Die Lehre von der Beleuchtung und Schattierung

Delabar, Gangolf

Freiburg im Breisgau [u.a.], 1893

a) Beleuchtung ebener Flächen

urn:nbn:de:hbz:466:1-78623

letztern gleichgemacht werden. Bei dieser Übertragung hat man nur darauf zu sehen, daß die relative Lage der Aufrißisophengen in Bezug auf die vertikale Projektion c′ l′ der Lichtrichtung dieselbe bleibe wie die der Grundrißisophengen in Bezug auf die horizontale Projektion c l der Lichtrichtung*).

IV.

Übungsbeispiele.

(Fig. 50—60, Blatt 11—16.)

126. Die in den beiden vorigen Abschnitten (II und III) behandelten Beleuchtungskonstruktionen bilden die Grundlage sowohl der einfachen (wahren) als der zusammengesetzten (scheinbaren) Beleuchtungs- und Schattenlehre. Damit ist man nun auch im stande, die Beleuchtung und Schattierung der verschiedenen übrigen Flächen zu bestimmen. Zur Übung sollen nun noch eine Anzahl verschiedener Beispiele sowohl ebener als krummer Flächen nach der einfach geometrischen oder wahren Beleuchtung besonders behandelt werden.

a) Beleuchtung ebener Flächen.

(Fig. 50—52, Blatt 11.)

127. Aufgabe. Es sind die Projektionen eines regulären senkrechten fünfseitigen Prismas, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben, man soll die Beleuchtungsintensität aller einschließenden ebenen Flächen bestimmen, Fig. 50.

Auflösung.

Sind ABCDE, $a'_1\, b'_1\, c'_1\, d'_1\, e'_1\, a'_2\, b'_2\, c'_2\, d'_2\, e'_2$ die Projektionen des gegebenen regulären fünfseitigen, auf der H.E. senkrechten Prismas und 01, 0′1′ die

*) Es mag hier noch besonders bemerkt werden, daß die auf die angegebene Weise bestimmten Isophengen der Kugel ebenso wie die Isophoten derselben bei der wahren Beleuchtung benützt werden können, um mit Hilfe derselben bei beliebigen andern Körpern die Isophengen oder Lichtlinien der scheinbaren Beleuchtung zu bestimmen. Um z. B. bei der senkrechten Kreiscylinderfläche auf diese Weise die Isophengen zu erhalten, denke man sich der Cylinderfläche eine Kugelfläche von gleichem Radius und gleichem Mittelpunkt des Grundkreises eingeschrieben. Die Punkte, in welchen der Grundkreis der Cylinderfläche die Isophengen der Kugelfläche schneidet, sind alsdann die Isophengenpunkte der Cylinderfläche, und die Geraden, die man durch dieselben parallel zur Seite oder senkrecht zur Basis zieht, sind die verlangten Isophengen der Cylinderfläche. Auf ähnliche Weise erhält man mittels der Hilfskugel auch die Isophengen der Kegelfläche und anderer Umdrehungsflächen.

Projektionen der gegebenen Lichtrichtung, so nehme man $(0, 0')$, einen Punkt der geometrischen Achse, als Mittelpunkt und $0' e'_1 = 0f = 0g = 0h, \ldots$ als Radius einer Hilfskugel, die dem Prisma eingeschrieben ist und in den Berührungspunkten (f, f'), (g, g'), (h, h'), ... zugleich auch die Beleuchtungsintensität der ebenen Seitenflächen $(AB,\ a'_1\, a'_2\, b'_2\, b'_1)$, $(BC,\ b'_1\, b'_2\, c'_2\, c'_1)$, $(CD,\ c'_1\, c'_2\, d'_2\, d'_1)$, ... und in dem obersten Punkt $(0, i')$ die Beleuchtungsintensität der obern Grundfläche $(ABCDE,\ a'_2\, b'_2\, c'_2\, d'_2\, e'_2)$ angiebt.

Man bestimme daher auf bekannte Weise den Neigungswinkel α $(= 35^0\, 16')$, den die Lichtrichtung $(01,\ 0'1')$ mit der Achse XX bildet, indem man $1L_1 \perp 01$ und $= 1'1''$ macht und L_1 mit 0 verbindet; mache ferner $0 + 10 = 0 - 10 = 0L_1$ und teile diese Strecken je in 10 gleiche Teile, so ist damit die Beleuchtungsskale für den horizontalen Umriß der Hilfskugel und damit auch für die fünf senkrechten Seitenflächen des Prismas gefunden. Fällt man daher von $f, g, h, \ldots$ auf XX die Senkrechten ff_1, gg_1, $hh_1, \ldots$, so geben die Punkte $f_1, g_1, h_1, \ldots$ auf der Beleuchtungsskale unmittelbar die Beleuchtungsintensität der verlangten Seitenfläche des Prismas an.

