kleinere, in der Tafel direkt angegebene Zahl ist 270400, dazu gehört die Wurzel 520

die Differenz gegen <u>271341</u>	520
ist <u>941</u>	

Man findet in Tafel P. P. neben 921 die folgende Stelle der Wurzel . . . . . —,9

ferner neben 20 (941 — 921 = 20) . . . . .	— 2
zusammen	520,92.

Man könnte versucht sein, statt der Wurzel 520 die Zahl 1647 als Wurzel zu entnehmen. Die Stellenzahl der gegebenen Wurzelbasis ist aber eine **grade**, die zur Wurzel 1647 gehörige Quadratzahl 2712609 hat dagegen eine **ungrade** Stellenzahl, kann also nicht in Betracht kommen. In der Tafel sind die Quadratzahlen mit grader Stellenzahl von denen mit ungrader Stellenzahl sofort an der Stellenzahl der **vorgedruckten** Zahlen kenntlich. Das Quadrat zu 1647 beginnt mit der vorgedruckten Zahl 271 . . (ungrade Stellenzahl), dagegen das Quadrat zu 520 mit 27 (grade Stellenzahl).

Wäre satt  $\sqrt{271341}$  gegeben

4)  $\sqrt{27134,1}$ , so würde man finden . . . . . 164,7

Tafelwerth: <u>27126,09</u>	
Differenz <u>8,01</u>	
Tafelwerth in P. P. 6,55, dazu gehört als folgende Stelle der Wurzel	: 2
zusammen	164,72



# Tafel I.

## Erddimensionen.

### Thl. A.

$\varphi$  = geographische Breite.  
B = Länge des Meridianbogens vom Aequator bis zur Breite  $\varphi$  in Metern.

### Thl. B.

L = Bogenlänge für 1" des Parallelkreises in der Breite  $\varphi$ .

### Thl. C.

$q = \frac{L \sin \varphi}{2 R_m}$  worin  $R_m$  den Krümmungsradius des Meridians in der Breite  $\varphi$  bezeichnet.

### Thl. D.

$R_m$  = Krümmungsradius des Meridians.  
 $m$  = Bogenlänge für 1" des Meridians.  
 $R_n$  = Krümmungsradius des zum Meridian senkrechten grössten Kugelkreises.  
 $n$  = Bogenlänge für 1" dieses Kreises.

} in der Breite  $\varphi$ .

IA.

B.

'	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°
0	5 429 072,731	540 279,542	651 505,564	762 750,674	874 014,722	985 297,539	096 598,929
10	5 447 605,861	558 815,881	670 045,094	781 293,371	892 560,560	003 846,486	115 150,952
20	5 466 139,526	577 352,754	688 585,153	799 836,593	911 106,918	022 395,949	133 703,484
30	5 484 673,728	595 890,159	707 125,742	818 380,341	929 653,796	040 945,925	152 256,523
40	5 503 208,465	614 428,096	725 666,858	836 924,612	948 201,193	059 496,415	170 810,069
50	5 521 743,736	632 966,565	744 208,502	855 469,406	966 749,107	078 047,417	189 364,121
<b>Log Δ 1''</b>							
$\varphi = 49^\circ$							
0'	10'	20'	30'	40'	50'	"	△
1,489 7912	0 1,489 8038	1,489 8164	0 1,489 8289	1,489,8414	0 1,489 8540		
7918	1 8044	8170	1 8295	8420	1 8546		
7925	2 8051	8177	2 8302	8427	2 8553	10	1
7931	3 8057	8183	3 8308	8433	3 8558	20	2
7937	4 8063	8189	4 8314	8439	4 8564	30	3
7944	5 8070	8195	5 8320	8445	5 8570	40	4
7950	6 8076	8201	6 8327	8452	6 8577	50	5
7956	7 8082	8208	7 8333	8458	7 8583		
7962	8 8088	8214	8 8339	8463	8 8589		
1,489 7969	9 1,489 8094	1,489 8220	9 1,489 8345	1,489 8470	9 1,489 8596		
$\varphi = 50^\circ$							
0'	10'	20'	30'	40'	50'	"	△
1,489 8665	0 1,489 8790	1,489 8915	0 1,489 9039	1,489 9164	0 1,489 9288		
8671	1 8796	8921	1 9045	9170	1 9294		
8677	2 8803	8927	2 9051	9177	2 9301	10	1
8684	3 8809	8934	3 9058	9183	3 9307	20	2
8690	4 8815	8940	4 9064	9189	4 9313	30	3
8696	5 8821	8946	5 9070	9195	5 9319	40	4
8702	6 8828	8952	6 9077	9201	6 9326	50	5
8709	7 8834	8958	7 9083	9208	7 9332		
8715	8 8840	8965	8 9089	9214	8 9338		
1,489 8721	9 1,489 8846	1,489 8970	9 1,489 9095	1,489 9220	9 1,489 9344		
$\varphi = 51^\circ$							
0'	10'	20'	30'	40'	50'	"	△
1,489 9413	0 1,489 9537	1,489 9661	0 1,489 9785	1,489 9908	0 1,490 0032		
9419	1 9543	9667	1 9791	9914	1 0038		
9425	2 9550	9673	2 9797	9920	2 0044	10	1
9432	3 9556	9680	3 9803	9927	3 0050	20	2
9438	4 9562	9686	4 9810	9933	4 0057	30	3
9444	5 9567	9692	5 9816	9939	5 0063	40	4
9450	6 9573	9698	6 9822	9945	6 0069	50	5
9456	7 9580	9704	7 9828	9951	7 0075		
9463	8 9586	9710	8 9834	9957	8 0081		
1,489 9468	9 1,489 9592	1,489 9716	9 1,489 9840	1,489 9964	9 1,490 0087		

IA.

B.

Log $\Delta 1''$						
$\varphi = 52^\circ$						
0'	10'	20'	30'	40'	50'	" $\Delta$
1,490 0155	0 1,490 0278	1,490 0401	0 1,490 0524	1,490 0646	0 1,490 0769	
0161	1 0284	0407	1 0530	0653	1 0775	
0167	2 0290	0413	2 0536	0658	2 0781	10 1
0172	3 0296	0419	3 0542	0664	3 0787	20 2
0179	4 0302	0426	4 0548	0670	4 0793	30 3
0186	5 0309	0432	5 0555	0677	5 0800	40 4
0192	6 0315	0438	6 0561	0683	6 0806	50 5
0198	7 0321	0444	7 0567	0689	7 0812	
0204	8 0327	0450	8 0573	0695	8 0818	
1,490 0210	9 1,490 0333	1,490 0456	9 1,490 0579	1,490 0701	9 1,490 0824	
$\varphi = 53^\circ$						
0'	10'	20'	30'	40'	50'	" $\Delta$
1,490 0891	0 1,490 1013	1,490 1135	0 1,490 1256	1,490 1378	0 1,490 1499	
0897	1 1019	1141	1 1262	1384	1 1505	
0903	2 1025	1147	2 1268	1390	2 1511	10 1
0909	3 1031	1153	3 1274	1396	3 1517	20 2
0915	4 1037	1160	4 1280	1402	4 1523	30 3
0922	5 1044	1166	5 1287	1409	5 1529	40 4
0928	6 1050	1172	6 1293	1415	6 1535	50 5
0934	7 1056	1178	7 1299	1421	7 1541	
0940	8 1062	1184	8 1305	1427	8 1547	
1,490 0946	9 1,490 1068	1,490 1190	9 1,490 1311	1,490 1432	9 1,490 1553	
$\varphi = 54^\circ$						
0'	10'	20'	30'	40'	50'	" $\Delta$
1,490 1620	0 1,490 1741	1,490 1861	0 1,490 1981	1,490 2101	0 1,490 2221	
1626	1 1747	1867	1 1987	2107	1 2227	
1632	2 1753	1873	2 1993	2113	2 2233	10 1
1638	3 1759	1879	3 1999	2119	3 2239	20 2
1644	4 1765	1885	4 2005	2125	4 2245	30 3
1650	5 1771	1891	5 2011	2131	5 2251	40 4
1656	6 1777	1897	6 2017	2137	6 2257	50 5
1662	7 1783	1903	7 2023	2143	7 2263	
1668	8 1789	1909	8 2029	2149	8 2269	
1,490 1674	9 1,490 1795	1,490 1915	9 1,490 2035	1,490 2155	9 1,490 2275	
$\varphi = 55^\circ$						
0'	10'	20'	30'	40'	50'	" $\Delta$
1,490 2341	0 1,490 2460	1,490 2579	0 1,490 2698	1,490 2816	0 1,490 2934	
2347	1 2466	2585	1 2704	2822	1 2940	
2353	2 2472	2591	2 2710	2828	2 2946	10 1
2359	3 2478	2597	3 2716	2834	3 2952	20 2
2365	4 2484	2603	4 2722	2840	4 2958	30 3
2371	5 2490	2609	5 2728	2846	5 2963	40 4
2377	6 2496	2615	6 2734	2852	6 2969	50 5
2383	7 2501	2621	7 2740	2858	7 2975	
2388	8 2507	2626	8 2745	2863	8 2981	
1,490 2394	9 1,490 2513	1,490 2632	9 1,490 2751	1,490 2869	9 1,490 2987	

b\*

IB

## Log L.

	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°
0	1,3079883	1,2991380	1,2899672	1,2804622	1,2706077	1,2603877	1,2497843
10	1,3065350	1,2976321	1,2884067	1,2788444	1,2689302	1,2586476	1,2479785
20	1,3050730	1,2961173	1,2868367	1,2772169	1,2672425	1,2568967	1,2461614
30	1,3036024	1,2945935	1,2852574	1,2755796	1,2655445	1,2551351	1,2443330
40	1,3021231	1,2930606	1,2836686	1,2739323	1,2638361	1,2533625	1,2424930
50	1,3006349	1,2915185	1,2820702	1,2722751	1,2621172	1,2515790	1,2406415

Log Δ 1"									
$\varphi = 49^\circ$									
0'	10'	20'	30'	40'	50'	"	Δ		
1,38 421	0	1,38 678	1,38 934	0	1,39 191	1,39 450	0	1,39 704	
434	1	690	947	1	204	463	1	717	
446	2	703	960	2	217	475	2	730	10 2
459	3	715	973	3	229	488	3	743	20 4
472	4	727	986	4	242	500	4	756	30 6
485	5	740	1,38 999	5	255	513	5	769	40 8
497	6	752	1,39 011	6	268	526	6	782	50 10
510	7	764	024	7	281	538	7	795	
523	8	776	037	8	293	551	8	808	
1,38 535	9	1,38 789	1,39 050	9	1,39 306	1,39 563	9	1,39 821	

$\varphi = 50^\circ$									
0'	10'	20'	30'	40'	50'	"	Δ		
1,39 962	0	1,40 221	1,40 478	0	1,40 736	1,40 997	0	1,41 254	
975	1	234	491	1	749	1,41 010	1	267	
988	2	247	504	2	762	023	2	280	10 2
1,40 001	3	260	517	3	775	035	3	293	20 4
014	4	273	530	4	788	048	4	306	30 7
027	5	286	543	5	801	061	5	319	40 9
040	6	298	556	6	814	074	6	332	50 11
053	7	311	569	7	827	087	7	345	
066	8	324	582	8	840	099	8	358	
1,40 079	9	1,40 337	1,40 595	9	1,40 853	1,41 112	9	1,41 371	

$\varphi = 51^\circ$									
0'	10'	20'	30'	40'	50'	"	Δ		
1,41 511	0	1,41 774	1,42 032	0	1,42 292	1,42 553	0	1,42 814	
524	1	787	045	1	305	566	1	827	
537	2	800	058	2	318	579	2	840	10 2
550	3	813	070	3	331	592	3	854	20 4
563	4	826	083	4	344	605	4	867	30 7
577	5	840	095	5	358	619	5	880	40 9
590	6	853	108	6	371	632	6	893	50 11
603	7	866	121	7	384	645	7	906	
616	8	879	133	8	397	658	8	920	
1,41 629	9	1,41 892	1,42 146	9	1,42 410	1,42 671	9	1,42 933	

IB.

## Log L.

Log $\Delta 1''$										
$\varphi = 52^\circ$										
0'	10'	20'	30'	40'	50'	"	$\Delta$			
1,43 077	0	1,43 337	1,43 597	0	1,43 862	1,44 122	0	1,44 389		
090	1	350	610	1	875	135	1	402		
103	2	364	624	2	888	149	2	415	10	2
115	3	377	637	3	901	162	3	428	20	4
128	4	390	651	4	914	176	4	441	30	7
141	5	404	664	5	927	189	5	454	40	9
154	6	417	677	6	940	202	6	466	50	11
167	7	430	691	7	953	216	7	479		
179	8	443	704	8	966	229	8	492		
1,43 192	9	1,43 457	1,43 718	9	1,43 979	1,44 243	9	1,44 505		
$\varphi = 53^\circ$										
0'	10'	20'	30'	40'	50'	"	$\Delta$			
1,44 651	0	1,44 914	1,45 179	0	1,45 443	1,45 709	0	1,45 977		
664	1	927	192	1	457	723	1	990		
677	2	941	206	2	470	736	2	1,46 003	10	2
690	3	954	219	3	484	750	3	016	20	4
703	4	968	232	4	497	763	4	029	30	7
717	5	981	246	5	511	777	5	043	40	9
730	6	994	259	6	525	790	6	056	50	11
743	7	1,45 008	272	7	538	804	7	069		
756	8	021	285	8	552	817	8	082		
1,44 769	9	1,45 034	1,45 299	9	1,45 565	1,45 831	9	1,46 095		
$\varphi = 54^\circ$										
0'	10'	20'	30'	40'	50'	"	$\Delta$			
1,46 243	0	1,46 512	1,46 776	0	1,47 045	1,47 312	0	1,47 585		
256	1	525	790	1	059	326	1	598		
270	2	538	803	2	072	339	2	612	10	2
283	3	551	817	3	086	353	3	625	20	4
297	4	564	830	4	099	366	4	638	30	7
310	5	577	844	5	113	380	5	652	40	9
323	6	590	857	6	126	394	6	665	50	11
337	7	603	871	7	140	407	7	678		
350	8	616	884	8	153	421	8	691		
1,46 364	9	1,46 629	1,46 898	9	1,47 167	1,47 434	9	1,47 705		
$\varphi = 55^\circ$										
0'	10'	20'	30'	40'	50'	"	$\Delta$			
1,47 851	0	1,48 123	1,48 392	0	1,48 666	1,48 937	0	1,49 209		
865	1	137	406	1	679	951	1	223		
878	2	150	420	2	693	964	2	236	10	2
892	3	164	434	3	707	978	3	250	20	5
905	4	177	448	4	720	991	4	264	30	7
919	5	191	462	5	734	1,49 005	5	278	40	9
932	6	205	475	6	747	019	6	291	50	11
945	7	218	489	7	761	032	7	305		
959	8	232	503	8	774	046	8	319		
1,47 973	9	1,48 245	1,48 517	9	1,48 788	1,49 059	9	1,49 332		

IC

**Log q.**

M	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	M							
0	4,08052	4,07807	4,07507	4,07152	4,06741	4,06278	4,05746	0							
10	4,08015	4,07761	4,07452	4,07088	4,06667	4,06189	4,05652	10							
20	4,07976	4,07713	4,07395	4,07022	4,06591	4,06104	4,05557	20							
30	4,07936	4,07664	4,07337	4,06954	4,06514	4,06017	4,05460	30							
40	4,07895	4,07613	4,07277	4,06885	4,06435	4,05928	4,05362	40							
50	4,07852	4,07561	4,07215	4,06814	4,06355	4,05838	4,05261	50							
60	4,07807	4,07507	4,07152	4,06741	4,06273	4,05746	4,05159	60							
$\Delta$ (negativ).															
'	$\Delta'$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\Delta''$	$\Delta'$	$\Delta''$	"
1	3,7	0,6	4,6	0,7	5,5	0,9	6,4	1,1	7,4	1,2	8,4	1,4	9,4	1,5	10
2	7,6	1,2	9,4	1,6	11,2	1,9	13,0	2,2	15,0	2,5	16,9	2,8	18,9	3,1	20
3	11,6	1,9	14,3	2,4	17,0	2,9	19,8	3,3	22,7	3,8	25,6	4,2	29,6	4,9	30
4	15,7	2,6	19,4	3,2	23,0	3,8	26,7	4,4	30,6	5,1	34,5	5,8	38,4	6,4	40
5	20,0	3,3	24,6	4,1	29,2	4,9	33,8	5,6	38,6	6,4	43,5	7,3	48,5	8,1	50
6	24,5	4,1	30,0	5,0	35,5	5,9	41,1	6,8	46,3	7,7	52,7	8,8	58,7	9,8	60
7	28,2	0,4	34,6	0,6	41,0	0,7	47,5	0,8	53,7	0,9	61,7	1,0	68,1	1,1	7
8	32,1	0,5	39,4	0,7	46,7	0,8	54,8	0,9	61,3	1,0	69,6	1,1	77,6	1,3	8
9	36,1	0,6	44,3	0,7	52,5	0,9	60,9	1,0	69,0	1,1	78,3	1,3	88,3	1,5	9

ID Krümmungsradien u. Bogenlängen für 1" grösster Kugelkreise.

$\varphi^0$	log $R_m$		log m		log $R_n$		log n		$\varphi^0$								
49°	6,8042164		1,4897912		6,8054706		1,4910454		49°								
50°	2916		8665		4956		0705		50°								
51°	3664		9413		5206		0954		51°								
52°	4406		1,4900155		5453		1202		52°								
53°	5142		0891		5698		1447		53°								
54°	5871		1620		5941		1690		54°								
55°	6592		2341		6182		1930		55°								
$\Delta R_m$ und $\Delta m$					$\Delta R_n$ und $\Delta n$												
M	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	$\Delta'$	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	$\Delta'$	M
10	125,3	124,7	123,7	122,7	121,5	120,2	118,8	2	41,7	41,6	41,2	40,8	40,5	40,1	39,7	0,7	10
20	250,6	249,4	247,4	245,4	243,0	240,4	237,6	4	83,3	83,2	82,4	81,5	81,0	80,2	79,7	1,3	20
30	375,9	374,0	371,0	368,0	364,5	360,5	356,5	6	125,0	124,9	123,6	122,2	121,5	120,3	119,1	2,0	30
40	501,3	498,7	494,7	490,7	486,0	480,7	475,3	8	166,6	166,6	164,8	162,9	162,0	160,4	158,8	2,7	40
50	626,6	623,3	618,3	613,3	607,5	600,8	594,2	10	208,3	208,3	206,0	204,2	202,5	200,5	198,6	3,3	50
60	752,0	748,0	742,0	736,0	729,0	721,0	713,0	12	250,0	250,0	247,2	245,0	243,0	240,6	238,3	4,0	60
7	87,7	87,3	86,6	85,9	85,0	84,1	83,2	1,4	29,2	29,2	28,8	28,6	28,4	28,1	27,8	0,5	7
8	100,2	99,7	98,9	98,1	97,2	96,1	95,1	1,6	33,4	33,0	33,0	32,7	32,4	32,1	31,8	0,5	8
9	112,5	112,2	111,3	110,4	109,3	108,2	106,9	1,8	37,6	37,5	37,1	36,7	36,5	36,1	35,7	0,6	9

## Tafel II.

### Additamente.

Es bedeuten:

$s$  die Länge des zum Winkel  $a''$  gehörigen Erdbogens in Metern ( $s$  ist für den mittleren Krümmungsradius des 51sten Breitengrades berechnet).

$A$  bedeutet das Additament für  $\log a''$  in Einheiten der 7ten Mantissenstelle.

Es ist  $\log a'' = \log s - 1,49052$ .

Hierin ist  $1,49052 = \frac{\log m + \log n}{2}$  für den 51sten Breitengrad. (Vergl. den Schluss der Erläuterungen.)

$\log s$  dient als Argument zur Entnahme des Additaments für  $\log \operatorname{arc} a$ ,  $\log \sin a$  und  $\log \operatorname{tang} a$ , wenn man es mit Erdbögen zu thun hat, also mit einer Kugel mit dem Radius  $\sqrt{R_m R_n}$ . Für diese Kugel ist  $\log s = \log \operatorname{arc} a + \log \sqrt{R_m R_n}$ , (da  $\operatorname{arc} a =$  Bogenlänge für  $R = 1$ , — Theil I, § 31 —).

$$\log a'' = 5,3144251.$$

$$\text{cpl. } \log a'' = 4,6855749 - 10.$$

II. Additamente.

log $\alpha''$	A	log s	log $\alpha''$	A	log s	log $\alpha''$	A	log s
	0		3,0814		4,5719	3,2330		4,7235
2,0836	0,5	3,5741	3,0857	25,0	4,5763	3,2352	50,0	4,7257
2,3221	1,0	3,8127	3,0900	25,5	4,5805	3,2373	50,5	4,7278
2,4331	1,5	3,9236	3,0942	26,0	4,5847	3,2395	51,0	4,7300
2,5061	2,0	3,9966	3,0983	26,5	4,5888	3,2416	51,5	4,7321
2,5601	2,5	4,0512	3,1023	27,0	4,5928	3,2437	52,0	4,7342
2,6043	3,0	4,0948	3,1062	27,5	4,5968	3,2457	52,5	4,7362
2,6406	3,5	4,1311	3,1101	28,0	4,6006	3,2478	53,0	4,7383
2,6716	4,0	4,1621	3,1139	28,5	4,6045	3,2498	53,5	4,7403
2,6988	4,5	4,1893	3,1177	29,0	4,6082	3,2518	54,0	4,7423
2,7230	5,0	4,2135	3,1214	29,5	4,6119	3,2538	54,5	4,7443
2,7447	5,5	4,2352	3,1250	30,0	4,6155	3,2558	55,0	4,7463
2,7644	6,0	4,2550	3,1285	30,5	4,6191	3,2577	55,5	4,7483
2,7826	6,5	4,2731	3,1320	31,0	4,6226	3,2597	56,0	4,7502
2,7993	7,0	4,2898	3,1355	31,5	4,6260	3,2616	56,5	4,7521
2,8148	7,5	4,3053	3,1389	32,0	4,6294	3,2635	57,0	4,7540
2,8293	8,0	4,3198	3,1422	32,5	4,6327	3,2654	57,5	4,7559
2,8428	8,5	4,3334	3,1455	33,0	4,6360	3,2673	58,0	4,7578
2,8556	9,0	4,3461	3,1488	33,5	4,6393	3,2691	58,5	4,7596
2,8677	9,5	4,3582	3,1519	34,0	4,6425	3,2710	59,0	4,7615
2,8791	10,0	4,3696	3,1551	34,5	4,6456	3,2728	59,5	4,7633
2,8899	10,5	4,3805	3,1582	35,0	4,6487	3,2746	60,0	4,7651
2,9003	11,0	4,3908	3,1613	35,5	4,6518	3,2764	60,5	4,7669
2,9102	11,5	4,4007	3,1643	36,0	4,6548	3,2782	61,0	4,7687
2,9196	12,0	4,4102	3,1672	36,5	4,6578	3,2799	61,5	4,7705
2,9287	12,5	4,4192	3,1702	37,0	4,6607	3,2817	62,0	4,7722
2,9374	13,0	4,4279	3,1731	37,5	4,6636	3,2834	62,5	4,7739
2,9457	13,5	4,4362	3,1759	38,0	4,6664	3,2851	63,0	4,7757
2,9538	14,0	4,4443	3,1787	38,5	4,6693	3,2869	63,5	4,7774
2,9615	14,5	4,4520	3,1815	39,0	4,6721	3,2885	64,0	4,7791
2,9690	15,0	4,4595	3,1843	39,5	4,6748	3,2902	64,5	4,7807
2,9762	15,5	4,4668	3,1870	40,0	4,6775	3,2919	65,0	4,7824
2,9833	16,0	4,4738	3,1897	40,5	4,6802	3,2936	65,5	4,7841
2,9900	16,5	4,4806	3,1923	41,0	4,6828	3,2952	66,0	4,7857
2,9966	17,0	4,4871	3,1949	41,5	4,6855	3,2968	66,5	4,7874
3,0030	17,5	4,4935	3,1975	42,0	4,6880	3,2985	67,0	4,7890
3,0092	18,0	4,4997	3,2001	42,5	4,6906	3,3001	67,5	4,7906
3,0152	18,5	4,5058	4,2026	43,0	4,6931	3,3017	68,0	4,7922
3,0211	19,0	4,5116	3,2051	43,5	4,6956	3,3032	68,5	4,7938
3,0268	19,5	4,5173	3,2076	44,0	4,6981	3,3048	69,0	4,7953
3,0324	20,0	4,5229	3,2100	44,5	4,7005	3,3064	69,5	4,7969
3,0378	20,5	4,5283	3,2124	45,0	4,7029	3,3079	70,0	4,7985
3,0431	21,0	4,5336	3,2148	45,5	4,7053	3,3095	70,5	4,8000
3,0483	21,5	4,5388	3,2172	46,0	4,7077	3,3110	71,0	4,8015
3,0533	22,0	4,5439	3,2195	46,5	4,7100	3,3125	71,5	4,8030
3,0583	22,5	4,5488	3,2218	47,0	4,7123	3,3140	72,0	4,8046
3,0631	23,0	4,5536	3,2241	47,5	4,7146	3,3155	72,5	4,8060
3,0678	23,5	4,5583	3,2264	48,0	4,7169	3,3170	73,0	4,8075
3,0724	24,0	4,5630	3,2286	48,5	4,7191	3,3185	73,5	4,8090
3,0770	24,5	4,5675	3,2308	49,0	4,7213	3,3200	74,0	4,8105
3,0814	25,0	4,5719	3,2330	49,5	4,7235	3,3214	74,5	4,8119
				50,0			75,0	

### Additamente.

log a''	A	log s	log a''	A	log s	log a''	A	log s
3,3214		4,8119	3,3841	100,0	4,8746	3,4326	125,0	4,9232
3,3228	75,0	4,8134	3,3851	100,5	4,8757	3,4335	125,5	4,9240
3,3243	75,5	4,8148	3,3862	101,0	4,8768	3,4344	126,0	4,9249
3,3257	76,0	4,8162	3,3873	101,5	4,8778	3,4352	126,5	4,9257
3,3271	76,5	4,8177	3,3884	102,0	4,8789	3,4361	127,0	4,9266
3,3286	77,0	4,8191	3,3894	102,5	4,8800	3,4369	127,5	4,9275
3,3300	77,5	4,8205	3,3905	103,0	4,8810	3,4378	128,0	4,9283
3,3314	78,0	4,8219	3,3916	103,5	4,8821	3,4386	128,5	4,9292
3,3327	78,5	4,8233	3,3926	104,0	4,8831	3,4395	129,0	4,9300
3,3341	79,0	4,8246	3,3937	104,5	4,8842	3,4403	129,5	4,9308
3,3355	79,5	4,8260	3,3947	105,0	4,8852	3,4412	130,0	4,9317
3,3368	80,0	4,8274	3,3957	105,5	4,8862	3,4420	130,5	4,9325
3,3382	80,5	4,8287	3,3968	106,0	4,8873	3,4428	131,0	4,9334
3,3395	81,0	4,8300	3,3978	106,5	4,8883	3,4437	131,5	4,9342
3,3409	81,5	4,8314	3,3988	107,0	4,8893	3,4445	132,0	4,9350
3,3422	82,0	4,8327	3,3998	107,5	4,8903	3,4453	132,5	4,9358
3,3435	82,5	4,8340	3,4008	108,0	4,8913	3,4461	133,0	4,9366
3,3448	83,0	4,8353	3,4018	108,5	4,8923	3,4469	133,5	4,9375
3,3461	83,5	4,8366	3,4028	109,0	4,8933	3,4478	134,0	4,9383
3,3474	84,0	4,8379	3,4038	109,5	4,8943	3,4486	134,5	4,9391
3,3487	84,5	4,8392	3,4048	110,0	4,8953	3,4494	135,0	4,9399
3,3500	85,0	4,8405	3,4058	110,5	4,8963	3,4502	135,5	4,9407
3,3512	85,5	4,8417	3,4068	111,0	4,8973	3,4510	136,0	4,9415
3,3525	86,0	4,8430	3,4078	111,5	4,8983	3,4518	136,5	4,9423
3,3537	86,5	4,8443	3,4087	112,0	4,8993	3,4526	137,0	4,9431
3,3550	87,0	4,8455	3,4097	112,5	4,9002	3,4534	137,5	4,9439
3,3562	87,5	4,8466	3,4107	113,0	4,9012	3,4542	138,0	4,9447
3,3575	88,0	4,8480	3,4116	113,5	4,9021	3,4549	138,5	4,9455
3,3587	88,5	4,8492	3,4126	114,0	4,9031	3,4557	139,0	4,9462
3,3599	89,0	4,8504	3,4135	114,5	4,9041	3,4565	139,5	4,9470
3,3611	89,5	4,8516	3,4145	115,0	4,9050	3,4573	140,0	4,9478
3,3623	90,0	4,8529	3,4154	115,5	4,9060	3,4581	140,5	4,9486
3,3635	90,5	4,8541	3,4164	116,0	4,9069	3,4588	141,0	4,9494
3,3647	91,0	4,8552	3,4173	116,5	4,9078	3,4596	141,5	4,9501
3,3659	91,5	4,8564	3,4182	117,0	4,9088	3,4604	142,0	4,9509
3,3671	92,0	4,8576	3,4192	117,5	4,9097	3,4611	142,5	4,9517
3,3683	92,5	4,8588	3,4201	118,0	4,9106	3,4619	143,0	4,9524
3,3694	93,0	4,8599	3,4210	118,5	4,9115	3,4627	143,5	4,9532
3,3706	93,5	4,8611	3,4219	119,0	4,9124	3,4634	144,0	4,9539
3,3718	94,0	4,8623	3,4228	119,5	4,9134	3,4642	144,5	4,9547
3,3729	94,5	4,8634	3,4238	120,0	4,9143	3,4649	145,0	4,9554
3,3740	95,0	4,8646	3,4247	120,5	4,9152	3,4657	145,5	4,9562
3,3752	95,5	4,8657	3,4256	121,0	4,9161	3,4664	146,0	4,9569
3,3763	96,0	4,8668	3,4265	121,5	4,9170	3,4672	146,5	4,9577
3,3774	96,5	4,8679	3,4273	122,0	4,9179	3,4679	147,0	4,9584
3,3786	97,0	4,8691	3,4282	122,5	4,9188	3,4686	147,5	4,9592
3,3797	97,5	4,8702	3,4291	123,0	4,9196	3,4694	148,0	4,9599
3,3808	98,0	4,8713	3,4300	123,5	4,9205	3,4701	148,5	4,9606
3,3819	98,5	4,8724	3,4309	124,0	4,9214	3,4708	149,0	4,9614
3,3830	99,0	4,8735	4,4318	124,5	4,9223	3,4716	149,5	4,9621
3,3841	99,5	4,8746	4,4326	125,0	4,9232	3,4723	150,0	4,9628
	100,0							

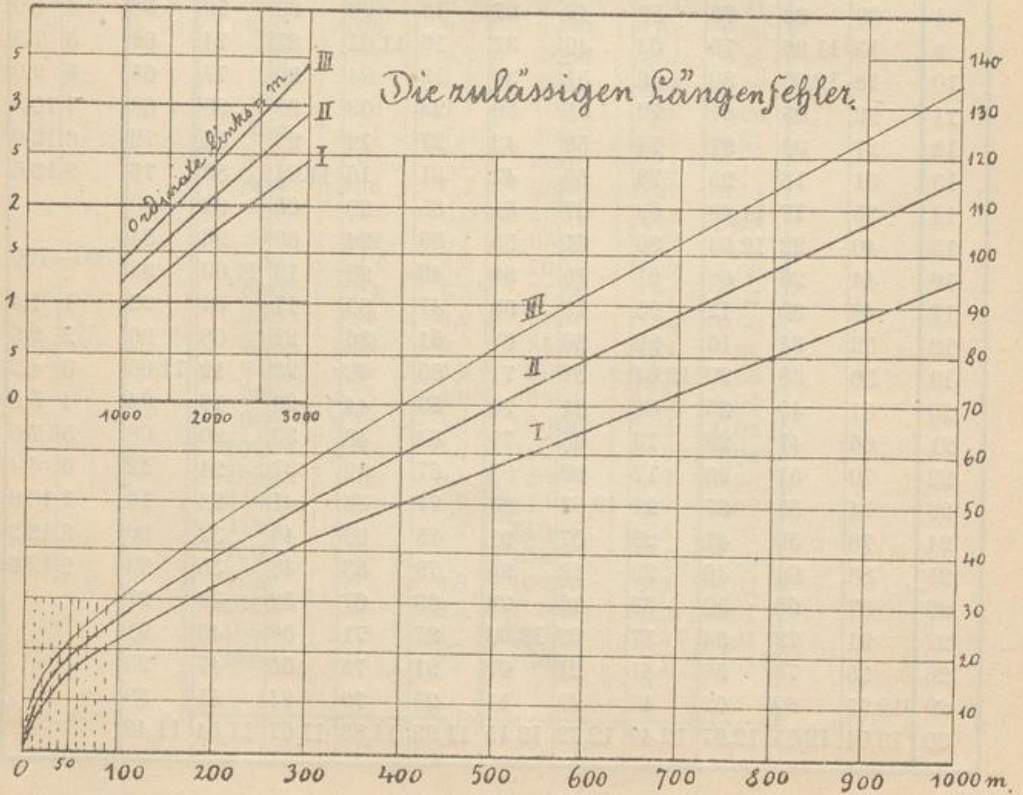
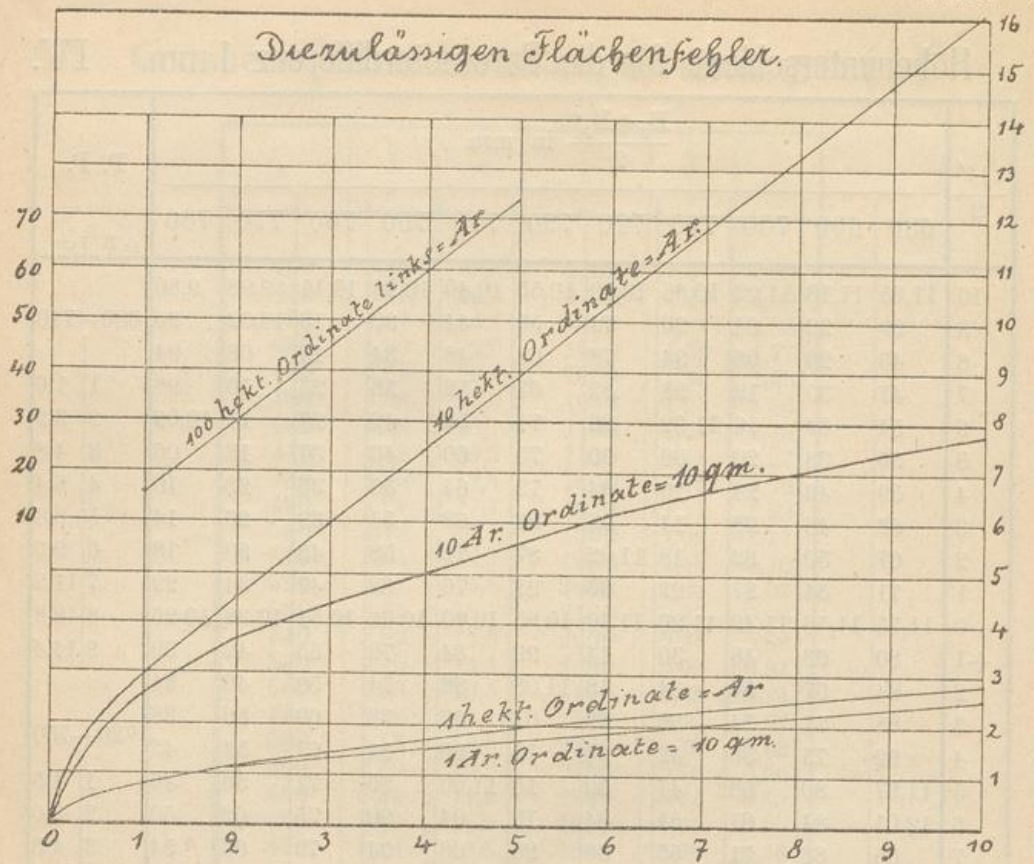
c

III. Grössen  $\frac{k}{s}$  und Strahlengewichte  $p = \left(\frac{k}{s}\right)^2$

s	$\frac{k}{s}$	p	s	$\frac{k}{s}$	p
400	5,16	26,8	1400	1,47	2,20
410	5,03	25,3	1450	1,42	2,02
420	4,91	24,1	1500	1,37	1,88
430	4,80	22,9	1550	1,33	1,77
440	4,69	22,0	1600	1,29	1,66
450	4,58	21,0	1650	1,25	1,56
460	4,48	20,1	1700	1,21	1,46
470	4,39	19,2	1750	1,18	1,37
480	4,30	18,4	1800	1,15	1,30
490	4,21	17,7	1850	1,11	1,23
500	4,12	17,1	1900	1,09	1,17
510	4,04	16,4	1950	1,06	1,10
520	3,97	15,8	2000	1,03	1,06
530	3,89	15,1	2100	0,98	0,96
540	3,82	14,6	2200	0,94	0,88
550	3,75	14,1	2300	0,90	0,81
560	3,68	13,5	2400	0,86	0,74
570	3,62	13,1	2500	0,82	0,67
580	3,55	12,6	2600	0,79	0,62
590	3,50	12,2	2700	0,76	0,58
600	3,44	11,8	2800	0,74	0,53
620	3,33	11,2	2900	0,71	0,50
640	3,22	10,5	3000	0,69	0,46
660	3,12	9,6	3200	0,64	0,41
680	3,03	9,2	3400	0,61	0,36
700	2,95	8,7	3600	0,57	0,32
720	2,86	8,2	3800	0,54	0,29
740	2,79	7,7	4000	0,52	0,26
760	2,71	7,3	4500	0,46	0,21
780	2,64	7,0	5000	0,41	0,17
800	2,58	6,7	5500	0,37	0,14
820	2,52	6,4	6000	0,34	0,12
840	2,46	6,1	6500	0,32	0,10
860	2,40	5,8	7000	0,29	0,08
880	2,34	5,5	7500	0,27	0,07
900	2,29	5,2	8000	0,26	0,06
920	2,24	5,0	8500	0,24	0,06
940	2,19	4,8	9000	0,23	0,05
960	2,15	4,6	9500	0,22	0,05
980	2,10	4,4	10000	0,21	0,04
1000	2,06	4,2	11000	0,19	0,04
1050	1,96	3,8	12000	0,17	0,03
1100	1,87	3,5	13000	0,16	0,02
1150	1,79	3,2	14000	0,15	0,02
1200	1,72	3,0	15000	0,14	0,02
1250	1,65	2,8	16000	0,13	0,02
1300	1,59	2,5	17000	0,12	0,01
1350	1,53	2,3	18000	0,11	0,01
1400	1,47	2,2	19000	0,11	0,01

## Höhenunterschiede für die Barometerdifferenz 1 mm. IV.

t+t'	$\frac{B_0+B_0'}{2}$ in mm											P. P.	
	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780	$\Delta B$   cm	
-10	11,35	11,18	11,02	10,86	10,70	10,55	10,40	10,26	10,11	9,98	9,86		
9	39	22	04	90	74	59	44	30	15	10,02	90	680—710	
8	43	26	08	94	78	63	48	34	19	06	94		
7	47	30	12	98	82	67	52	38	23	10	98	1	1,6
6	51	34	16	11,02	86	71	56	42	27	14	10,02	2	3,2
5	55	38	20	06	90	75	60	46	31	18	06	3	4,8
4	59	42	24	10	94	79	64	50	35	22	10	4	6,4
3	63	46	28	14	98	83	68	54	39	26	14	5	8,0
2	67	50	32	18	11,02	87	72	58	43	30	18	6	9,6
1	71	54	37	22	06	91	76	62	47	34	22	7	11,2
0	11,75	11,58	11,42	11,26	11,10	10,95	10,80	10,66	10,51	10,38	10,26	8	12,8
+1	80	63	46	30	14	99	84	70	55	42	30	9	14,4
2	84	67	50	34	18	11,03	88	74	59	46	34		
3	88	71	54	38	22	07	92	78	63	50	38	720—750	
4	92	75	58	42	26	11	96	82	67	54	42		
5	11,97	80	63	47	30	15	11,00	86	71	58	46	1	1,5
6	12,01	84	67	51	34	19	04	90	75	62	50	2	3,0
7	05	88	71	55	38	23	08	94	79	66	54	3	4,5
8	09	92	75	59	42	27	12	98	83	70	58	4	6,0
9	13	11,96	79	63	46	31	16	11,01	87	74	62	5	7,5
10	18	12,00	83	66	51	35	19	04	90	77	65	6	9,0
11	22	05	87	70	55	39	23	08	93	80	68	7	10,5
12	27	09	91	74	59	43	27	12	97	84	72	8	12,0
13	31	13	95	78	63	47	31	16	11,01	88	76	9	13,5
14	35	17	11,99	82	67	51	35	20	05	92	80		
15	40	22	12,04	86	71	55	39	24	09	96	84	760—780	
16	44	26	08	91	75	59	43	28	13	11,00	88		
17	48	30	12	95	79	63	47	32	17	04	92	1	1,4
18	52	34	16	99	83	67	51	36	21	08	96	2	2,8
19	56	38	20	12,04	87	71	55	40	25	12	11,00	3	4,2
20	61	43	25	08	91	75	59	44	29	16	04	4	5,6
21	65	47	29	13	95	79	63	48	33	20	08	5	7,0
22	70	51	33	17	99	83	67	52	37	24	12	6	8,4
23	74	55	37	21	12,03	87	71	56	41	28	16	7	10,8
24	78	59	41	25	07	91	75	60	45	32	20	8	12,2
25	83	64	46	29	12	95	79	63	48	35	23	9	12,6
26	87	68	50	33	16	99	83	67	52	39	27		
27	91	72	54	37	20	12,03	87	71	56	43	31		
28	95	76	58	41	24	07	91	75	60	47	35		
29	12,99	80	62	45	28	11	95	79	64	51	39		
30	13,04	12,85	12,67	12,49	12,32	12,15	11,99	11,83	11,67	11,54	11,42		



Quadrattafel.

Tafel VI.

0					1						
0	0		50	2500	2550	00	10000	10100	50	22500	22650
1	1	0,25	51	2601	2652	01	10201	10302	51	22801	22952
2	4	1,25	52	2704	2756	02	10404	10506	52	23104	23256
3	9	6,25	53	2809	2862	03	10609	10712	53	23409	23562
4	16	12,25	54	2916	2970	04	10816	10920	54	23716	23870
5	25	20,25	55	3025	3080	05	11025	11130	55	24025	24180
6	36	30,25	56	3136	3192	06	11236	11342	56	24336	24492
7	49	42,25	57	3249	3306	07	11449	11556	57	24649	24806
8	64	56,25	58	3364	3422	08	11664	11772	58	24964	25122
9	81	72,25	59	3481	3540	09	11881	11990	59	25281	25440
10	100	90,25	60	3600	3660	10	12100	12210	60	25600	25760
11	121	110	61	3721	3782	11	12321	12431	61	25921	26082
12	144	142	62	3844	3906	12	12544	12656	62	26244	26406
13	169	156	63	3969	4032	13	12769	12882	63	26569	26732
14	196	182	64	4096	4160	14	12996	13010	64	26896	27060
15	225	210	65	4225	4290	15	13225	13340	65	27225	27490
16	256	240	66	4356	4422	16	13456	13572	66	27556	27722
17	289	272	67	4489	4556	17	13689	13806	67	27889	28056
18	324	306	68	4624	4692	18	13924	14042	68	28224	28392
19	361	342	69	4761	4830	19	14161	14280	69	28561	28730
20	400	380	70	4900	4970	20	14400	14520	70	28900	29070
21	441	420	71	5041	5112	21	14641	14762	71	29241	29412
22	484	462	72	5184	5256	22	14884	15006	72	29584	29756
23	529	506	73	5329	5402	23	15129	15252	73	29929	30102
24	576	552	74	5476	5550	24	15376	15500	74	30276	30450
25	625	600	75	5625	5700	25	15625	15750	75	30625	30800
26	676	650	76	5776	5852	26	15876	16002	76	30976	31152
27	729	702	77	5929	6006	27	16129	16256	77	31329	31506
28	784	756	78	6084	6162	28	16384	16512	78	31684	31862
29	841	812	79	6241	6320	29	16641	16770	79	32041	32220
30	900	870	80	6400	6480	30	16900	17030	80	32400	32580
31	961	930	81	6561	6642	31	17161	17292	81	32761	32942
32	1024	992	82	6724	6806	32	17424	17556	82	33124	33306
33	1089	1056	83	6889	6972	33	17689	17822	83	33489	33672
34	1156	1122	84	7056	7140	34	17956	18090	84	33856	34040
35	1225	1190	85	7225	7310	35	18225	18360	85	34225	34410
36	1296	1260	86	7396	7482	36	18496	18632	86	34596	34782
37	1369	1332	87	7569	7656	37	18769	18906	87	34969	35156
38	1444	1406	88	7744	7832	38	19044	19182	88	35344	35532
39	1521	1482	89	7921	8010	39	19321	19460	89	35721	35810
40	1600	1560	90	8100	8190	40	19600	19740	90	36100	36290
41	1681	1640	91	8281	8372	41	19881	20022	91	36481	36672
42	1764	1722	92	8464	8556	42	20164	20306	92	36864	37056
43	1849	1806	93	8649	8649	43	20449	20592	93	37249	37442
44	1936	1892	94	8836	8742	44	20736	20880	94	37636	37830
45	2025	1980	95	9025	8930	45	21025	21170	95	38025	38220
46	2116	2070	96	9216	9120	46	21316	21462	96	38416	38616
47	2209	2162	97	9409	9312	47	21609	21756	97	38809	39006
48	2304	2256	98	9604	9506	48	21904	22052	98	39204	39402
49	2401	2352	99	9801	9702	49	22201	22350	99	39601	39800
50	2500	2450	100	10000	9900	50	22500		100	40000	

## Quadrante.

2					3					
00	4 00 00		50	6 25 00		00	9 00 00		50	12 25 00
01	4 04 01	P. P.	51	6 30 01	P. P.	01	9 06 01	P. P.	51	32 01
02	4 08 04		52	6 35 04		02	9 12 04		52	39 04
03	4 12 09		53	6 40 09		03	9 18 09		53	46 09
04	4 16 16	1   41	54	6 45 16	1   51	04	9 24 16	1   61	54	53 16
05	4 20 25	2   83	55	6 50 25	2   103	05	9 30 25	2   123	55	60 25
06	4 24 36	3   124	56	6 55 36	3   154	06	9 36 36	3   184	56	67 36
07	4 28 49	4   166	57	6 60 49	4   205	07	9 42 49	4   246	57	74 49
08	4 32 64	5   207	58	6 65 64	5   257	08	9 48 64	5   307	58	81 64
09	4 36 81	6   248	59	6 70 81	6   308	09	9 54 81	6   368	59	88 81
10	4 41 00	7   289	60	6 76 00	7   360	10	9 61 00	7   430	60	96 00
11	4 45 21	8   331	61	6 81 21	8   411	11	9 67 21	8   491	61	13 03 21
12	4 49 44	9   373	62	6 86 44	9   462	12	9 73 44	9   553	62	10 44
13	4 53 69		63	6 91 69		13	9 79 69		63	17 69
14	4 57 96		64	6 96 96		14	9 85 96		64	24 96
15	4 62 25		65	7 02 25		15	9 92 25		65	32 25
16	4 66 56		66	7 07 56		16	9 98 56		66	39 56
17	4 70 89		67	7 12 89		17	10 04 89		67	46 89
18	4 75 24	1   44	68	7 18 24	1   54	18	11 24	1   64	68	54 24
19	4 79 61	2   89	69	7 23 61	2   109	19	17 61	2   129	69	61 61
20	4 84 00	3   133	70	7 29 00	3   163	20	24 00	3   193	70	69 00
21	4 88 41	4   178	71	7 34 41	4   218	21	30 41	4   258	71	76 41
22	4 92 84	5   222	72	7 39 84	5   272	22	36 84	5   322	72	83 84
23	4 97 29	6   266	73	7 45 29	6   326	23	43 29	6   386	73	91 29
24	5 01 76	7   311	74	7 50 76	7   381	24	49 76	7   451	74	98 76
25	5 06 25	8   355	75	7 56 25	8   435	25	56 25	8   515	75	14 06 25
26	5 10 76	9   400	76	7 61 76	9   490	26	62 76	9   580	76	13 76
27	5 15 29		77	7 67 29		27	69 29		77	21 29
28	5 19 84		78	7 72 84		28	75 84		78	28 84
29	5 24 41		79	7 78 41		29	82 41		79	36 41
30	5 29 00		80	7 84 00		30	89 00		80	44 00
31	5 33 61		81	7 89 61		31	95 61		81	51 61
32	5 38 24		82	7 95 24		32	11 02 24		82	59 24
33	5 42 89		83	8 00 89		33	08 89		83	66 89
34	5 47 56		84	8 06 56		34	15 56		84	74 56
35	5 52 25		85	8 12 25		35	22 25		85	82 25
36	5 56 96	1   48	86	8 17 96	1   58	36	28 96	1   68	86	89 96
37	5 61 69	2   96	87	8 23 69	2   116	37	35 69	2   136	87	97 69
38	5 66 44	3   144	88	8 29 44	3   174	38	42 44	3   204	88	15 05 44
39	5 71 21	4   192	89	8 35 21	4   232	39	49 21	4   272	89	13 21
40	5 76 00	5   240	90	8 41 00	5   290	40	56 00	5   340	90	21 00
41	5 80 81	6   288	91	8 46 81	6   348	41	62 81	6   408	91	28 81
42	5 85 64	7   336	92	8 52 64	7   406	42	69 64	7   476	92	36 64
43	5 90 49	8   384	93	8 58 49	8   464	43	76 49	8   544	93	44 49
44	5 95 36	9   432	94	8 64 36	9   522	44	83 36	9   612	94	52 36
45	6 00 25		95	8 70 25		45	90 25		95	60 25
46	6 05 16		96	8 76 16		46	97 16		96	68 16
47	6 10 09		97	8 82 09		47	12 04 09		97	76 09
48	6 15 04		98	8 88 04		48	11 04		98	84 04
49	6 20 01		99	8 94 01		49	18 01		99	92 01
50	6 25 00		100	9 00 00		50	12 25 00		100	16 00 00

### Quadrates.

4				5											
00	16 00 00			50	20 25 00			00	25 00 00			50	30 25 00		
01	08 01			51	34 01			01	10 01			51	36 01		
02	16 04			52	43 04			02	20 04			52	47 04		
03	24 09			53	52 09			03	30 09			53	58 09		
04	32 16			54	61 16			04	40 16			54	69 16		
05	40 25			55	70 25			05	50 25			55	80 25		
06	48 36			56	79 36			06	60 36			56	91 36		
07	56 49			57	88 49			07	70 49			57	31 02 49		
08	64 64	P. P.		58	97 64	P. P.		08	80 64	P. P.		58	13 64	P. P.	
09	72 81			59	21 06 81			09	90 81			59	24 81		
10	81 00	1   82		60	16 00	1   92		10	26 01 00	1   102		60	36 00	1   112	
11	89 21	2   165		61	25 21	2   185		11	11 21	2   205		61	47 21	2   225	
12	97 44	3   247		62	34 44	3   277		12	21 44	3   307		62	58 44	3   337	
13	17 05 69	4   330		63	43 69	4   370		13	31 69	4   410		63	69 69	4   450	
14	13 96	5   412		64	52 96	5   462		14	41 96	5   512		64	80 96	5   562	
15	22 25	6   494		65	62 25	6   554		15	52 25	6   614		65	92 25	6   674	
16	30 56	7   577		66	71 56	7   647		16	62 56	7   717		66	32 03 56	7   787	
17	38 89	8   659		67	80 89	8   739		17	72 89	8   819		67	14 89	8   899	
18	47 24	9   742		68	90 24	9   832		18	83 24	9   921		68	26 24	9   1012	
19	55 61			69	99 61			19	93 61			69	37 61		
20	64 00			70	22 09 00			20	27 04 00			70	49 00		
21	72 41			71	18 41			21	14 41			71	60 41		
22	80 84			72	27 84			22	24 84			72	71 84		
23	89 29			73	37 29			23	35 29			73	83 29		
24	97 76			74	46 76			24	45 76			74	94 76		
25	18 06 25			75	56 25			25	56 25			75	33 06 25		
26	14 76			76	65 76			26	66 76			76	17 76		
27	23 29			77	75 29			27	77 29			77	29 29		
28	31 84			78	84 84			28	87 84			78	40 84		
29	40 41			79	94 41			29	98 41			79	52 41		
30	49 00			80	23 04 00			30	28 09 00			80	64 00		
31	57 61			81	13 61			31	19 61			81	75 61		
32	66 24	1   87		82	23 24	1   97		32	30 24	1   107		82	87 24	1   117	
33	74 89	2   175		83	32 89	2   195		33	40 89	2   215		83	98 89	2   235	
34	83 56	3   262		84	42 56	3   292		34	51 56	3   322		84	34 10 56	3   352	
35	92 25	4   350		85	52 25	4   390		35	62 25	4   430		85	22 25	4   470	
36	19 00 96	5   437		86	61 96	5   487		36	72 96	5   537		86	33 96	5   587	
37	09 69	6   524		87	71 69	6   584		37	83 69	6   644		87	45 69	6   704	
38	18 44	7   612		88	81 44	7   682		38	94 44	7   752		88	57 44	7   822	
39	27 21	8   699		89	91 21	8   779		39	29 05 21	8   859		89	69 21	8   939	
40	36 00	9   787		90	24 01 00	9   876		40	16 00	9   967		90	81 00	9   1057	
41	44 81			91	10 81			41	26 81			91	92 81		
42	53 64			92	20 64			42	37 64			92	35 04 64		
43	62 49			93	30 49			43	48 49			93	16 49		
44	71 36			94	40 36			44	59 36			94	28 36		
45	80 25			95	50 25			45	70 25			95	40 25		
46	89 16			96	60 16			46	81 16			96	52 16		
47	98 09			97	70 09			47	92 09			97	64 09		
48	20 07 04			98	80 04			48	30 03 04			98	76 04		
49	16 01			99	90 01			49	14 01			99	88 01		
50	20 25 00			100	25 00 00			50	30 25 00			100	36 00 00		

### Quadrates.

6					7				
00	36 00 00		50	42 25 00	00	49 00 00		50	56 25 00
01	12 01		51	38 01	01	14 01		51	40 01
02	24 04		52	51 04	02	28 04		52	55 04
03	36 09		53	64 09	03	42 09		53	70 09
04	48 16		54	77 16	04	56 16		54	85 16
05	60 25		55	90 25	05	70 25		55	57 00 25
06	72 36		56	43 03 36	06	84 36		56	15 36
07	84 49		57	16 49	07	98 49		57	30 49
08	96 64	P.P.	58	29 64	P.P.	50 12 64	P.P.	58	45 64
09	08 81		59	42 81	09	26 81		59	60 81
10	37 21 00		60	56 00	10	41 00		60	76 00
11	33 21	1   122	61	69 21	1   132	11 55 21	1   142	61	91 21
12	45 44	2   245	62	82 44	2   265	12 69 44	2   285	62	58 06 44
13	57 69	3   367	63	95 69	3   397	13 83 69	3   427	63	21 69
14	69 96	4   490	64	44 08 96	4   530	14 97 96	4   570	64	36 96
15	82 25	5   612	65	22 25	5   662	15 51 12 25	5   712	65	52 25
16	94 56	6   735	66	35 56	6   795	16 26 56	6   855	66	67 56
17	38 06 89	7   857	67	48 89	7   927	17 40 89	7   997	67	82 89
18	19 24	8   980	68	62 24	8   1060	18 55 24	8   1140	68	98 24
19	31 61	9   1102	69	75 61	9   1192	19 69 61	9   1282	69	59 13 61
20	44 00		70	89 00		20 84 00		70	29 00
21	56 41		71	45 02 41		21 98 41		71	44 41
22	68 84		72	15 84		22 52 12 84		72	59 84
23	81 29		73	29 29		23 27 29		73	75 29
24	93 76		74	42 76		24 41 76		74	90 76
25	39 06 25		75	56 25		25 56 25		75	60 06 25
26	18 76		76	69 76		26 70 76		76	21 76
27	31 29		77	83 29		27 85 29		77	37 29
28	43 84		78	96 84		28 99 84		78	52 84
29	56 41		79	46 10 41		29 53 14 41		79	68 41
30	69 00		80	24 00		30 29 00		80	84 00
31	81 61	1   127	81	37 61	1   137	31 43 61	1   147	81	99 61
32	94 24	2   255	82	51 24	2   275	32 58 24	2   295	82	61 15 24
33	06 89	3   382	83	64 89	3   412	33 72 89	3   442	83	30 89
34	40 19 56	4   510	84	78 56	4   550	34 87 56	4   590	84	46 56
35	32 25	5   637	85	92 25	5   687	35 54 02 25	5   737	85	62 25
36	44 96	6   765	86	47 05 96	6   825	36 16 96	6   885	86	77 96
37	57 69	7   892	87	19 69	7   962	37 31 69	7   1032	87	93 69
38	70 44	8   1020	88	33 44	8   1100	38 46 44	8   1180	88	62 09 44
39	83 21	9   1147	89	47 21	9   1237	39 61 21	9   1327	89	25 21
40	96 00		90	61 00		40 76 00		90	41 00
41	41 08 81		91	74 81		41 90 81		91	56 81
42	21 64		92	88 64		42 55 05 64		92	72 64
43	34 49		93	48 02 49		43 20 49		93	88 49
44	47 36		94	16 36		44 35 36		94	63 04 36
45	60 25		95	30 25		45 50 25		95	20 25
46	73 16		96	44 16		46 65 16		96	36 16
47	86 09		97	58 09		47 80 09		97	52 09
48	99 04		98	72 04		48 95 04		98	68 04
49	42 12 01		99	86 01		49 56 10 01		99	84 01
50	25 00		100	49 00 00		50 25 00		100	64 00 00

### Quadrat.

8					9					
00	64 00 00		50	72 25 00		00	81 00 00		50	90 25 00
01	16 01		51	42 01		01	18 01		51	44 01
02	32 02		52	59 04		02	36 04		52	63 04
03	48 09		53	76 09		03	54 09		53	82 09
04	64 16		54	93 16		04	72 16		54	91 01 16
05	80 25		55	73 10 25		05	90 25		55	20 25
06	96 36		56	27 36		06	82 08 36		56	39 36
07	65 12 49		57	44 49		07	26 49		57	58 49
08	28 64		58	61 64		08	44 64		58	77 64
09	44 81	P.P.	59	78 81	P.P.	09	62 81	P.P.	59	96 81
10	61 00		60	96 00		10	81 00		60	92 16 00
11	77 21	1  162	61	74 13 21	1  172	11	99 21	1  182	61	35 21
12	93 44	2  325	62	30 44	2  345	12	83 17 44	2  365	62	54 44
13	66 09 69	3  487	63	47 69	3  517	13	35 69	3  547	63	73 69
14	25 96	4  650	64	64 96	4  690	14	53 96	4  730	64	92 96
15	42 25	5  812	65	82 25	5  862	15	72 25	5  912	65	93 12 25
16	58 56	6  975	66	99 56	6  1035	16	90 56	6  1095	66	31 56
17	74 89	7  1137	67	75 16 89	7  1207	17	84 08 89	7  1277	67	50 89
18	91 24	8  1300	68	34 24	8  1380	18	27 24	8  1460	68	70 24
19	67 07 61	9  1462	69	51 61	9  1552	19	45 61	9  1642	69	89 61
20	24 00		70	69 00		20	64 00		70	94 09 00
21	40 41		71	86 41		21	82 41		71	28 41
22	56 84		72	76 03 84		22	85 00 84		72	47 84
23	73 29		73	21 29		23	19 29		73	67 29
24	89 76		74	38 76		24	37 76		74	86 76
25	68 06 25		75	56 25		25	56 25		75	95 06 25
26	22 76		76	73 76		26	74 76		76	25 76
27	39 29		77	91 29		27	93 29		77	45 29
28	55 84		78	77 08 84		28	86 11 84		78	64 84
29	72 41		79	26 41		29	30 41		79	84 41
30	89 00		80	44 00		30	49 00		80	96 04 00
31	69 05 61		81	61 61		31	67 61		81	23 61
32	22 24	1  167	82	79 24	1  177	32	86 24	1  187	82	43 24
33	38 89	2  335	83	96 89	2  355	33	87 04 89	2  375	83	62 89
34	55 56	3  502	84	78 14 56	3  532	34	23 56	3  502	84	82 56
35	72 25	4  670	85	32 25	4  710	35	42 25	4  750	85	97 02 25
36	88 96	5  837	86	49 96	5  887	36	60 96	5  937	86	21 96
37	70 05 69	6  1005	87	67 69	6  1065	37	79 69	6  1125	87	41 69
38	22 44	7  1172	88	85 44	7  1242	38	98 44	7  1312	88	61 44
39	39 21	8  1340	89	79 03 21	8  1420	39	88 17 21	8  1500	89	81 21
40	56 00	9  1507	90	21 00	9  1597	40	36 00	9  1687	90	98 01 00
41	72 81		91	38 81		41	54 81		91	20 81
42	89 64		92	56 64		42	73 64		92	40 64
43	71 06 49		93	74 49		43	92 49		93	60 49
44	23 36		94	92 36		44	89 11 36		94	80 36
45	40 25		95	80 10 25		45	30 25		95	99 00 25
46	57 16		96	28 16		46	49 16		96	20 16
47	74 09		97	46 09		47	68 09		97	40 09
48	91 04		98	64 04		48	87 04		98	60 04
49	72 08 01		99	82 01		49	90 06 01		99	80 01
50	25 00		100	81 00 00		50	25 00		100	100 00 00

Quadrat.