Man findet auf diese Weise die Beleuchtungsintensität der Fläche $(AB,\ a'_1\, b'_1\, b'_2\, a'_2) = +0{,}72\,748$, diejenige von $(BC,\ b'_1\, c'_1\, c'_2\, b'_2) = +0{,}57\,733$ und diejenige von $(CD,\ c'_1\, d'_1\, d'_2\, c'_2) = -0{,}37\,067$, wofür man beziehungsweise die Werte $+0{,}73$, $+0{,}58$, $-0{,}37$ setzen kann.

Bestimmt man ebenso die Strecken $0' + 10' = 0' - 10' = 0'L'_1$ und teilt jede derselben in zehn gleiche Teile, so erhält man damit die Beleuchtungsskale für den vertikalen Umriß der Hilfskugel und damit auch für die obere horizontale Grundfläche des Prismas. Denkt man sich nämlich im Punkt $(0, i')$ eine parallele Ebene mit der Grundfläche $(ABCDE,\ a'_2\, b'_2\, c'_2\, d'_2\, e'_2)$ gezogen, so haben beide Flächen die gleiche Beleuchtung, und fällt man von i' auf $0'1'$ eine Senkrechte $1'i'_1$, so giebt der Punkt i'_1 auf der Skale $0' + 10'$ die verlangte Beleuchtungsintensität $+0{,}58$ an. Da dieselbe mit der Intensität der vordern senkrechten Seitenfläche oder des Punktes g übereinstimmt, so kann die letztere Konstruktion der Beleuchtungsskale in der V.E. füglich weggelassen werden.

128. Aufgabe. Es sind die Projektionen einer regulären senkrechten sechsseitigen Pyramide, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Beleuchtungsintensität aller einschließenden ebenen Flächen bestimmen Fig. 51.

Auflösung. Sind $ABDEFGC$, $a'b'd'e'f'g's'$ die Projektionen der gegebenen regulären sechsseitigen, auf der H.E. senkrechten Pyramide und $c1$, $c'1'$ die Projektionen der Lichtrichtung, so nehme man wieder (C, c') als Mittelpunkt und den senkrechten Abstand $(Cn,\ c'n')$ desselben von einer Seitenfläche $(BCD,\ b's'd')$ als Radius $(c'n'_1)$ einer Hilfskugel, die der Pyramide eingeschrieben ist und in den Berührungspunkten, wie (n, n′), zugleich auch die Beleuchtungsintensität der berührenden Seitenflächen, wie (BCD, b′s′d′) angiebt.

Um den senkrechten Abstand (Cn, c′n′) des Mittelpunktes (C, c′) von der Seitenfläche (BCD, b′s′d′) zu finden, denke man letztere in eine zur V.E. senkrechte Lage (CK_1, $s'k'_1$) gedreht. In dieser Lage projiziert sich dann die verlangte Normale vertikal als die Senkrechte $c'n'_1$ zu $s'k'_1$ und horizontal als die Parallele Cn_1 zur Achse. Denkt man sich nun die Seitenfläche wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht, so kommt der Berührungspunkt (n_1, n'_1) der Seitenfläche mit der Hilfskugel nach (n, n′) zu liegen, und fällt man von n auf cl eine Senkrechte nn_2, so giebt der Punkt n_2 auf der Beleuchtungsskale 0 — 10 die verlangte Beleuchtungsintensität, nämlich — 0,09 an. Die Beleuchtungsskale findet man aber, wie früher beim senkrechten Kreiskegel Fig. 30 gezeigt worden ist, indem man den in die H.E. umgelegten horizontalen Neigungswinkel α der Lichtrichtung (cl, c′l′) bestimmt, die Normale $c'n'_1$ des Berührungskreises (nopq ..., n'_1t') nach Ch und die Subnormale c' γ' desselben nach Ci trägt, die Senkrechten hH_1 und iJ_1 zu Cl errichtet und iJ_1 nach C0 und CH_1 nach 0 + 10 und 0 — 10 auf XX abträgt. Die Punkte 0, + 10 und — 10 sind dann die Fundamentalpunkte der verlangten Beleuchtungsskale.