10					11				
00	100 00 00		50	110 25 00	00	121 00 00		50	132 25 00
01	20 01		51	46 01	01	22 01		51	48 01
02	40 04		52	67 04	02	44 04		52	71 04
03	60 09		53	88 09	03	66 09		53	94 09
04	80 16		54	111 09 16	04	88 16		54	133 17 16
05	101 00 25		55	30 25	05	122 10 25		55	40 25
06	20 36		56	51 36	06	32 36		56	63 36
07	40 49	P.P.	57	72 49	07	54 49	P.P.	57	86 49
08	60 64		58	93 64	08	76 64		58	134 09 64
09	80 81		59	112 14 81	09	98 81		59	32 81
10	102 01 00	1 202	60	36 00	10	123 21 00	1 222	60	56 00
11	21 21	2 405	61	57 21	11	43 21	2 445	61	79 21
12	41 44	3 607	62	78 44	12	65 44	3 667	62	135 02 44
13	61 69	4 810	63	99 69	13	87 69	4 890	63	25 69
14	81 96	5 1012	64	113 20 96	14	124 09 96	5 1112	64	48 96
15	103 02 25	6 1215	65	42 25	15	32 25	6 1335	65	72 25
16	22 56	7 1417	66	63 56	16	54 56	7 1557	66	95 56
17	42 89	8 1620	67	84 89	17	76 89	8 1780	67	136 18 89
18	63 24	9 1822	68	114 06 24	18	99 24	9 2002	68	42 24
19	83 61		69	27 61	19	125 21 61		69	65 61
20	104 04 00		70	49 00	20	44 00		70	89 00
21	24 41		71	70 41	21	66 41		71	137 12 41
22	44 84		72	91 84	22	88 84		72	35 84
23	65 29		73	115 13 29	23	126 11 29		73	59 29
24	85 76		74	34 76	24	33 76		74	82 76
25	105 06 25		75	56 25	25	56 25		75	138 06 25
26	26 76		76	77 76	26	78 76		76	29 76
27	47 29		77	99 29	27	127 01 29		77	53 29
28	67 84		78	116 20 84	28	23 84		78	76 84
29	88 41		79	42 41	29	46 41		79	139 00 41
30	106 09 00		80	64 00	30	69 00		80	24 00
31	29 61	1 207	81	85 61	31	91 61	1 227	81	47 61
32	50 24	2 415	82	117 07 24	32	128 14 24	2 455	82	71 24
33	70 89	3 622	83	28 89	33	36 89	3 682	83	94 89
34	91 56	4 830	84	50 56	34	59 56	4 910	84	140 18 56
35	107 12 25	5 1037	85	72 25	35	82 25	5 1137	85	42 25
36	32 96	6 1245	86	93 96	36	129 04 96	6 1365	86	65 96
37	53 69	7 1452	87	118 15 69	37	27 69	7 1592	87	89 69
38	74 44	8 1660	88	37 44	38	50 44	8 1820	88	141 13 44
39	95 21	9 1867	89	59 21	39	73 21	9 2047	89	37 21
40	108 16 00		90	81 00	40	96 00		90	61 00
41	36 81		91	119 02 81	41	130 18 81		91	84 81
42	57 64		92	24 64	42	41 64		92	142 08 64
43	78 49		93	46 49	43	64 49		93	32 49
44	99 36		94	68 36	44	87 36		94	56 36
45	109 20 25		95	90 25	45	131 10 25		95	80 25
46	41 16		96	120 12 16	46	33 16		96	143 04 16
47	62 09		97	34 09	47	56 09		97	28 09
48	83 04		98	56 04	48	79 04		98	52 04
49	110 04 01		99	78 01	49	132 02 01		99	76 01
50	25 00		100	121 00 00	50	25 00		100	144 00 00

### Quadrate.

12					13				
00	144 00 00		50	156 25 00	00	169 00 00	50	182 25 00	
01	24 01		51	50 01	01	26 01	51	52 01	
02	48 04		52	75 04	02	52 04	52	79 04	
03	72 09		53	157 00 09	03	78 09	53	183 06 09	
04	96 16		54	25 16	04	170 04 16	54	33 16	
05	145 20 25		55	50 25	05	30 25	55	60 25	
06	44 36		56	75 36	06	56 36	56	87 36	
07	68 49	P.P.	57	158 00 49	07	82 49	57	184 14 49	P.P.
08	92 64		58	25 64	08	171 08 64	58	41 64	
09	146 16 81		59	50 81	09	34 81	59	68 81	
10	41 00	1  242	60	76 00	10	61 00	60	96 00	1  272
11	65 21	2  485	61	159 01 21	11	87 21	61	185 23 21	2  545
12	89 44	3  727	62	26 44	12	172 13 44	62	50 44	3  817
13	147 13 69	4  970	63	51 69	13	39 69	63	77 69	4  1090
14	37 96	5  1212	64	76 96	14	65 96	64	186 04 96	5  1362
15	62 25	6  1455	65	160 02 25	15	92 25	65	32 25	6  1635
16	86 56	7  1697	66	27 56	16	173 18 56	66	59 56	7  1907
17	148 10 89	8  1940	67	52 89	17	44 89	67	86 89	8  2180
18	35 24	9  2182	68	78 24	18	71 24	68	187 14 24	9  2452
19	59 61		69	161 03 61	19	97 61	69	41 61	
20	84 00		70	29 00	20	174 24 00	70	69 00	
21	149 08 41		71	54 41	21	50 41	71	96 41	
22	32 84		72	79 85	22	76 84	72	188 23 84	
23	57 29		73	162 05 29	23	175 03 29	73	51 29	
24	81 76		74	30 76	24	29 76	74	78 76	
25	150 06 25		75	56 25	25	56 25	75	189 06 25	
26	30 76		76	81 76	26	82 76	76	33 76	
27	55 29		77	163 07 29	27	176 09 29	77	61 29	
28	79 84		78	32 84	28	35 84	78	88 84	
29	151 04 41		79	58 41	29	62 41	79	190 16 41	
30	29 00		80	84 00	30	89 00	80	44 00	
31	53 61	1  247	81	164 09 61	31	177 15 61	81	71 61	1  277
32	78 24	2  495	82	35 24	32	42 24	82	99 24	2  555
33	152 02 89	3  742	83	60 89	33	68 89	83	191 26 89	3  832
34	27 56	4  990	84	86 56	34	95 56	84	54 56	4  1110
35	52 25	5  1237	85	165 12 25	35	178 22 25	85	82 25	5  1387
36	76 96	6  1485	86	37 96	36	48 96	86	192 09 96	6  1665
37	153 01 69	7  1732	87	63 69	37	75 69	87	37 69	7  1942
38	26 44	8  1980	88	89 44	38	179 02 44	88	65 44	8  2220
39	51 21	9  2227	89	166 15 21	39	29 21	89	93 21	9  2497
40	76 00		90	41 00	40	56 00	90	193 21 00	
41	154 00 81		91	66 81	41	82 81	91	48 81	
42	25 64		92	92 64	42	180 09 64	92	76 64	
43	50 49		93	167 18 49	43	36 49	93	194 04 49	
44	75 36		94	44 36	44	63 36	94	32 36	
45	155 00 25		95	70 25	45	90 25	95	60 25	
46	25 16		96	96 16	46	181 17 16	96	88 16	
47	50 09		97	168 22 09	47	44 09	97	195 16 09	
48	75 04		98	48 04	48	71 04	98	44 04	
49	156 00 01		99	74 01	49	98 01	99	72 01	
50	25 00		100	169 00 00	50	182 25 00	100	196 00 00	

d\*

Quadrat.

14					15				
00	196 00 00		50	210 25 00	00	225 00 00		50	240 25 00
01	28 01		51	54 01	01	30 01		51	56 01
02	56 04		52	83 04	02	60 04		52	87 04
03	84 09		53	211 12 09	03	90 09		53	241 18 09
04	197 12 16		54	41 16	04	226 20 16		54	49 16
05	40 25		55	70 25	05	50 25		55	80 25
06	68 36		56	99 36	06	80 36		56	242 11 36
07	96 49	P.P.	57	212 28 49	07	227 10 49	P.P.	57	42 49
08	198 24 64		58	57 64	08	40 64		58	73 64
09	52 81	1  282	59	86 81	09	70 81	1  302	59	243 04 81
10	81 00	2  565	60	213 16 00	10	228 01 00	2  605	60	36 00
11	199 09 21	3  847	61	45 21	11	31 21	3  907	61	67 21
12	37 44	4  1130	62	74 44	12	61 44	4  1210	62	98 44
13	65 69	5  1412	63	214 03 69	13	91 69	5  1512	63	244 29 69
14	93 96	6  1695	64	32 96	14	229 21 96	6  1815	64	60 96
15	200 22 25	7  1977	65	62 25	15	52 25	7  2117	65	92 25
16	50 56	8  2260	66	91 56	16	82 56	8  2420	66	245 23 56
17	78 89	9  2542	67	215 20 89	17	230 12 89	9  2722	67	54 89
18	201 07 24		68	50 24	18	43 24		68	86 24
19	35 61		69	79 61	19	73 61		69	246 17 61
20	64 00		70	216 09 00	20	231 04 00		70	49 00
21	92 41		71	38 41	21	34 41		71	80 41
22	202 20 84		72	67 84	22	64 84		72	247 11 84
23	49 29		73	97 29	23	95 29		73	43 29
24	77 76		74	217 26 76	24	232 25 76		74	74 76
25	203 06 25		75	56 25	25	56 25		75	248 06 25
26	34 76		76	85 76	26	86 76		76	37 76
27	63 29		77	218 15 29	27	233 17 29		77	69 29
28	91 84		78	44 84	28	47 84		78	249 00 84
29	204 20 41		79	74 41	29	78 41		79	32 41
30	49 00		80	219 04 00	30	234 09 00		80	64 00
31	77 61	1  287	81	33 61	31	39 61	1  307	81	95 61
32	205 06 24	2  575	82	63 24	32	70 24	2  615	82	250 27 24
33	34 89	3  862	83	92 89	33	235 00 89	3  922	83	58 89
34	63 56	4  1150	84	220 22 56	34	31 56	4  1230	84	90 56
35	92 25	5  1439	85	52 25	35	62 25	5  1539	85	251 22 25
36	206 20 96	6  1725	86	81 96	36	92 96	6  1845	86	53 96
37	49 69	7  2012	87	221 11 69	37	236 23 69	7  2152	87	85 69
38	78 44	8  2300	88	41 44	38	54 44	8  2460	88	252 17 44
39	207 07 21	9  2587	89	71 21	39	85 21	9  2767	89	49 21
40	36 00		90	222 01 00	40	237 16 00		90	81 00
41	64 81		91	30 81	41	46 81		91	253 12 81
42	93 64		92	60 64	42	77 64		92	44 64
43	208 22 49		93	90 49	43	238 08 49		93	76 49
44	51 36		94	223 20 36	44	39 36		94	254 08 36
45	80 25		95	50 25	45	70 25		95	40 25
46	209 09 16		96	80 16	46	239 01 16		96	72 16
47	38 09		97	224 10 09	47	32 09		97	255 04 09
48	67 04		98	40 04	48	63 04		98	36 04
49	96 01		99	70 01	49	94 01		99	68 01
50	210 25 00		100	225 00 00	50	240 25 00		100	256 00 00

## Quadrate.

16					17				
00	256 00 00		50	272 25 00	00	289 00 00		50	306 25 00
01	32 01		51	58 01	01	34 01		51	60 01
02	64 04		52	91 04	02	68 04		52	95 04
03	96 09		53	273 24 09	03	290 02 09		53	307 30 09
04	257 28 16		54	57 16	04	36 16		54	65 16
05	60 25		55	90 25	05	70 25		55	308 00 25
06	92 36		56	274 23 36	06	291 04 36		56	35 36
07	258 24 49		57	56 49	07	38 49		57	70 49
08	56 64	P.P.	58	89 64	P.P.	72 64	P.P.	58	309 05 64
09	88 81		59	275 22 81	09	292 06 81		59	40 81
10	259 21 00		60	56 00	10	41 00		60	76 00
11	53 21	1   323	61	89 21	11	75 21	1   342	61	310 11 21
12	85 44	2   645	62	276 22 44	12	293 09 44	2   685	62	46 44
13	260 17 69	3   967	63	55 69	13	43 69	3   1027	63	81 69
14	49 96	4   1290	64	88 96	14	77 96	4   1370	64	311 16 96
15	82 25	5   1612	65	277 22 25	15	294 12 25	5   1712	65	52 25
16	261 14 56	6   1935	66	55 56	16	46 56	6   2055	66	87 56
17	46 89	7   2257	67	88 89	17	80 89	7   2397	67	312 22 89
18	79 24	8   2580	68	278 22 24	18	295 15 24	8   2740	68	58 24
19	262 11 61	9   2902	69	55 61	19	49 61	9   3082	69	93 61
20	44 00		70	89 00	20	84 00		70	313 29 00
21	76 41		71	279 22 41	21	296 18 41		71	64 41
22	263 08 84		72	55 84	22	52 84		72	99 84
23	41 29		73	89 29	23	87 29		73	214 35 29
24	73 76		74	280 22 76	24	297 21 76		74	70 76
25	264 06 25		75	56 25	25	56 25		75	315 06 25
26	38 76		76	89 76	26	90 76		76	41 76
27	71 29		77	281 23 29	27	298 25 29		77	77 29
28	265 03 84		78	56 84	28	59 84		78	316 12 84
29	36 41		79	90 41	29	94 41		79	48 41
30	69 00		80	282 24 00	30	299 29 00		80	84 00
31	266 01 61	1   327	81	57 61	31	63 61	1   347	81	317 19 61
32	34 24	2   655	82	91 24	32	98 24	2   695	82	55 24
33	66 89	3   982	83	283 24 89	33	300 32 89	3   1042	83	90 89
34	99 56	4   1310	84	58 56	34	67 56	4   1390	84	318 26 56
35	267 32 25	5   1637	85	92 25	35	301 02 25	5   1737	85	62 25
36	64 96	6   1965	86	284 25 96	36	36 96	6   2085	86	97 96
37	97 69	7   2292	87	59 69	37	71 69	7   2432	87	319 33 69
38	268 30 44	8   2620	88	93 44	38	302 06 44	8   2780	88	69 44
39	63 21	9   2947	89	285 27 21	39	41 21	9   3127	89	320 05 21
40	96 00		90	61 00	40	76 00		90	41 00
41	269 28 81		91	94 81	41	303 10 81		91	76 81
42	61 64		92	286 28 64	42	45 64		92	321 12 64
43	94 49		93	62 49	43	80 49		93	48 49
44	270 27 36		94	96 36	44	304 15 36		94	84 36
45	60 25		95	287 30 25	45	50 25		95	322 20 25
46	93 16		96	64 16	46	85 16		96	56 16
47	271 26 09		97	98 09	47	305 20 09		97	92 09
48	59 04		98	288 32 04	48	55 04		98	323 28 04
49	92 01		99	66 01	49	90 01		99	64 01
50	272 25 00		100	289 00 00	50	306 25 00		100	324 00 00

Quadrate.

18					19				
00	324 00 00		50	342 25 00	00	361 00 00	50	380 25 00	
01	36 01		51	62 01	01	38 01	51	64 01	
02	72 04		52	99 04	02	76 04	52	381 03 04	
03	325 08 09		53	343 36 09	03	362 14 09	53	42 09	
04	44 16		54	73 16	04	52 16	54	81 16	
05	80 25		55	344 10 25	05	90 25	55	382 20 25	
06	326 16 36		56	47 36	06	363 28 36	56	59 36	
07	52 49		57	84 49	07	66 49	57	98 49	
08	88 64	P.P.	58	345 21 64	P.P.	364 04 64	P.P.	383 37 64	P.P.
09	327 24 81		59	58 81	09	42 81	59	76 81	
10	61 00	1   362	60	96 00	1   372	10	81 00	1   382	1   392
11	97 21	2   725	61	346 33 21	2   745	11	365 19 21	2   765	2   785
12	328 33 44	3   1087	62	70 44	3   1117	12	57 44	3   1147	3   1177
13	69 69	4   1450	63	347 07 69	4   1490	13	95 69	4   1530	4   1570
14	329 05 96	5   1812	64	44 96	5   1862	14	366 33 96	5   1912	5   1962
15	42 25	6   2175	65	82 25	6   2235	15	72 25	6   2295	6   2355
16	78 56	7   2537	66	348 19 56	7   2607	16	367 10 56	7   2677	7   2747
17	330 14 89	8   2900	67	56 89	8   2980	17	48 89	8   3060	8   3140
18	51 24	9   3262	68	94 24	9   3352	18	87 24	9   3442	9   3532
19	87 61		69	349 31 61		19	368 25 61		
20	331 24 00		70	69 00		20	64 00		
21	60 41		71	350 06 41		21	369 02 41		
22	96 84		72	43 84		22	40 84		
23	332 33 29		73	81 29		23	79 29		
24	69 76		74	351 18 76		24	370 17 76		
25	333 06 25		75	56 25		25	56 25		
26	42 76		76	93 76		26	94 76		
27	79 29		77	352 31 29		27	371 33 29		
28	334 15 84		78	68 84		28	71 84		
29	52 41		79	353 06 41		29	372 10 41		
30	89 00		80	44 00		30	49 00		
31	335 25 61	1   367	81	81 61	1   377	31	87 61	1   387	1   397
32	62 24	2   735	82	354 19 24	2   755	32	373 26 24	2   775	2   795
33	98 89	3   1102	83	56 89	3   1132	33	64 89	3   1162	3   1192
34	336 35 56	4   1470	84	94 56	4   1510	34	374 03 56	4   1550	4   1590
35	72 25	5   1838	85	355 32 25	5   1887	35	42 25	5   1937	5   1987
36	337 08 96	6   2205	86	69 96	6   2265	36	80 96	6   2325	6   2385
37	45 69	7   2573	87	356 07 69	7   2642	37	375 19 69	7   2712	7   2782
38	82 44	8   2940	88	45 44	8   3020	38	58 44	8   3100	8   3180
39	338 19 21	9   3308	89	83 21	9   3397	39	97 21	9   3487	9   3577
40	56 00		90	357 21 00		40	376 36 00		
41	92 81		91	58 81		41	74 81		
42	339 29 64		92	96 64		42	377 13 64		
43	66 49		93	358 34 49		43	52 49		
44	340 03 36		94	72 36		44	91 36		
45	40 25		95	359 10 25		45	378 30 25		
46	77 16		96	48 16		46	69 16		
47	341 14 09		97	86 09		47	379 08 09		
48	51 04		98	360 24 04		48	47 04		
49	88 01		99	62 01		49	86 01		
50	342 25 00		100	361 00 00		50	380 25 00		

## Druckfehler.

- Seite 38, Zeile 21 lies A'' statt A'.
- „ 42, In allen Gleichungen des § 6 lies auf der linken Seite durchweg M statt m.
- „ 75, Zeile 1 des letzten Absatzes, lies P statt P<sub>1</sub>.
- „ 94, Zeile 1, lies  $\frac{M\varphi^2}{6}$  statt  $\frac{M\varphi^3}{6}$ .
- Dasselbst in Formel 160 lies x statt y.
- Fig. 41, lies x<sub>1</sub> statt x.
- Fig. 125, lies 4,3 statt 4,7.





Techn. Vorrathsgeschäft R. REISS, Liebenwerda

Beste und billigste Bezugsquelle für  
Feldmess-Geräthschaften, Schein- und Zeichenzangen  
aller Art.

# Spezial: Stahlmessbänder

von höchstem deutschen Stahl ganz genau abgemessen

Mehrere von Reichenbach's Patent, sowie die neuesten in  
Ebenrichtigkeit.  
Vertheilung:  
Nichtrostbänder von 1/2 bis 1/4 Zoll Stärke, 10 bis 150 Fuß Länge  
Lohnbänder, alle in beliebigen Dimensionen

Lohnbandmaasse mit und ohne Drahtstärke

Eigene Fabrication von Nivellirspiegeln, Mess- und  
Nivellirspiegeln etc.

Alleinvertriebene und von uns selbst hergestellte  
Nivellirspiegel  
von Zinnmännern  
der Hauptmessen  
von Messen Stahl mit Vertikaltype

Spezial: Stahlmessbänder  
Nivellirspiegel  
Mess- und Zeichenzangen  
Lohnbänder  
Nivellirspiegel  
Mess- und Zeichenzangen  
Lohnbänder  
Nivellirspiegel  
Mess- und Zeichenzangen  
Lohnbänder



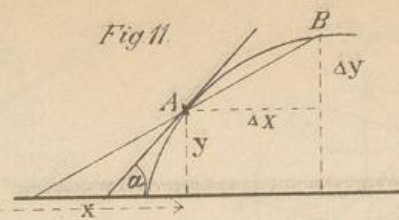
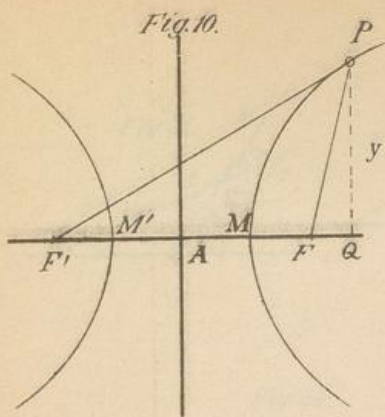


Fig. 12.

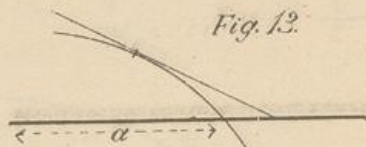
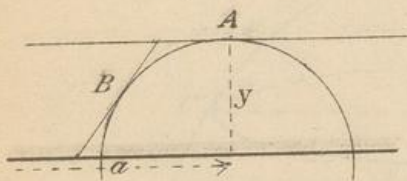


Fig. 13.

Fig. 14.

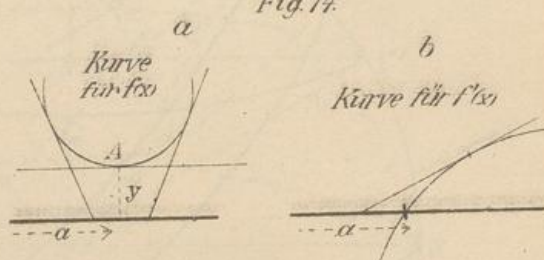


Fig. 15.

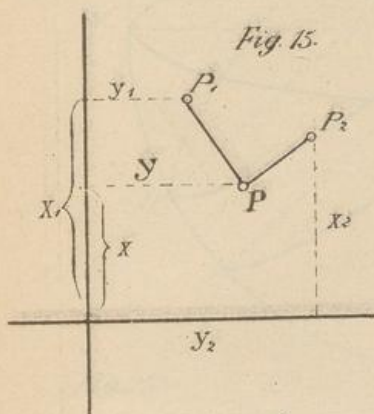


Fig. 16.

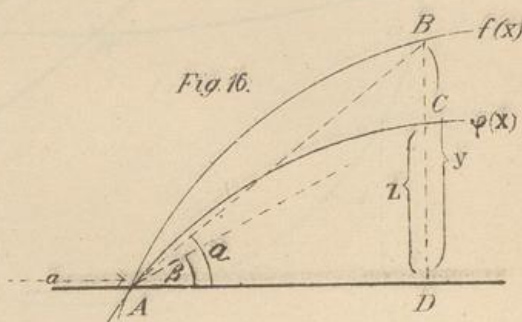


Fig. 17.

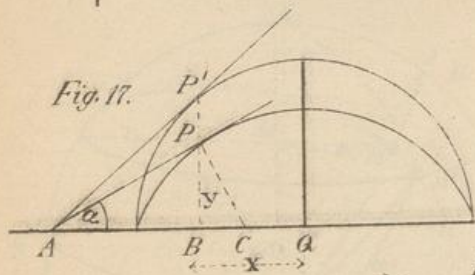


Fig. 18.

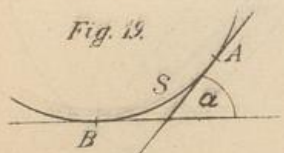


Fig. 20.

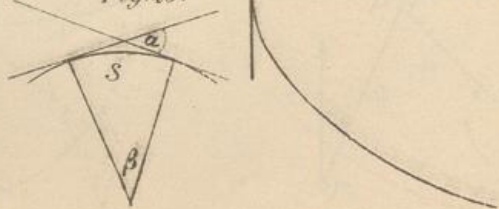
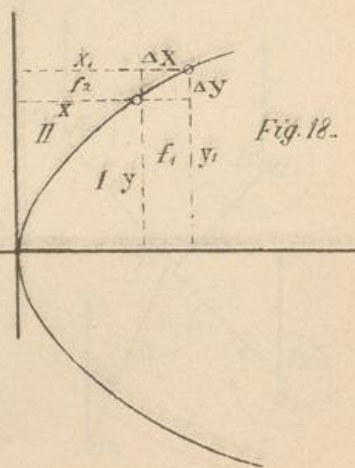


Fig. 18.



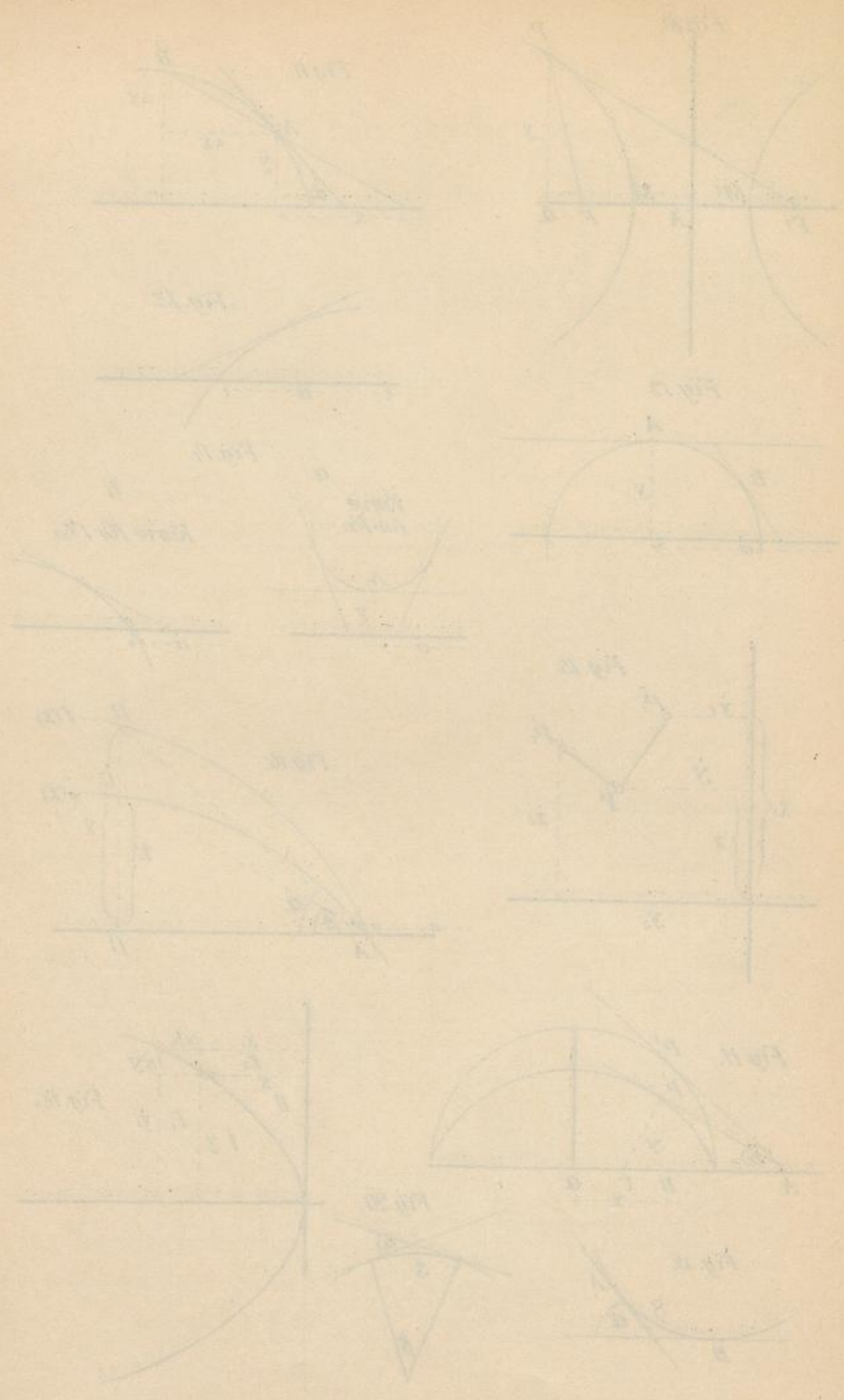


Fig. 21-26.

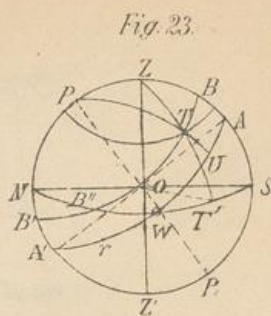
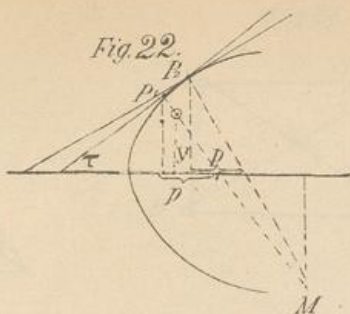
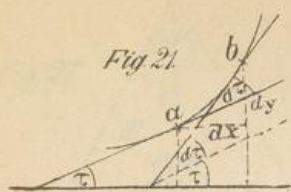


Fig. 24.

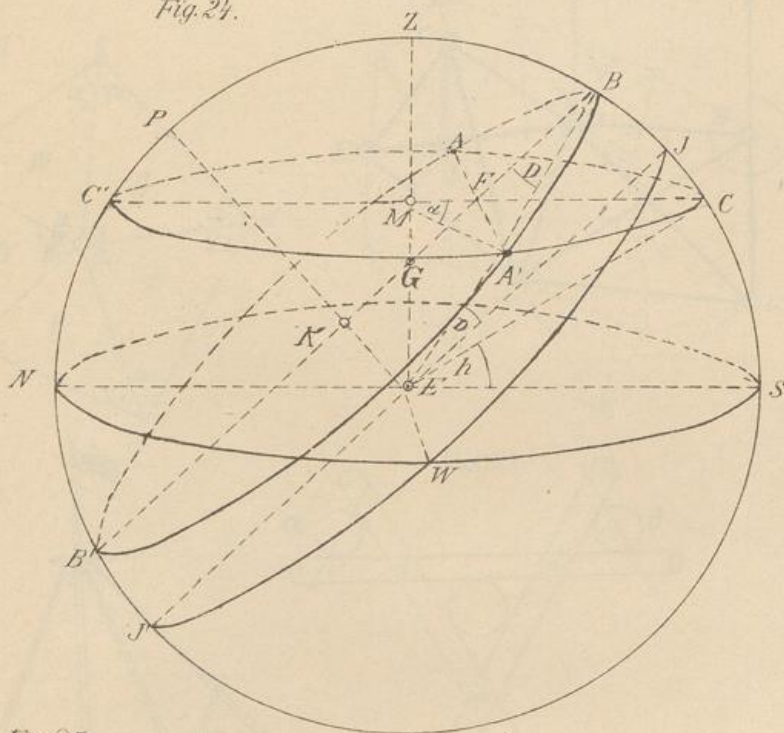


Fig. 25.

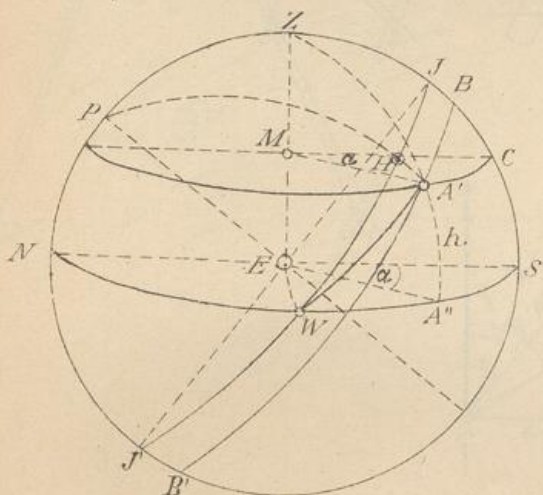
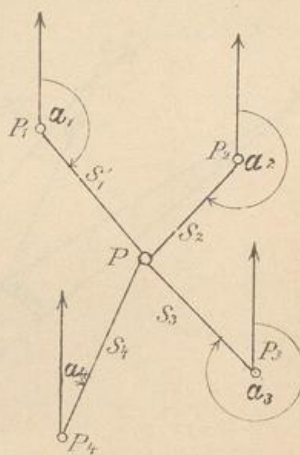


Fig. 26.



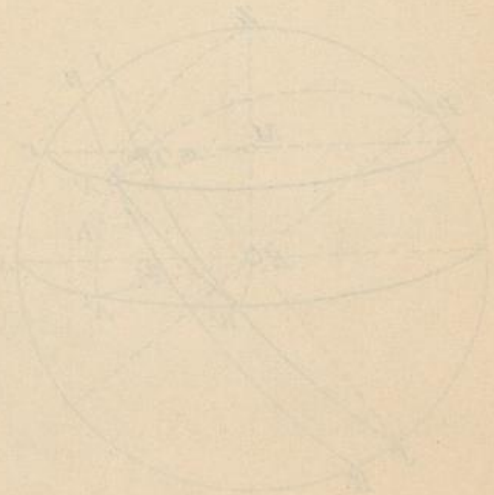
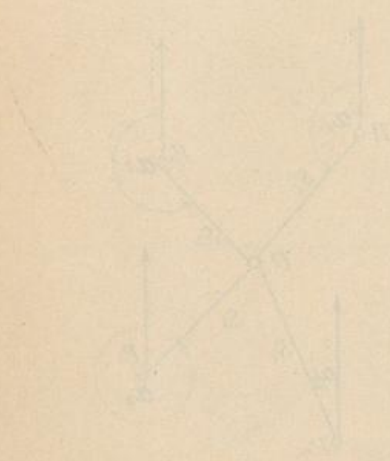
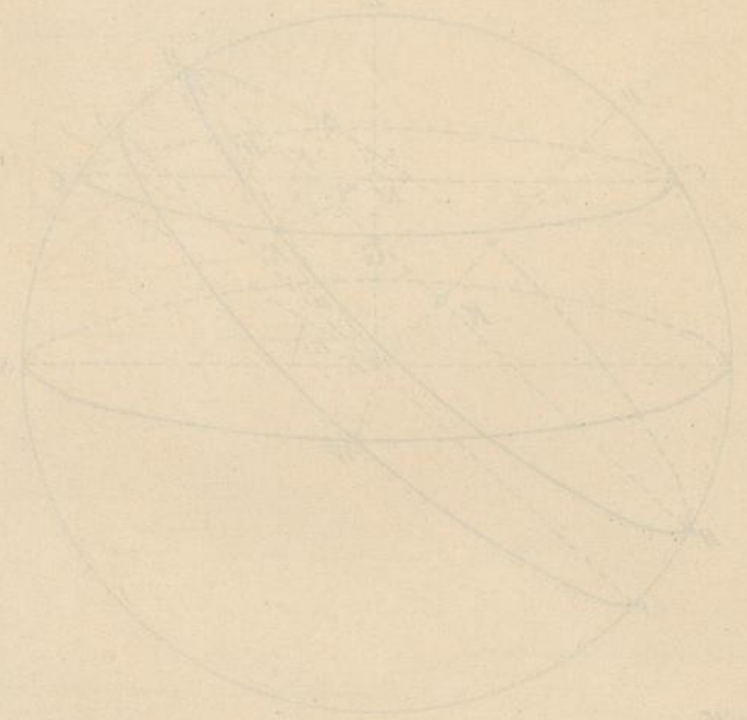


Fig. 27.

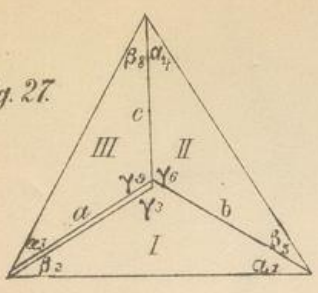


Fig. 28.

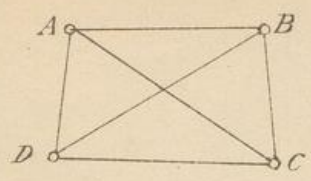


Fig. 29.

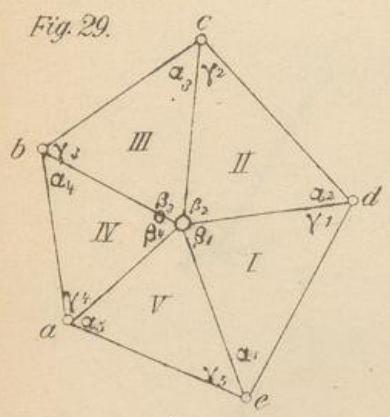


Fig. 30.

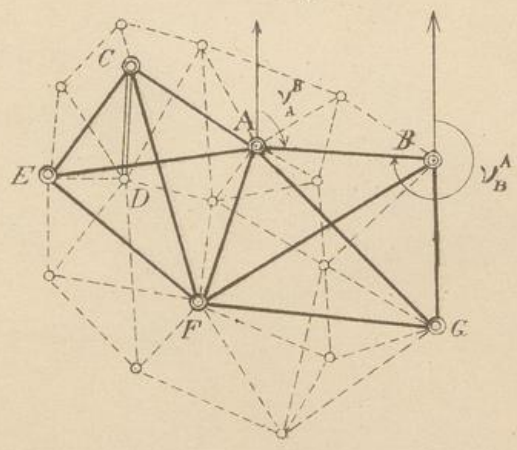


Fig. 31<sup>a</sup>

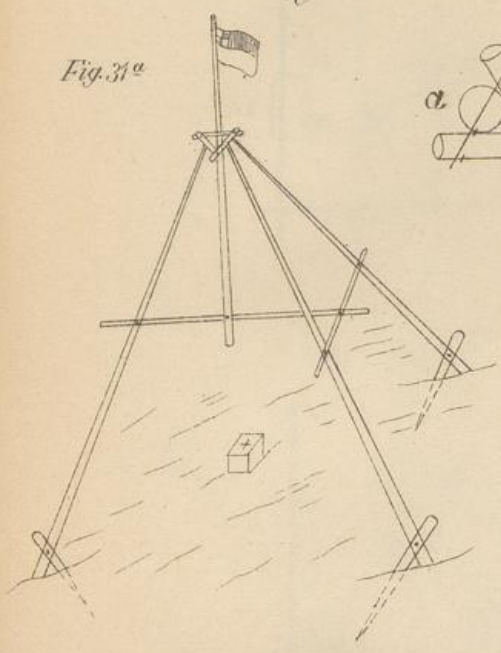


Fig. 31<sup>b</sup>

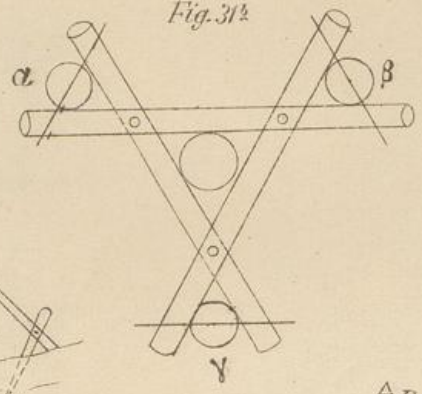
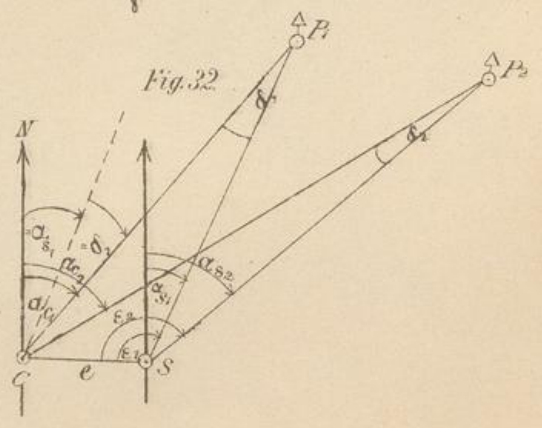
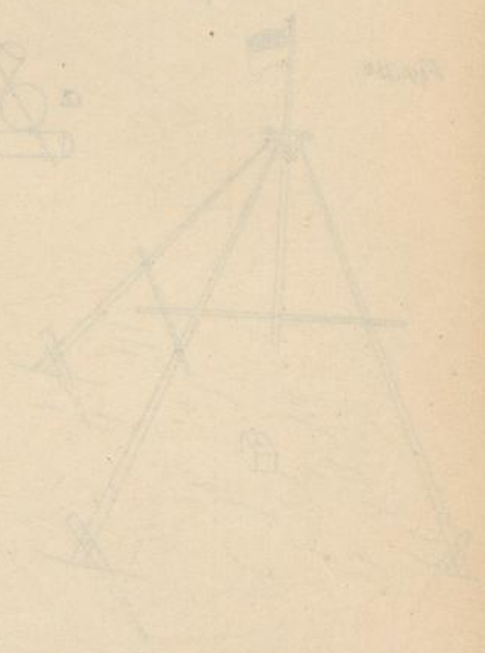
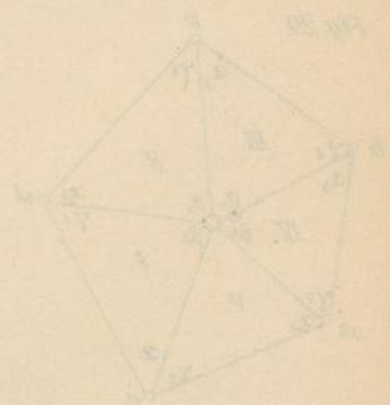
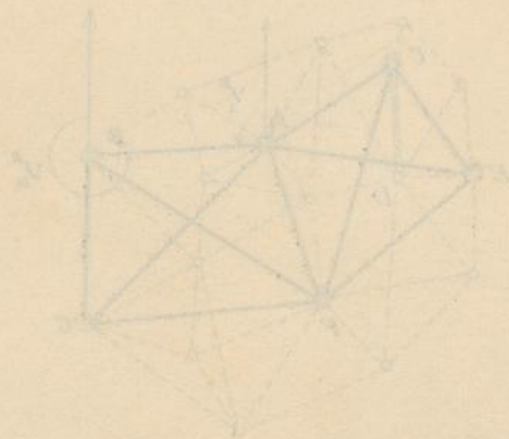
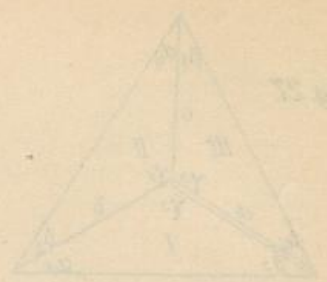


Fig. 32





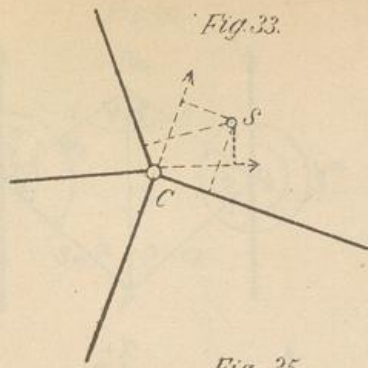


Fig. 33.

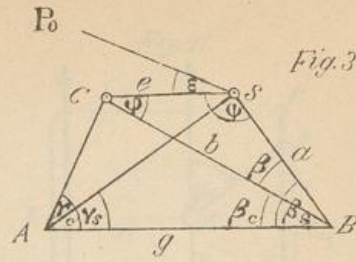


Fig. 34.

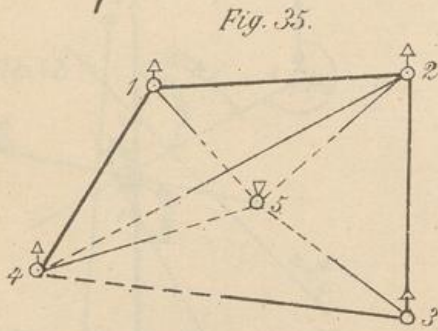


Fig. 35.

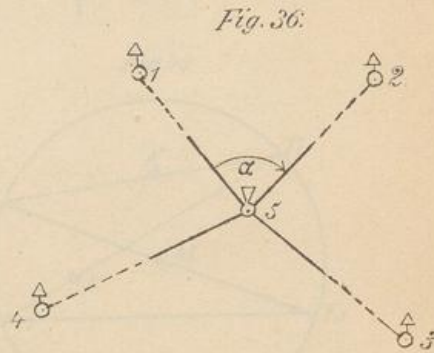


Fig. 36.

Fig. 37.

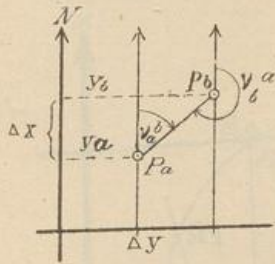


Fig. 38.

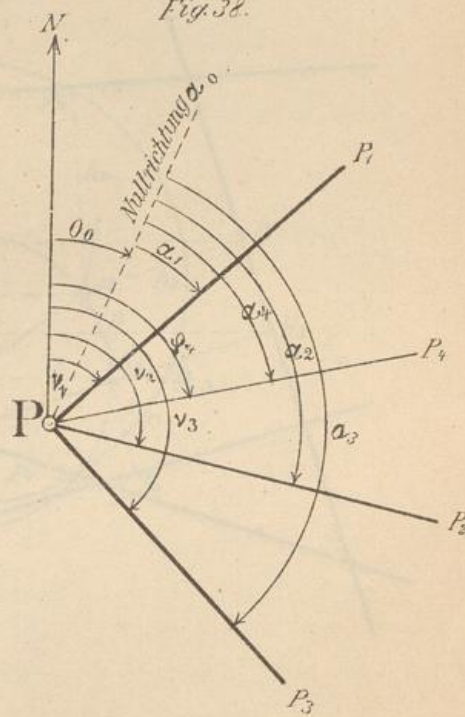
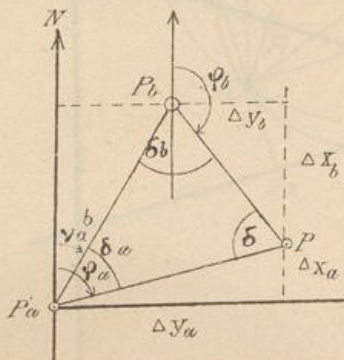


Fig. 39.



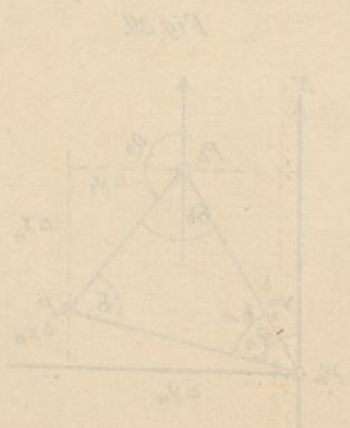
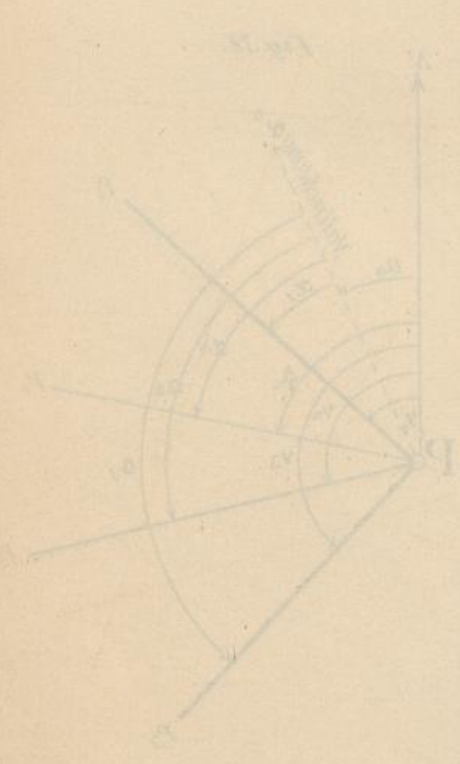
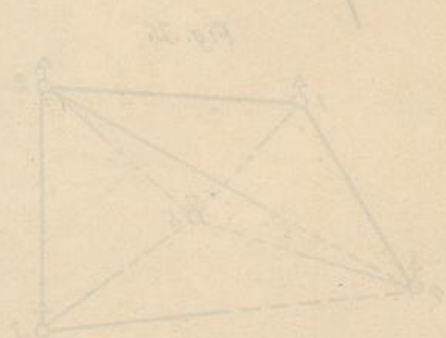
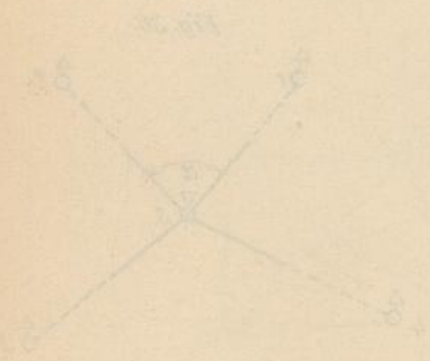
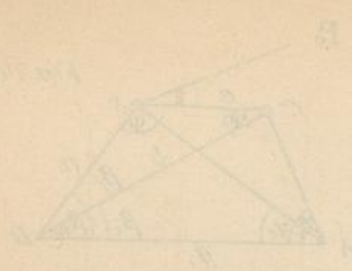


Fig. 40.

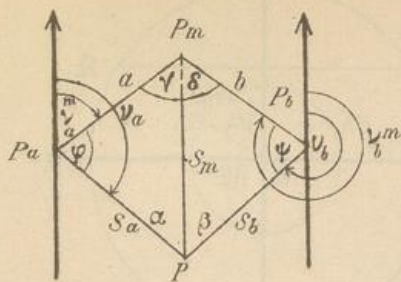


Fig. 41.

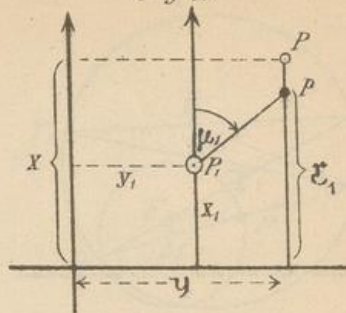


Fig. 43.

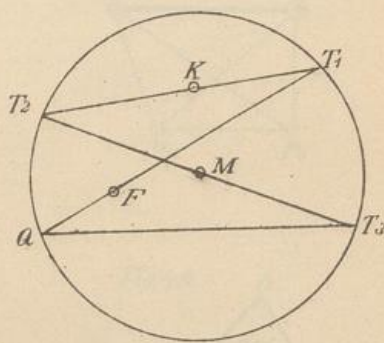


Fig. 42.

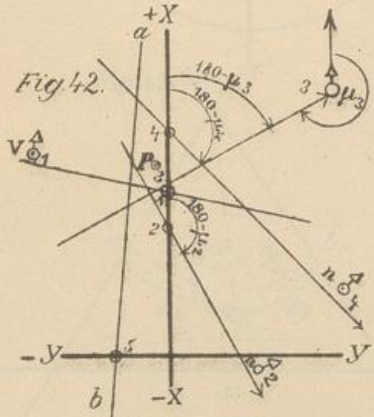
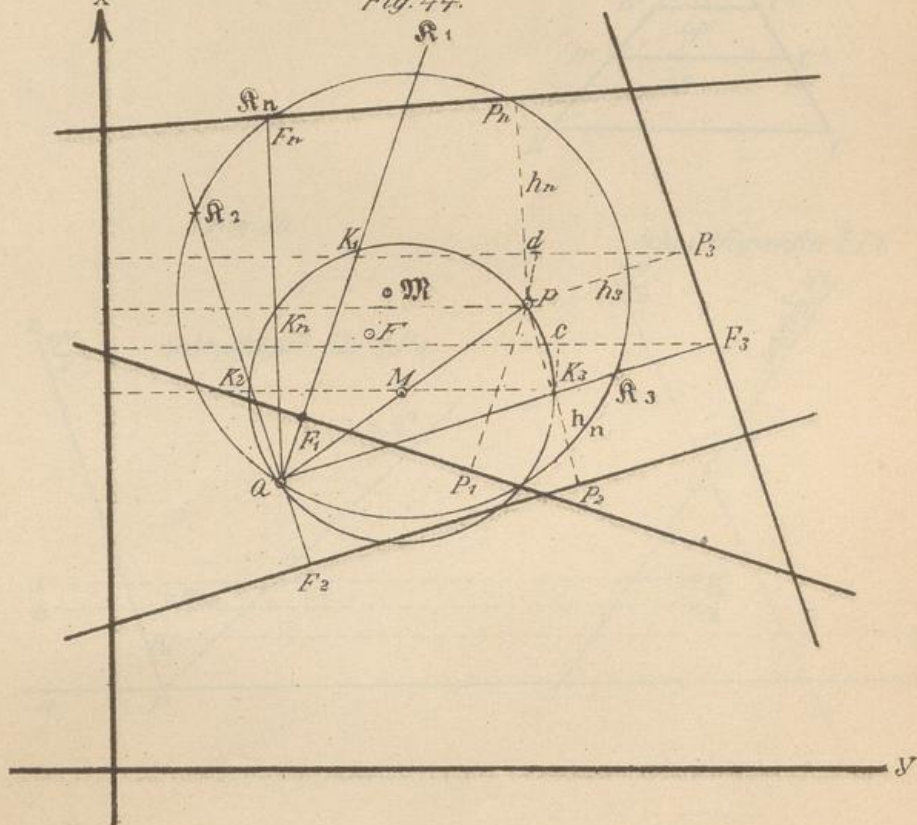
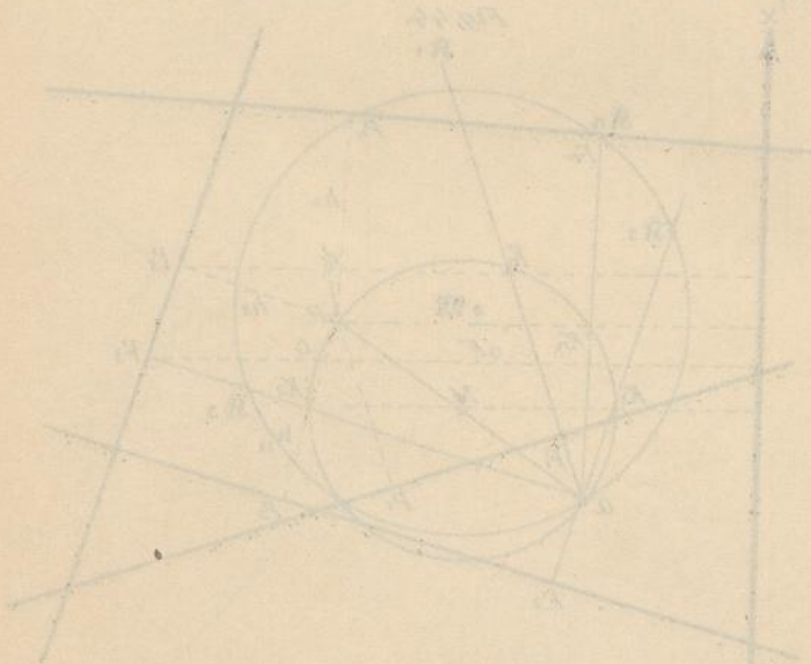
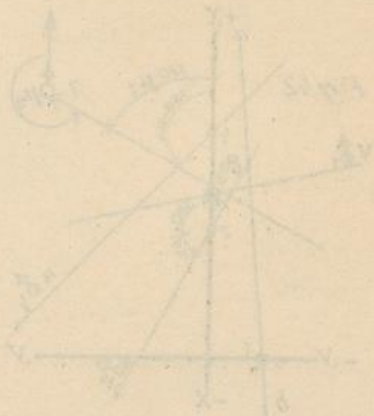
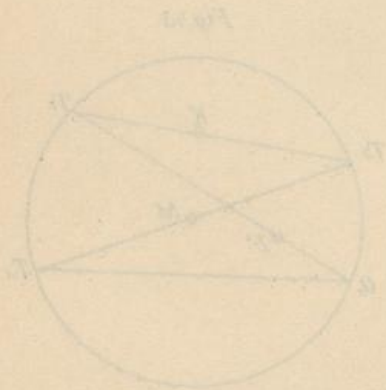
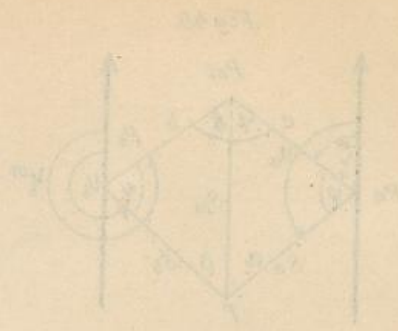
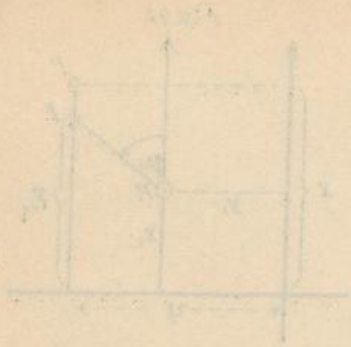


Fig. 44.





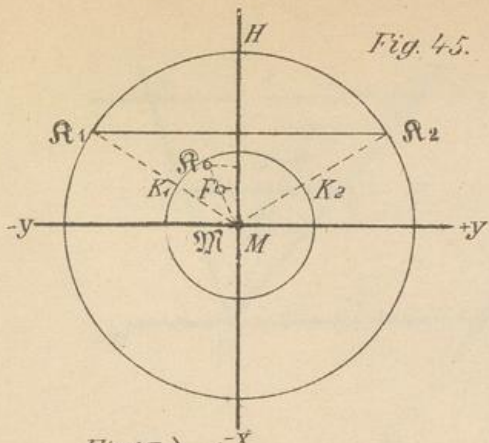


Fig. 45.

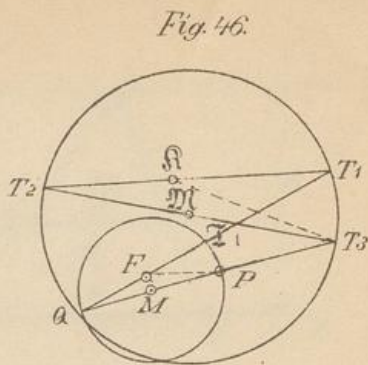


Fig. 46.

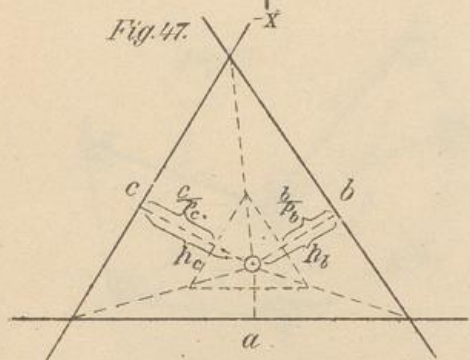


Fig. 47.

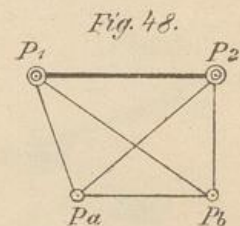


Fig. 48.

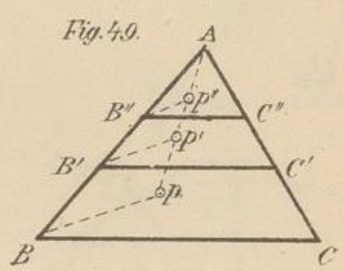
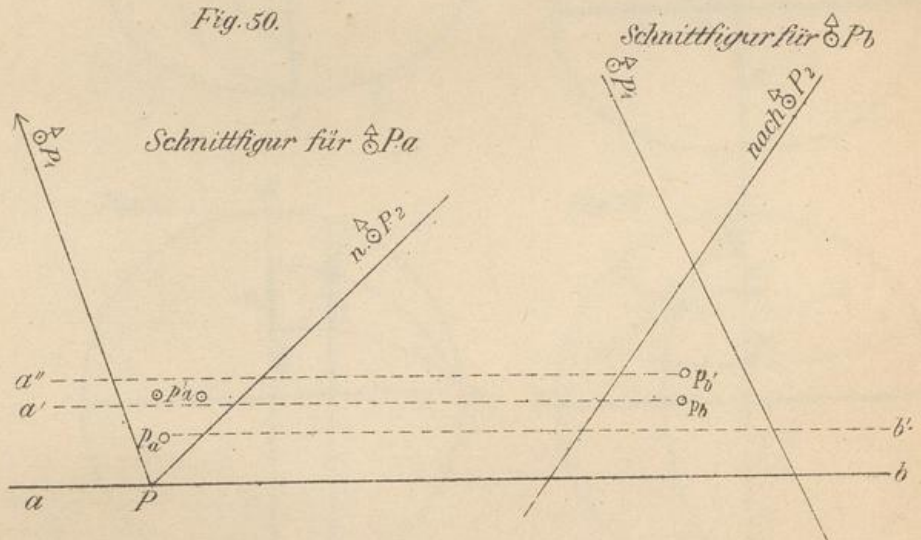


Fig. 49.