Beschreibt man nun mit Cn einen Kreis, so schneidet er die Horizontalprojektionen der Normalen auf den übrigen Seitenflächen in o, p, q, r, m, und indem man von diesen Punkten auf die mit XX zusammenfallende Beleuchtungsskale Senkrechte fällt, so erhält man in den Fußpunkten o_1, p_1, q_1, r_1, m_1 unmittelbar die verlangten Beleuchtungsintensitäten der Seitenflächen (CDE, s′d′e′), (CEF, s′e′f′), (CFG, s′f′g′), (CGA, s′g′a′) und (CAB, s′a′b′), nämlich — 0,52, — 0,23, + 0,52, + 0,96 und + 0,66, wie in der Figur eingeschrieben ist. Macht man $l'_1c'L'_1 = \alpha$ und errichtet in c′ und + 10′ die Senkrechten c′u′ und + 10 v′, letztere bis l'_1 (in der Projektionsachse) verlängert, so bestimmt nach früherem (§ 79 und 80) $\gamma'u' = C0$ den Nullpunkt (0) und $u't' = c'l'_1$ die Länge der beiden Strecken 0 + 10 = 0 — 10 der Beleuchtungsskale und damit auch die Maximalpunkte + 10 und — 10 der letztern, womit die Konstruktion etwas vereinfacht ist.

129. Aufgabe. Es sind die Projektionen eines zur H.E. mit zwei Flächen parallel gestellten regulären Dodekaeders, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben, man soll die Beleuchtungsintensität aller einschließenden Seitenflächen bestimmen (Fig. 52).

Auflösung. Erwägt man, daß in der gegebenen Lage des Dodekaeders sowohl die fünf obern als die fünf untern Seitenflächen gleiche Neigung zur H.E. haben, so erhält man die Beleuchtungsintensität dieser beiden Flächengruppen, wenn man das in der vorigen Aufgabe für die reguläre, zur H.E. senkrechte Pyramide angegebene Verfahren wiederholt.

Nachdem man die Projektionen aus der gegebenen Seite (a b) des Dodekaeders verzeichnet hat*), nehme man den Punkt (c, c′) oder auch irgend einen andern Punkt der Achse (c, c′ c″) als Mittelpunkt und einen beliebigen Abstand, z. B. c b, als Radius einer Hilfskugel an, bestimme an dieselbe eine Berührungsebene parallel mit einer der obern schiefen Seitenflächen und ebenso eine Berührungsebene parallel mit einer der untern schiefen Seitenflächen und zugleich die entsprechende Beleuchtungsintensität dieser beiden Berührungsebenen, so ist damit auch die Beleuchtungsintensität der ihnen parallelen Seitenflächen und damit auch die der übrigen gleichgeneigten Seitenflächen bestimmt.

Zur Ausführung dieser Konstruktion suche man vor allem den horizontalen Neigungswinkel α der Lichtrichtung (l, l′) in der horizontalen Umlegung mittels des rechtwinkligen Dreiecks $l c L_1$, worin $l L_1 \perp c l$ und $= l' l''$ und $\measuredangle\, l c L_1 = \alpha\ (= 35^0 16')$ ist, sowie den horizontalen Neigungswinkel β, welchen sowohl die obern als die untern schiefen Seitenflächen mit der H.E. bilden, mittels des rechtwinkligen Dreiecks $h k h_1$, worin $h h_1 \perp h k$ und $k h_1 = k q$ und $\measuredangle\, h k h_1 = \beta$, der verlangte Neigungswinkel, ist.

Wäre nun eine der Seitenflächen senkrecht zur V.E., so müßte sie sich vertikal als Gerade parallel zu $y' z'$, respektive parallel zu $y'' z''$ projizieren, wenn man den horizontalen Neigungswinkel dieser Geraden gleich β macht, und ihre Beleuchtungsintensität wäre bestimmt durch den Punkt (u, u′), resp. (u, u″), worin die damit parallelen und zur V.E. senkrechten Ebenen $v' w'$, resp. $v'' w''$ die Hilfskugel berühren. Da nun aber die genannten Seitenflächen mit diesen Berührungsebenen gleiche Neigung haben, so werden sie auch die Hilfskugel in Punkten desselben, durch (u, u′), resp. (u, u″) gehenden Parallelkreises berühren. Beschreibt man daher mit c u einen Hilfskreis, so wird derselbe die Horizontalprojektion der zugehörigen Normalen in $u_1, u_2, \ldots$ resp. in $u_3, u_4, \ldots$, durchschneiden, welches die Horizontalprojektionen der erwähnten Berührungspunkte sind, und, in die V.E. gebracht, nach $u_1, u_2, \ldots$, resp. nach $u'_3\ u'_4 \ldots$, zu liegen kommen.