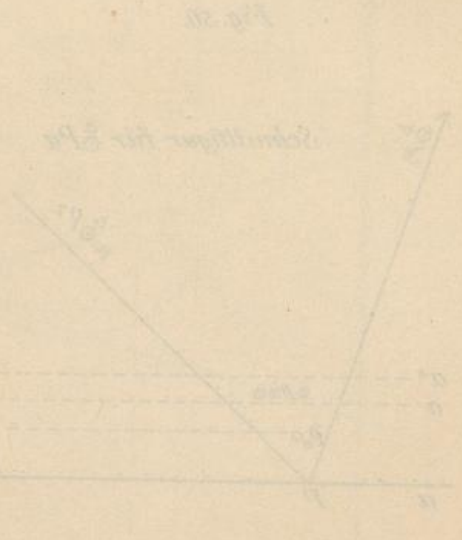
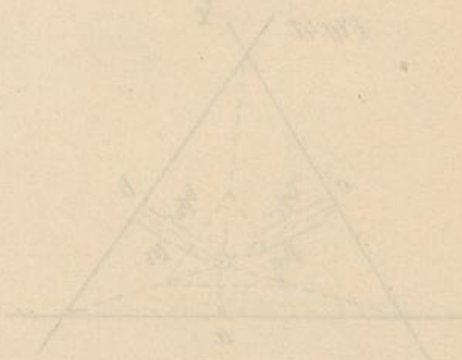
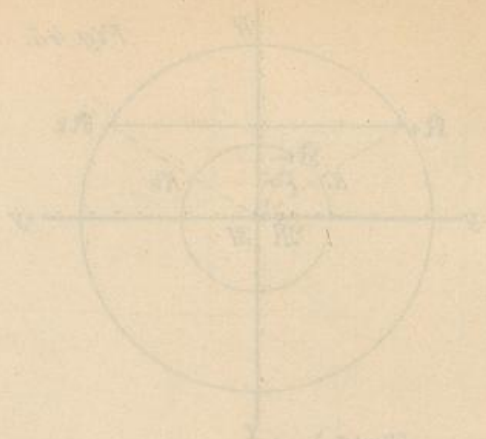
Fig. 50.



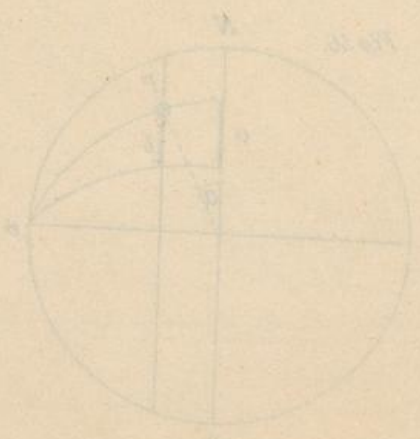
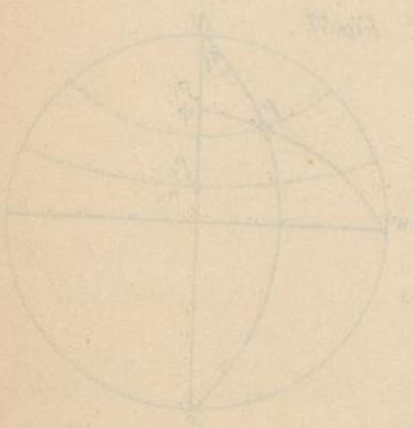
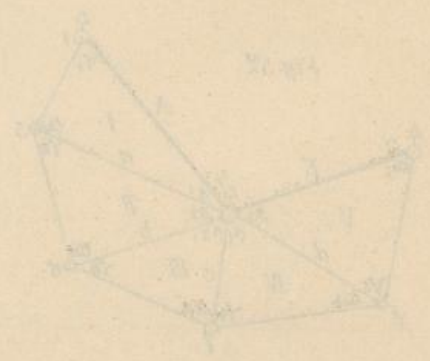
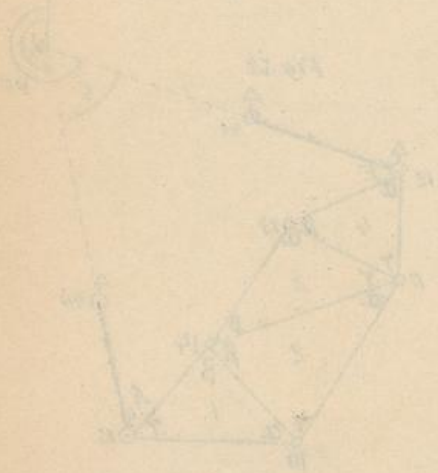
Schnittfigur für  $\triangle P_1$

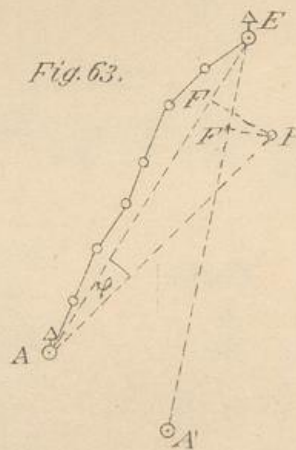
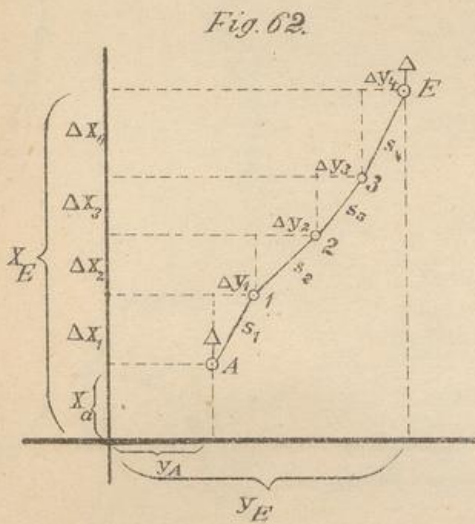
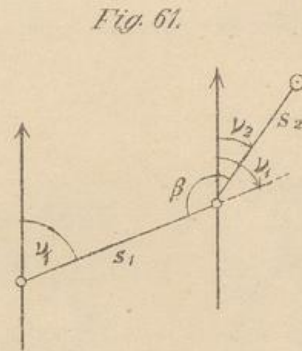
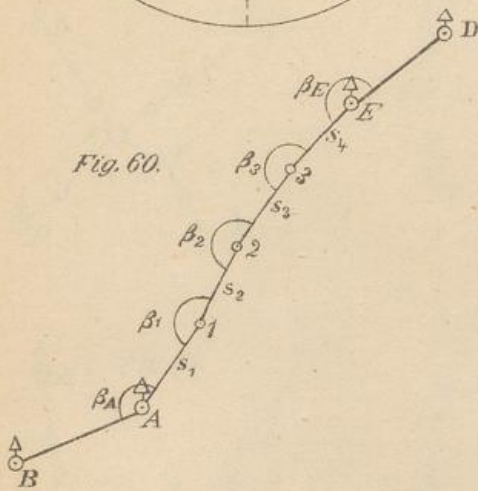
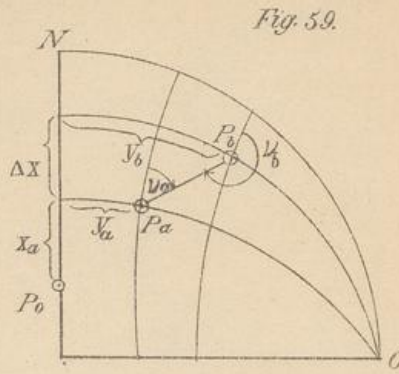
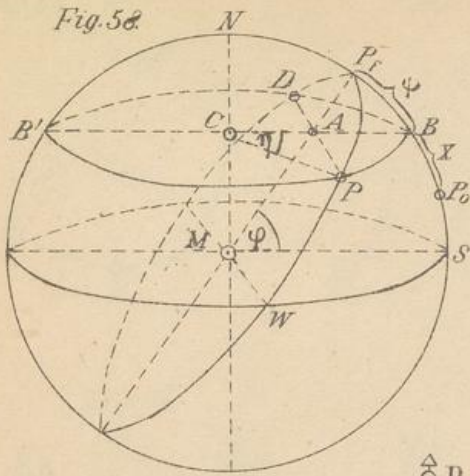
Schnittfigur für  $\triangle P_2$

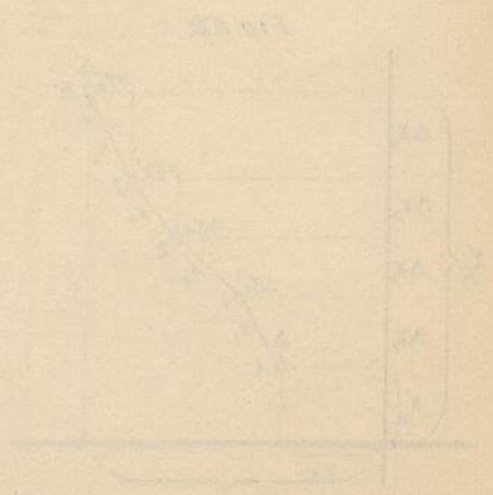
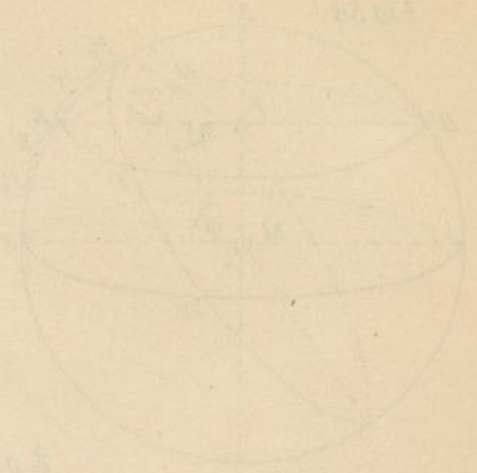
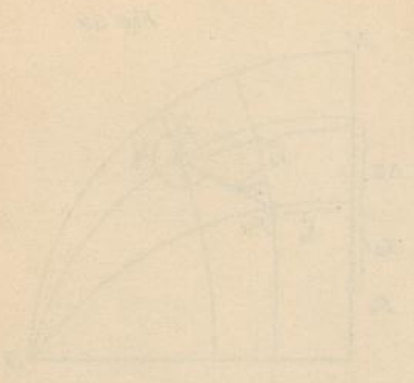
nach  $\triangle P_2$











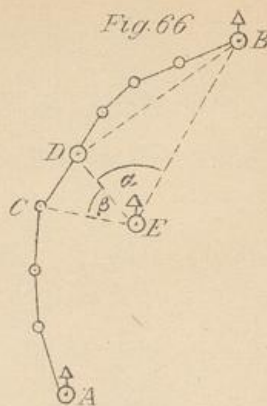
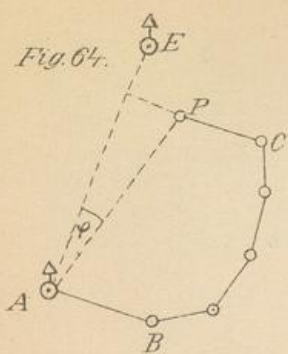


Fig. 67.

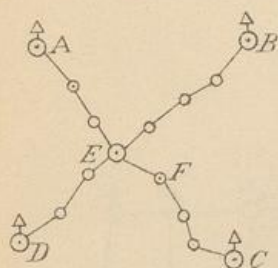


Fig. 68.

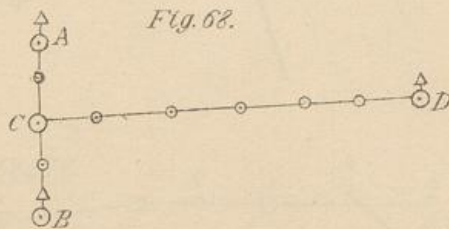


Fig. 70.

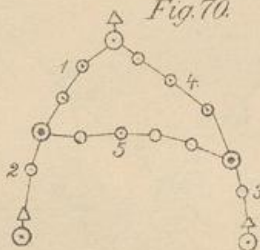


Fig. 71.



Fig. 69.

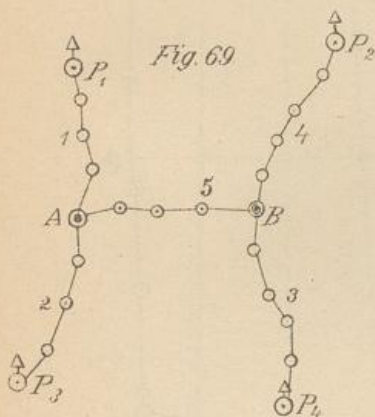


Fig. 72.

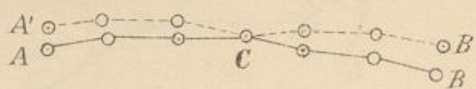


Fig. 74.

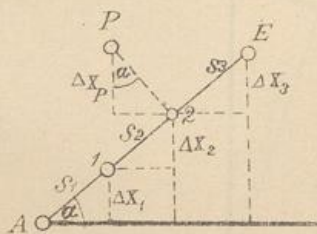


Fig. 75.

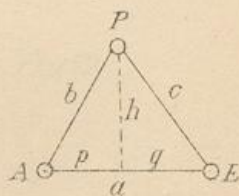
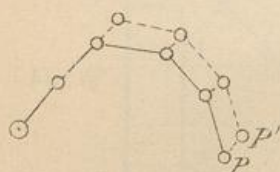


Fig. 73.



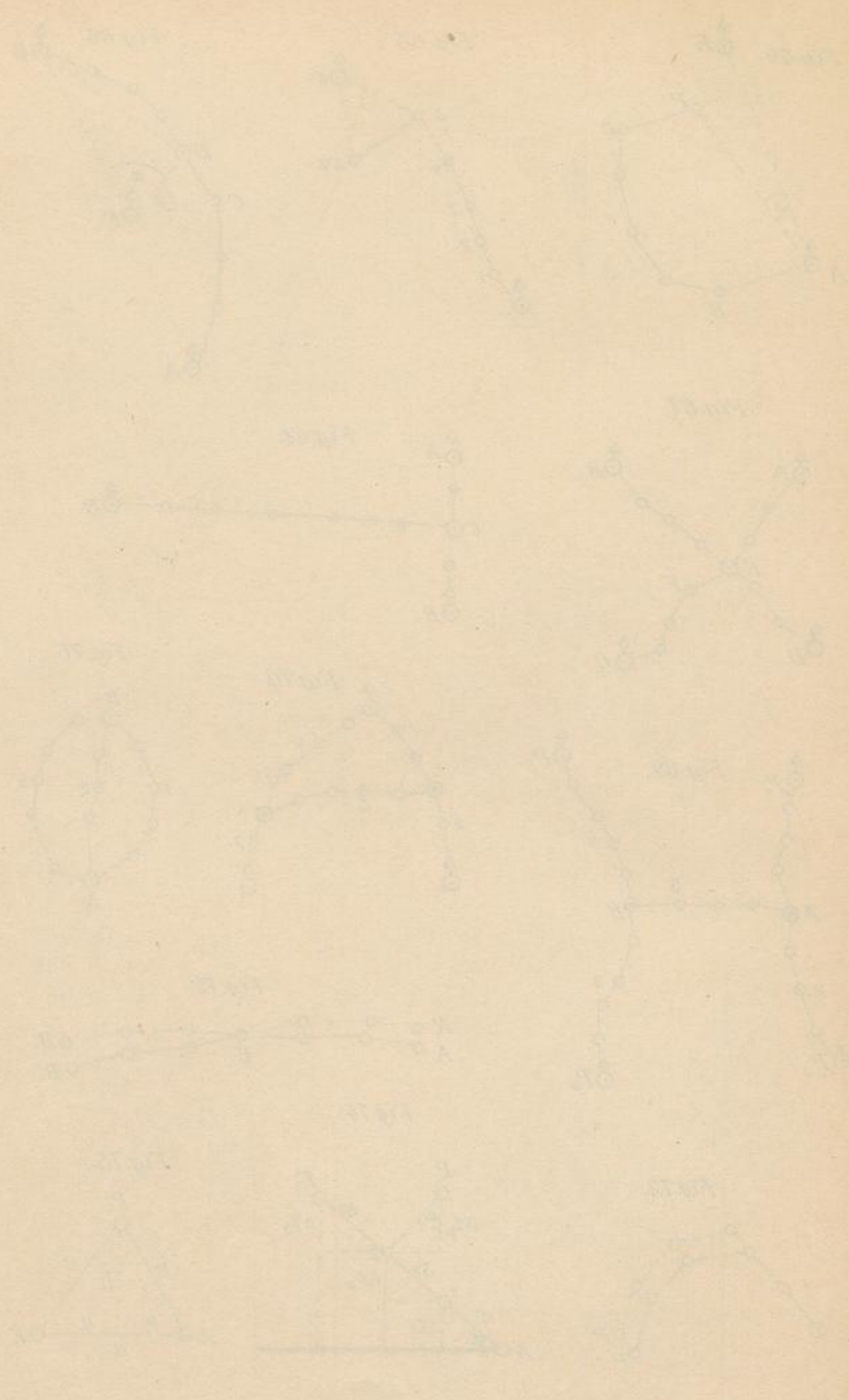
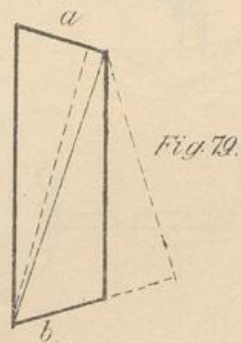
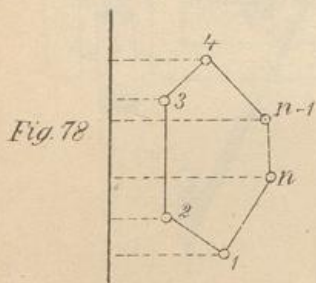
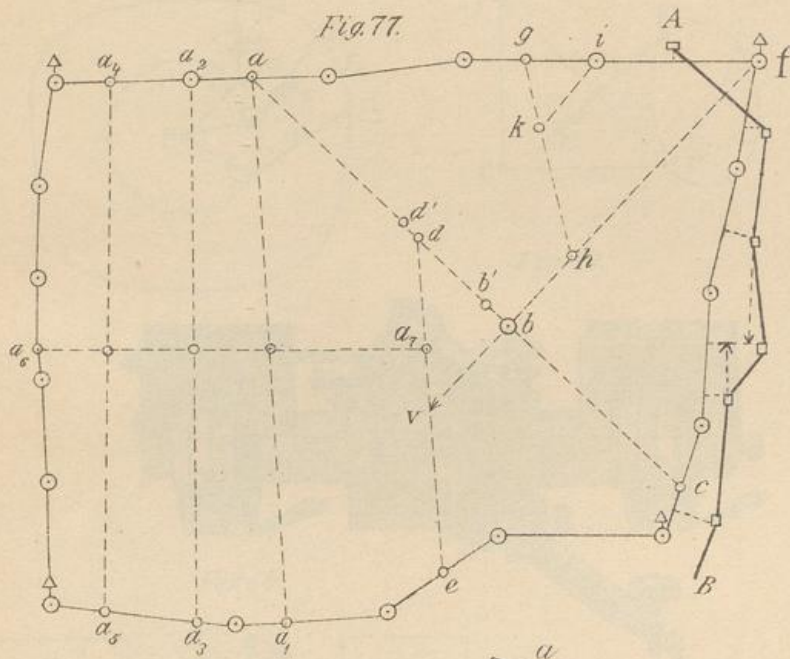
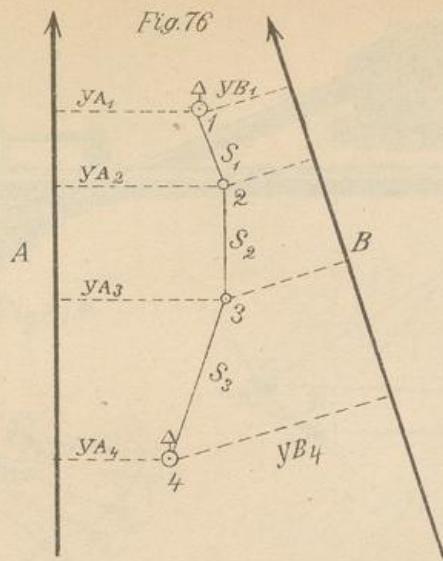


Fig. 76-79.



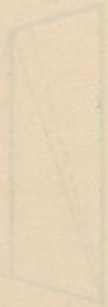
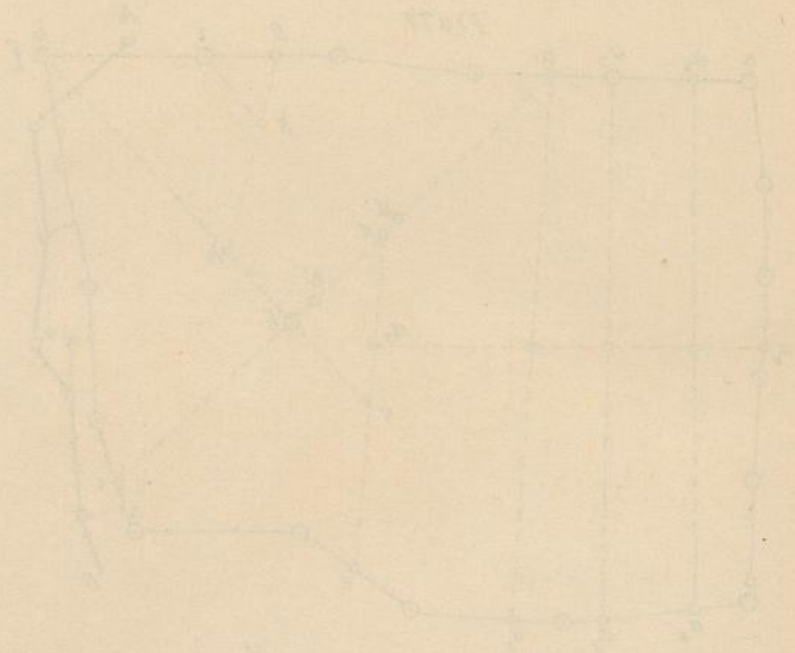


Fig. 80.

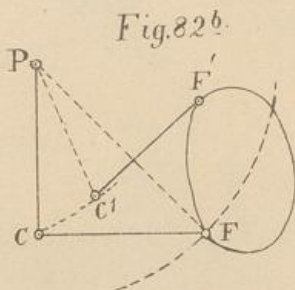
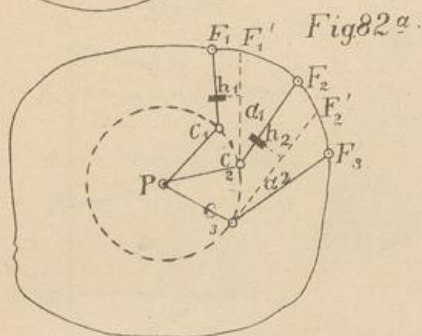
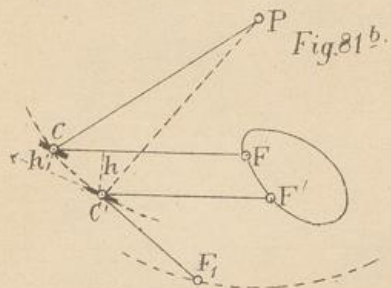
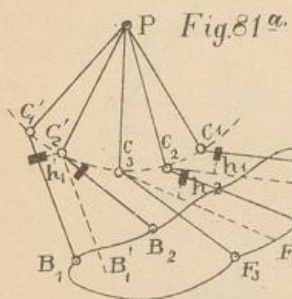
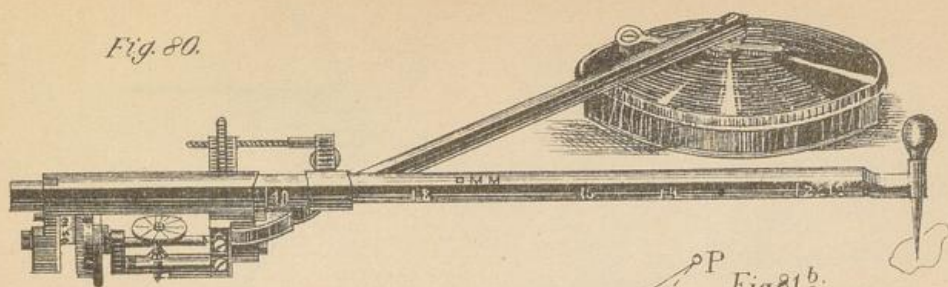


Fig. 83.

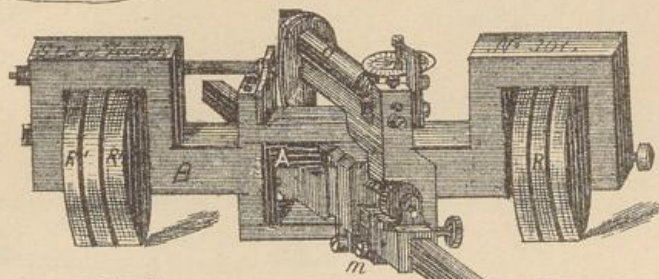
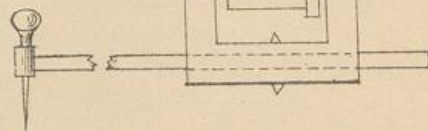
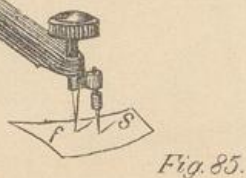
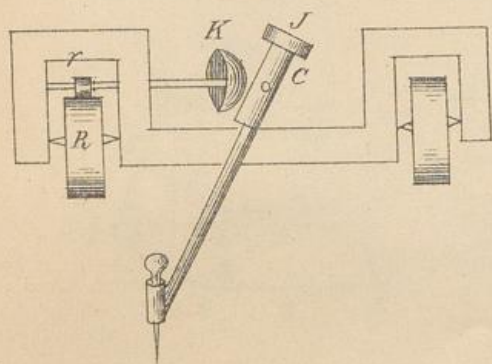


Fig. 84.





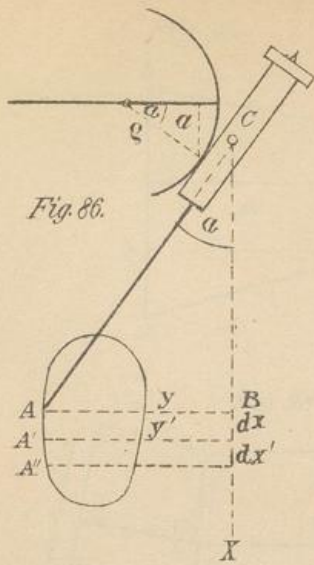


Fig. 87.

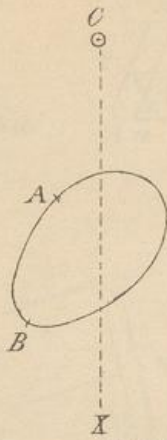


Fig. 88.

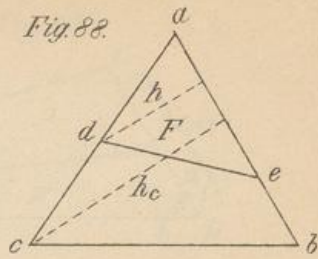


Fig. 91.

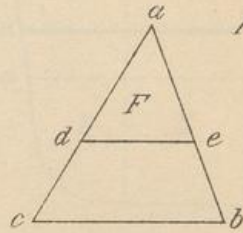


Fig. 89.

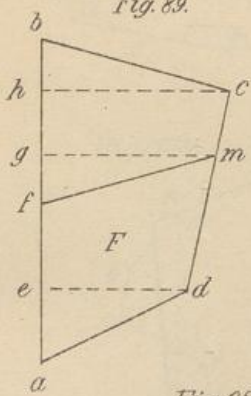


Fig. 90.

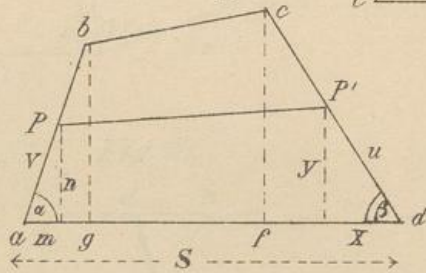


Fig. 93.

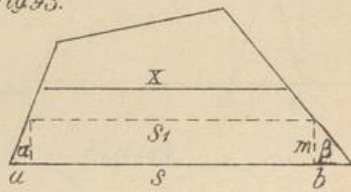


Fig. 92.

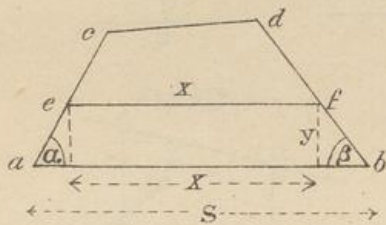


Fig. 94.

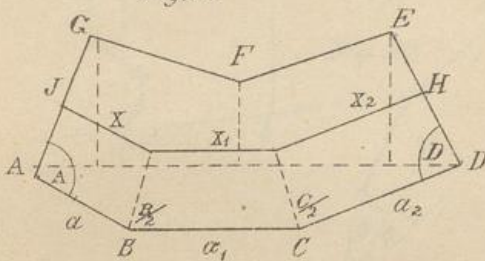
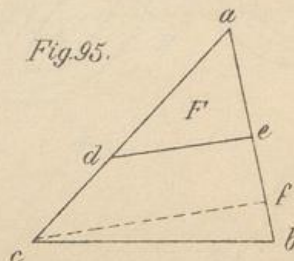


Fig. 95.



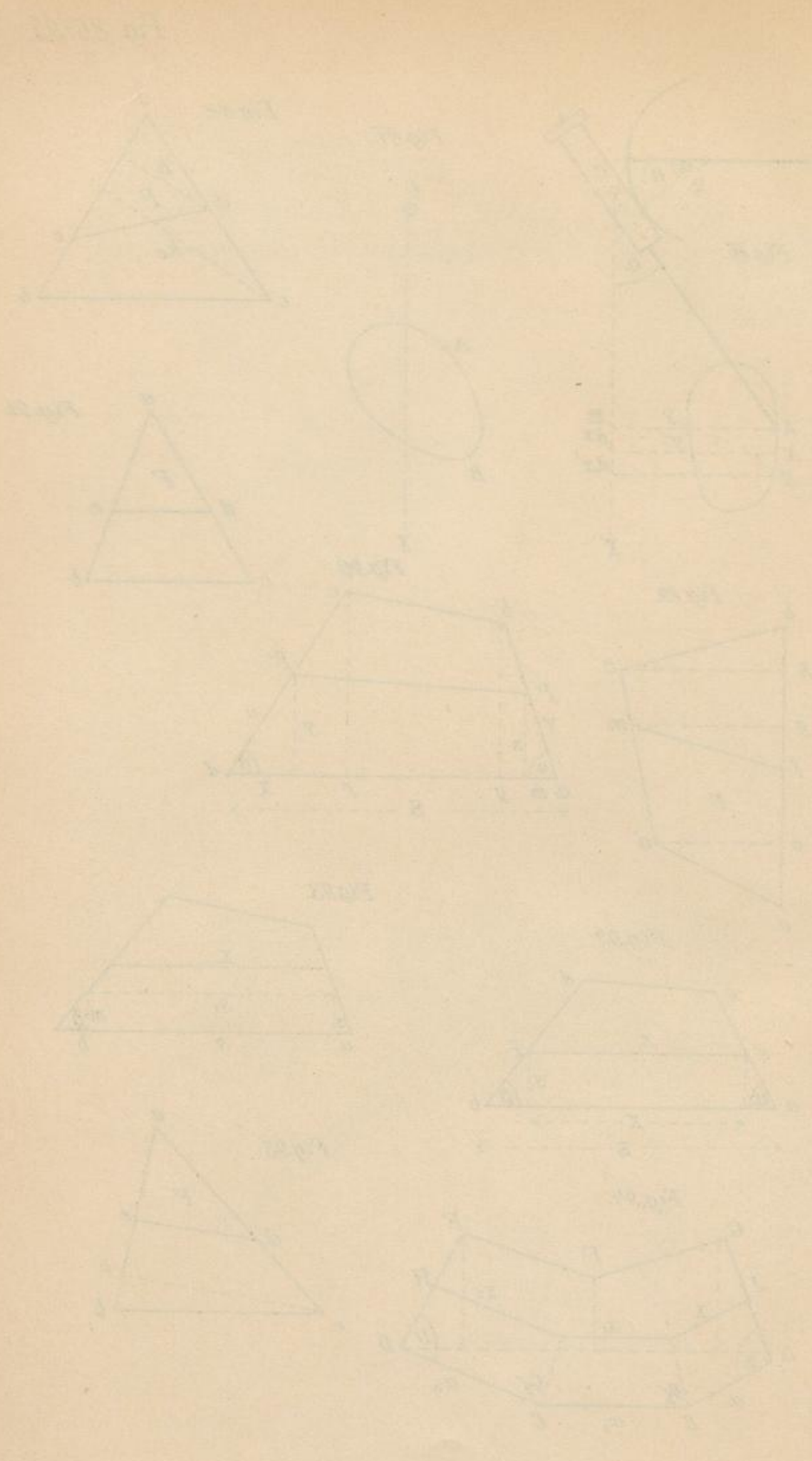


Fig. 96.

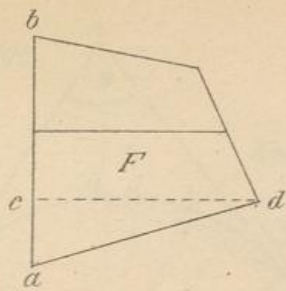


Fig. 97.

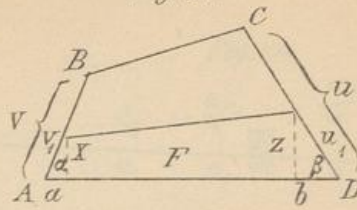


Fig. 98.

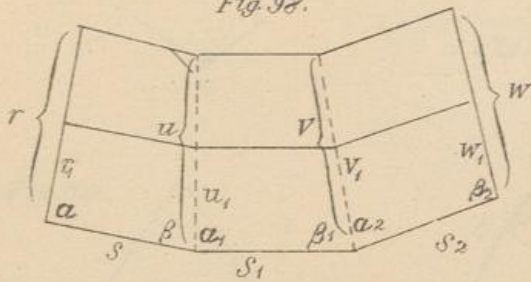


Fig. 99.

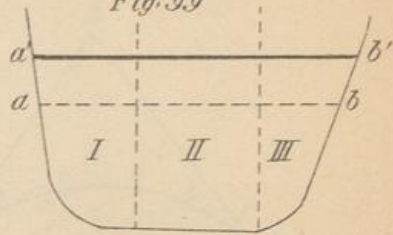


Fig. 100.

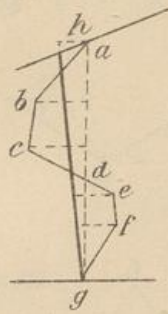


Fig. 101.

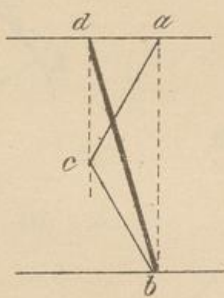


Fig. 102.

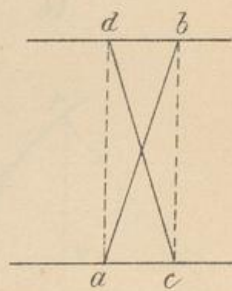


Fig. 103.

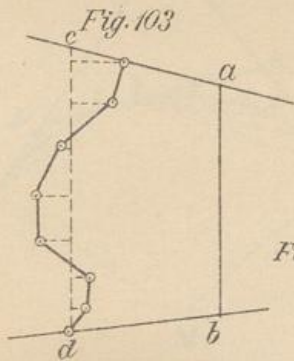


Fig. 104.

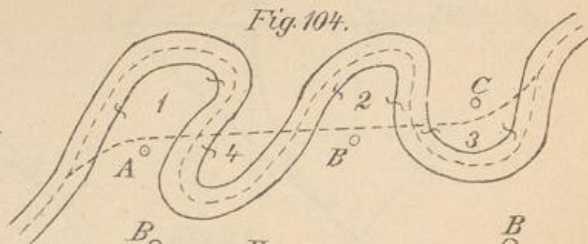


Fig. 105.

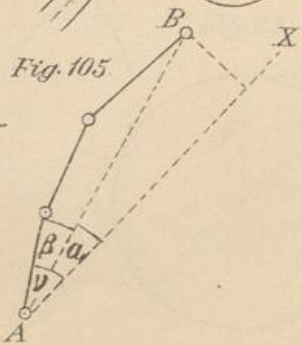
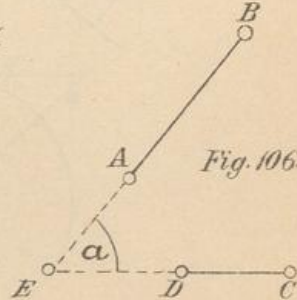
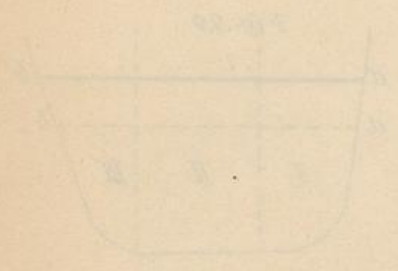
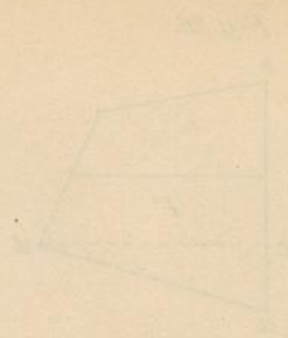
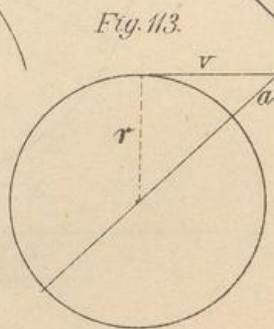
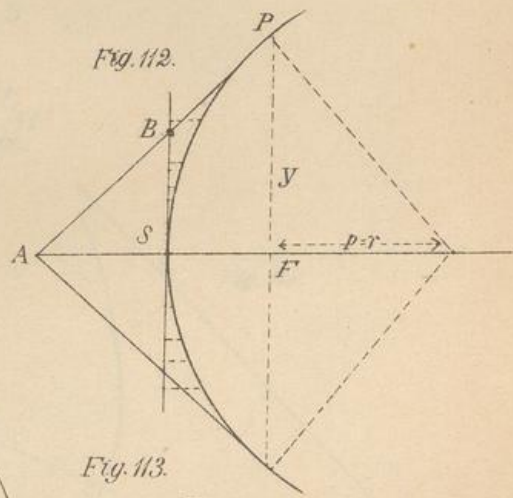
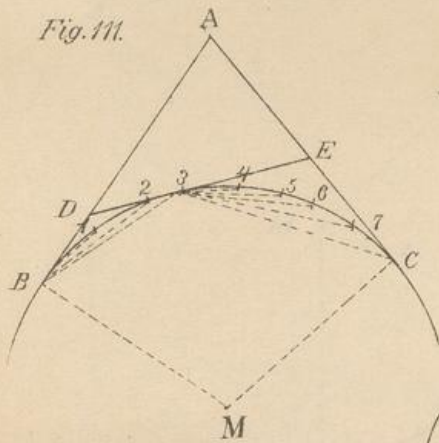
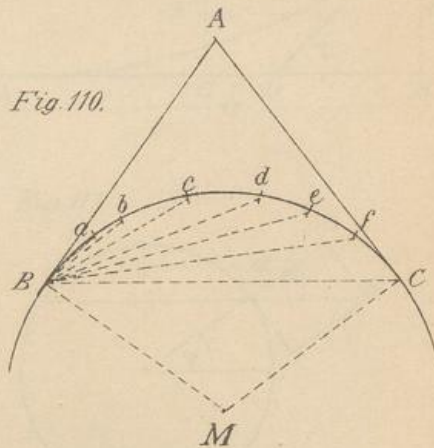
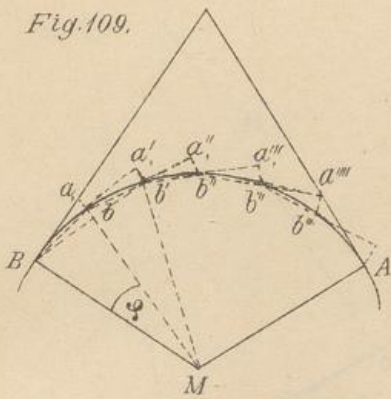
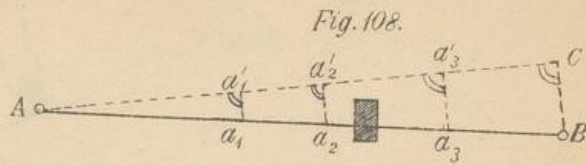
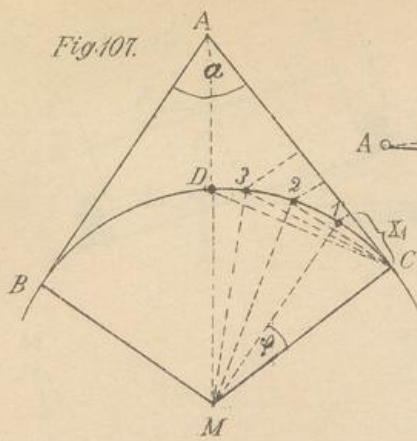
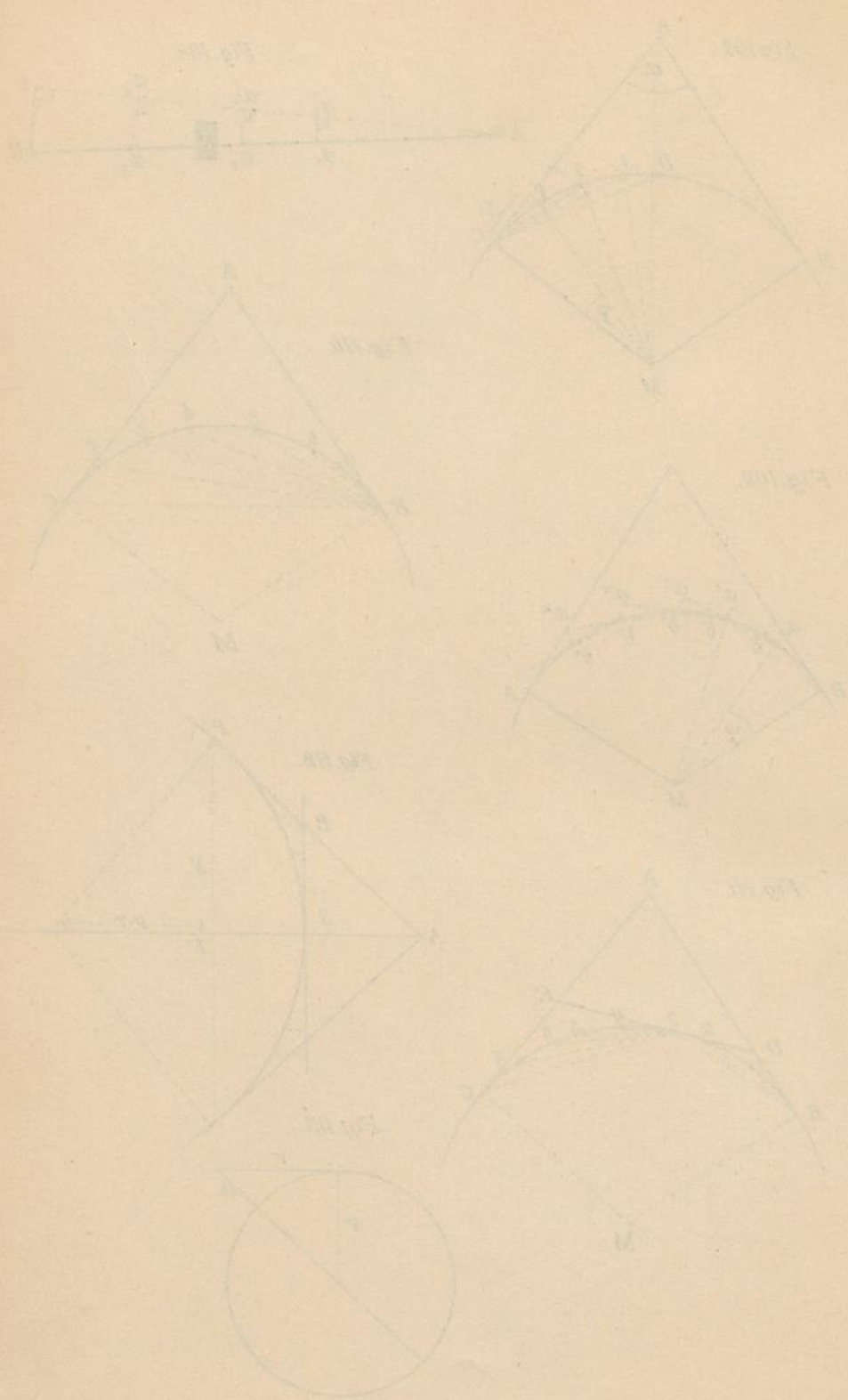


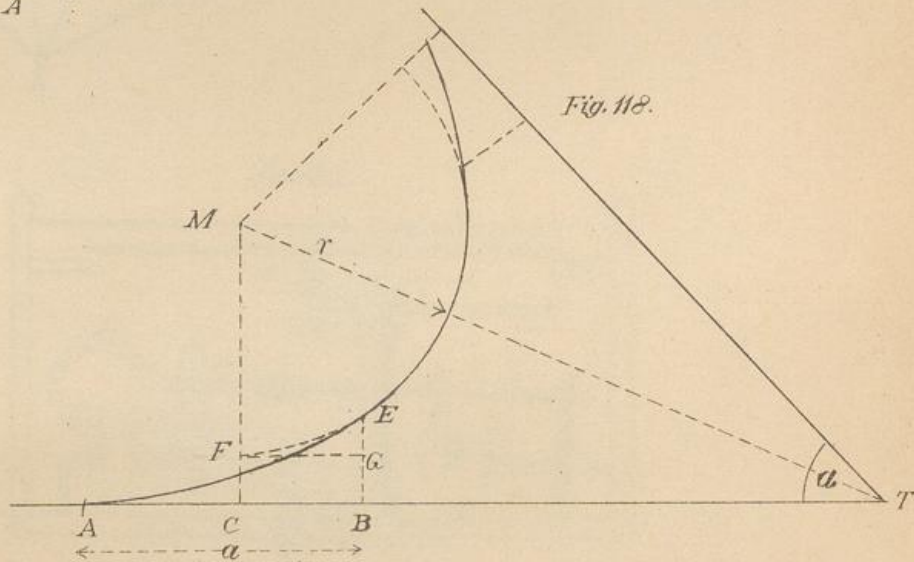
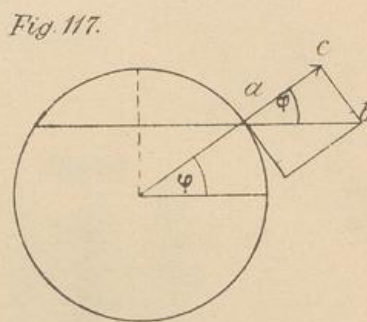
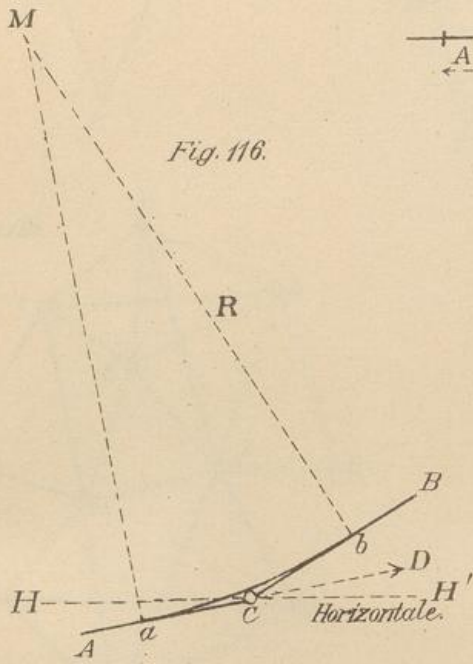
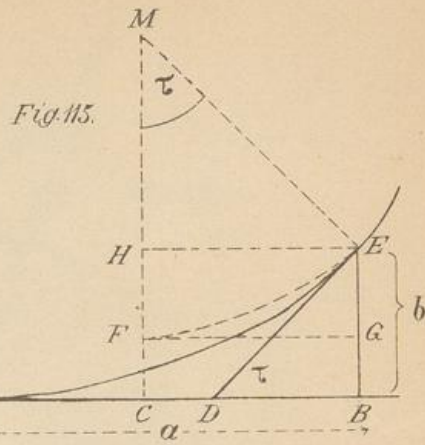
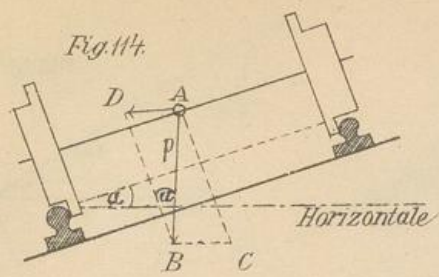
Fig. 106.

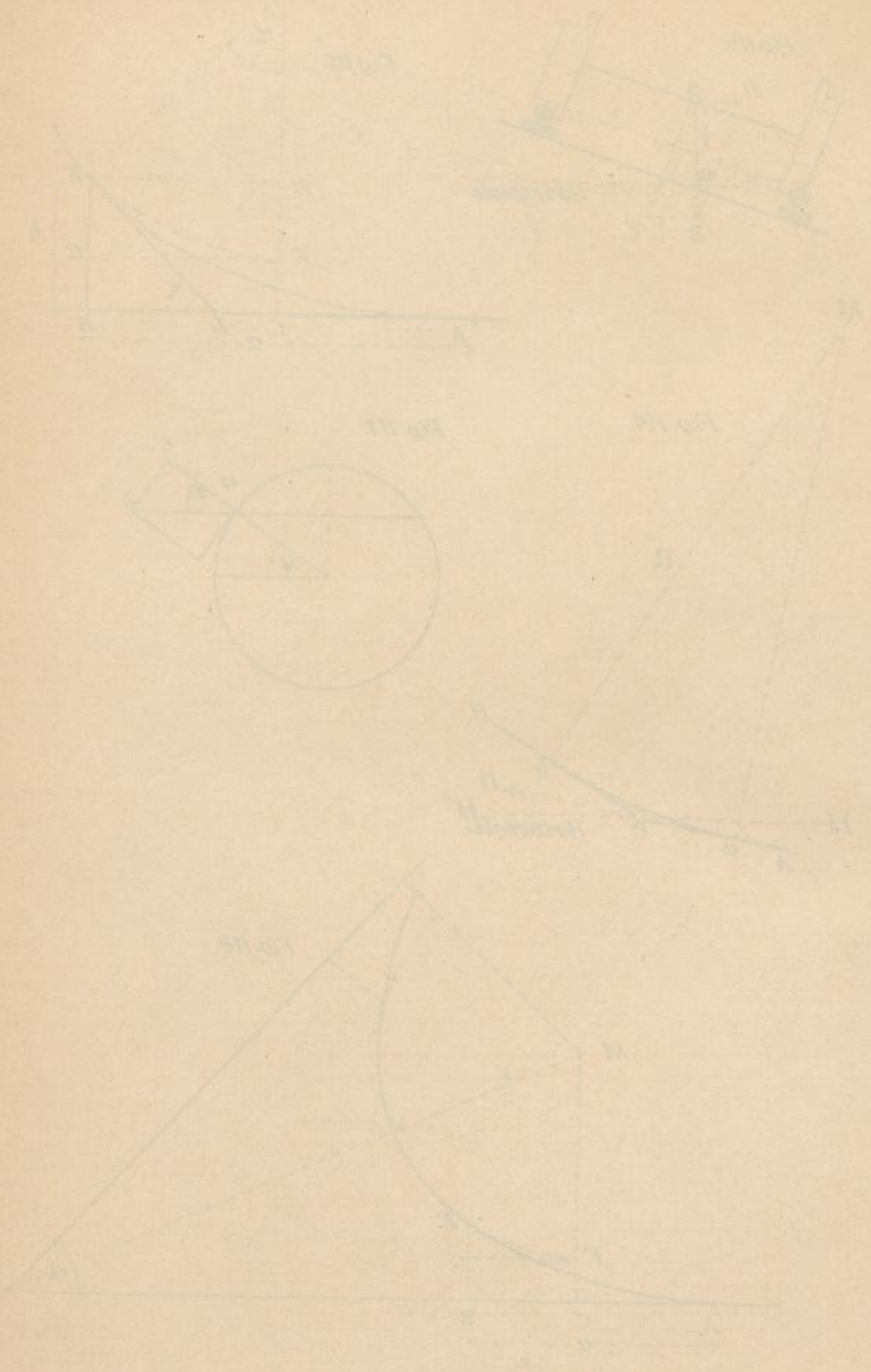












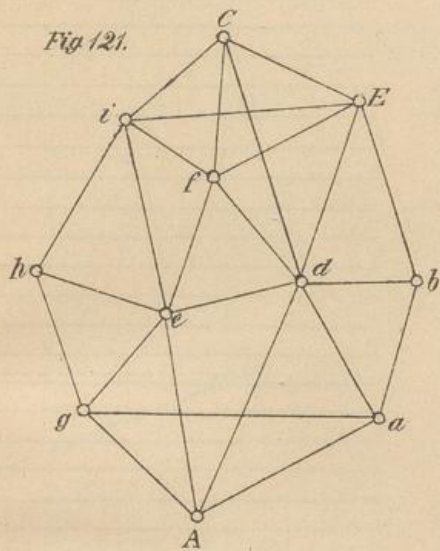
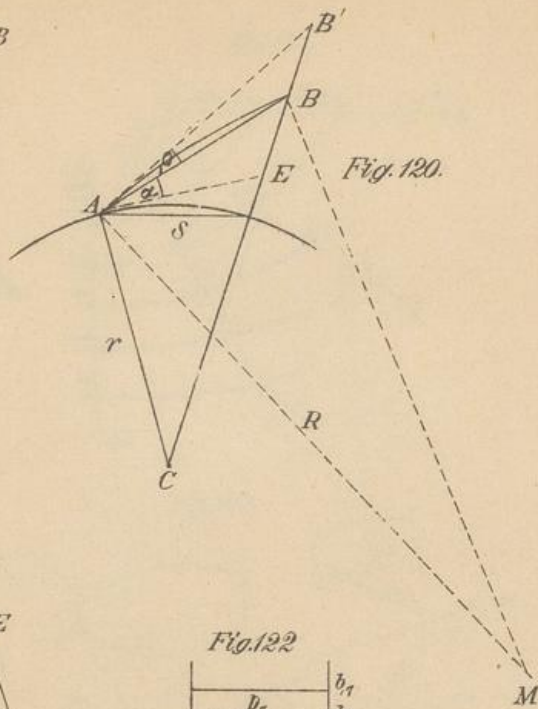
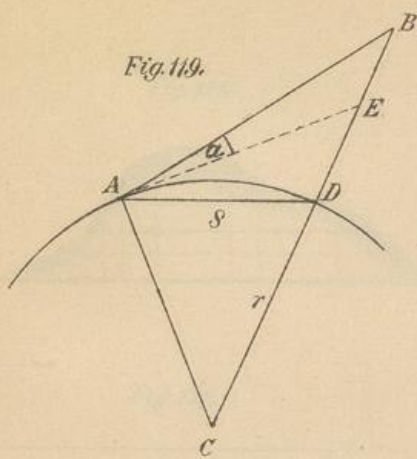
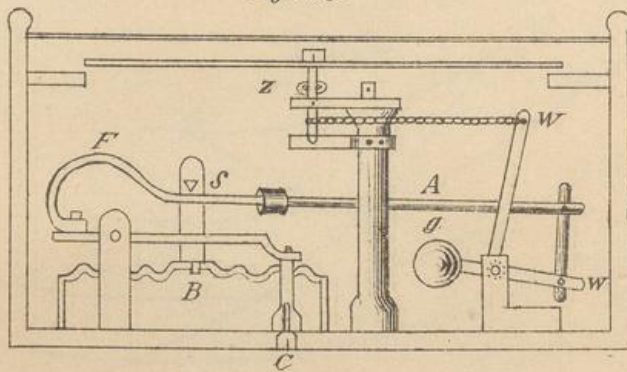


Fig. 122

	$b_1$
$p_1$	$b_6$
$p_0$	$b_5$
$p_5$	$b_4$
$p_4$	$b_3$
$p_3$	$b_2$
$p_2$	$b_1$
$p_1$	$b_0$

Fig. 123.



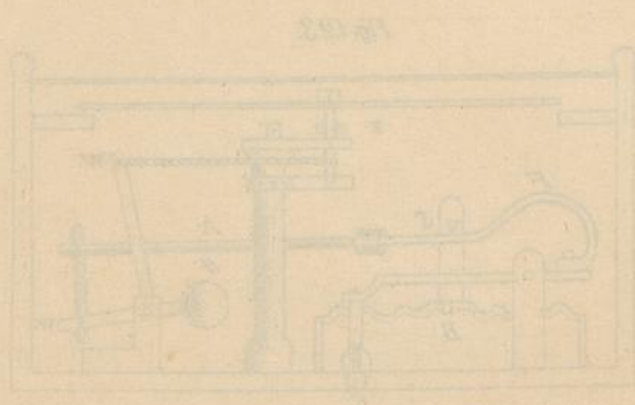
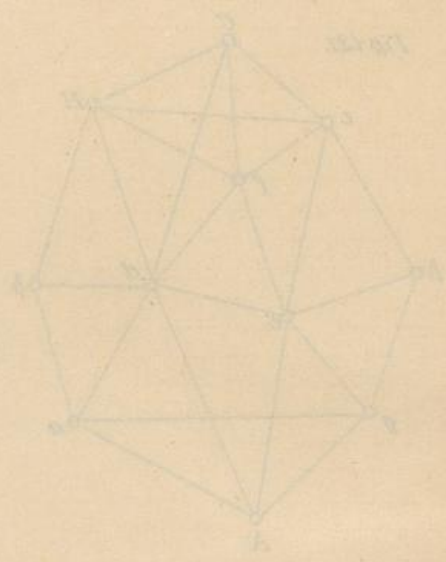
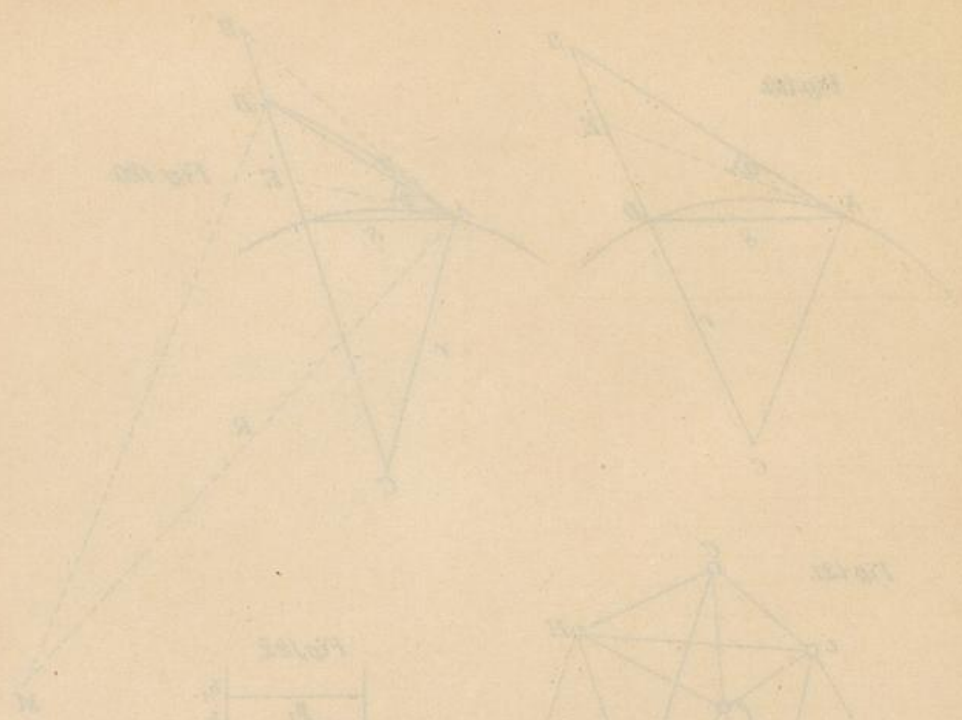


Fig. 124.