Macht man nun noch $\measuredangle\, l'_1 c' L'_1 = \alpha\ (= 35^0 16')$ gleich dem parallel zur V.E. gedrehten horizontalen Neigungswinkel der Lichtrichtung, zieht $\delta' \varepsilon'$ und $c' r'$ in δ' und c' senkrecht zu $c' \delta'$ und trägt $\gamma' r'$ nach c o, resp. $c_1 o_1$ und $r' \rho' = c' \rho''$ nach $0 + 10$ und $0 - 10$, resp. nach $0_1 + 10_1$ und $0_1 - 10_1$, so sind $0, + 10$ und $- 10$, resp. $0_1, + 10_1$ und $- 10_1$ die Fundamentalpunkte der Beleuchtungsskalen für die obern, resp. untern Seitenflächen. Fällt man dann noch von den Punkten $u_1, u_2, \ldots$, resp. $u_3, u_4, \ldots$ Senkrechten auf die zugehörigen Beleuchtungsskalen, so geben deren Fußpunkte $u_{\mathrm{I}}, u_{\mathrm{II}}, \ldots$, unmittelbar die Beleuchtungsintensitäten $- 0{,}2$, $+ 0{,}66$, …, resp. $- 0{,}27$, $+ 0{,}45$, … der entsprechenden Seitenflächen (p o s t, p′ o′ s′ t′),

*) Siehe 2. Heft unserer „Anleitung“, § 154, Fig. 68.

(onmhs, o'n'm'h's'),..., resp. (abtsh, a'b't's'h'), (afgmh, a'f'g'm'h'), . . . an.

Um endlich auch noch die Beleuchtungsintensität der obern Seitenfläche des Dodekaeders zu finden, verfahre man wie im Aufriß der Fig. 50 angegeben ist, d. h. man bestimme die Beleuchtungsskale c' + 10, c' — 10 und ziehe von i' darauf eine Senkrechte $i'i'_1$, so giebt der Fußpunkt i'_1 derselben die verlangte Beleuchtungsintensität + 0,58.

b) Beleuchtung verschiedener krummer Flächen.

(Fig. 53—60, Blatt 12—16.)

130. Aufgabe. Es sind die Projektionen eines zur H.E. senkrecht stehenden hohlen Kreiscylinders, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten oder Lichtintensitätslinien der innern Mantelfläche des hintern hohlen Halbcylinders bestimmen (Fig. 53).

Auflösung. Denkt man sich die innere Mantelfläche (fkg, $f'_1 f'_2 g'_2 g'_1$) zur vollen Kreiscylinderfläche mit der Normaldirektrix afkga ergänzt und letztere wie in Fig. 25 (§ 60) eingeteilt, die Maximalpunkte + 10 und — 10 jetzt aber miteinander verwechselt, so entsprechen die Teilpunkte der hintern Strecke 0 + 10 der Beleuchtungsskale den Isophoten der direkten Beleuchtung und die der vordern 0 — 10 den Isophoten der indirekten oder Reflexbeleuchtung.

Man zeichne also vor allem den horizontalen Neigungwinkel α der Lichtrichtung in der horizontalen Umlegung und mache 0 — 10 = 0 + 10 = 0 A_1, teile diese Strecken in je zehn gleiche Teile und errichte in den Teilpunkten derselben zur Richtungslinie XX der Beleuchtungsskale Senkrechte, welche den Umfang des Grundkreises oder der Normaldirektrix in den entsprechenden Isophotenpunkten schneiden, womit die verlangten Isophoten selbst bestimmt sind, indem man dieselben vertikal zur Achse projiziert. Die Grenzisophoten entsprechen, wie man leicht findet, der Beleuchtungsintensität +0,58 und —0,58. Die gleiche Beleuchtungsintensität haben auch die Schnittflächen fkginh, $h'_1 h'_2 f'_2 f'_1$ und $g'_1 g'_2 i'_2 i'_1$.

In unserer Figur haben wir noch den Schlagschatten $k'_1 k' q' r'$, welchen die Kante (f, $f'_1 f'_2$) und der obere Kreisbogen (fpr, f'p'r') auf die innere Mantelfläche des hohlen Halbcylinders werfen, konstruiert. Dazu denke man sich durch die Punkte wie (f, f'_2), (p, p'_2), . . . Lichtstrahlen, parallel (l, l'), gezogen und ihre Durchschnittspunkte (k, k'), (q, q'), . . . bestimmt und miteinander stetig verbunden.

131. Aufgabe. Es sind die Projektionen eines Drehungsparaboloids, dessen Drehachse zur H.E. senkrecht steht, sowie die Projektionen der Lichtrichtung gegeben; man soll die Isophoten oder die Linien gleicher Lichtintensität bestimmen (Fig. 54).

Auflösung. Es sei $f'_1 s' \varphi'$ der vertikale Umriß und AFBφA der Grundriß des Paraboloids, o' sei der Brennpunkt der gegebenen Hauptparabel $f'_1 s' \varphi'$ und