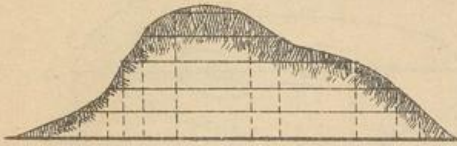


Fig. 126.

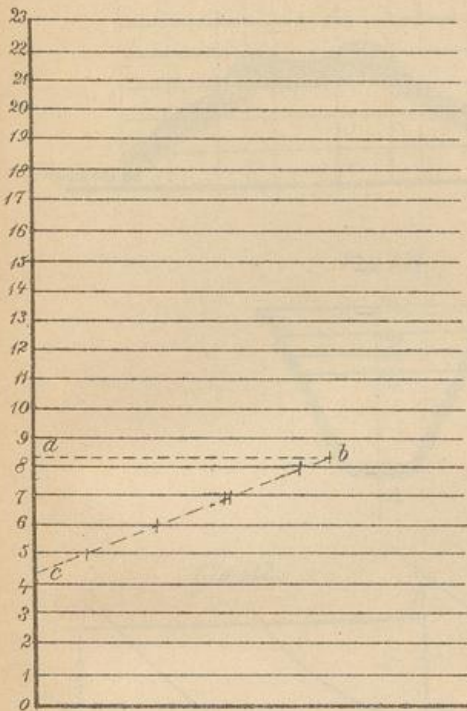


Fig. 125.

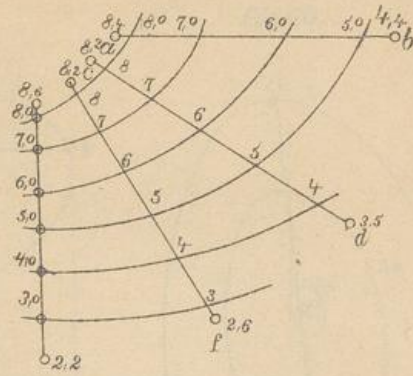


Fig. 127.

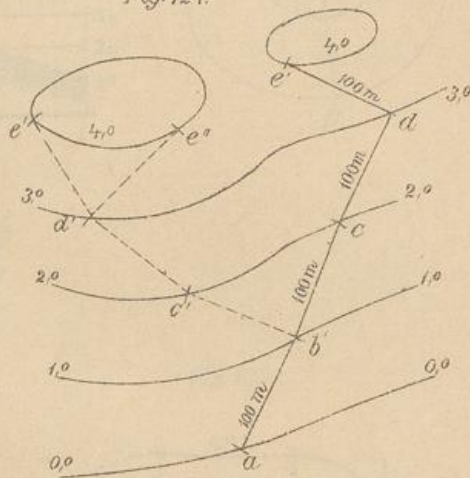


Fig. 128.

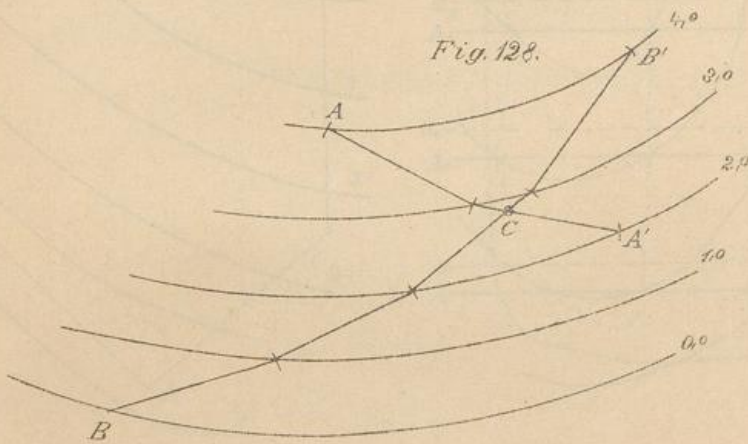


Fig. 12

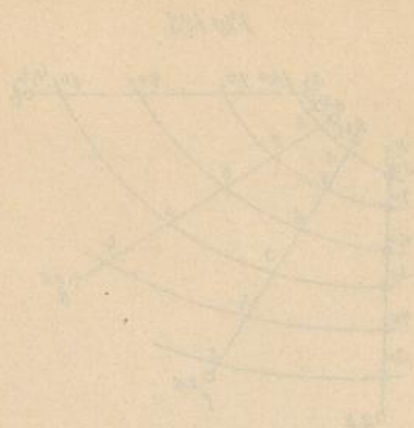


Fig. 13



Fig. 14



Fig. 15

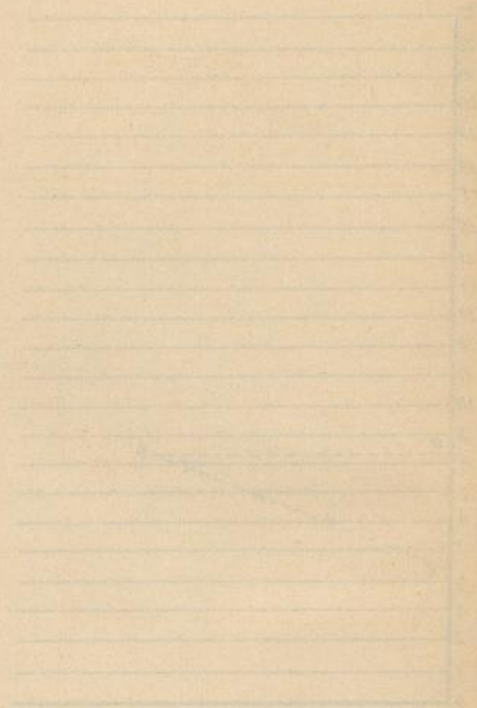


Fig. 16

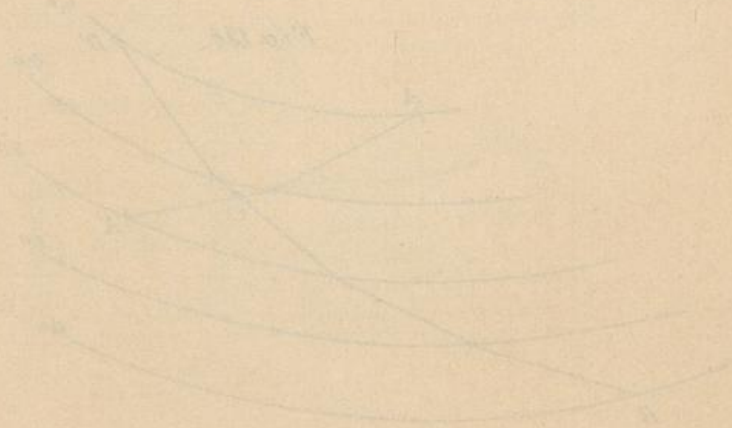


Fig. 129.

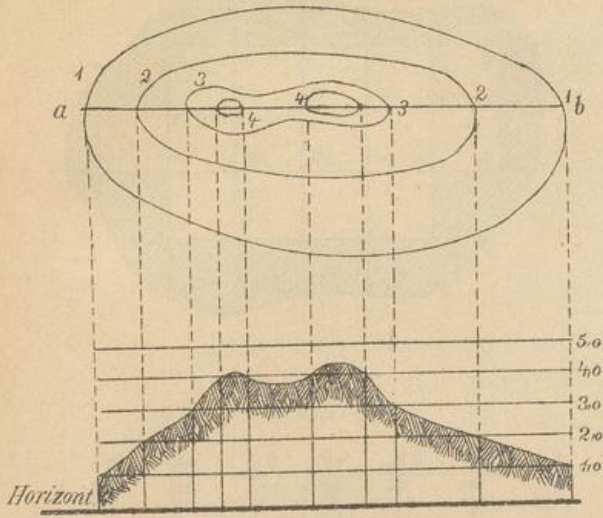


Fig. 130.

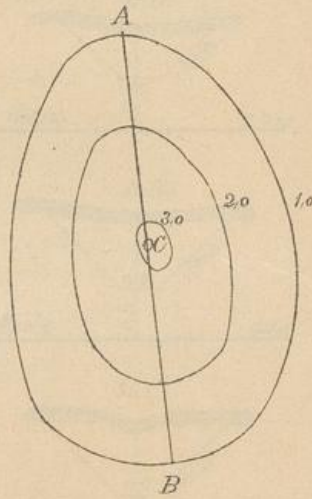


Fig. 131.

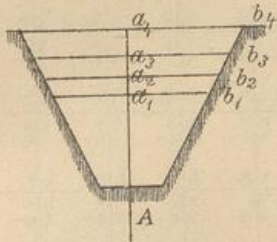


Fig. 133.

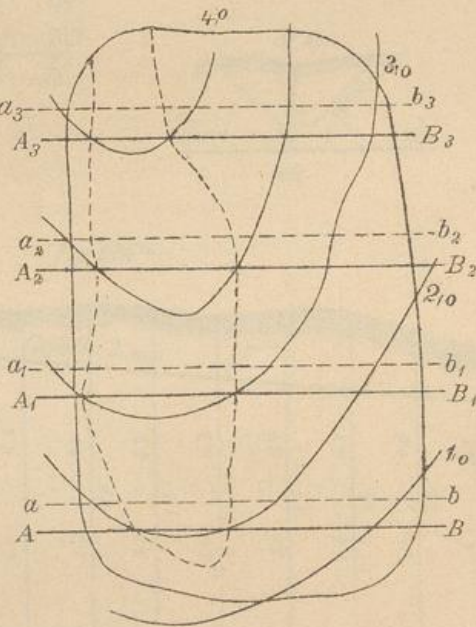


Fig. 132.

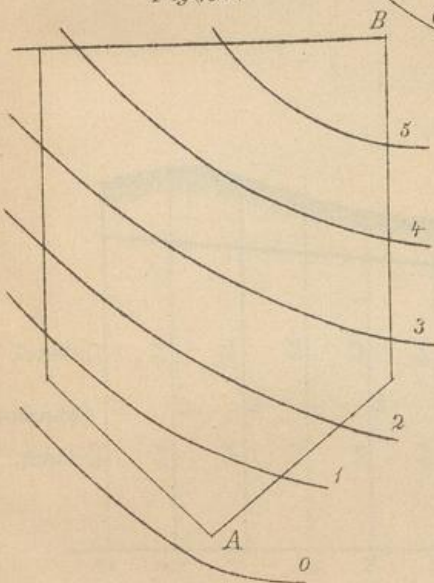


Fig. 103



Fig. 104

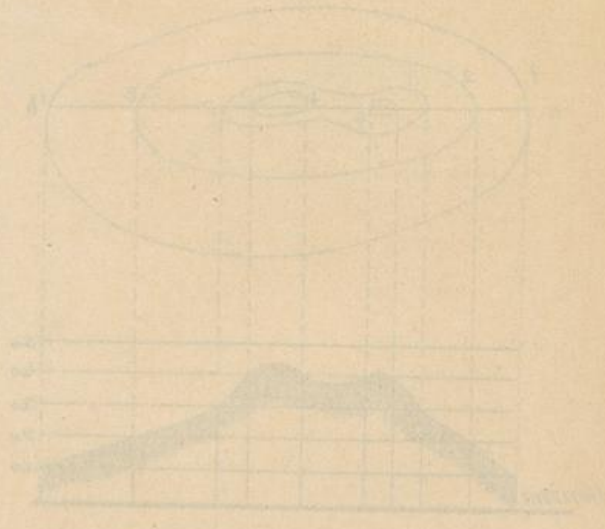


Fig. 105



Fig. 106

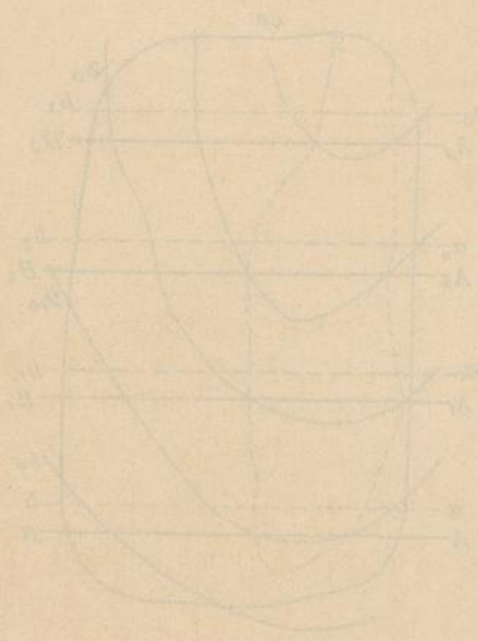


Fig. 107



Fig. 134-136.

Fig. 134.

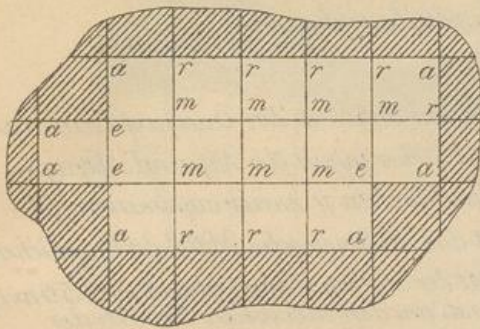


Fig. 135.

	86	90	92	98	96	90	82
$\alpha$	85	83	81	89	87	85	83
	-0.9	-0.7	+0.1	+0.9	+0.9	+0.5	-0.7
	84	90	90	95	95	90	86
	83	87	89	87	85	83	81
	-0.8	-0.7	+0.7	+0.8	+1.0	+0.7	+0.5
	80	85	87	92	93	86	80
	81	89	87	85	83	81	79
	-1.1	-0.4	+0.0	+0.7	+1.0	+0.5	+0.1
	81	84	84	87	90	85	80
	89	87	85	83	81	79	77
	-0.8	-0.3	-0.7	+0.4	+0.9	+0.0	+0.3
	76	80	80	85	85	81	76
	87	85	83	81	79	77	75
	-1.1	-0.5	+0.3	+0.4	+0.6	+0.4	+0.1
	74	76	79	81	82	78	73
$\beta$	83	83	81	79	77	75	73
	-1.7	-0.7	-0.2	+0.2	+0.5	+0.3	$\pm 0.0$

Fig. 136<sup>b</sup>

Querprofile.

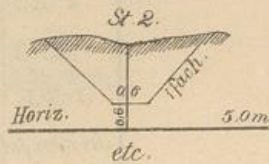
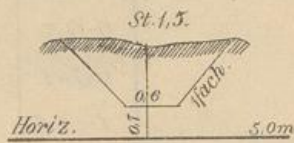
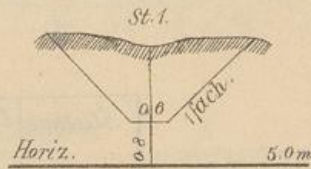
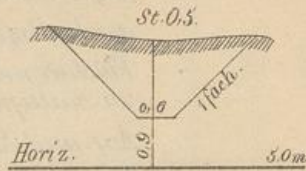
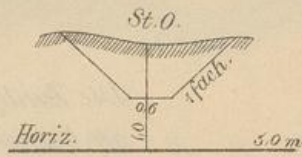
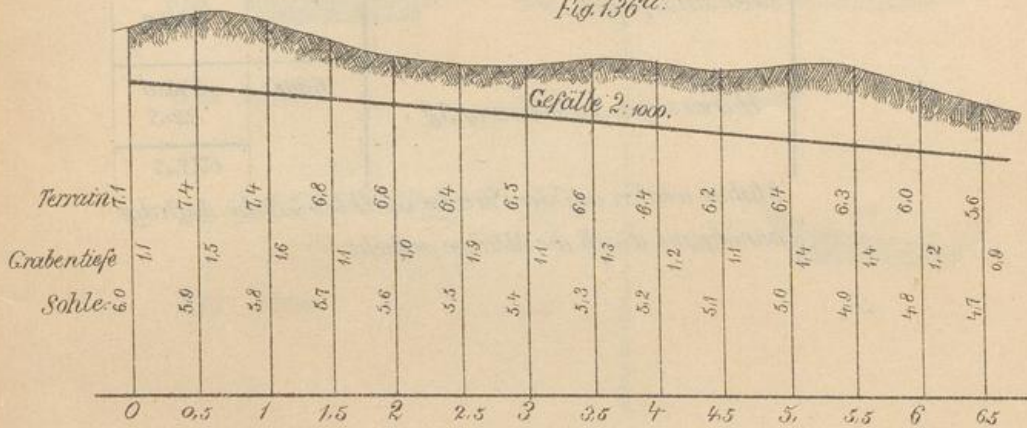


Fig. 136<sup>a</sup>.



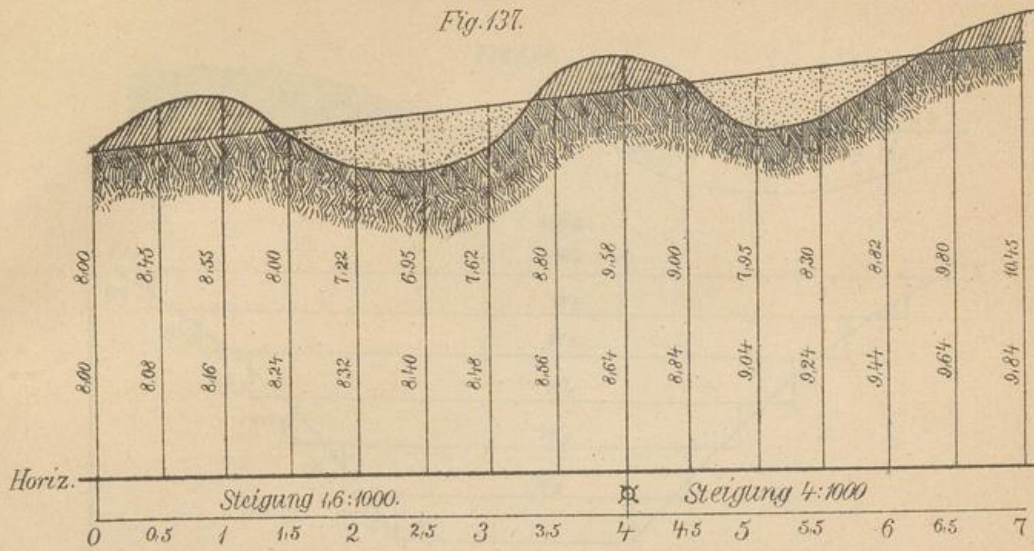
## Massenberechnung.

Die Zahlen rechts und links von den Querprofilzeichnungen bezeichnen den Flächeninhalt der Auf- und Abtragsprofile. Zwischen den Flächen je zweier aufeinander folgender Profile steht das arithmetische Mittel der bezüglichen Flächen, welches mit der Stationslänge, (durchweg 50 m), zu multipliciren ist, um den cubischen Inhalt der Auf- und Abträge der betreffenden Station zu erhalten. Es ergibt sich folgende Tabelle:

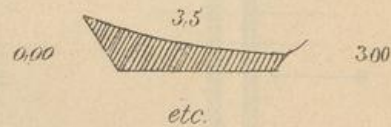
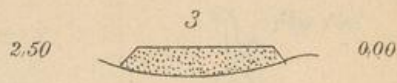
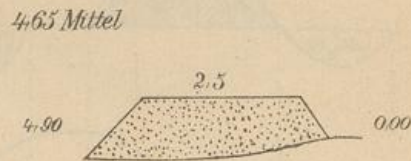
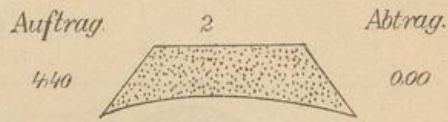
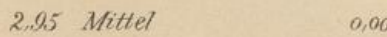
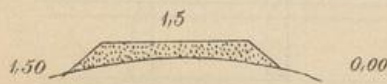
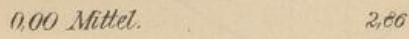
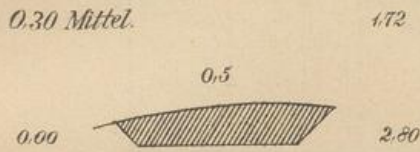
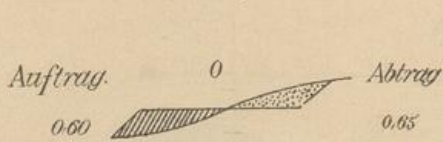
Station	Länge der Station	Flächeninhalt		Cubikinhalte	
		Auftrag	Abtrag	Auftrag	Abtrag
0-0,5	50	0,30	1,72	15,0	86,0
0,5-1	50	0,00	2,86		143,0
1-1,5	50	0,75	1,46	37,5	73,0
1,5-2	50	2,95	0,00	147,5	
2-2,5	50	4,65	0,00	232,5	
2,5-3	50	3,70	0,00	185,0	
3-3,5	50	1,25	1,50	62,5	75,0
In den folgenden 2 Stationen, deren Profile nebenstehend nicht mehr dargestellt sind, folgen:					266,0
Hierzu wegen Auflockerung $5\frac{2}{3}$				680,0	643,0
					32,5
					675,5

Mithin werden auf der Strecke von 0 bis 4,5 die Aufträge annähernd durch die Abträge gedeckt.

Fig. 137.



Querprofile.



etc.

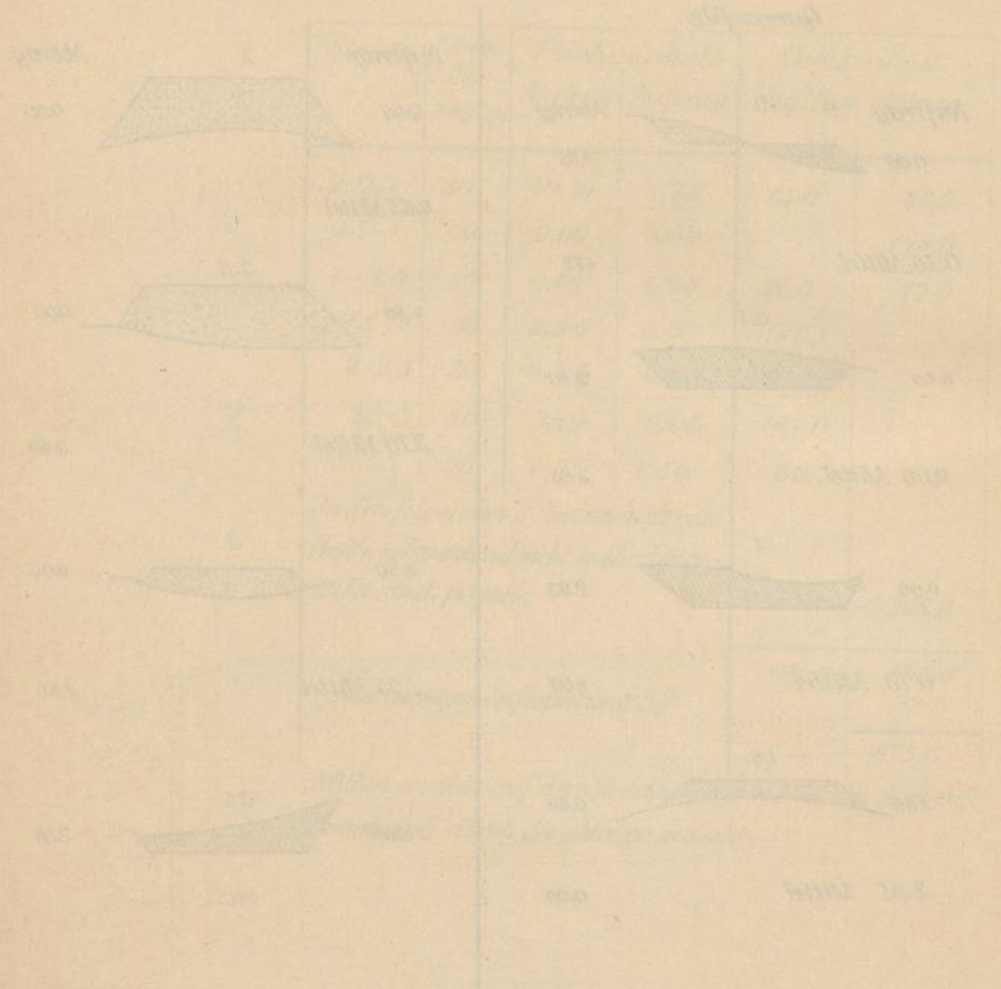
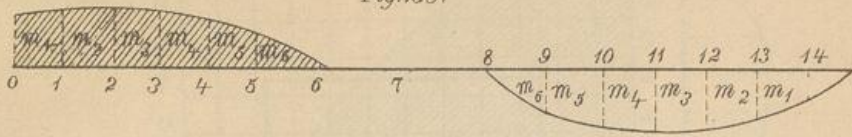


Fig. 138.



138a.

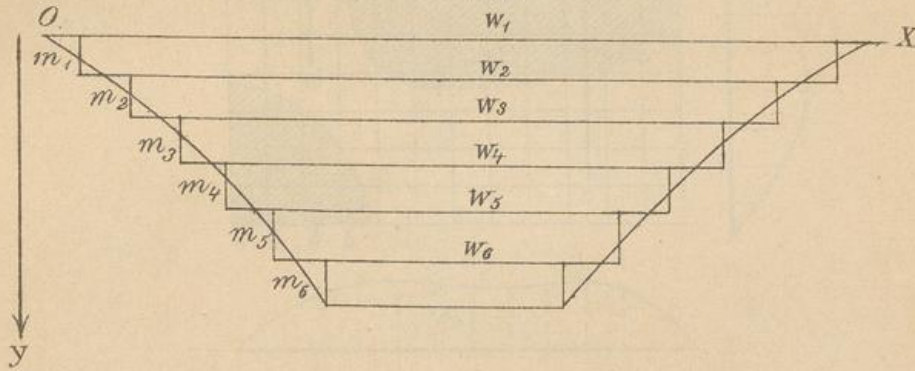


Fig. 139.

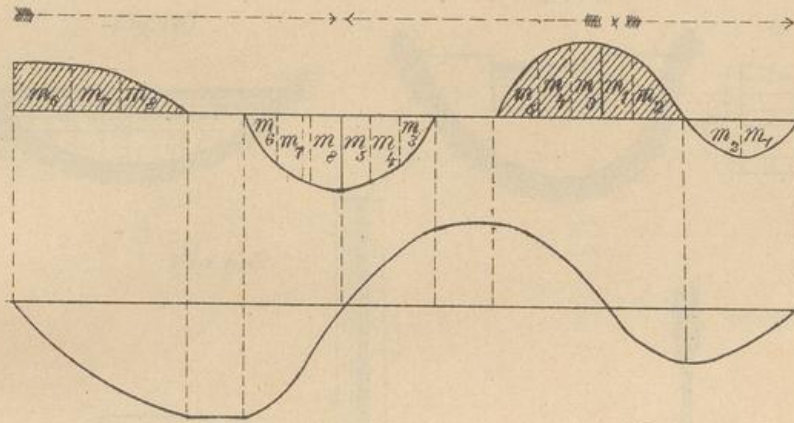


Fig. 140.

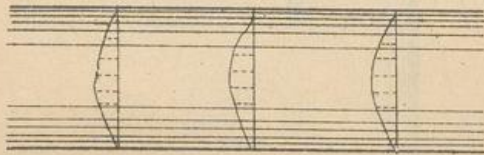


Fig. 141.

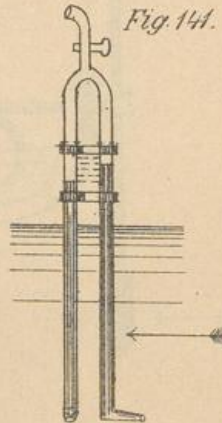


Fig. 128

Fig. 129

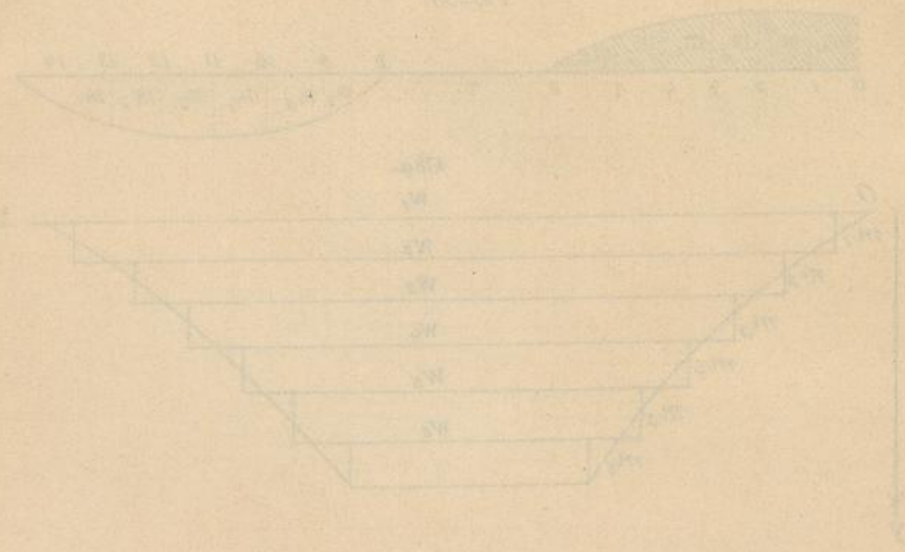


Fig. 130

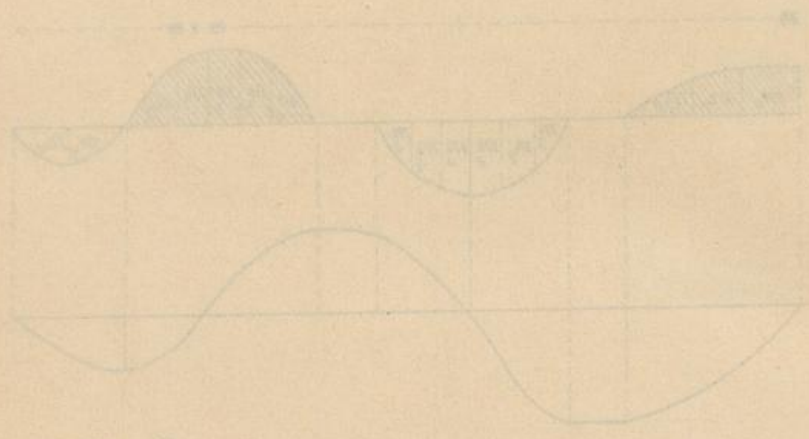


Fig. 131



Fig. 132



Fig. 142

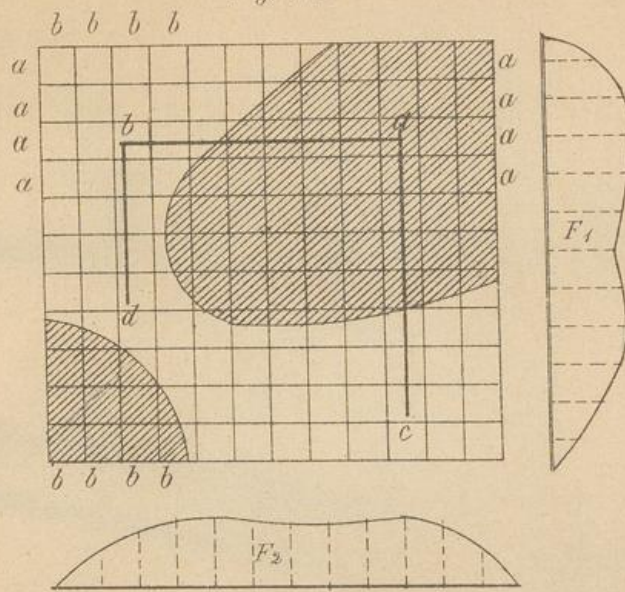


Fig. 143.

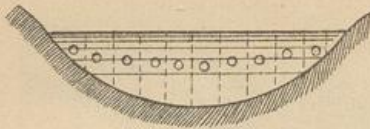


Fig. 144.

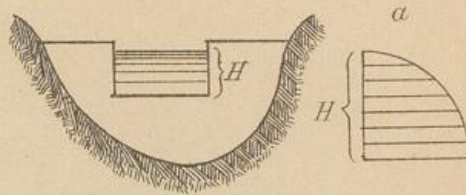


Fig. 145.

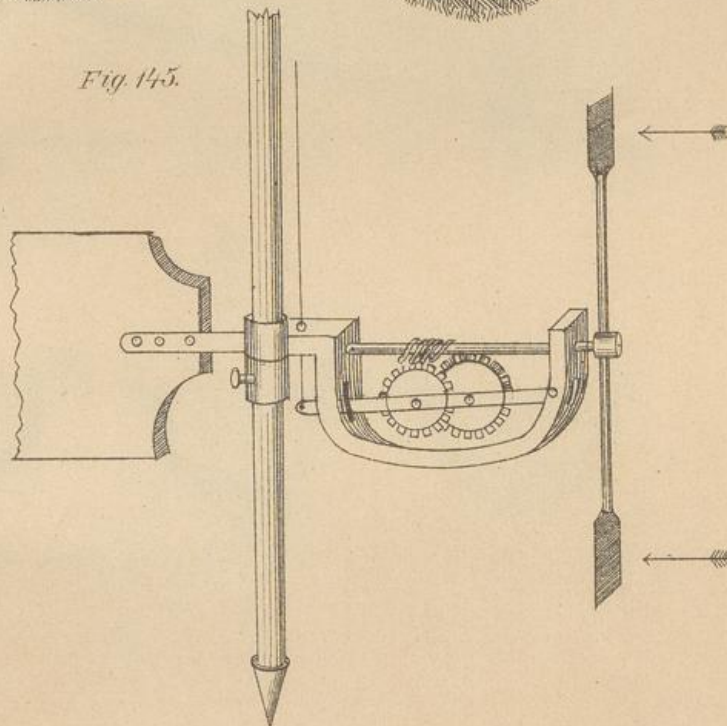


Fig. 1

Fig. 2

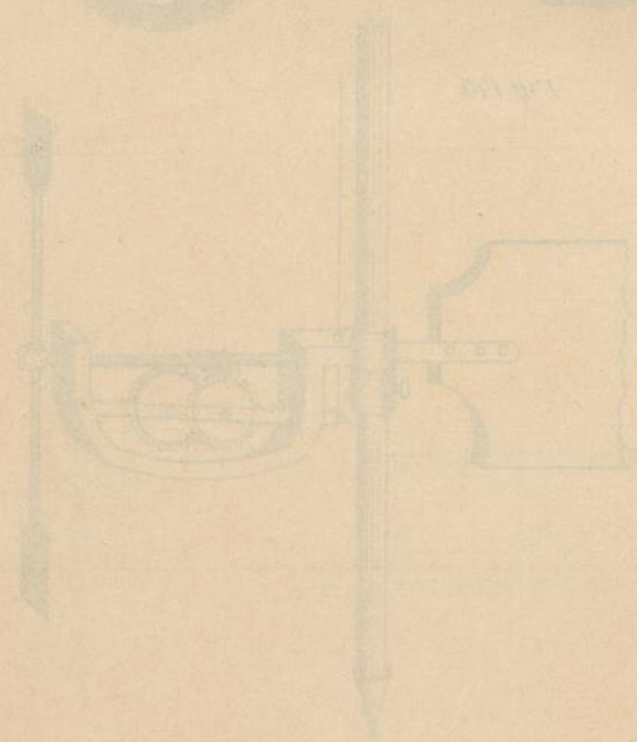
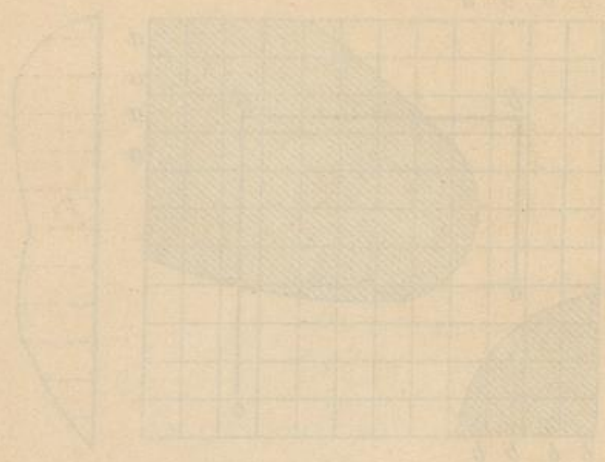


Fig. 146.

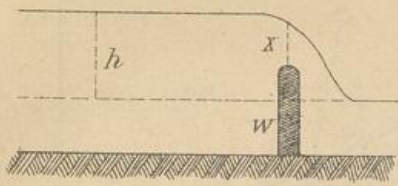


Fig. 147.

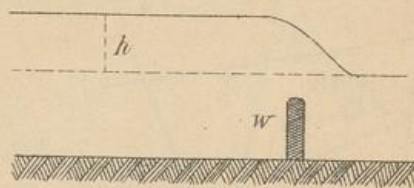


Fig. 148.

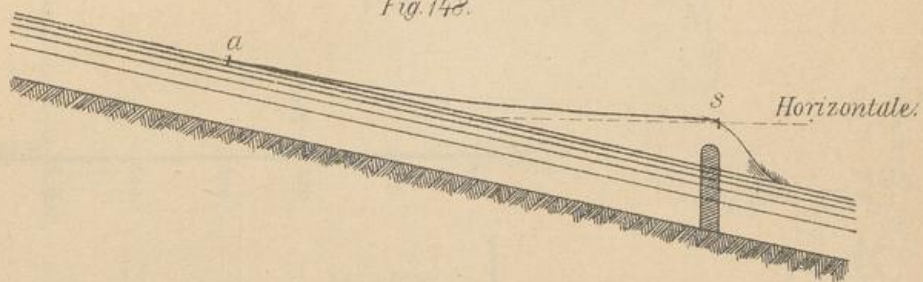


Fig. 149.

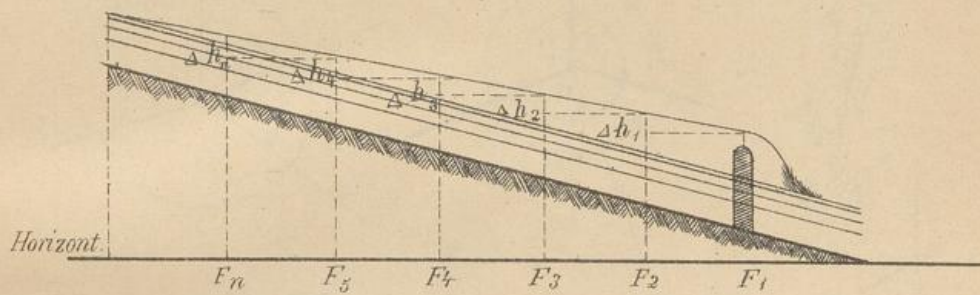
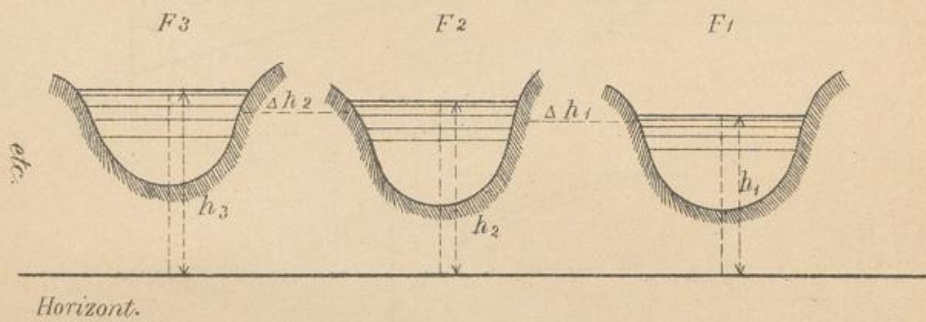


Fig. 150.



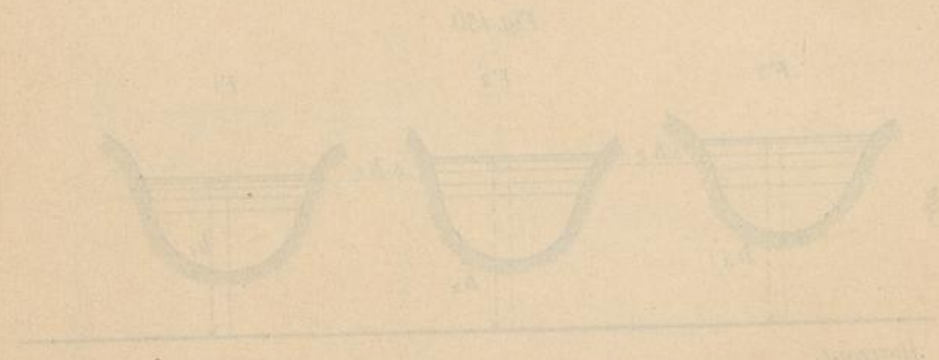
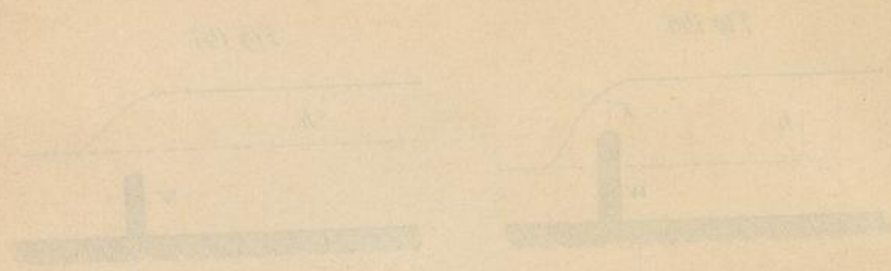


Fig 151<sup>a</sup>-157.

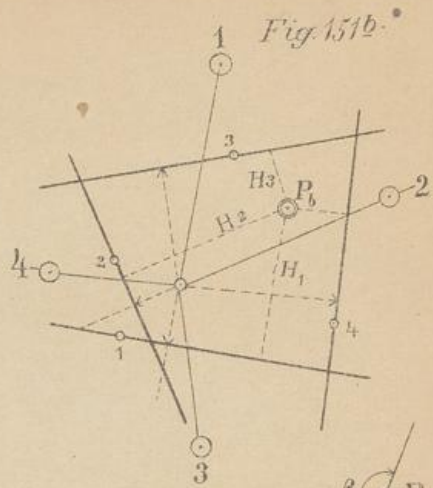
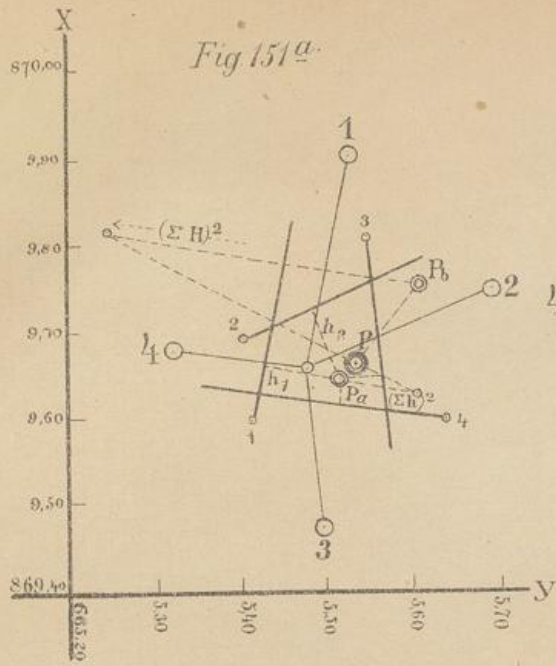


Fig 154.

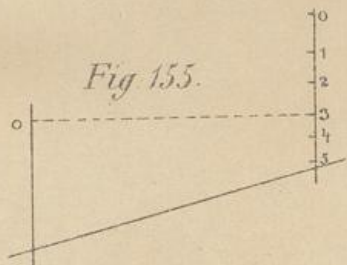
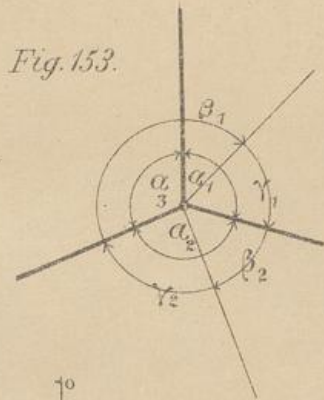
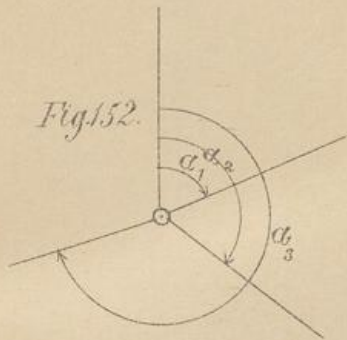
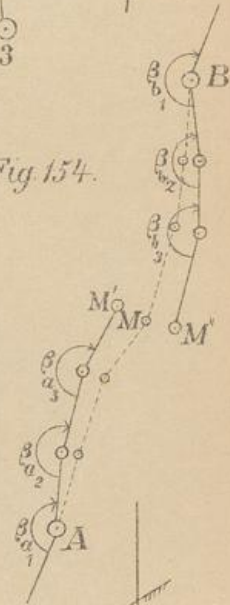


Fig 156.

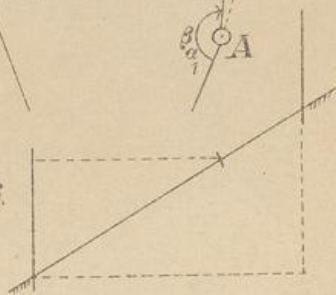
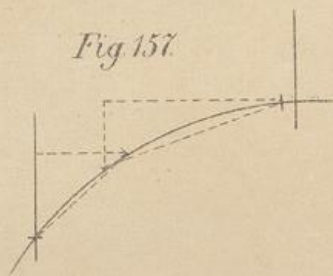
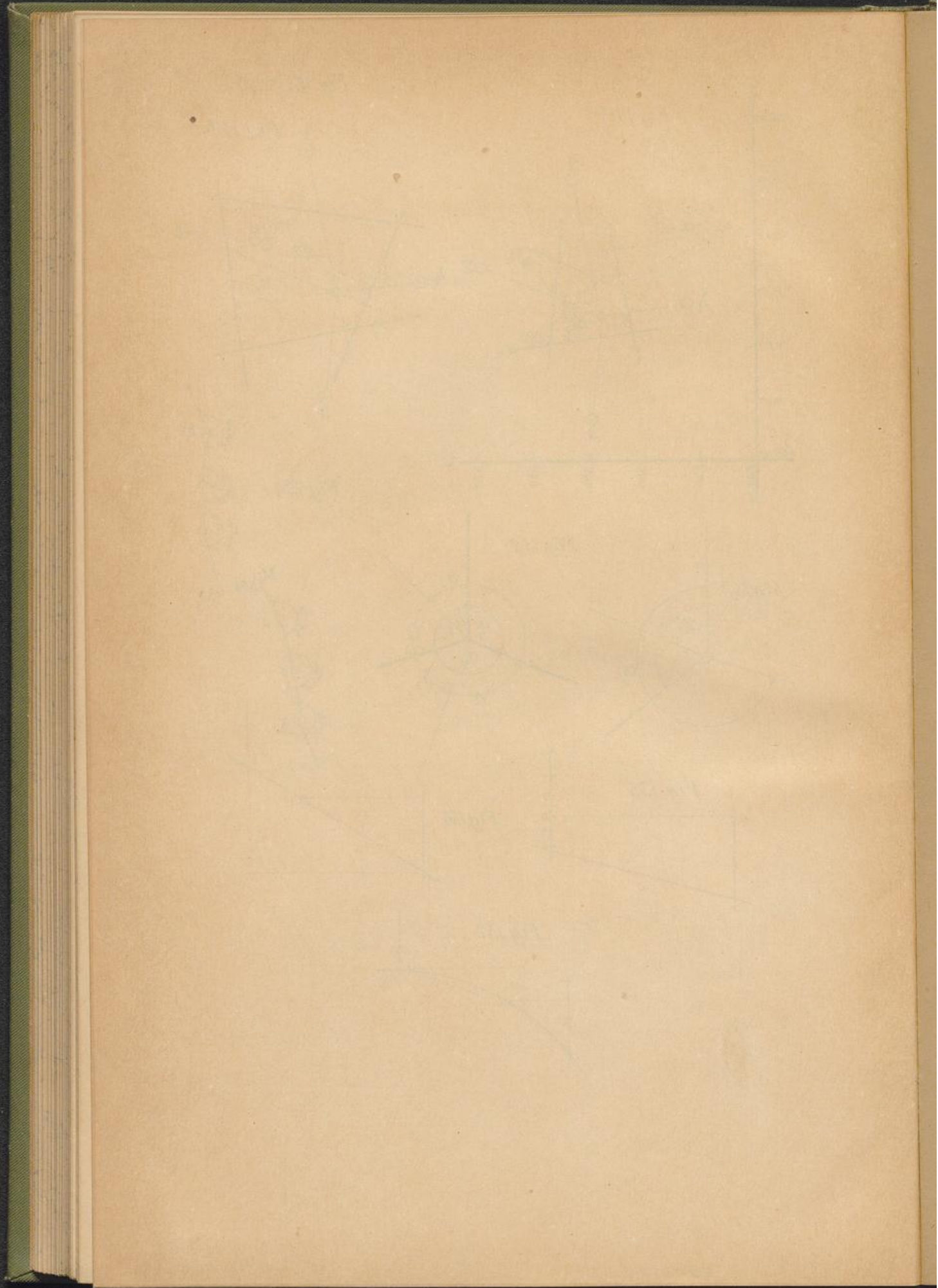
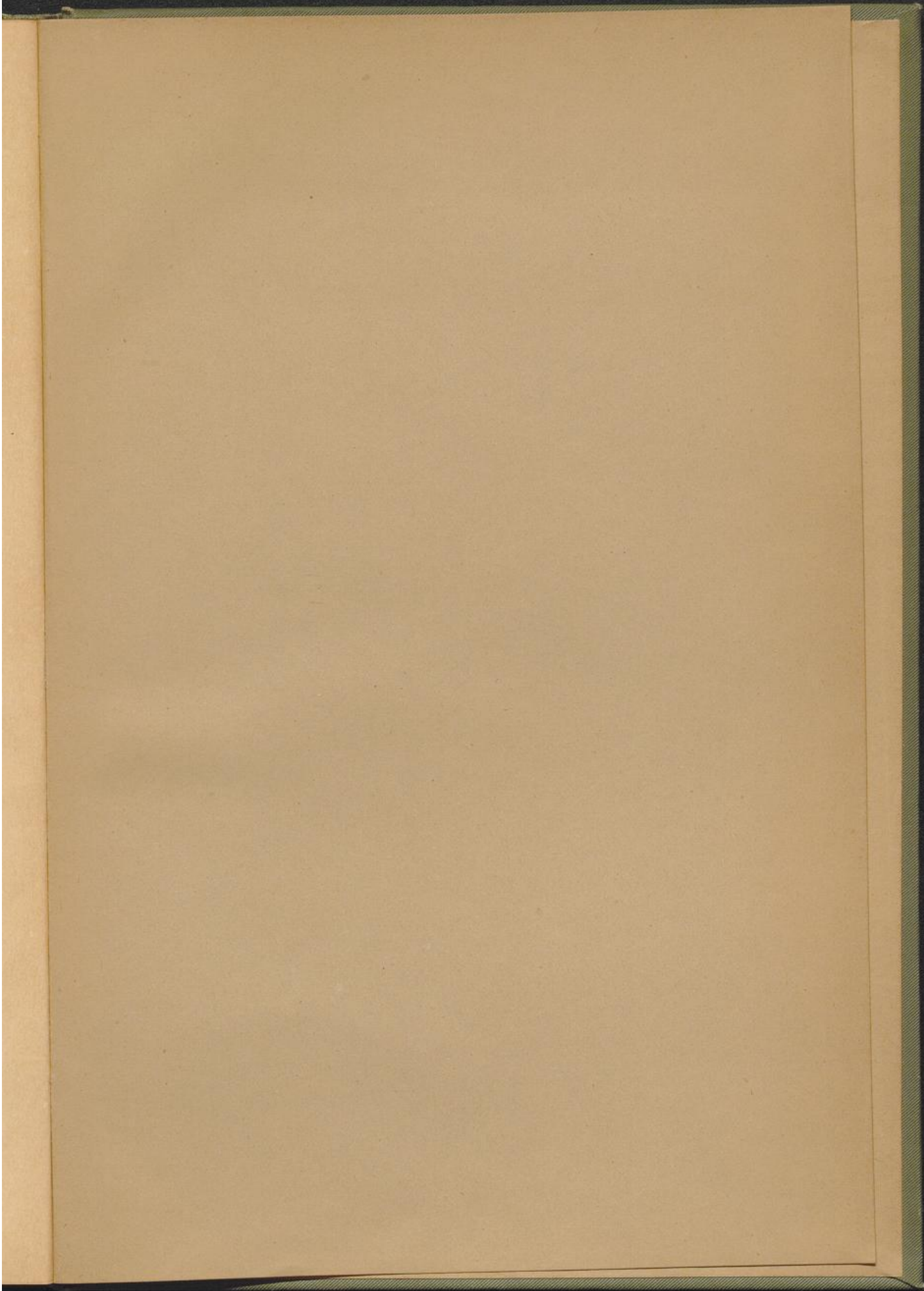
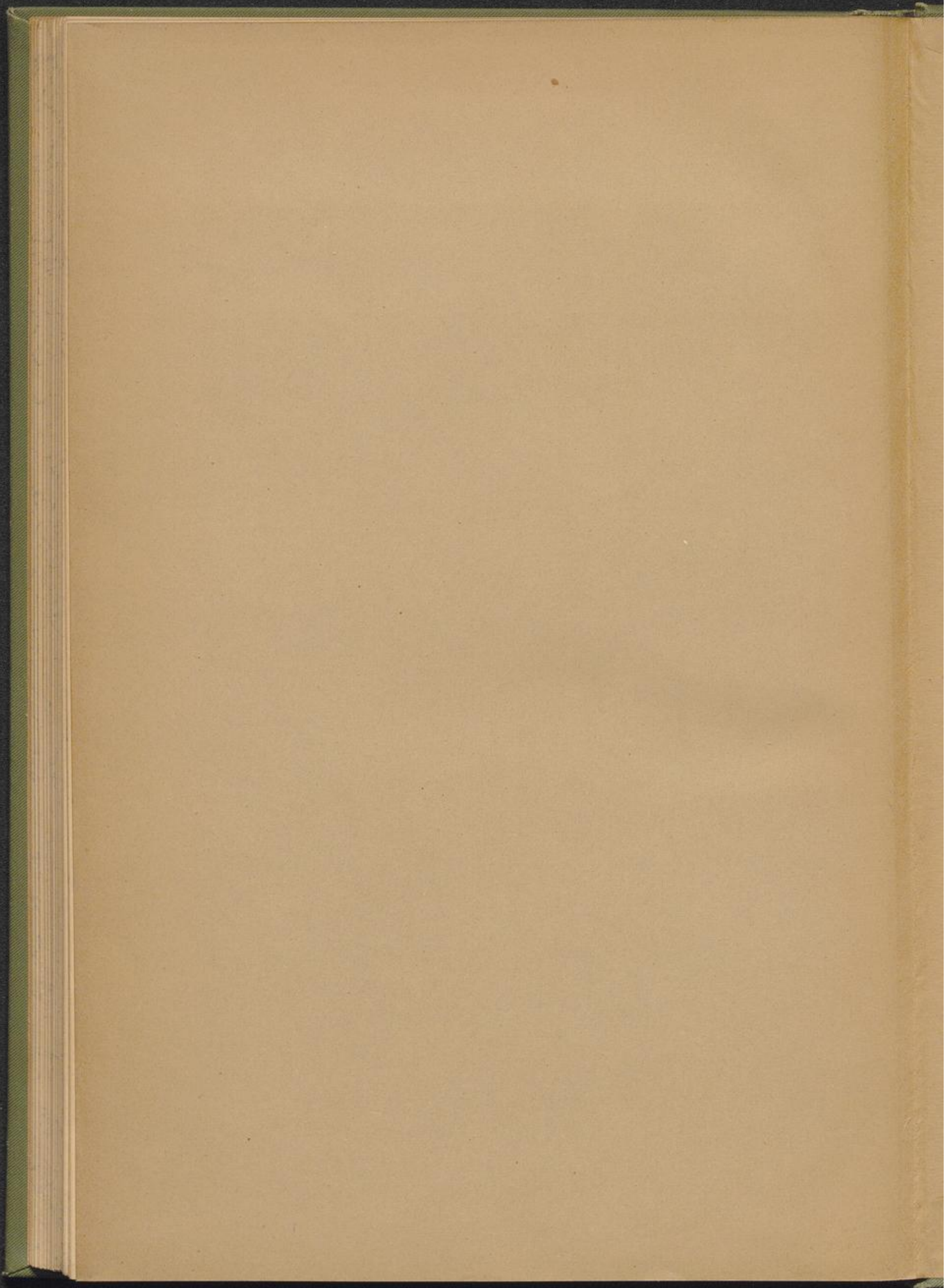


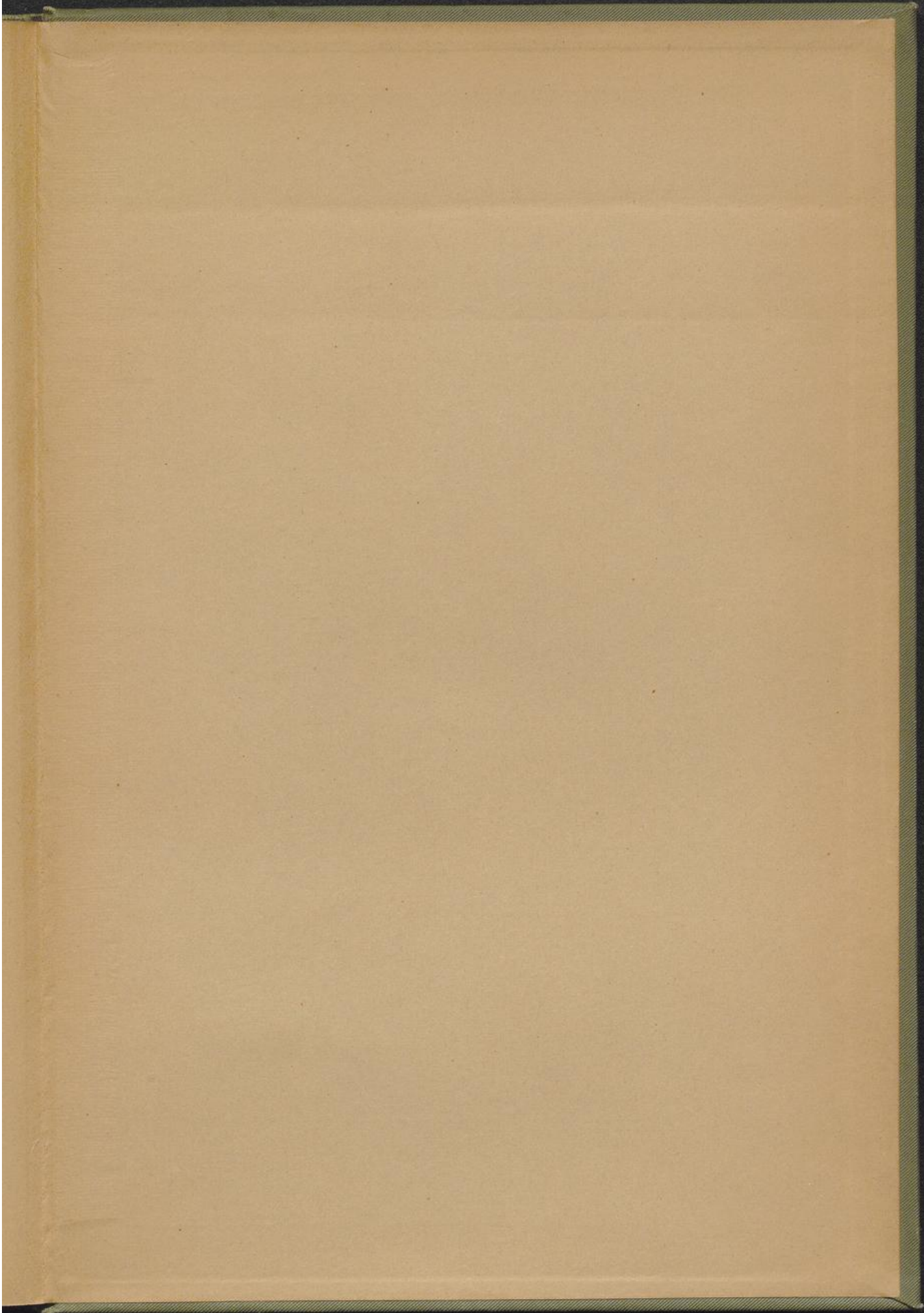
Fig 157.

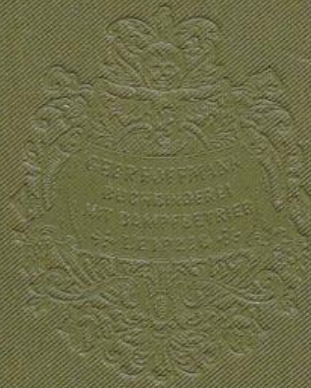












  
GHP : 03 M22951

9

P  
03



e, Niedere Geodäsie.

999

BRITZ